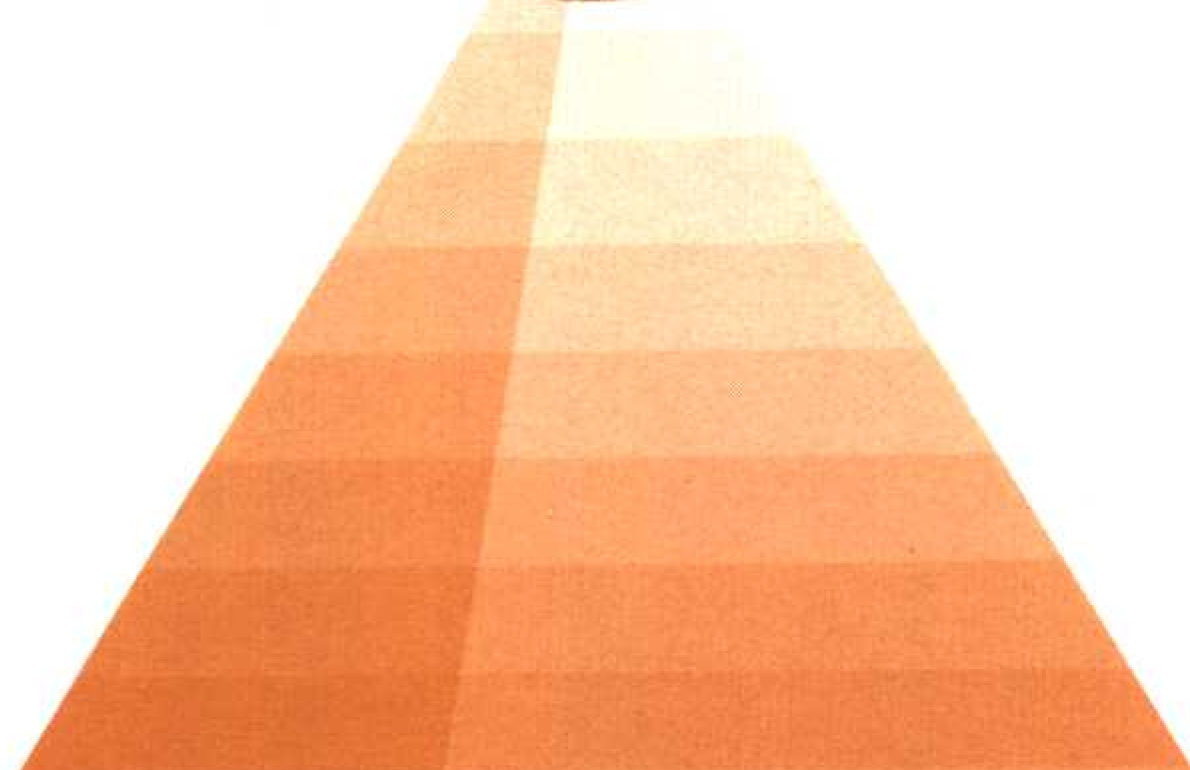
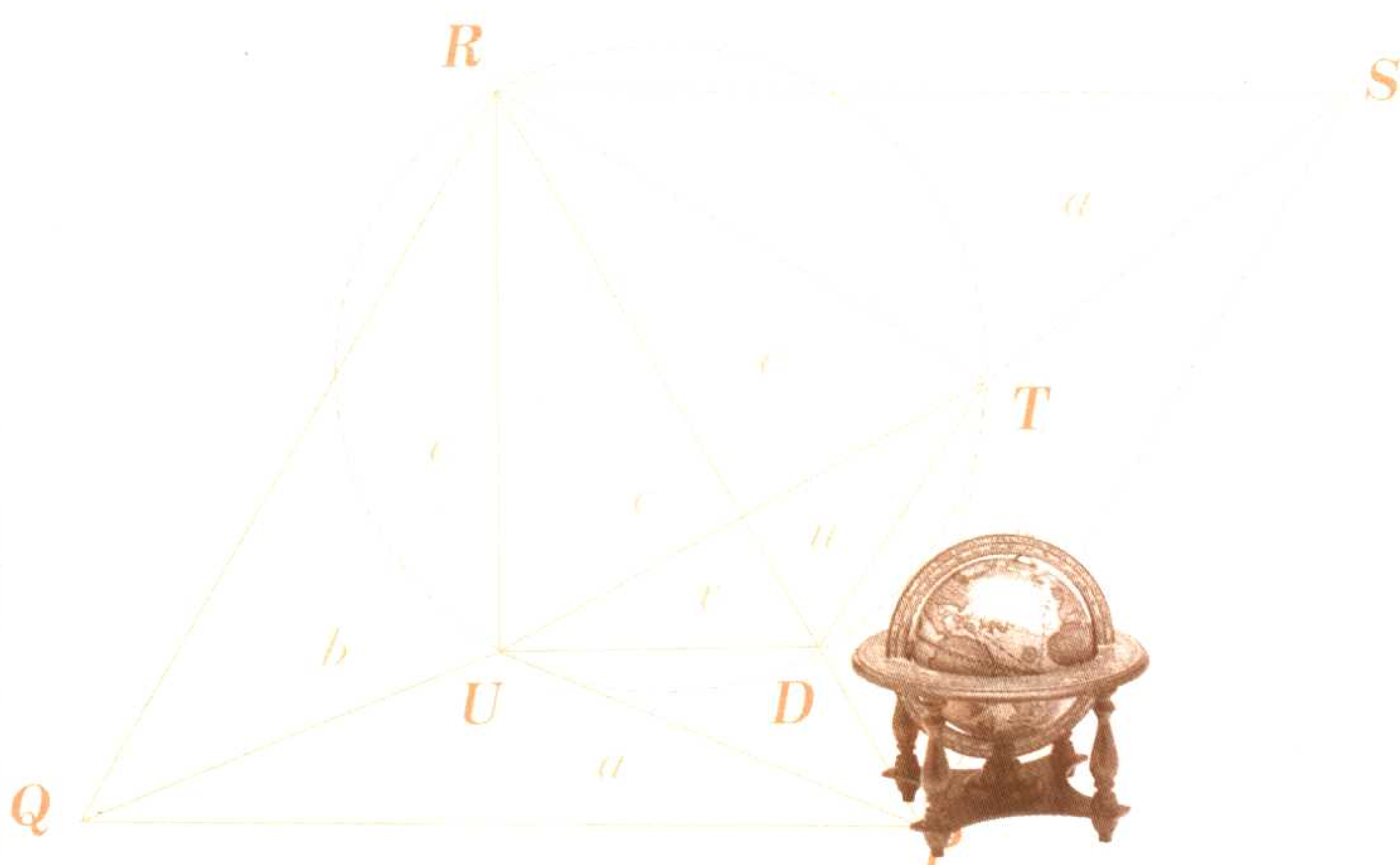




世界数学奥林匹克解题大辞典



中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系




The 41st International Mathematical Olympiad
IMO 2000 KOREA

序　言



王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视,现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特、新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林,就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近10年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.



目 录

上篇 平面几何

中篇 立体几何

下篇　解析几何

上篇　平面几何

第一章　线段、角或弧相等

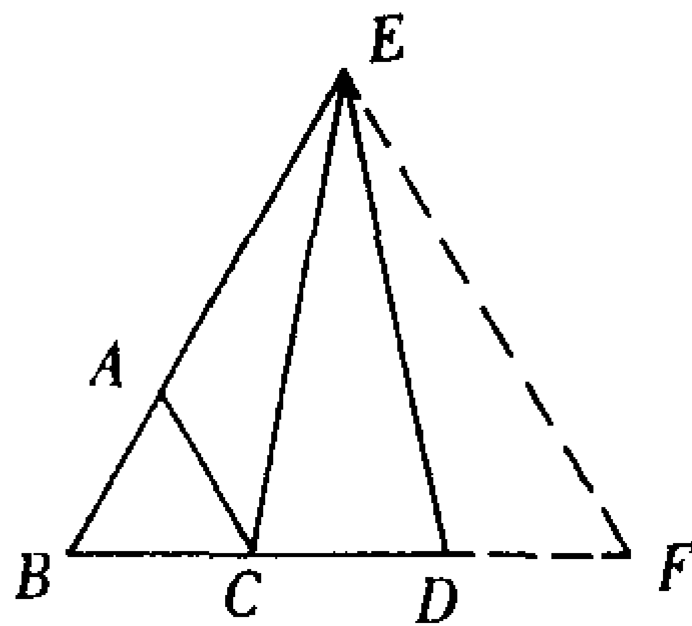
(一)线段相等

1. 三角形中的线段相等问题

1·1　已知:等边$\triangle ABC$,延长BC到D,延长BA到E,且使$AE=BD$,连CE、DE.求证:$CE=DE$.

(中国北京市数学竞赛,1982年)

[证]　在BD延长线上取点F使$DF=BC$(如图).



则　$BE=BA+AE=BC+BD=DF+BD=BF$.

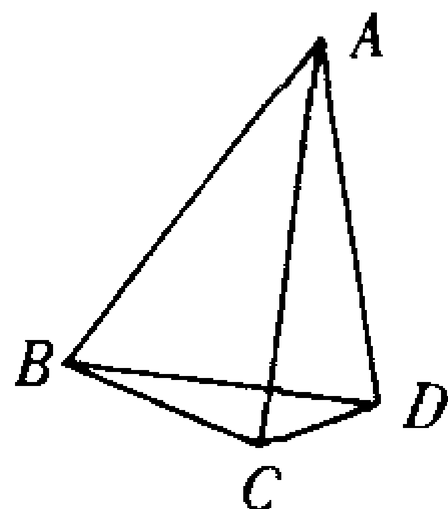
又　$\angle B=60°$,知$\triangle BEF$为等边三角形.

$\therefore$　$\angle F=\angle B=60°$,且$EF=BE$.

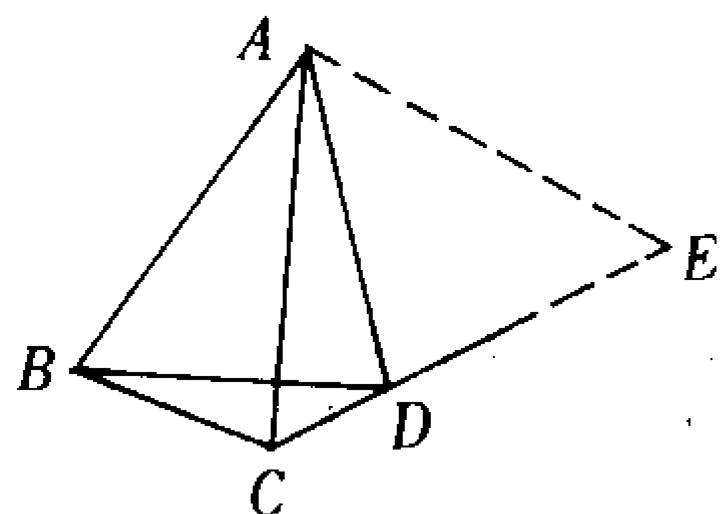
在$\triangle BCE$与$\triangle FDE$中,$BC=DF$,$\angle B=\angle F$,又$BE=EF$,则$\triangle BCE\cong\triangle FDE$.

$\therefore$　$CE=DE$.

1·2　如图,已知:$\angle ABD=\angle ACD=60°$,$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$.求证:$\triangle ABC$是等腰三角形.



(中国湖北省武汉市数学竞赛,1990年)



[证]　延长 CD 到 E，使 $DE=BD$，连接 AE.

∵　$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$，

∴　AD 平分 $\angle BDE$.

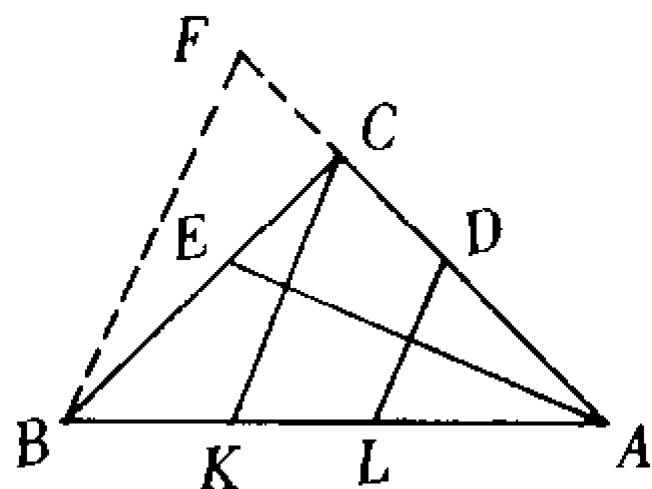
∴　$\triangle ABD \cong \triangle AED$.

则有　$\angle ABD=\angle E=60°$，$AB=AE$.

在 $\triangle ACE$ 中，$\angle ACE=\angle E=60°$，则 $\triangle ACE$ 是等边三角形，所以 $AB=AC$，即　$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

1·3　在等腰直角三角形 ABC 的两直角边 CA、CB 上分别取点 D、E，使 $CD=CE$，从点 C、D 引直线 AE 的垂线，这两条垂线的延长线分别交斜边 AB 于 K、L. 求证：$KL=KB$.

（第 8 届全苏数学奥林匹克，1974 年）



[证]　延长 AC 到 F，使 $CF=CE$. 连 BF，则 $\triangle ACE \cong \triangle BCF$.

∴　$\angle FBC=\angle CAE=\angle ECK$.

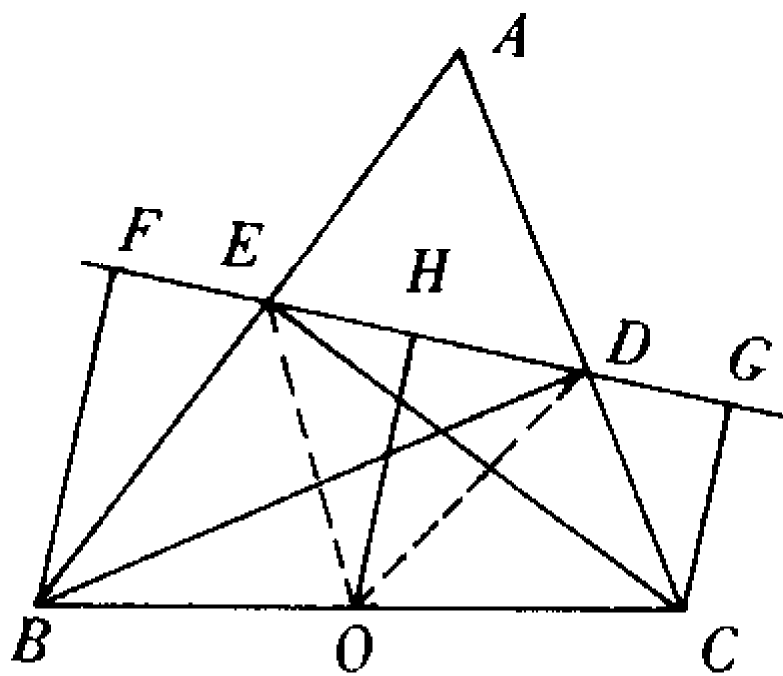
∴　$FB \parallel CK$.

又∵　$CK \parallel DL$，　∴　$FB \parallel CK \parallel DL$.

∵　$CF=CD$，　∴　$KB=KL$.

1·4　锐角 $\triangle ABC$ 中，BD 和 CE 是其相应边上的高. 分别过顶点 B 和 C 引直线 ED 的垂线 BF 和 CG，垂足为 F、G. 求证：$EF=DG$.

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）



[证]　由题设知 $\angle BEC=\angle BDC=90°$，从而

B、C、D、E 四点共圆，且 BC 中点 O 为其圆心.

过 O 作 $OH \perp DE$ 于 H，则 $EH=HD$.

又∵　$BF \parallel OH \parallel CG$，$BO=OC$，

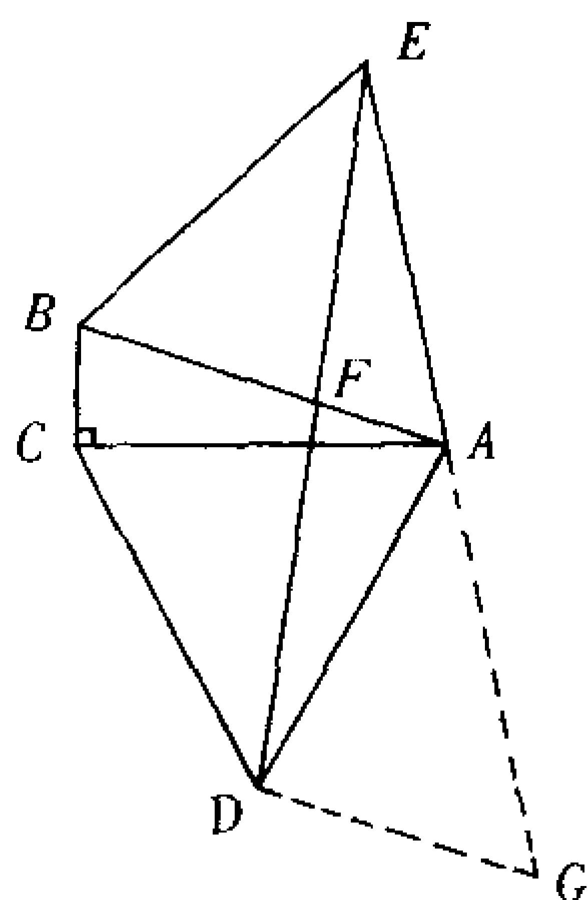
∴　$FH=HG$.

∴　$EF=FH-EH=HG-HD=DG$.

1·5　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A=30°$，分别以 AB、AC 为边在 $\triangle ABC$ 的外侧作正 $\triangle ABE$ 和正 $\triangle ACD$，且 DE 与 AB 交于 F. 求证：

$EF=FD$.

（中国北京市数学竞赛，1985年）



［证1］ 过 D 作 $DG // FA$ 交 EA 的延长线于 G.

∵ $\angle BAE=60°$，$\angle CAD=60°$，

$\angle BAC=30°$，

∴ $\angle DAG=30°$.

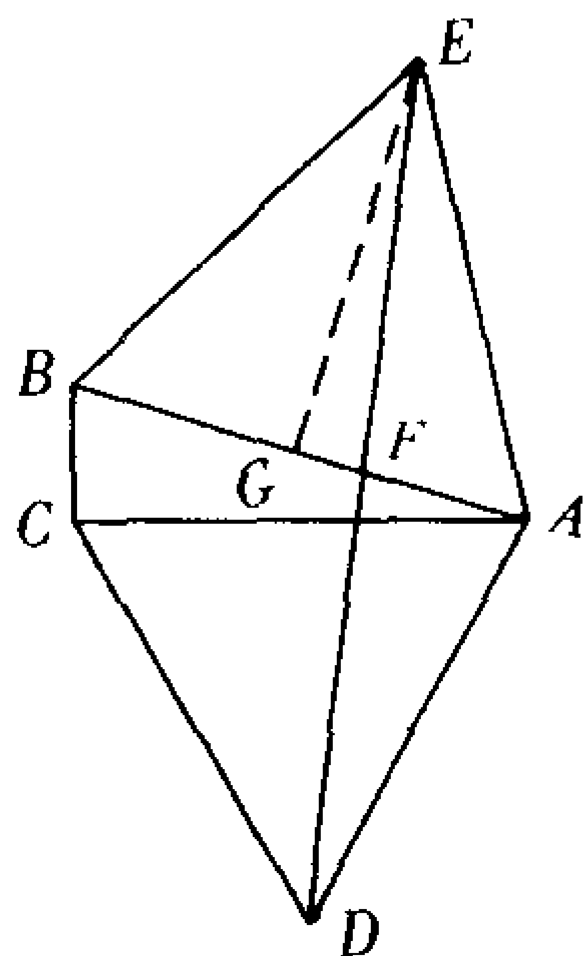
∵ $\angle BAD=30°+60°=90°$，且 $DG // FA$.

∴ $\angle ADG=90°$.

又∵ $AD=AC$， ∴ $\triangle ABC \cong \triangle AGD$.

∴ $AG=AB=AE$， ∴ A 是 EG 中点.

又∵ $AF // DG$， ∴ $EF=FD$.



［证2］ 过 E 作 $EG \perp AB$ 于 G，于是

$\triangle EBG \cong \triangle ABC$.

∴ $EG=AC=AD$.

又∵ $\angle DAF=\angle DAC+\angle CAF$

$=60°+30°=90°=\angle EGF$，

且 $\angle EFG=\angle DFA$，

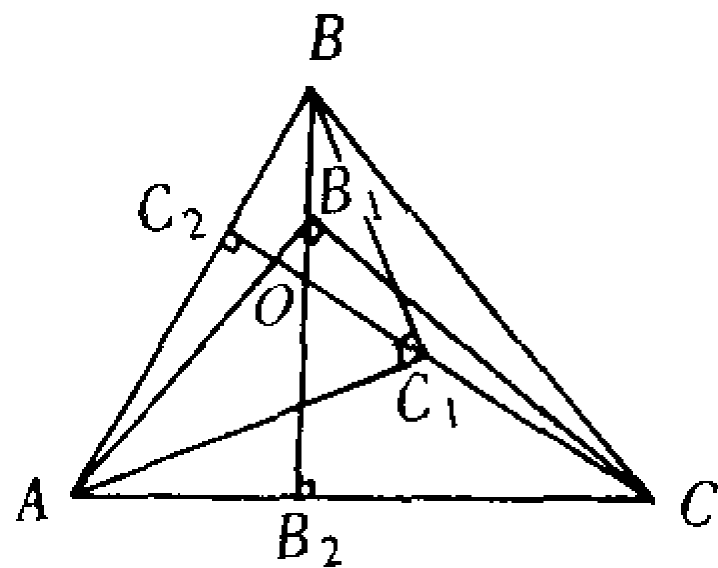
∴ $\triangle EGF \cong \triangle DAF$.

∴ $EF=FD$.

1·6 锐角$\triangle ABC$的高交于点 O. 在线段 OB 和 OC 上各取点 B_1 和 C_1，使得$\angle AB_1C=\angle AC_1B=90°$. 求证：$AB_1=AC_1$.

（美国纽约数学奥林匹克，1976年）

［证］ 如图，在直角$\triangle AB_1C$ 和直角$\triangle ABC_1$ 中，由射影定理可知



$AC_1^2=AC_2 \cdot AB$，

$AB_1^2=AB_2 \cdot AC$.

又∵ $\angle CC_2B=\angle BB_2C=90°$，

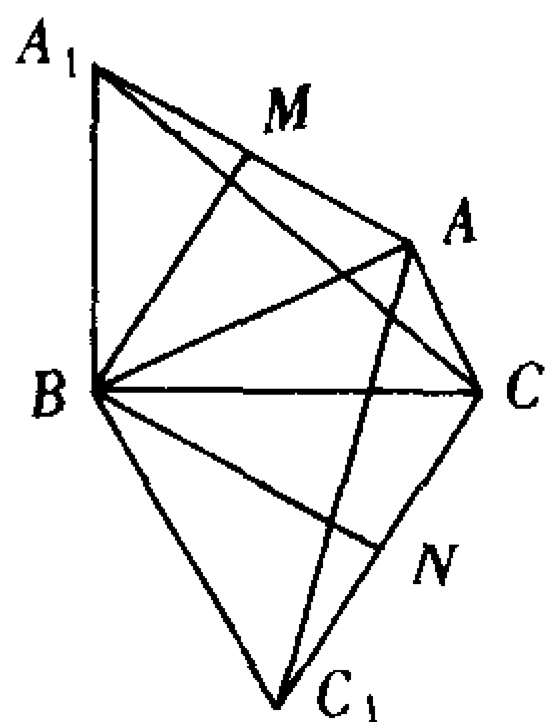
∴B, C_2, B_2, C 四点共圆，内割线定理得

$AB_2 \cdot AC=AC_2 \cdot AB$.

因此 $AC_1^2=AB_1^2$，

即 $AC_1 = AB_1$.

1·7 过$\triangle ABC$的顶点B在形外引直线BM和BN,使$\angle ABM=\angle CBN$.点A关于直线BM的对称点是A_1,点C关于直线BN的对称点是C_1.求证:$AC_1=A_1C$.



(莫斯科数学奥林匹克,1963年)

[证] 如图,依题设,

$\because\ A_1B=AB,\ BC=BC_1$

$\angle A_1BC=2\angle ABM+\angle ABC$

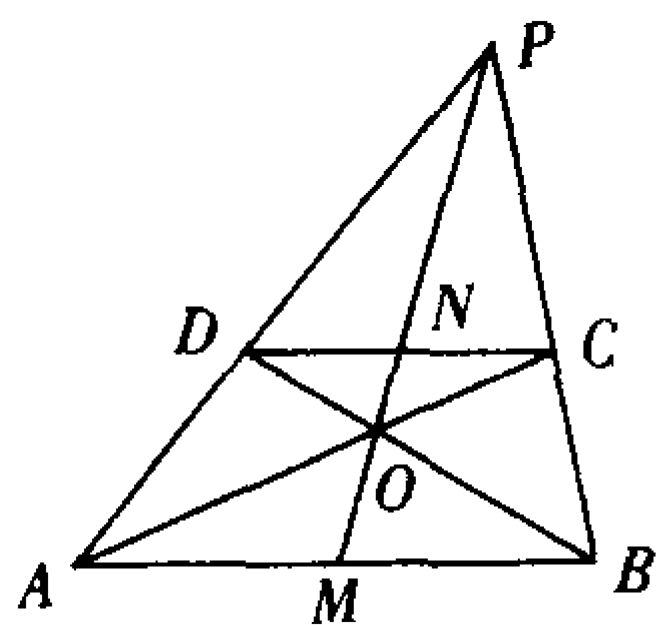
$=2\angle CBN+\angle ABC=\angle ABC_1$

$\therefore\ \triangle A_1BC\cong\triangle ABC_1$

故 $A_1C=AC_1$.

1·8 试证:经过梯形的对角线的交点以及两腰延长线的交点的直线平分两底.

(基辅数学奥林匹克,1954年)



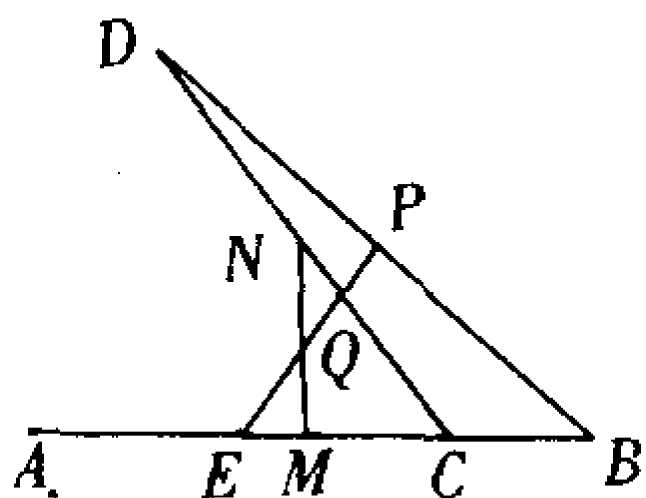
[证] 设AB和CD分别是梯形$ABCD$的下底和上底.O是对角线的交点,P是两腰的延长线的交点.M和N是直线PO与两底AB和CD的交点.如图.

$$\because\ \frac{AM}{DN}=\frac{MP}{NP}=\frac{MB}{NC},\ \frac{AM}{NC}=\frac{MO}{ON}=\frac{MB}{ND},$$

$$\therefore\ \frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC},\ \frac{AM}{MB}=\frac{NC}{DN}.$$

因此 $\left(\frac{AM}{MB}\right)^2=1$. 故 $AM=MB$.

同理可证 $DN=NC$.



1·9 如图,设线段AB的中点为M,从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD;令CD的中点为N,BD的中点为P,MN的中点为Q.求证:直线PQ平分线段AC.

(中国高中数学联赛,1978年)

[证] 设直线PQ交AC于E,连NP,因N,P分别为CD、BD的中点,故$NP\parallel CB$.

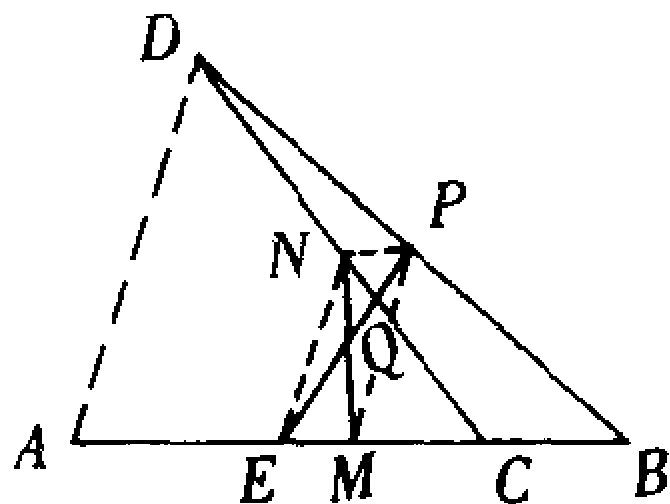
在$\triangle QNP$与$\triangle QME$中，

$NP /\!/ EM$，$QN = QM$，

故 $\triangle QNP \cong \triangle QME$，$\therefore$ $QP = QE$.

连 NE、MP，则 $EMPN$ 为平行四边形，

从而 $NE /\!/ MP$.



连 AD，在$\triangle BAD$中，M、P 分别为 AB、BD 的中点，

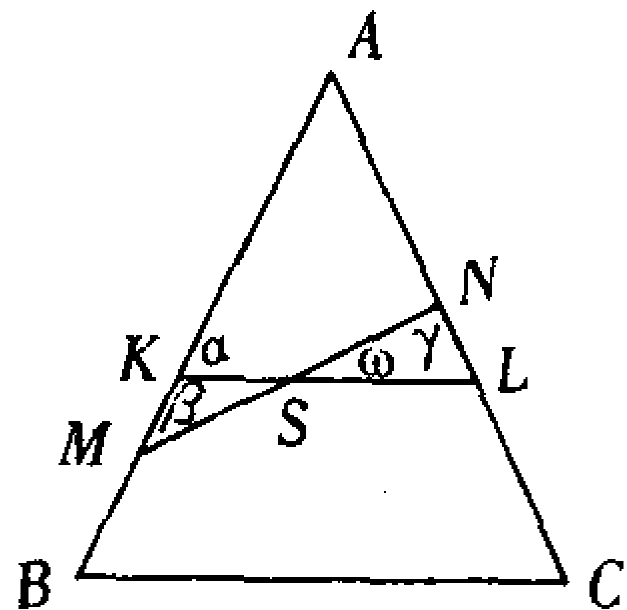
故 $MP /\!/ AD$，于是 $NE /\!/ AD$.

从而，在$\triangle ACD$中，E 为 AC 中点，即直线 PQ 平分线段 AC.

1·10 已知：线段 MN 的两个端点在一个等腰三角形的两个腰上，过 MN 的中点 S 作等腰三角形的底边平行线，交两腰于点 K 和 L. 求证：线段 MN 在三角形底边上的射影等于线段 KL.

（波兰数学奥林匹克，1956 年）

［证］ 本题只需对 MN 不平行等腰三角形底边的情形加以证明.



设 BC 为等腰$\triangle ABC$的底边，又设 $\angle AKL = \alpha$，$\angle AMN = \beta$，$\angle NSL = \omega$，$\angle MNL = \gamma$.

在$\triangle MKS$和$\triangle NLS$中，由正弦定理得

$$KS = MS \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = MS \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin\alpha}.$$

$$SL = SN \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = SN \cdot \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin\alpha} = MS \cdot \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin\alpha}.$$

$$\therefore \quad KL = KS + SL = MS \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega) + \sin(\alpha + \omega)}{\sin\alpha}$$

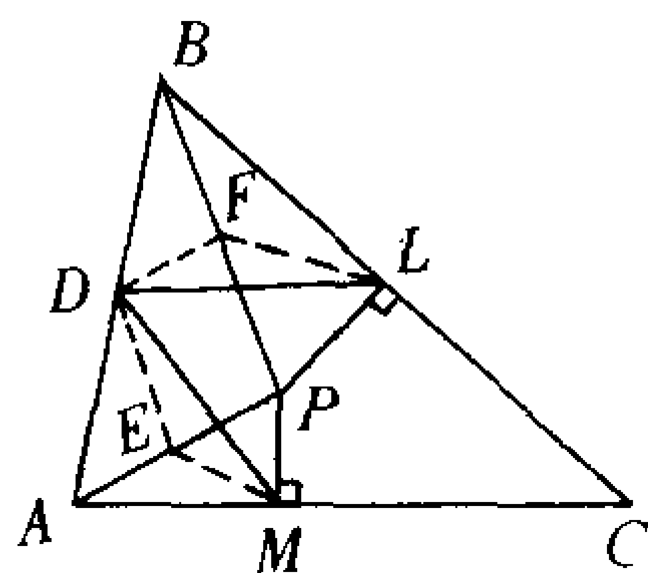
$$= MS \cdot \frac{2\sin\alpha\cos\omega}{\sin\alpha} = 2MS\cos\omega$$

$$= MN\cos\omega.$$

由于 ω 是 MN 与$\triangle ABC$的底边的夹角，所以 MN 在三角形底边上的射影等于线段 KL.

1·11 在$\triangle ABC$内部取一点 P. 在边 AC 和 BC 上各取一点 M 与 L，使得 $\angle PAC = \angle PBC$，$\angle PLC = \angle PMC = 90°$，$D$ 是边 AB 的中点，求证：$DM = DL$.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1983 年）



[证] 设 E,F 分别是 AP 和 BP 的中点.则 DE 和 DF 是 $\triangle APB$ 的中位线.

所以四边形 $DFPE$ 是平行四边形

在直角三角形 BPL 中,

$\because$ F 是斜边 PB 的中点,

$\therefore$ $FL=\frac{1}{2}PB=PF=DE$.

同理 在直角三角形 APM 中,$EM=\frac{1}{2}PA=EP=DF$.

又$\because$ $\angle PEM=2\angle EAM=2\angle FBL=\angle PEL$.

由 $DFPE$ 是平行四边形得$\angle PED=\angle PFD$.

令 $\alpha=\angle PEM+\angle PED=\angle PFL+\angle PFD$.

若 $\alpha>180°$,则取$\angle PEM+\angle PED=\angle PFL+\angle PFD=360°-\alpha$.

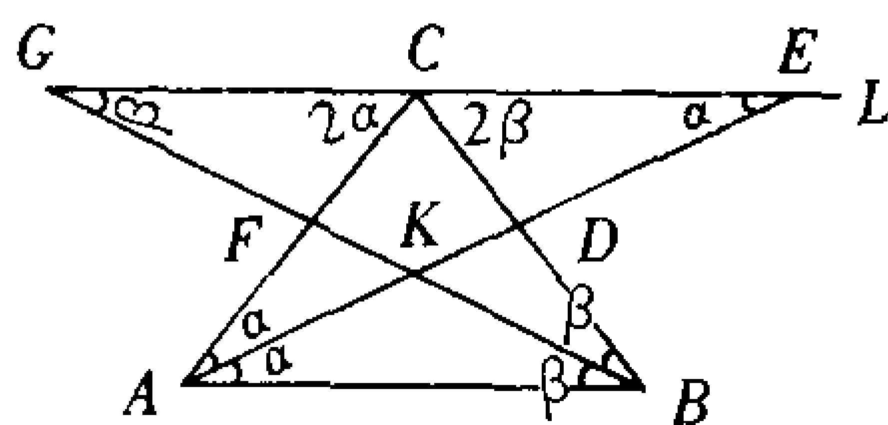
若 $\alpha=180°$,则 E 在 DM 上,F 在 DL 上,此时有 $DM=ME+DE=DF+LF=DL$.

若 $\alpha\neq180°$,则$\triangle EDM\cong\triangle FDL$.

$\therefore$ $DM=DL$.

1·12 在$\triangle ABC$ 中,设 L 是经过顶点 C 且与 AB 平行的一条直线.$\angle A$ 的平分线与 BC 边交于 D,与 L 交于 E.$\angle B$ 的平分线与 AC 边交于 F,与 L 交于 G.若 $GF=DE$,求证:$AC=BC$.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)



[证] 设 BG 与 AE 交于 K,$\angle CAB=2\alpha$,$\angle CBA=2\beta$.

如果 $AC\neq BC$,不妨设 $BC>AC$,则 $\alpha>\beta$,从而

$$AK<BK,\ AE<BG.$$

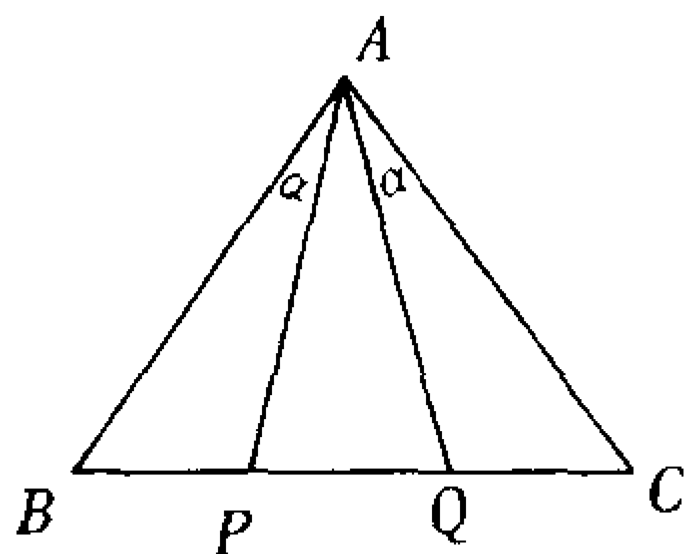
$$\therefore\quad GF=\frac{BG\cdot CF}{AC}=\frac{BG\cdot CF}{CF+FA}=\frac{BG}{1+\frac{FA}{CF}}=\frac{BG}{1+\frac{AB}{BC}}>\frac{AE}{1+\frac{AB}{AC}}$$

$$=\frac{AE}{1+\frac{BD}{DC}}=\frac{AE\cdot DC}{BC}=DE.$$

与已知 $GF=DE$ 矛盾,所以 $AC=BC$.

1·13　设 P、Q 为线段 BC 上两定点，且 $BP=CQ$，A 为 BC 外一动点(如图).当点 A 运动到使$\angle BAP=\angle CAQ$ 时，$\triangle ABC$ 是什么三角形？试证明你的结论.

(中国初中数学联赛，1986 年)



[解]　当$\angle BAP=\angle CAQ$ 时，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

[证 1]　$\because\ S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACQ}$，$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACQ}}=1$，

即　$\dfrac{AB\cdot AP\sin\angle BAP}{AC\cdot AQ\sin\angle CAQ}=\dfrac{AB\cdot AP}{AC\cdot AQ}=1$.

故　$AB\cdot AP=AC\cdot AQ$.　①

同理　由 $S_{\triangle BAQ}=S_{\triangle CAP}$　得

$AB\cdot AQ=AC\cdot AP$　②

①×②，得　$AB^2=AC^2$，有 $AB=AC$.

$\therefore$　$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

[证 2]　用反证法.假定 $AB\neq AC$，不妨设 $AB>AC$.则$\angle B<\angle C$.

从而　$\angle QPA<\angle AQP$，得　$AP>AQ$.　③

设　$\angle BAP=\angle CAQ=\alpha$，

$\because$　$\dfrac{AP}{\sin B}=\dfrac{BP}{\sin\alpha}=\dfrac{QC}{\sin\alpha}=\dfrac{AQ}{\sin C}$.

$\therefore$　$\dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}$.

$\therefore$　$AP\cdot AB=AC\cdot AQ$.

$\because$　$AB>AC$，　$\therefore$　$AP<AQ$.　④

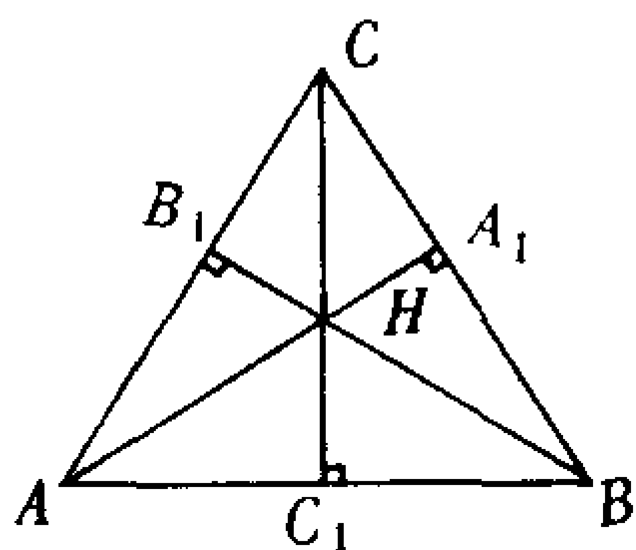
③、④两式矛盾，　$\therefore$　$AB=AC$.

1·14　设 AA_1、BB_1、CC_1 为锐角$\triangle ABC$ 的 3 条高，H 为垂心，已知 $S_{AB_1HC_1}=S_{BA_1HC_1}$，求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(前苏联教委推荐试题，1991 年)

[证]　若 $AC\neq BC$，不妨设 $AC>BC$.

$\because$　$CC_1\perp AB$，$\therefore$　$AC_1>BC_1$.



$\therefore\quad AH>HB, S_{\triangle AC_1H}>S_{\triangle BC_1H}$,

又$\because\quad \triangle AHB_1 \backsim \triangle BHA_1$,

$\therefore\quad S_{\triangle AHB_1}>S_{\triangle BHA_1}$,

$\therefore\quad S_{\triangle AC_1HB}>S_{\triangle BA_1HC_1}$,此与已知矛盾.

$\therefore\quad AC=BC$,即$\triangle ABC$为等腰三角形.

1·15 $\triangle ABC$有以下性质:存在一个内点P,使$\angle PAB=10^\circ$, $\angle PBA=20^\circ$, $\angle PCA=30^\circ$, $\angle PAC=40^\circ$. 试证:$\triangle ABC$是等腰三角形.

(美国数学奥林匹克,1996年)

[证] 作AC边上高BD,又作AQ使$\angle QAD=30^\circ$,其中AQ交BD于Q.

连PQ,设PQ交AC于C'.

$\because\quad \angle BAD=10^\circ+40^\circ=50^\circ$,

$\therefore\quad \angle ABD=90^\circ-50^\circ=40^\circ$,

又 $\angle PBQ=40^\circ-\angle PBA$

$=20^\circ=\angle PBA$,

且 $\angle PAQ=\angle PAC-\angle QAD=10^\circ=\angle PAB$,

从而 知P是$\triangle ABQ$的内心.

又 $\angle PQA=\angle PQB=\dfrac{1}{2}(180^\circ-40^\circ-20^\circ)=60^\circ$,

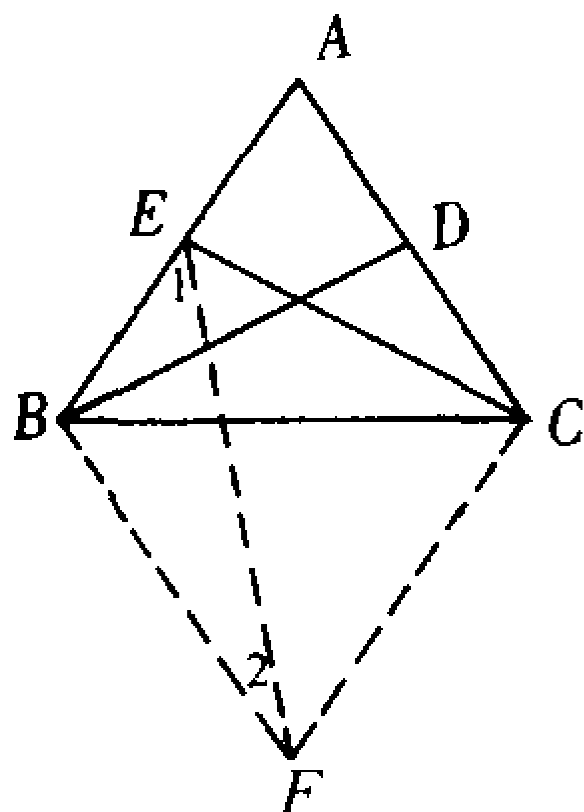
且 $\angle PC'A=\angle PQA-\angle QAC=30^\circ$,

$\therefore\quad \angle PCA=30^\circ$,故$C$与$C'$重合.

从而 $QA=QC$,即QD平分AC,因而$AB=BC$.

1·16 试证:$\triangle ABC$两腰AB、AC相等的充分必要条件是$\angle B$及$\angle C$的平分线相等.

(中国天津市数学竞赛,1957年)



[证] (必要性)

$\because\quad AB=AC$,

$\therefore\quad \angle ABC=\angle ACB,\quad \angle ABD=\angle ACE$,

又 $\angle A=\angle A$,

于是 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

$\therefore\quad BD=CE$.

（充分性） 用反证法.

[法 1] 令$\angle ABD=\angle CBD=\beta$,

$\angle ACE=\angle BCE=\gamma$,并作 $BF /\!/ AC$, $CF /\!/ BD$.

若 $\beta>\gamma$,则在$\triangle BCE$ 和$\triangle CBD$ 中,

$\because$ $BC=BC$, $BD=CE$, $\therefore$ $CD>BE$,

即 $BF>BE$. 但 $CE=CF$,

$\therefore$ $\angle CEF=\angle CFE$,

而 $\angle 1=180^\circ-2\beta-\gamma-\angle CEF$,

又 $\angle 2=180^\circ-2\gamma-\beta-\angle CFE$,

$\therefore$ $\angle 1<\angle 2$, $BE>BF$.

这就得到矛盾,因此不能有 $\beta>\gamma$.

同理可证不能有 $\beta<\gamma$.

于是 $\beta=\gamma$, $2\beta=2\gamma$.

故有 $AB=AC$.

[法 2] 由角平分线长公式知

$$BD^2=ca-\frac{ab^2c}{(a+c)^2},\quad CE^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

$$\therefore\quad BD^2-CE^2=a(c-b)+abc\left[\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{b}{(a+c)^2}\right].$$

若 $c>b$,则 $c-b>0$,

故 $\dfrac{c}{(a+b)^2}-\dfrac{b}{(a+c)^2}>0$,

于是 $BD^2-CE^2>0$, 有 $BD>CE$;

若 $c<b$, 则 $BD<CE$.

均与已知条件矛盾.

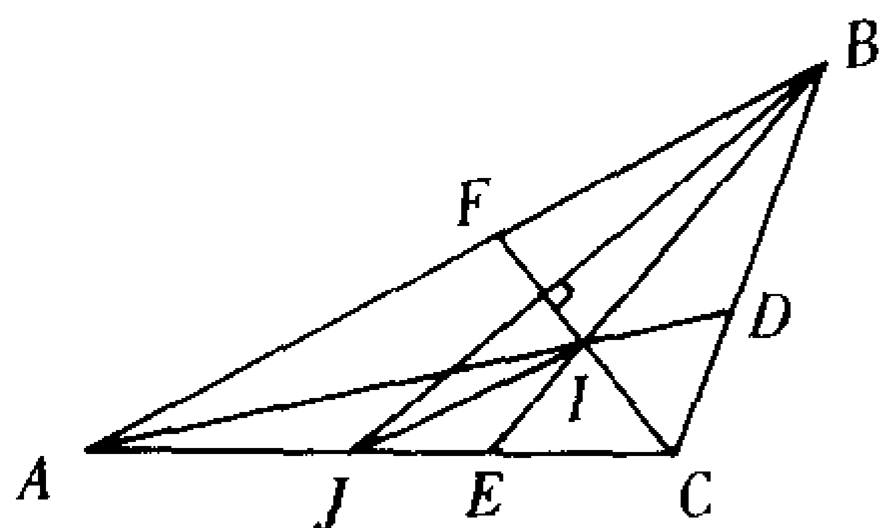
故 $b=c$.

1·17 已知:一个三角形三个角的比为 1:2:4,求证:角平分线与对边的交点是一个等腰三角形的顶点.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年）

[证] 由于三角形三个角的比为 1:2:4,则三内角为

$$\angle A=\frac{\pi}{7},\ \angle B=\frac{2\pi}{7},\ \angle C=\frac{4\pi}{7}.$$



设 $x=\frac{\pi}{14}$，于是

$\angle A=2x$，$\angle B=4x$，$\angle C=8x$.

设 AD、BE、CF 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线，I 为内心.

作直线 $BJ\perp CF$ 交 AC 于 J.

由于 CF 是 $\angle C$ 的平分线，则 B 与 J 关于 CF 对称. 因为

$\angle BCF+\angle CBJ=\frac{\pi}{2}=7x$，

而　$\angle BCF=4x$，

则　$\angle CBJ=3x$，$\angle IBJ=x$.

∴　$\angle IJB=\angle IBJ=x$，

　　$\angle EIJ=\angle IJB+\angle IBJ=2x$，

　　$\angle EIJ=\angle IBC=2x=\angle EJI$.

　　$\angle IEC=\angle EJI+\angle EIJ=4x=\angle ICE$.

　　$\angle CID=\angle ICA+\angle IAC=5x$，

　　$\angle CDI=\pi-4x-5x=5x=\angle CID$

于是有 $JE=EI=IC=CD$，故　$CE=CJ-JE=CB-CD=DB$.

又∵　$\angle CBF=\angle BCF=4x$，　∴　$BF=CF$.

在 $\triangle FBD$ 和 $\triangle FCE$ 中，

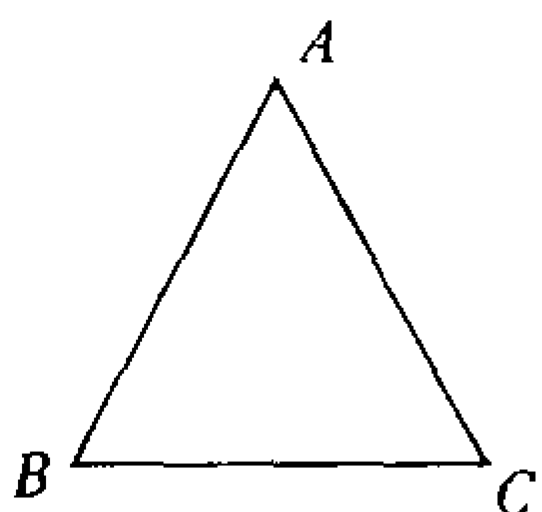
∵　$CE=BD$，$BF=CF$，$\angle FBD=\angle FCE=4x$；

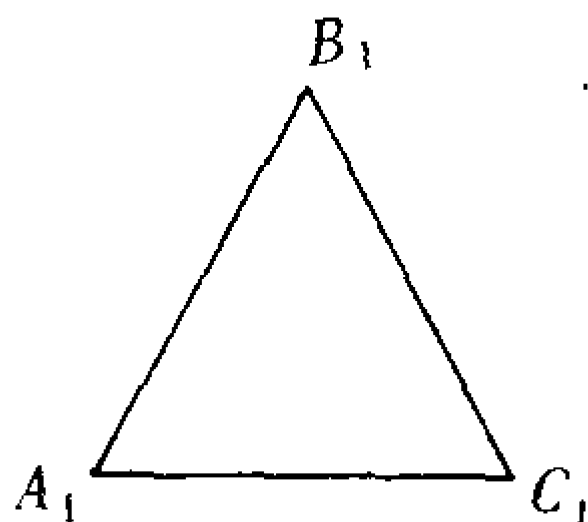
∴　$\triangle FBD\cong\triangle FCE$　有 $FD=FE$.

因此，$\triangle DEF$ 是等腰三角形.

1·18　已知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle A=\angle B_1$，$\angle B=\angle C_1$，且 $AB=A_1B_1$，$CA=B_1C_1$. 求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 都是等腰三角形.

（中国北京市数学竞赛，1982 年）





［证］　由设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle B_1A_1C_1$ 中，$BA=A_1B_1$，$\angle A=\angle B_1$，$AC=B_1C_1$，

∴　$\triangle ABC\cong\triangle B_1A_1C_1$，

知　$\angle B=\angle A_1$，$\angle C=\angle C_1$.

又 $\angle B=\angle C_1$，$\therefore$ $\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$.

已知 $A_1B_1=AB, B_1C_1=AC$,

$\therefore$ $A_1B_1=AB=AC=B_1C_1$，即$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$都是等腰三角形.

1·19 在$\triangle ABC$中，a、b表示角A、B的对边的长.已知：$a\text{tg}A+b\text{tg}B=(a+b)\text{tg}\dfrac{A+B}{2}$，求证：$a=b$.

（中国福建省福州市数学竞赛，1978年）

［证］ 由已知得

$$a\left(\text{tg}A-\text{tg}\frac{A+B}{2}\right)-b\left(\text{tg}\frac{A+B}{2}-\text{tg}B\right)=0,$$

即
$$a\cdot\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos A\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}-b\cdot\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos B\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}=0,$$

或
$$\frac{2R\sin\dfrac{A-B}{2}\sin(A-B)}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}=0,$$

故 $\sin\dfrac{A-B}{2}=0$ 或 $\sin(A-B)=0$.

$\because$ $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

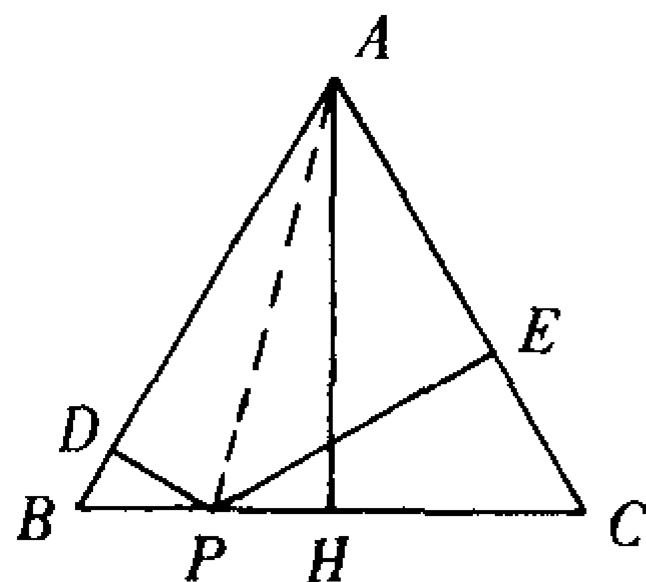
$\therefore$ $-\pi<A-B<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.

故得 $\dfrac{A-B}{2}=0$，或 $A-B=0$，即 $A=B$.

$\therefore$ $a=b$.

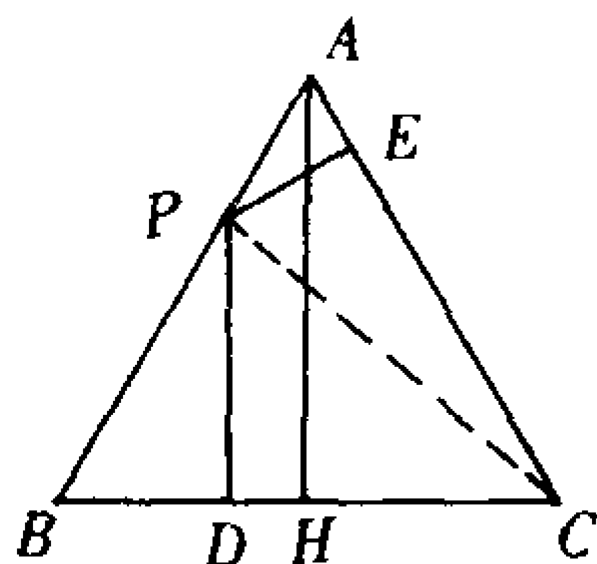
1·20 已知：等腰$\triangle ABC$底边上的高为AH，从一条边上的一点P向另两条边作垂线PD、PE，若$AH=PD+PE$，求证：$\triangle ABC$为正三角形.

（中国江苏省南京市数学竞赛，1991年）



［解］ 分两种情况：

(1)若P在底边BC上，连AP，则有



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot(PD+PE)=\frac{1}{2}AH\cdot BC$$

$\therefore\quad AB=BC.$

从而 $\quad AB=BC=AC.$

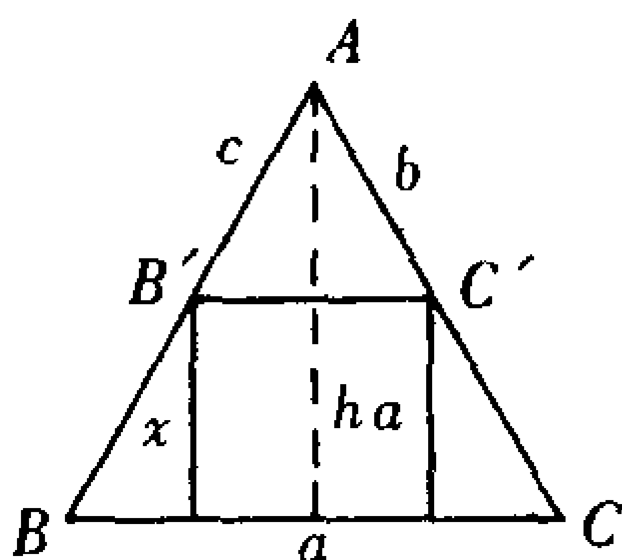
(2)若 P 在 AB(或 AC)上,连 CP,同理可得

$$AC=BC=AD.$$

从而,$\triangle ABC$ 为等边三角形.

1·21 若三角形的三个内接正方形面积都相等,则该三角形为正三角形.

(中国江苏省数学竞赛,1996 年)



[证] 设$\triangle ABC$ 的面积为S,且 BC 边上的高为h_a,一边在 BC 边上的内接正方形的边长为x(如图).则由$\triangle AB'C'\backsim\triangle ABC$,

可得$\dfrac{x}{a}=\dfrac{h_a-x}{h_a}$,推得 $x=\dfrac{2S}{a+h_a}$.

同理,可得另两种方法的内接正方形的边长.因三个内接正方形面积均相等,则有

$a+h_a=b+h_b=c+h_c$,

即 $\quad a+\dfrac{2S}{a}=b+\dfrac{2S}{b}=c+\dfrac{2S}{c}=L.$ ①

由①式知,正数 a、b、c 适合方程 $\quad x+\dfrac{2S}{x}=L.$

当 $\quad x\neq0$ 时,有 $x^2-Lx+2S=0.$ ②

故 a、b、c 是二次方程②的根.但任何二次方程至多只有两个相异的根,所以 a、b、c 中的某两数必相同,设 $a=b$.

若 $c\neq a$,则由①得 $\quad (a-c)=2S\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{2S}{ac}(a-c).$

$\because\quad a-c\neq0,\quad\therefore\quad ac=2S=ah_a,\quad\therefore\quad c=h_a.$

这样,$\triangle ABC$ 就是以$\angle B$ 为直角的直角三角形,b 边是斜边,于是 $b>a$.矛盾,故 $\quad a=c.$

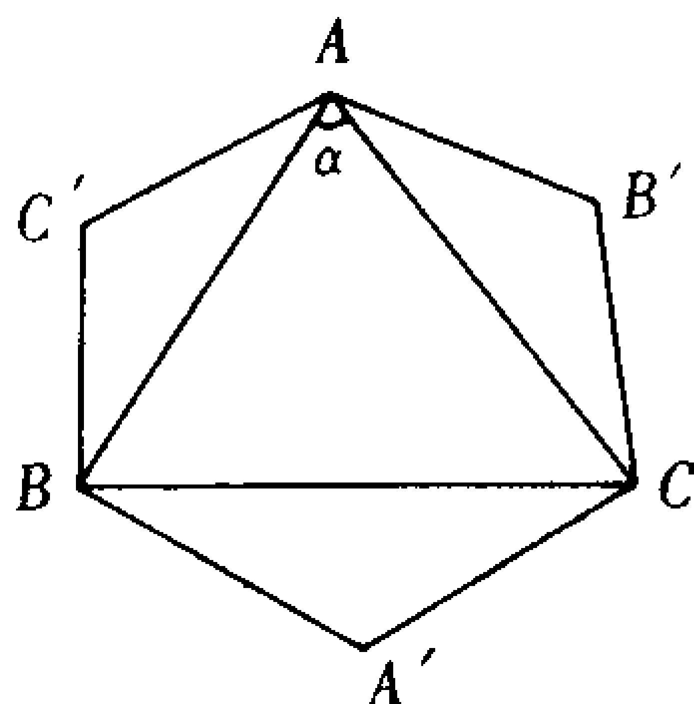
于是 $\quad a=b=c$,即 $\quad\triangle ABC$ 为正三角形.

1·22 以任意$\triangle ABC$ 的边为底,在形外作底角为 30°的等腰

$\triangle A'BC$、$\triangle B'CA$、$\triangle C'AB$.求证:$\triangle A'B'C'$是等边三角形.

(基辅数学奥林匹克,1955年)

[证] 设 a、b、c 是$\triangle ABC$的三边,$\angle BAC=\alpha$,则



$$AC'=\frac{\frac{c}{2}}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

同理 $AB'=\frac{b}{\sqrt{3}}$

由余弦定理得

$$B'C'^2=\frac{1}{3}[c^2+b^2-2bc\cos(60^\circ+\alpha)]$$

$$=\frac{1}{3}\left[b^2+c^2-2bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}[b^2+c^2-bc\cos\alpha+2\sqrt{3}S]$$

$$=\frac{1}{6}[(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)+b^2+c^2+4\sqrt{3}S]$$

$$=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S),$$

其中 S 是$\triangle ABC$的面积________.

同理可证 $A'B'^2=C'A'^2=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$,

故 $B'C'=C'A'=A'B'$.

1·23 设 h_1、h_2、h_3 为$\triangle ABC$的高,r 为其内切圆的半径.已知:$h_1+h_2+h_3=9r$. 求证:$\triangle ABC$为正三角形.

(基辅数学奥林匹克,1969年)

[证] 设 S 为$\triangle ABC$的面积,a_1、a_2、a_3 为$\triangle ABC$的三边,则

$$2S=r(a_1+a_2+a_3)=a_1h_1=a_2h_2=a_3h_3,$$

$$\therefore\quad h_i=\frac{r(a_1+a_2+a_3)}{a_i}\quad(i=1,2,3)$$

$$\because\quad h_1+h_2+h_3=9r,$$

$$\therefore\quad \frac{r(a_1+a_2+a_3)}{a_1}+\frac{r(a_1+a_2+a_3)}{a_2}+\frac{r(a_1+a_2+a_3)}{a_3}=9r,$$

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)=9,$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)=6.$$

但 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}}=2,$

及 $\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\geqslant 2,\ \frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\geqslant 2,$

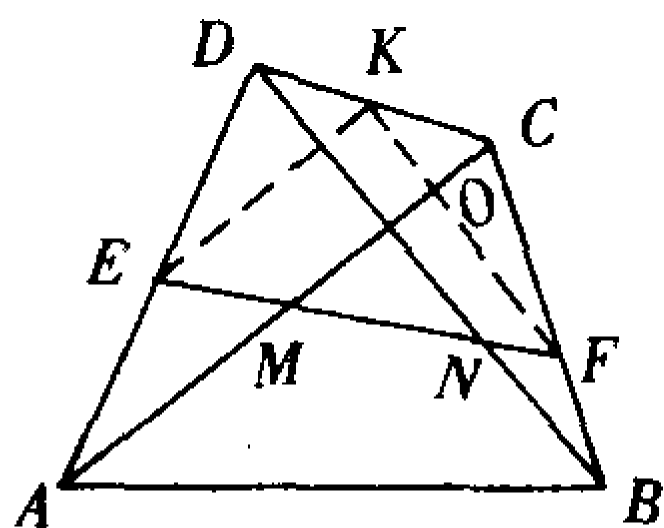
其中等号当且仅当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_1}{a_3}=\frac{a_3}{a_1},\ \frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}$ 时成立. 即 $a_1^2=a_2^2=a_3^2,$

又 $a_i>0(i=1,2,3)$, 故 $a_1=a_2=a_3.$

2. 多边形中的线段相等问题

1·24 设在凸四边形中,经过一组对边中点的直线同两条对角线所成的角相等.求证:这两条对角线相等.

(第24届全苏数学奥林匹克,1990年)



[证] 设凸四边形 $ABCD$ 中对角线 AC、BD 交于点 O.

AD 中点 E、BC 中点 F 的连线 EF 交 AC 于 M,交 BD 于 N,已知 $\angle OMN=\angle ONM$.取 DC 中点 K,

则 $EK \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}AC,\ FK \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BD.$

$\therefore\ \angle KEF=\angle OMN=\angle ONM=\angle KFE.$

$\therefore\ EK=FK$, 故 $AC=BD.$

1·25 给定凸四边形 $ABCD$ 与形内一点 O,且 $\angle AOB=\angle COD=120°$,且 $AO=OB,CO=OD$.设 K、L、M 分别为线段 AB、BC、CD 的中点.求证:(1) $KL=LM$;(2) $\triangle KLM$ 为等边三角形.

(第58届莫斯科数学竞赛,1995年)

[证] (1)设 BO 与 CO 的中点分别为 N 与 P.

$\because \quad KN=\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{1}{2}BO=LP.$

$LN=\dfrac{1}{2}CO=\dfrac{1}{2}DO=MP.$

且 $\angle KNL=\angle AOC=120^\circ+\angle BOC=\angle BOD=\angle LPM.$

$\therefore \quad \triangle KNL\cong LPM.$

故 $KL=LM.$

(2)又 $\angle KLM=\angle KLN+\angle NLP+\angle PLM$

$=\angle KLN+\angle BNL+\angle NKL$

$=\angle 180^\circ-\angle BNK=60^\circ.$

故知$\triangle KLM$是顶角为60°的等腰三角形，即等边三角形.

1·26 凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点满足：每一顶点至其他三个顶点距离之和相等. 试问该四边形是什么四边形？证明你的结论.

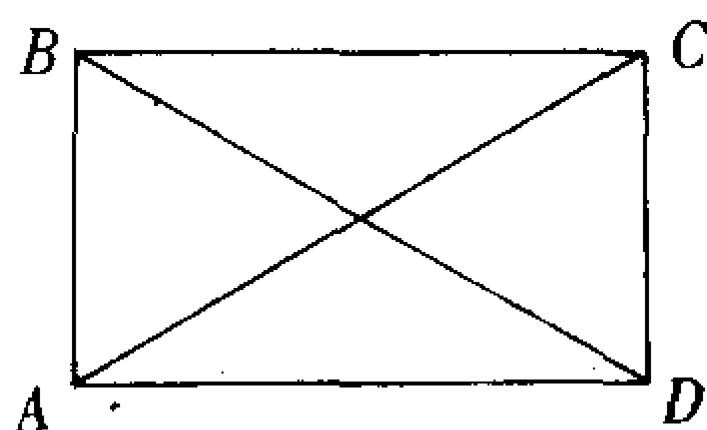
（中国四川省数学竞赛，1996 年）

[解] 该四边形是矩形. 依题设有

$AB+AC+AD=BA+BC+BD=CA+CB+CD=DA+DB+DC.$

上式等价于

$$\begin{cases}AC+AD=BC+BD, & ①\\ AB+AD=BC+CD, & ②\\ AB+AC=BD+CD. & ③\end{cases}$$



①+②−③得 $AD=CB.$

②+③−①得 $AB=CD.$

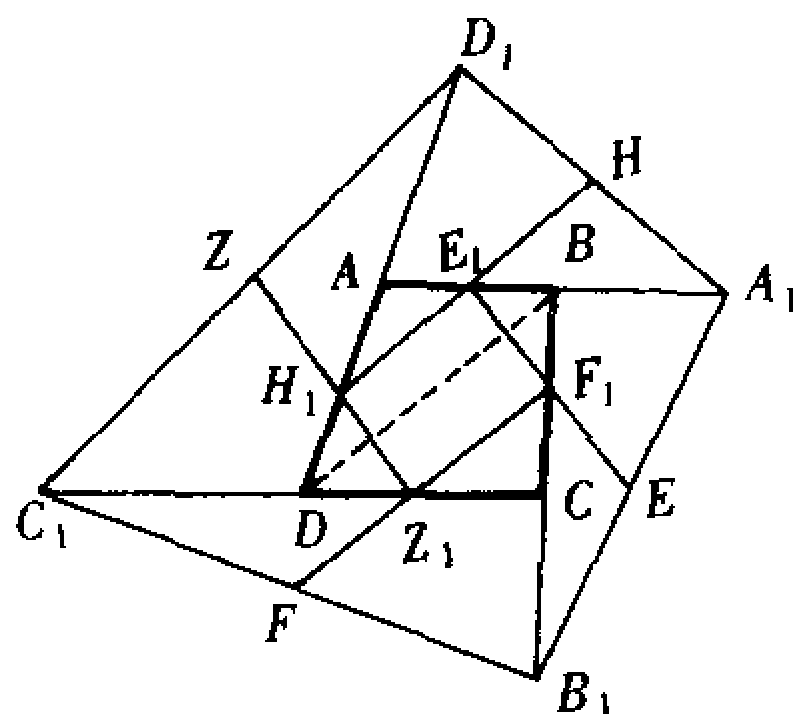
故 $ABCD$ 是平行四边形.

①+③−②得 $AC=BD.$

故 $ABCD$ 是矩形.

1·27 给定四边形 $ABCD$. 设 A_1 是点 A 关于 B 的对称点，B_1 是点 B 关于 C 的对称点，C_1 是点 C 关于 D 的对称点，D_1 是点 D 关于 A 的对称点. 四边形 $EFZH$ 是从四边形 $ABCD$ 的四边的中点构成的四边形用以上方式得到的，就像四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 由 $ABCD$ 得到的那样. 求证：四边形 $EFZH$ 的顶点平分四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边.

（基辅数学奥林匹克，1964 年）



［证］ 设 E_1、F_1、Z_1、H_1 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，如图，连 BD.

取 D_1A_1 的中点 H_2，

∵ $BH_2 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD_1 \underline{\underline{\parallel}} H_1D$，

∴ H_2BDH_1 是平行四边形.

∴ $H_1H_2 = DB$.

∵ $H_1E_1 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DB$，

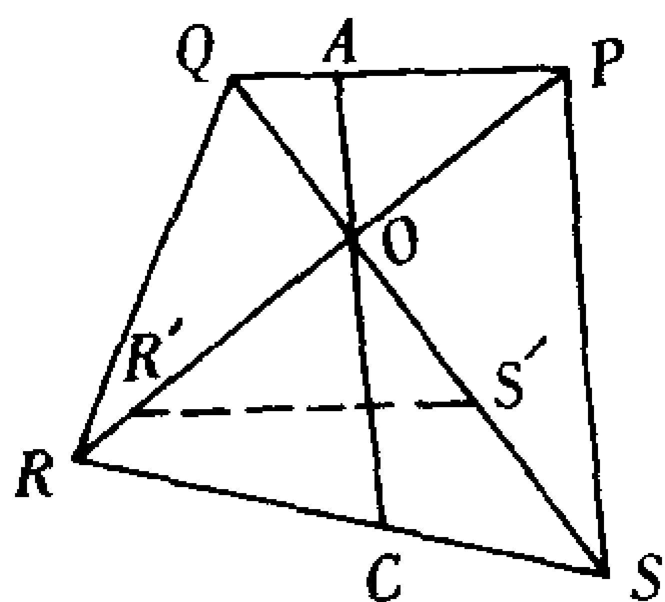
∴ E_1 在 H_1H_2 上 且 $E_1H_1 = E_1H$.

∴ H、H_2 重合，即 H 是A_1D_1 的中点.

同理 可证其他情形.

1·28 四边形 $PQRS$ 的四边 PQ、QR、RS、SP 上各有一点为 A、B、C、D. 已知：$ABCD$ 是平行四边形，而且它的对角线和 $PQRS$ 的对角线(共四线)都交于一点 O，证明：$PQRS$ 也是平行四边形.

（中国北京市数学竞赛，1964 年）



［证］ 用反证法. 若 $PQRS$ 不是平行四边形，则其对角线不能互相平分，即 OP、OR 与 OQ、OS 两对线段中至少有一对不相等.

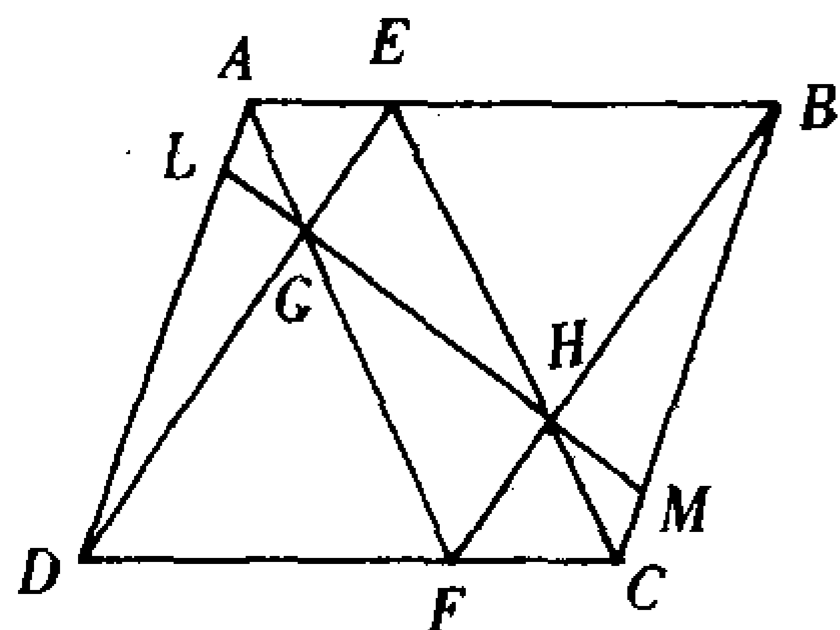
不妨设 $OP < OR$，$OQ \leqslant OS$. 在 OR 上取 $OR' = OP$，在 OS 上取 $OS' = OQ$（S'可能与 S 重合)，连结 $R'S'$，那么，$R'S'$ 与 OC 的交点 C' 在 OC 内，故有

$OC' < OC$.

由 $\triangle POQ \cong \triangle R'OS'$ 可得 $OC' = OA$，

∴ $OA < OC$. 这就与 $ABCD$ 为平行四边形矛盾.

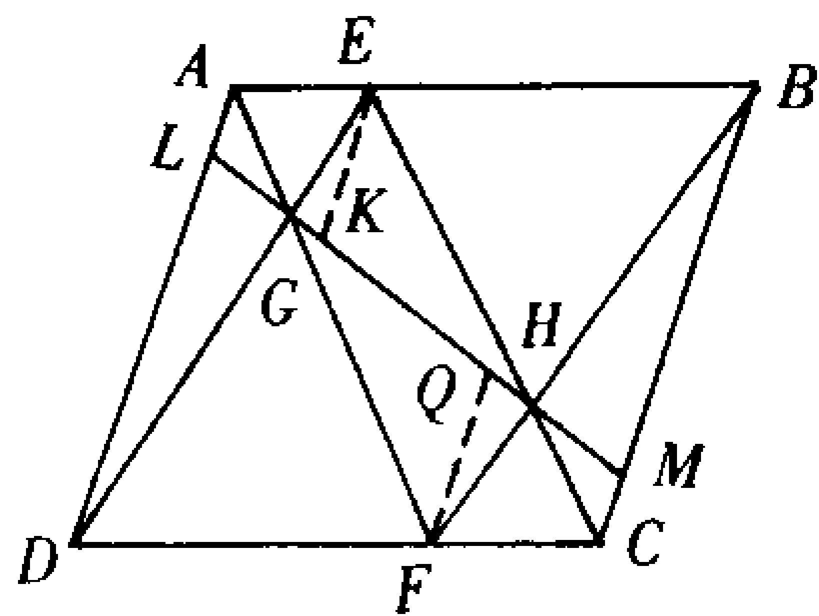
故 $PQRS$ 应为平行四边形.



1·29 E 是▱$ABCD$ 边 AB 上一点，F 是CD 上一点. AF 交ED 于G，EC 交FB 于 H. 连结 G、H，且延长之分别交 AD 于L，交 BC 于M. 求证：$DL = BM$.

（澳大利亚数学奥林匹克，1994 年）

[证] 过 E、F 分别作 $EK \parallel AD$，$FQ \parallel AD$ 交 LM 于 K、Q.



由 $\triangle ALG \backsim \triangle FQG$，有 $\dfrac{AL}{QF}=\dfrac{AG}{GF}$.

又由 $\triangle AEG \backsim \triangle FDG$，有 $\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{AG}{GF}$.

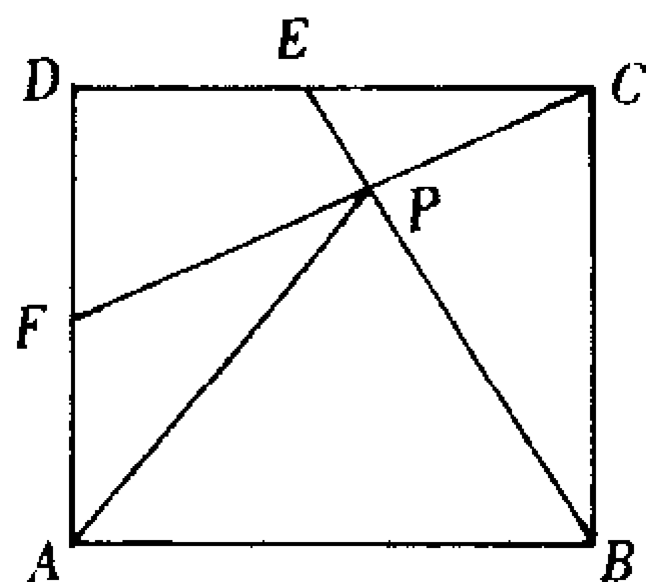
$\therefore\ \dfrac{AL}{QF}=\dfrac{AE}{DF}$.

同理 $\dfrac{DL}{EK}=\dfrac{DF}{AE}$，$\therefore\ AL \cdot DL = QF \cdot EK$，

同理 $CM \cdot MB = QF \cdot EK$，$\therefore\ AL \cdot DL = CM \cdot MB$.

又$\because\ AL + LD = BM + MC$，$\therefore\ DL = BM$.

1·30 正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 的中点，F 是 DA 的中点. 连 BE 与 CF 交于 P. 求证：$AP = AB$.

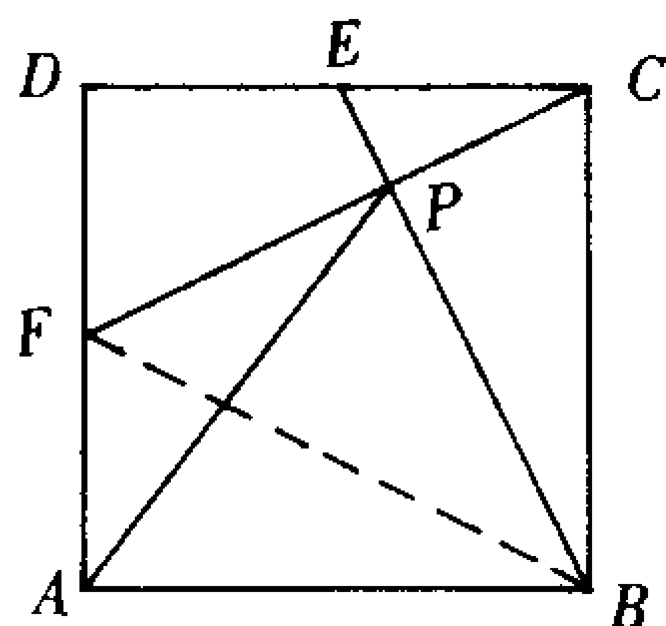


(中国北京市数学竞赛，1981 年)

[证] 连 BF，在 $\triangle BCE$、$\triangle CDF$ 和 $\triangle BAF$ 中，$BC = CD = BA$，

$\angle BCE = \angle CDF = \angle BAF = 90°$，

且 $CE = FD = FA = \dfrac{1}{2}AD$，



$\therefore\ \triangle BCE \cong \triangle CDF \cong \triangle BAF$.

故 $\angle CEB = \angle CFD = \angle BFA$.

又 $\angle CEB = \angle ABE$，

$\therefore\ \angle CFD = \angle ABE$.

故 F、A、B、P 四点共圆，

有 $\angle APB = \angle BFA$.

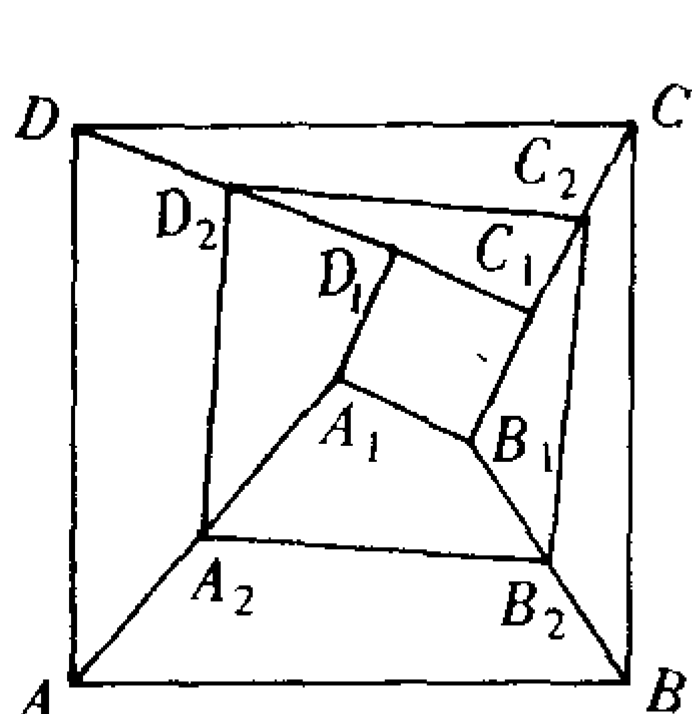
又 $\angle BFA = \angle CFD$，则 $\angle APB = \angle ABE = \angle ABP$，

$\therefore\ AP = AB$.

1·31 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 在正方形 $ABCD$ 内，又 A_2、B_2、C_2、D_2 分别是 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 的中点. 试证：$A_2B_2C_2D_2$ 也是正方形.

(中国北京市数学竞赛，1980 年)

[证] 连 AB_1，且设 M 为 AB_1 的中点；连 BC_1，且设 N 为 BC_1 的



中点.

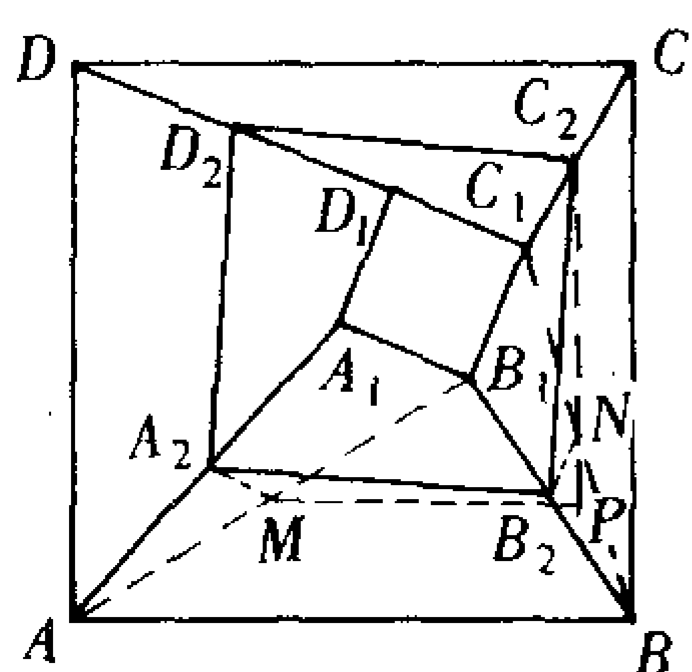
连 A_2M, B_2N,

∵ $B_2M=C_2N=\frac{1}{2}AB$,

且 $A_2M=B_2N=\frac{1}{2}A_1B_1$,

又 $A_2M/\!/A_1B_1$, $B_2N/\!/B_1C_1$, 且 $A_1B_1\perp B_1C_1$,

∴ $A_2M\perp B_2N$.



而 $B_2M/\!/AB$, $C_2N/\!/BC$, 且 $AB\perp BC$.

∴ $B_2M\perp C_2N$.

于是 $\angle A_2MB_2=\angle B_2NC_2$,

∴ $\triangle A_2MB_2\cong\triangle B_2NC_2$,

有 $A_2B_2=B_2C_2$.

延长 MB_2、C_2N 交于P, 则 $\angle A_2B_2C_2=\angle MB_2C_2-\angle MB_2A_2$.

又 $\angle MB_2C_2=\angle B_2PC_2+\angle NC_2B_2$,

∵ $\angle B_2PC_2$ 是直角, 且 $\angle MB_2A_2=\angle NC_2B_2$,

∴ $\angle A_2B_2C_2=90^\circ$.

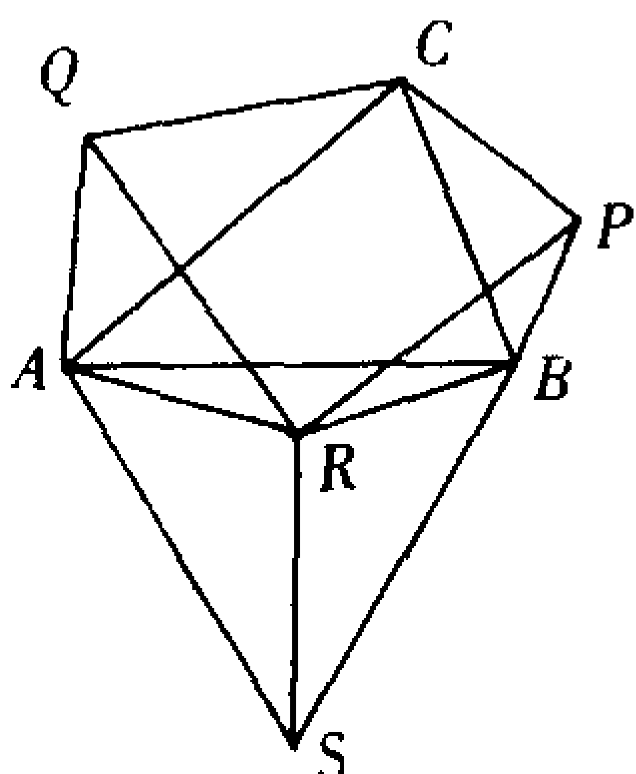
同理可证 $B_2C_2=C_2D_2$, $\angle B_2C_2D_2=90^\circ$.

故 $A_2B_2C_2D_2$ 是正方形.

注 此结论可推广到一般正 n 边形的情形.

1·32 在任意$\triangle ABC$ 的边上向外作$\triangle BPC$, $\triangle CQA$, $\triangle ARB$,使得$\angle PBC=\angle CAQ=45^\circ$, $\angle BCP=\angle QCA=30^\circ$, $\angle ABR=\angle BAR=15^\circ$. 试证:(1)$\angle QRP=90^\circ$;(2)$QR=RP$.

(第 17 届国际数学奥林匹克,1975 年)



[证] 以 AB 为边向形外作正三角形 ABS. 连 RS, CS,则

$\angle SAR=60^\circ-15^\circ=45^\circ$, 且 $\angle ASR=30^\circ$.

∴ $\triangle CQA\backsim\triangle SRA$, 有 $\frac{SA}{CA}=\frac{RA}{AQ}$.

又∵ $\angle SAC=\angle RAQ$,

∴ $\triangle CAS\backsim\triangle QAR$,

故 $\angle CSA=\angle QRA$,

且 $\frac{AR}{QR}=\frac{AS}{CS}$. ①

同理可证得 $\angle CSB=\angle PRB$,

且 $\frac{BR}{PR}=\frac{BS}{CS}$. ②

由于 $AS=BS, AR=BR$, 所以 由①,②得 $QR=PR$.

$\because$ $\angle ARB=180^\circ-15^\circ-15^\circ=150^\circ$,

$\therefore$ $\angle QRP=150^\circ-(\angle QRA+\angle PRB)$

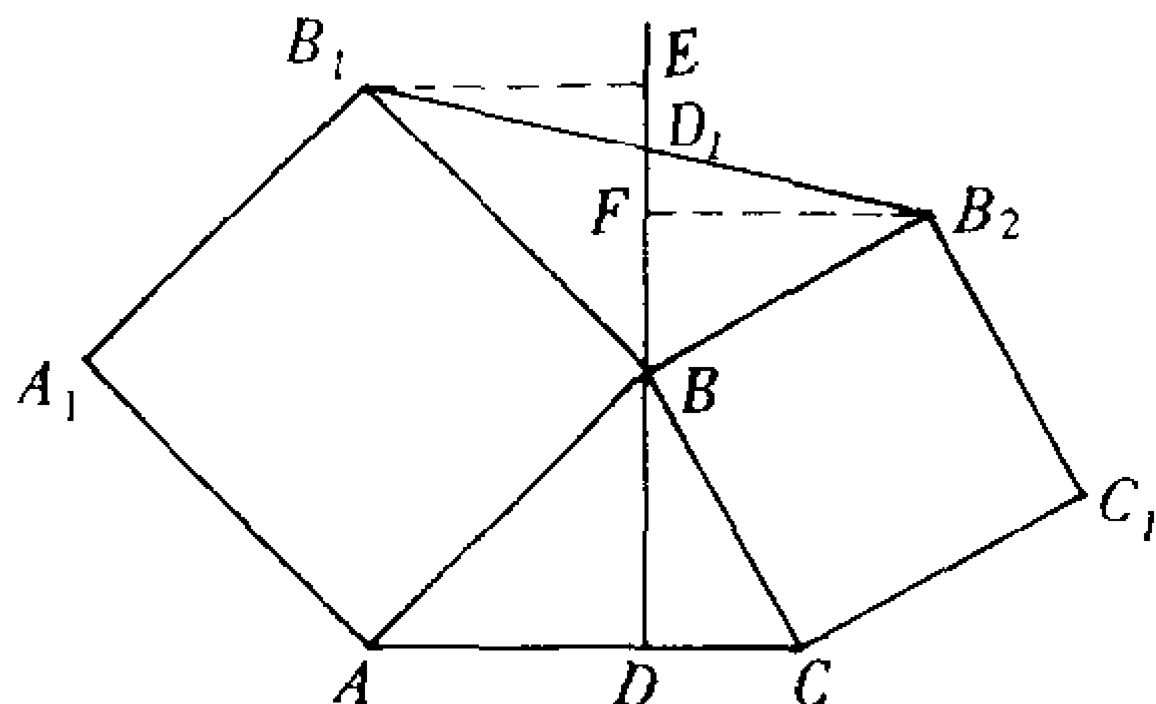
$=150^\circ-(\angle CSR+\angle CSB)$

$=150^\circ-\angle ASB=150^\circ-60^\circ=90^\circ$.

1·33 以$\triangle ABC$的边AB和BC为边在形外作正方形ABB_1A_1和BCC_1B_2.试证:$\triangle ABC$的高DB的延长线是$\triangle B_1BB_2$的中线.

(基辅数学奥林匹克,1964年)

[证] 设DB与B_1B_2交于D_1,作$B_1E\perp BD$于E,作$B_2F\perp BD$于F.(如图).



$\because$ $\triangle B_1BE\cong\triangle ABD$,

$\therefore$ $B_1E=BD$.

同理可证 $B_2F=BD$.

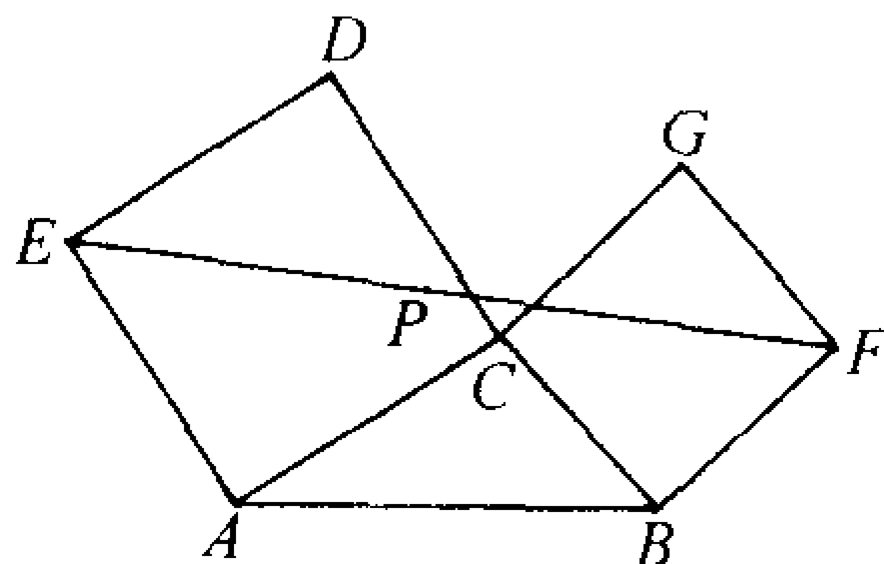
$\therefore$ $B_1E=B_2F$.

于是 $\triangle B_1ED_1\cong\triangle B_2FD_1$,

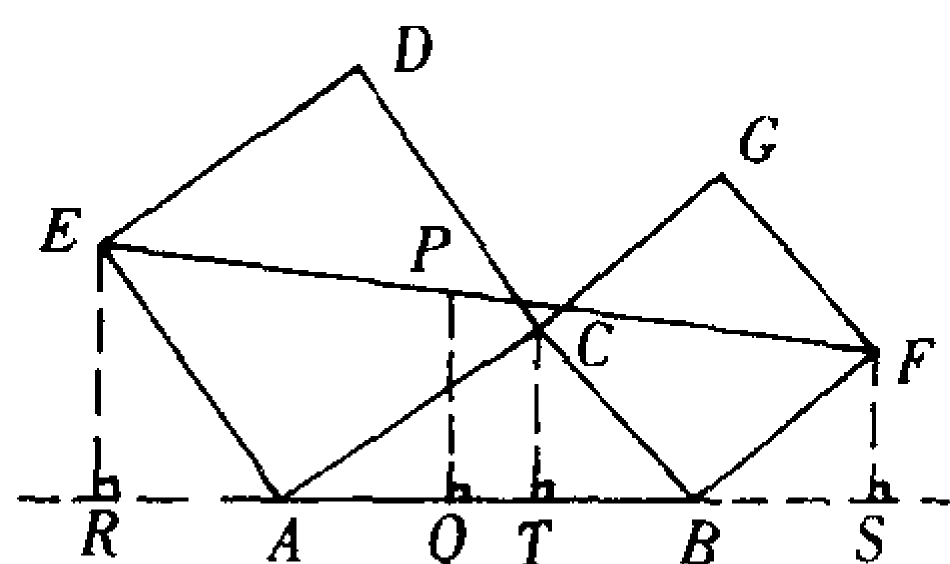
$\therefore$ $B_1D_1=B_2D_1$.

1·34 分别以$\triangle ABC$的边AC和BC为一边向形外作正方形$ACDE$和$CBFG$,点P为EF的中点(如图).求证:点P到边AP的距离是AB的一半.

(中国山东省数学竞赛,1996年)



[证] 分别过E、F、C、P作AB的垂线,垂足依次为R、S、T、Q,则PQ即是点P到AB的距离,且有$ER/\!/PQ/\!/CT/\!/FS$.故四边形$ERSF$为直角梯形,且PQ为其中位线.有



$PQ=\frac{1}{2}(ER+FS)$.

又易证 Rt△AER∽Rt△CAT，Rt△BFS∽Rt△CBT，

则 $ER=AT$，$FS=BT$.

又 $AT+BT=AB=ER+FS$，

故 $PQ=\frac{1}{2}AB$.即点 P 到 AB 的距离等于 AB 的一半.

1·35 已知：△ABC 中，$\angle C=90°$，BE 是$\angle B$ 的平分线，$CD\perp AB$ 于D 且交BE 于O，又 $FG/\!/AB$ 且过O.求证：$AF=CE$.

（中国宁夏回族自治区数学竞赛，1979 年）

［证］ 如图设诸角.由设知

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$，

∴ $\angle 2=\angle 3$， 有 $GO=GB$.

∵ $\angle 4=\angle 5$， $\angle 4=\angle 6$，

∴ $\angle 5=\angle 6$， 有 $CE=CO$.

∵ $FG/\!/AB$， ∴ $\frac{AF}{CF}=\frac{BG}{CG}$，

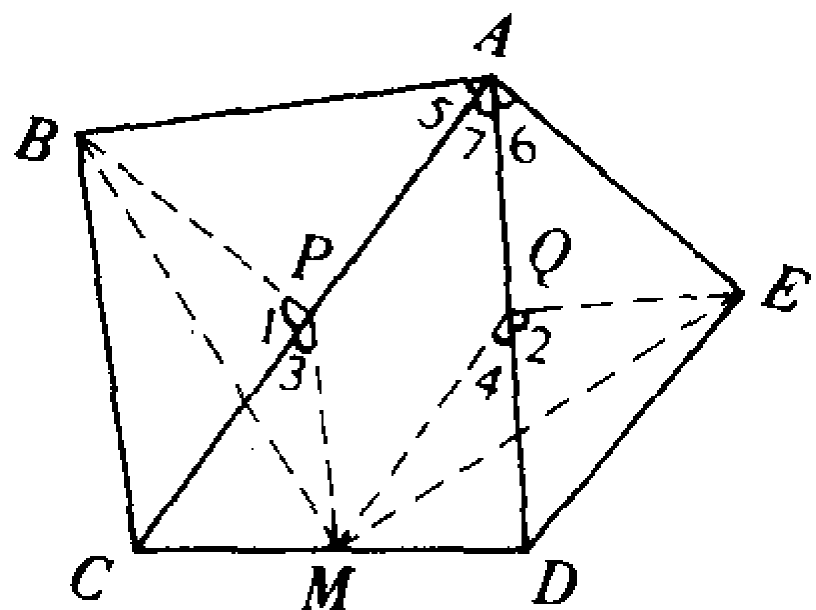
又 △COG∽△FCO， ∴ $\frac{GO}{CG}=\frac{CO}{CF}$，

从而 $\frac{AF}{CF}=\frac{BG}{CG}=\frac{GO}{CG}=\frac{CO}{CF}=\frac{CE}{CF}$，故 $AF=CE$.

1·36 已知：五边形 $ABCDE$ 中，$\angle ABC=\angle AED=90°$，$\angle BAC=\angle EAD$，$M$ 为CD 的中点.求证：$MB=ME$.

（中国山西省太原市数学竞赛，1991 年）

［证］ 取 AC、AD 的中点 P、Q，连接各线段如左图.



∵ P、M、Q 为△ACD 三边中点.

∴ $AP=MQ$，$AQ=PM$，

$BP=MQ$，$PM=QE$.

又 $\angle 1=2\angle 5=2\angle 6=\angle 2$，

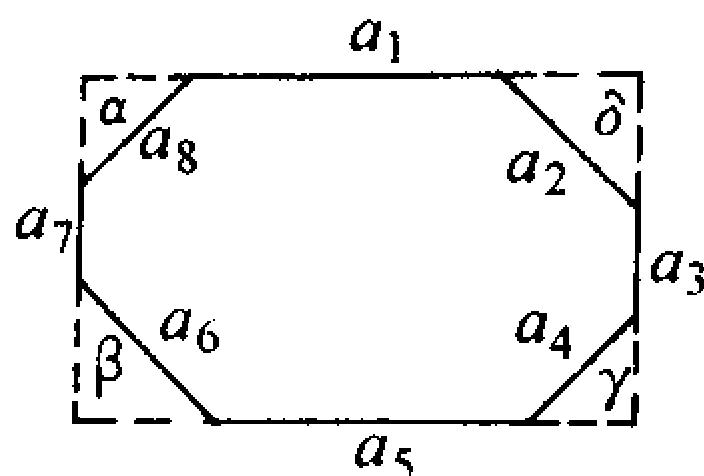
且 $\angle 3=\angle 7=\angle 4$，

$\therefore$ $\triangle BPM \cong \triangle MQE$. 故 $MB = ME$.

1·37 已知:八边形所有的角都相等,且边长皆为整数,求证:该八边形对边相等.

(第2届全俄数学奥林匹克,1968年)

[证] 设 $a_i(i=1,2,\cdots,7,8)$依次为该八边形边长.



又其每个内角皆相等,故每个内角度数为

$$\frac{(8-2)\times 180^\circ}{8}=135^\circ.$$

延长对边 a_1、a_5 交 a_3、a_7 延长线得一个四边形.

易算得四个交角 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90^\circ$,故四边形为矩形.

因而八边形可视为矩形在其四角各切去一个等腰三角形后的图形.

因矩形对边相等,故有

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}}+a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}=\frac{a_6}{\sqrt{2}}+a_5+\frac{a_4}{\sqrt{2}},$$

即 $a_5-a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_8+a_2-a_6-a_4)$.

$\because$ $a_i(i=1,2,\cdots,8)$是整数,而$\frac{1}{\sqrt{2}}$是无理数,则必有 $a_5-a_1=0$,

即 $a_5=a_1$.

同理可证 $a_6=a_2$, $a_7=a_3$, $a_8=a_4$.

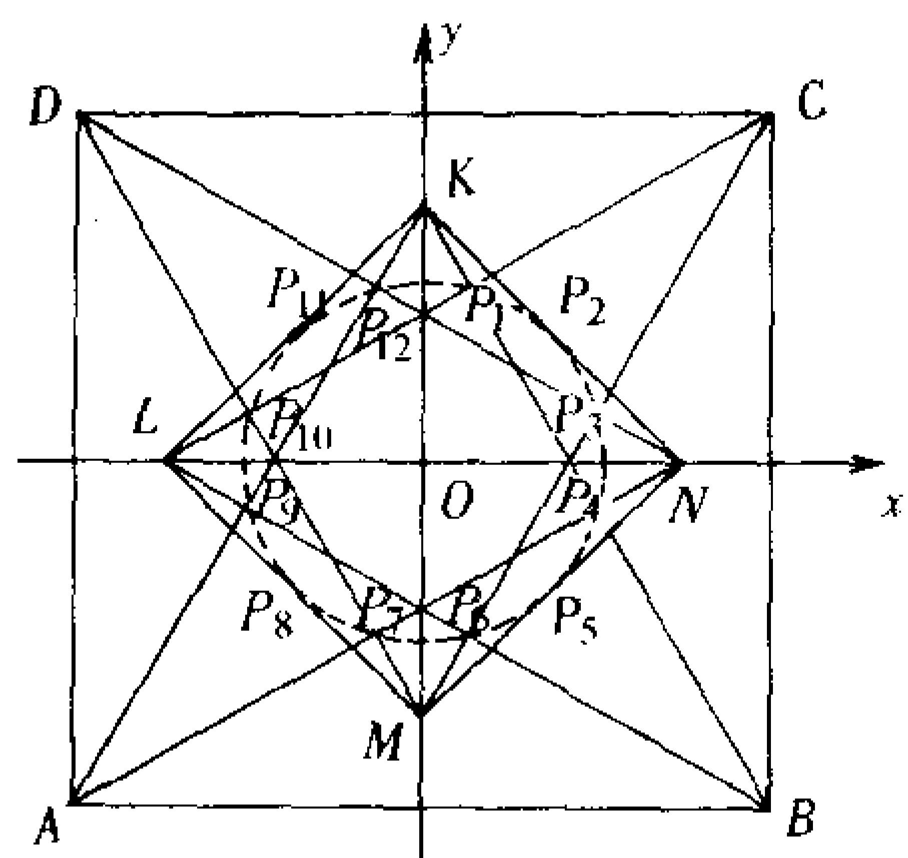
1·38 在正方形 $ABCD$ 的内部作等边三角形 ABK、BCL、CDM 和DAN. 证明:四线段 KL、LM、MN、NK 的中点和八线段 AK、BK、BL、CL、DM、CM、DN、AN 的中点是一个正十二边形的十二个顶点.

(第19届国际数学奥林匹克,1977年)

[证] 如图,以已知正方形的中心 O 为原点,以正方形边长之半为长度单位,并且 x 轴和 y 轴分别平行于正方形的边建立直角坐标系.

则正方形四个顶点的坐标分别为

$A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$.



因为所作的四个等边三角形分别对称于 x 轴、y 轴，所以 K、L、M、N 四点分别在 x 轴和 y 轴上，从而不难求出它们的坐标分别为

$K(0,\sqrt{3}-1)$，$L(-(\sqrt{3}-1),0)$，

$M(0,-(\sqrt{3}-1))$，$N(\sqrt{3}-1,0)$.

设 CL、NK、CM 的中点分别为 P_1、P_2、P_3，利用中点坐标公式可得这三个中点坐标为

$$P_1\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ P_2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),P_3\left(\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

利用两点间的距离公式可得

$$|P_1P_2|=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

$$|P_2P_3|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}.$$

$$|OP_1|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

所以 $OP_1=OP_2=OP_3$，且　$P_1P_2=P_2P_3$.

又由对称性，这十二条线段的中点，即图中的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{12}$ 与 O 点的距离都相等，

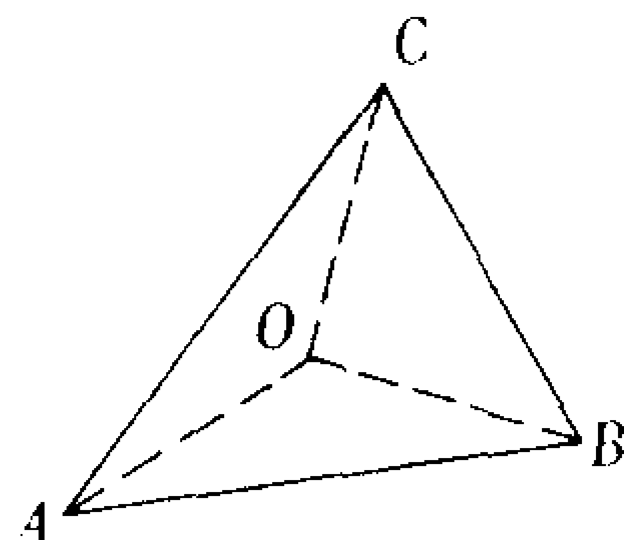
即它们都在以 O 为圆心，以 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 为半径的圆上，并且每相邻两点之间的距离都相等，因此这十二个点是一个正十二边形的顶点.

1·39　若凸多边形内一点 O 与凸多边形每两个顶点皆构成等腰

三角形三顶点,求证:该点 O 与多边形各顶点等距.

（第 6 届全俄数学奥林匹克,1972 年）

[证] 若凸多边形是三角形(如图),则由题设及等腰三角形性质易证 $OA=OB=OC$.



若凸多边形边数大于 3,且设 A、B 为凸多边形任两顶点.则 OA、OB 反向延长线夹角内或包含凸多边形另外顶点(图 1),或与凸多边形某条边交于两点(图 2),或恰好过凸多边形其他两顶点(图 3):

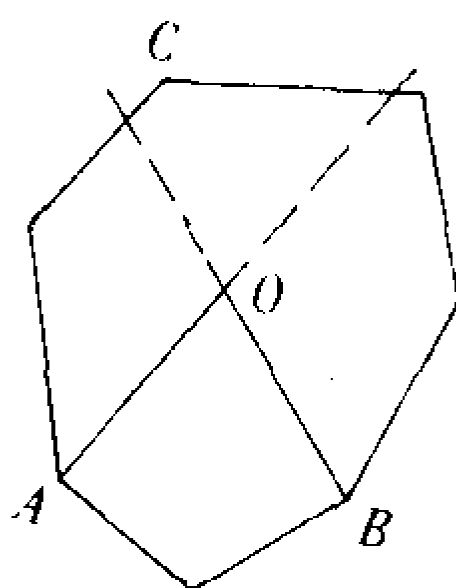


图 1

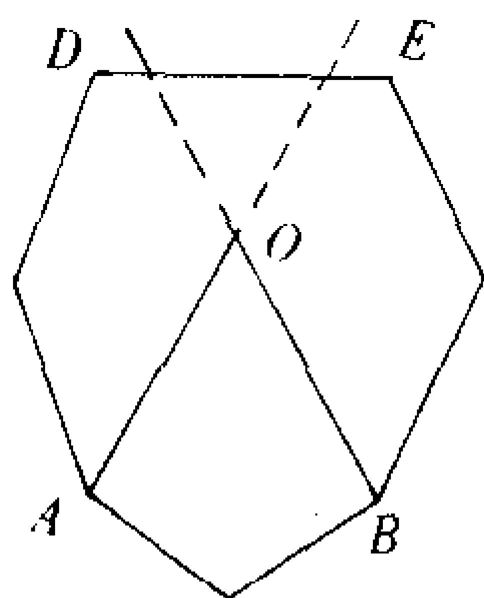


图 2

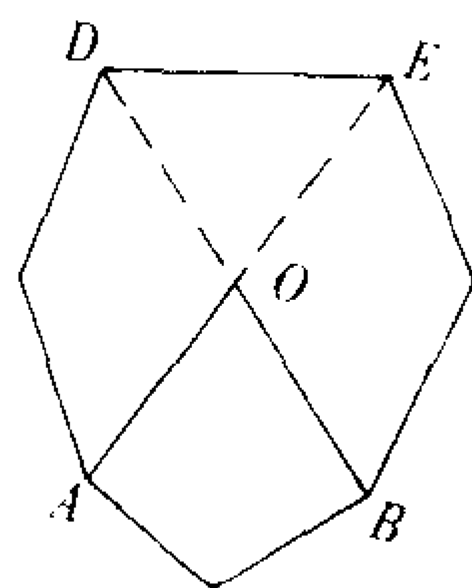
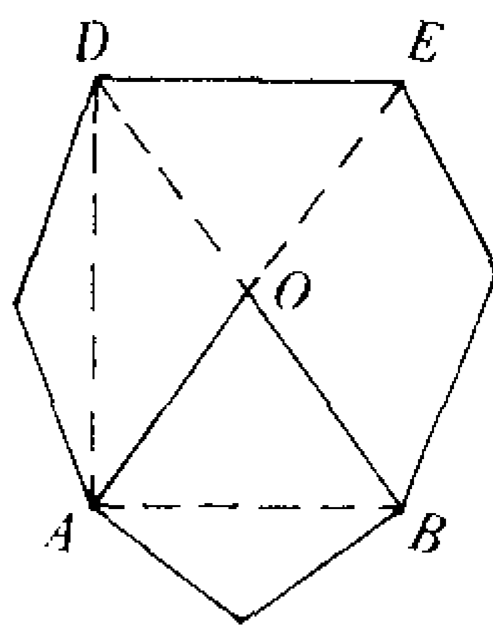


图 3

对于情形 1,点 O 在 $\triangle ABC$ 内部,则

$OA=OB=OC$;

对于情形 2,点 O 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDE$ 内,亦有 $OA=OD=OE=OB$;



对于情形 3,考虑等腰 $\triangle OAB$ 和等腰 $\triangle OAD$ 可证 $OA=OB=OD$.

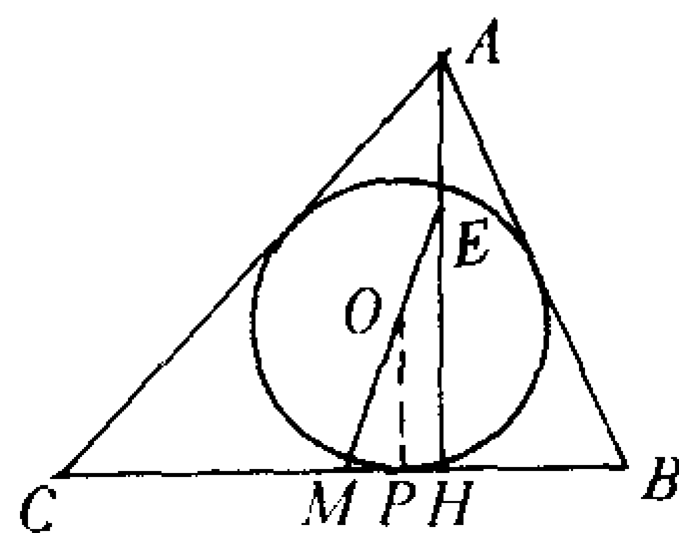
同理 $OA=OB=OE$, 亦有

$OA=OB=OD=OE$.

3. 直线形与圆中的线段相等问题

1·40 在 $\triangle ABC$ 中,过 BC 边的中点 M 和该三角形内心 O 引直线 MO 与高 AH 交于点 E.求证:线段 AE 的长等于内切圆的半径.

（第 4 届全俄数学奥林匹克,1970 年）



[证] 设 a、b、c 分别是$\triangle ABC$三个顶点 A、B、C 的对边，r 为$\odot O$的半径，不妨设 $b>c$，从 O 作 $OP\perp BC$ 有

$$MC=\frac{a}{2},\quad PC=\frac{a+b-c}{2}$$

$$HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{2HC-a}{b-c}=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle COB}}-\frac{b+c}{a}=\frac{(a+b+c)\cdot r}{a\cdot r}-\frac{b+c}{a}$$

$$=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1,$$

$\therefore\quad AE=r.$

1·41 给定正$\triangle ABC$，对于形内一点 P 考察直线 AP 与 BC 的交点 A'，直线 CP 与 BA 的交点 C'. 试求：点 P 的几何位置，使 $AA'=CC'$.

（第 58 届莫斯科数学竞赛，1995 年）

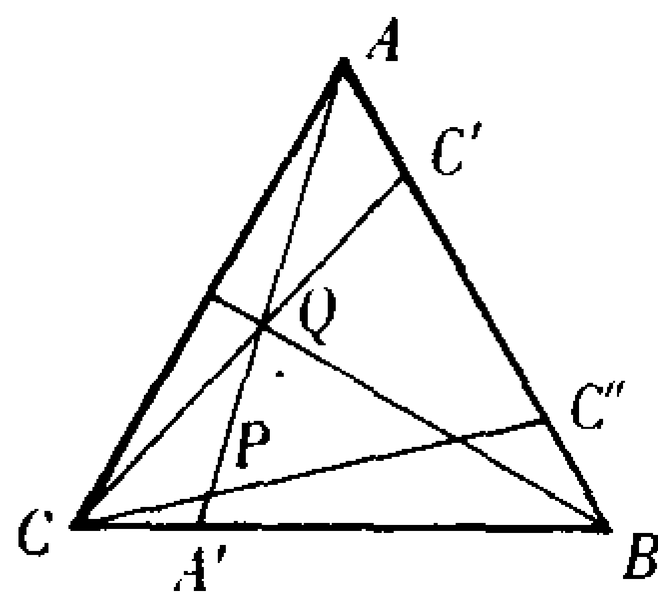


图 1

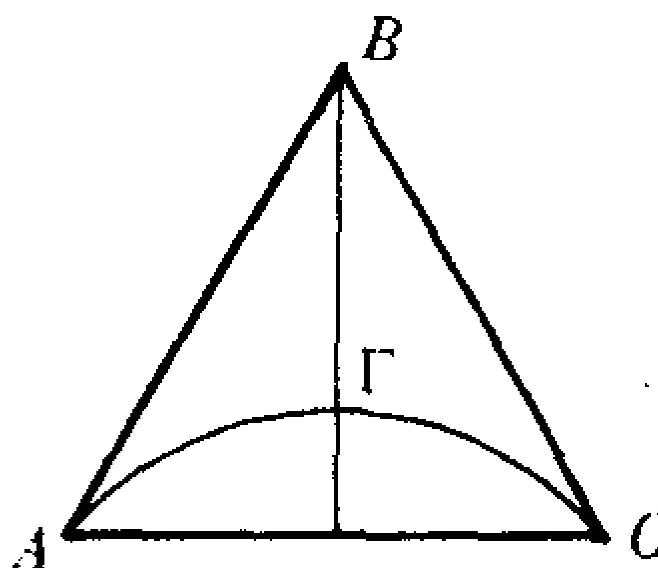


图 2

[解] 在 BC 上任取一点 A'，并连线段 AA'. 易知，一个端点为 C，另一个端点在边 AB 上的所有线段中，只有两条同 AA' 相等，这就是 CC' 与 CC''. 其中 $BC'=BA'$. $AC''=BA'$（见图 1）. 线段 AA' 同 CC' 的交点位于$\triangle ABC$的边 AC 的高上. 易知，该高之上的每一点都适合题中的要求.

再设 AA' 与 CC'' 的交点为 P.

注意到 $\triangle ACC''\cong\triangle BAA'$. 因此，

$$\begin{aligned}\angle APC&=180^\circ-(\angle PAC+\angle PCA)\\&=180^\circ-(\angle PAC+\angle PAC'')\\&=180^\circ-\angle CAB=120^\circ\end{aligned}$$

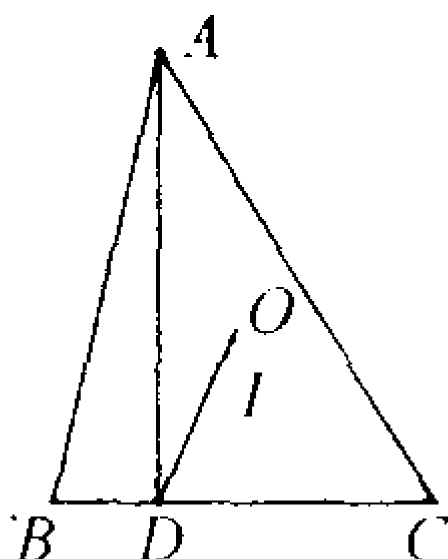
这表明点 P 位于由 A、C 及$\triangle ABC$的垂心所决定的圆周 Γ 之上.

反之，凡位于该圆周之上的且在$\triangle ABC$之内的点均适合题中要求.

综合上述，知适合题中要求的点 P 之集合

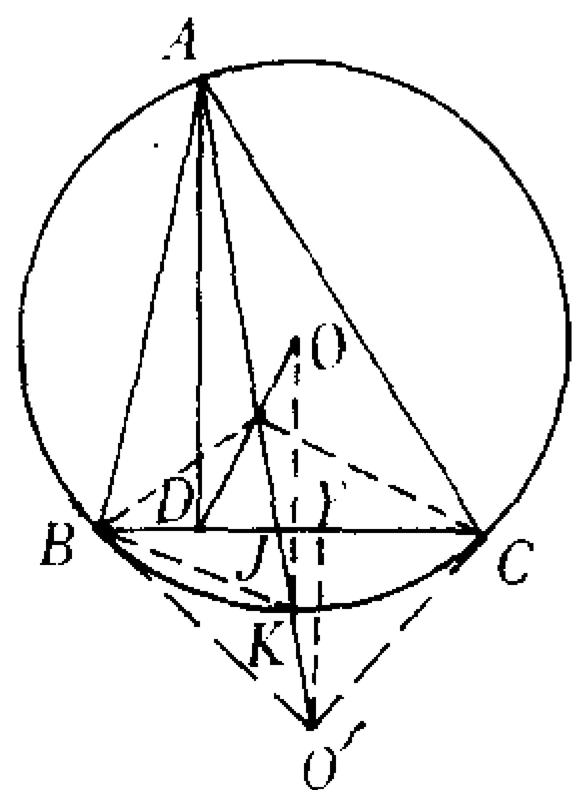
为$\triangle ABC$的边AC上的高以及上述圆周Γ位于$\triangle ABC$内部的弧段(见图2),再无其他的点.

1·42　如图,已知:O、I分别为$\triangle ABC$的外心和内心,AD是BC边上的高.I在线段OD上.求证:$\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.



(中国高中数学联赛,1998年)

[证1]　如图,作$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$,延长AI交BC于J,交$\overset{\frown}{BC}$于K,则K为$\overset{\frown}{BC}$中点,显然$OK\perp BC$.



设O'是与BC边相切的$\triangle ABC$的旁切圆圆心,则O'在AI延长线上,即A、I、J、K、O'共线.

作$O'Y\perp BC$于Y.则$O'Y$是旁切圆$\odot O'$的半径(记为r_a).

又$\because$　AD、OK、$O'Y$都垂直于BC,

$\therefore$　$AD /\!/ OK /\!/ O'Y$.

因此　$\triangle AID\backsim\triangle KIO$,

得　$\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}$,即　$\dfrac{AD}{R}=\dfrac{AI}{IK}$.　①

又由　$\triangle ADJ\backsim\triangle O'YJ$,

得　$\dfrac{AD}{O'Y}=\dfrac{AJ}{JO'}$,即　$\dfrac{AD}{r_a}=\dfrac{AJ}{JO'}$.　②

于是,要证$R=r_a$,只需证　$\dfrac{AI}{IK}=\dfrac{AJ}{JO'}$　即可.

连结BI、IC、CO'、$O'C$,易知　$\angle IBO'=\angle ICO'=90°$.

$\therefore$　B、I、C、O'四点共圆.

因此　$\angle AO'C=\angle IBC=\dfrac{\angle B}{2}=\angle ABI$.

又$\angle BAI=\angle O'AC$,　$\therefore$　$\triangle ABI\backsim\triangle AO'C$.

$\therefore$　$\dfrac{AB}{AI}=\dfrac{AO'}{AC}$,即　$AI\cdot AO'=AB\cdot AC$.　③

连结BK,在$\triangle ABK$与$\triangle AJC$中,

$\because$　$\angle BAK=\angle JCA$,$\angle BKA=\angle JCA$,

$\therefore\ \triangle ABK \backsim \triangle AJC$. 有 $\dfrac{AB}{AK}=\dfrac{AJ}{AC}$,

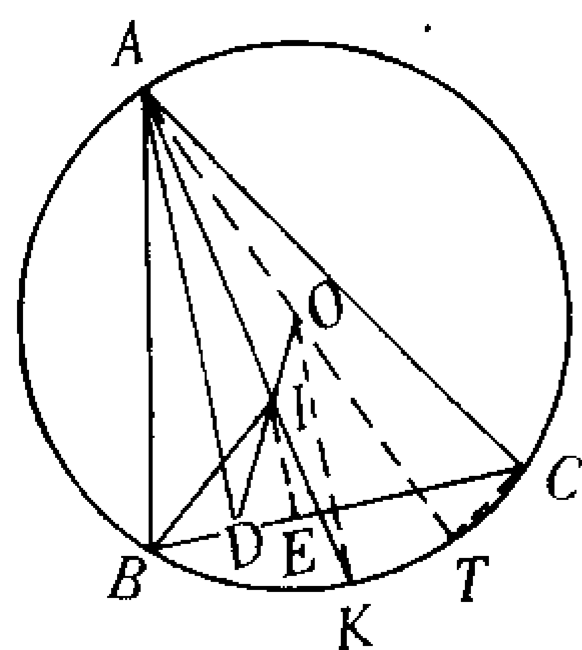
即 $A_1K \cdot AJ = AB \cdot AC$. ④

由③、④可得 $AI \cdot AO' = AK \cdot AJ$.

即 $\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{AO'}{AJ}$.

由 $\dfrac{AI+IK}{AI}=\dfrac{AJ+JO'}{AJ}$, 有 $\dfrac{IK}{AI}=\dfrac{JO'}{AJ}$. ⑤

将式⑤结合①、②可得 $\dfrac{R}{AD}=\dfrac{r_a}{AD}$. $\therefore\ R=r_a$.



[证 2] 如图,作 $IE\perp CD$ 于 E,作 $OF\perp CD$ 于 F,则 E 为$\triangle ABC$ 内切圆与 BC 边的切点,F 为 BC 中点. AO 与圆交于 T.

设 $BC=a, AC=b, AB=c$,及

$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$,则有

$BE=\dfrac{a+c-b}{2}$, $BF=\dfrac{a}{2}$,

$BD=c\cos B$, $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{a+c-b-2c\cos B}{b-c}$.

由 $\angle B=\angle ATC$, 得 $\angle BAD=\angle TAC$, $\therefore\ \angle DAI=\angle OAI$.

在$\triangle ADO$ 中 AI 平分$\angle DAO$,则 $\dfrac{AD}{AO}=\dfrac{DI}{IO}=\dfrac{DE}{EF}$.

设$\triangle ABC$ 面积为 S,则 $AD=\dfrac{2S}{a}$,代入得

$$\frac{\frac{2S}{a}}{R}=\frac{a+c-b-2c\cos B}{b-c}. \qquad ⑥$$

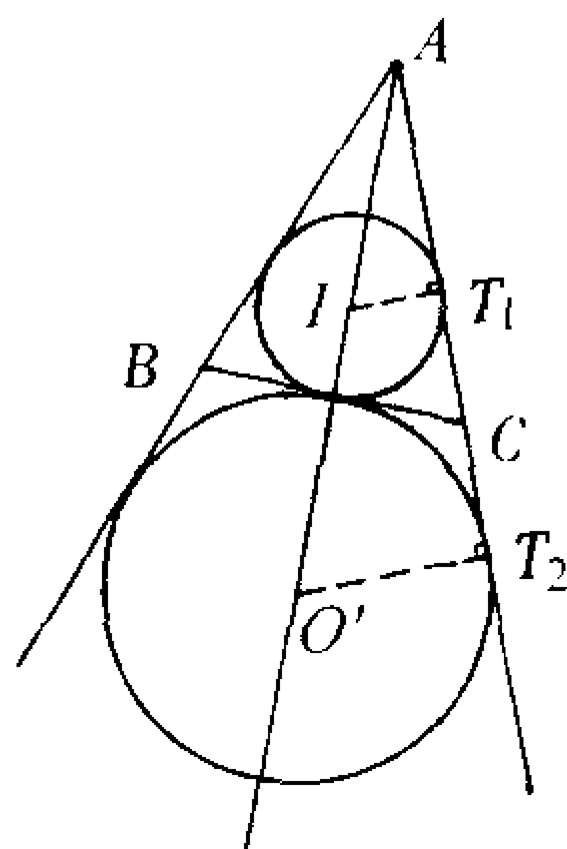
$$\because\ a^2-2ac\cos B = a^2-(a^2+c^2-b^2) = (b-c)(b+c) = (b-c)(2p-a),$$

$$\therefore\ \frac{2p-a}{a}=\frac{a-2c\cos B}{b-c}.$$

故由⑥可有

$$\frac{2p-2a}{a}=\frac{a+c-b-2c\cos B}{b-c}=\frac{2S}{aR},$$

$\therefore\quad (p-a)R=S=rp.$ ⑦



如图又可证　$\triangle AIT_1 \backsim \triangle AO'T_2$,

$\therefore\quad \frac{r}{r_a}=\frac{AT_1}{AT_2}.$

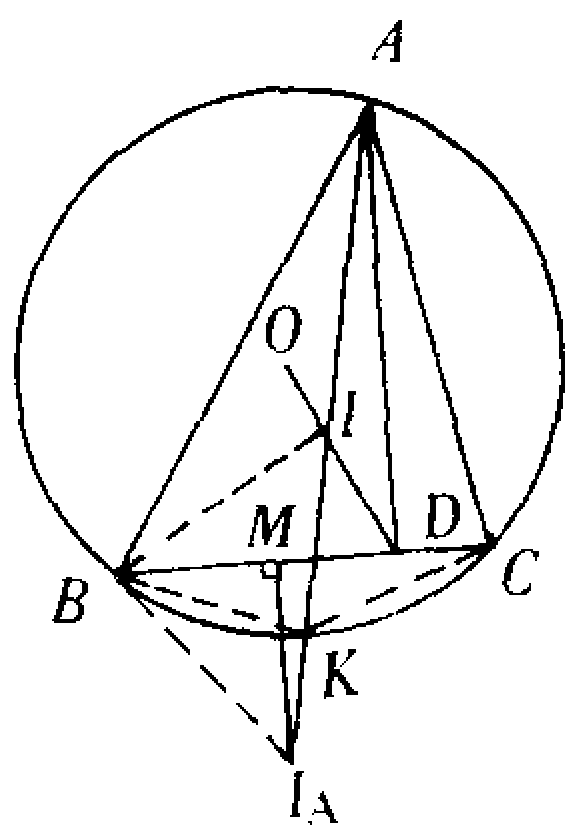
但 $AT_1=p-a$，$AT_2=p$,

$\therefore\quad \frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p},$

即　$(p-a)r_a=rp.$ ⑧

比较(8)、(9)即可得　$R=r_a$.

[证3]　设 I_A 为旁切圆圆心. 则 A、I、I_A 共线,交⊙O 于K,交 BC 于P. 显然,K 为$\overset{\frown}{BC}$中点. 于是,$OK\perp BC$,$OK=R$.



$\because\quad \angle IBI_A=90°$,

$\angle IBK=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\angle BIK$,

$\therefore\quad BK=IK$，即　BK 为$\triangle BII_A$ 斜边中线.

$\because\quad BK=KC$，　$\therefore\quad BK=IK=KI_A=KC$.

设旁切圆半径为 R_A,有　$I_AM=R_A$.

$\because\quad AD\perp BC$，$I_AM\perp BC$,

$\therefore\quad \frac{R_A}{AD}=\frac{I_AP}{AP}$，$\frac{R}{AD}=\frac{IK}{IA}$.

因此,要证 $R_A=R$ 只需证　$\frac{I_AP}{AP}=\frac{IK}{IA}$,

$\because\quad I_AP=2IK-IP$，$AP=IA+IP$,

只需证　$\frac{2IK-IP}{IA+IP}=\frac{IK}{IA}$,

即　$IK\cdot IA-IA\cdot IP=IP\cdot IK$,

或　$IK\cdot IA=IP(IA+IK)=IP\cdot AK$,

亦或　$\frac{IA}{IP}=\frac{AK}{IK}$. ⊛

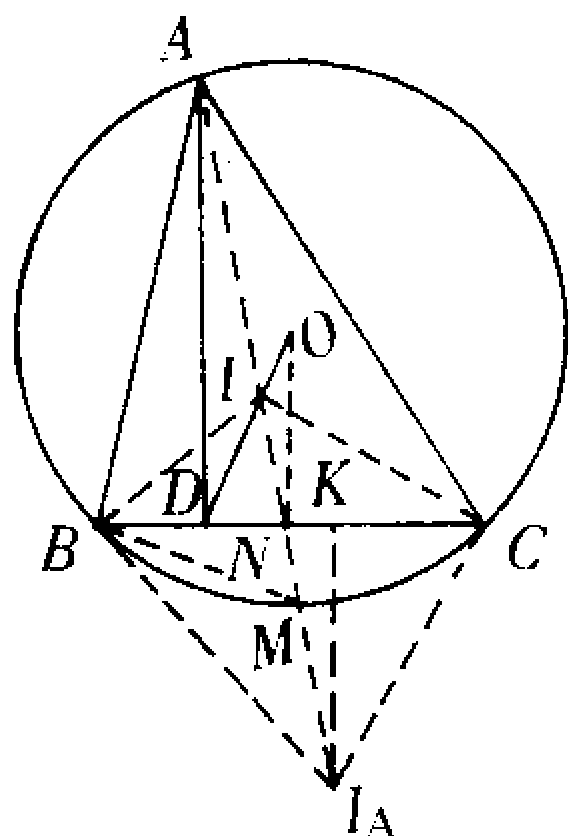
$\because$ BI 为角平分线， $\therefore$ $\frac{IA}{IP}=\frac{AB}{BP}$.

$\because$ $IK=KC$， $\therefore$ $\frac{AK}{IK}=\frac{AK}{KC}$.

故(*)等价于 $\frac{AB}{BP}=\frac{AK}{KC}$. (**)

$\because$ AI 为角平分线， $\therefore$ $\angle BAP=\angle KAC$.

$\because$ $\angle ABP=\angle AKC$， $\therefore$ $\triangle ABP\backsim\triangle AKC$，故(**)成立.



[证 4] 连结 IB、IC，作 $I_AB\perp IB$、$I_AC\perp IC$ 交于 I_A，则 I_A 即为$\triangle ABC$ 的 BC 边上旁切圆圆心.

显然，A、I、I_A 三点共线.

连结 AI、II_A，并设 II_A 交 BC 于 N，交$\triangle ABC$ 外接圆于 M，连结 OM、BM，过 I_A 作 $I_AK\perp BC$ 于 K.

则 OM 的长即为$\triangle ABC$ 外接圆半径，I_AK 的长即为$\triangle ABC$ 的 BC 边上旁切圆的半径. 所以，只需证明 $OM=I_AK$.

$\because$ I 为内心， $\therefore$ M 平分$\overset{\frown}{BC}$.

$\because$ AD 是 BC 边上的高，M 为$\overset{\frown}{BC}$中点，

$\therefore$ $AD\perp BC$，$OM\perp BC$.

于是 $AD/\!/OM/\!/I_AK$.

有 $\frac{KI_A}{AD}=\frac{NI_A}{AN}$，$\frac{OM}{AD}=\frac{IM}{AI}$.

故只需证明 $\frac{NI_A}{AN}=\frac{IM}{AI}$. ①

$\because$ I 为$\triangle ABC$ 内心，

$\therefore$ $\angle BAI=\angle CAI$，$\angle ABI=\angle CBI$，$\angle BCI=\angle ACI$.

则 $\angle BIM=\angle BAI+\angle ABI=\angle MAC+\angle CBI$

$=\angle CBM+\angle CBI=\angle IBM$.

故 $BM=IM$.

又$\because$ $IB\perp I_AB$，

$\therefore$ M 为$\triangle BII_A$ 斜边 II_A 的中点，

即 $IM=BM=MI_A$.

于是 $NI_A=NM+MI_A=NM+IM$.

又 $AN = AM - MN, AI = AM - IM$，

故要证①成立，只需证

$$\frac{NM + IM}{AM - MN} = \frac{IM}{AM - IM},$$

即 $(NM + IM)(AM - IM) = IM \cdot (AM - MN)$，

或 $NM \cdot AM - NM \cdot IM + AM \cdot IM - IM^2$

$= IM \cdot AM - IM \cdot MN$，

即 $IM^2 = NM \cdot AM$，

亦即 $BM^2 = NM \cdot AM$. ②

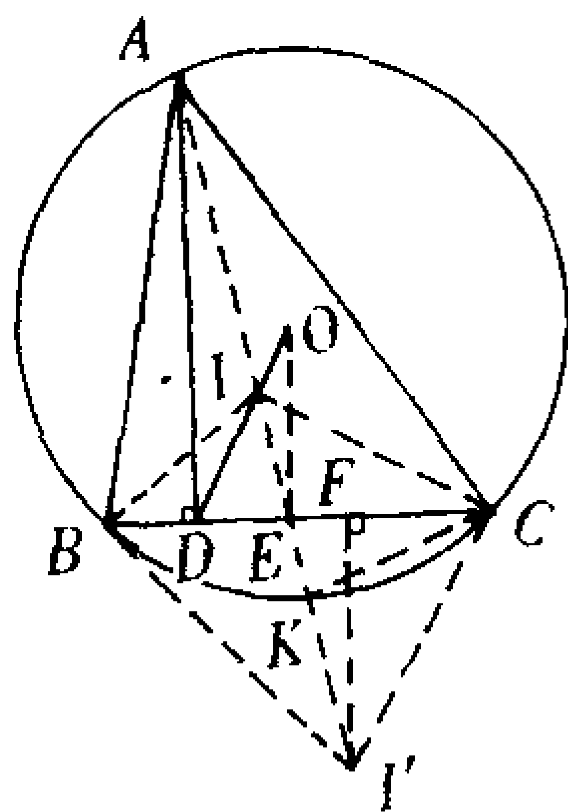
$\because$ $\angle MBN = \angle MAC = \angle MAB$，$\angle BMN = \angle AMB$，

$\therefore$ $\triangle MBN \backsim \triangle MAB$.

于是 $\dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MA}{MB}$， 即 $MB^2 = NM \cdot AM$.

故②式成立，从而①式成立，所以 $OM = KI_A$，即$\triangle ABC$的外接圆半径与BC边上的旁切圆半径相等.

[证 5] 设$\triangle ABC$中BC边上的旁切圆圆心为I'.



有 A、I、I'三点共线，作 $I'F \perp BC$ 于F，设直线 AI'与$\odot O$交于K与BC交于E，连 OK、CK、BI、CI，

$$\angle KIC = \angle IAC + \angle ICA$$
$$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$$
$$= \angle BCK + \angle ICB = \angle ICK,$$

$\therefore$ $IK = CK$，

$\because$ $\angle IBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC$，且 $\angle CBI' = \dfrac{1}{2}(180° - \angle ABC)$，

$\therefore$ $\angle IBI' = 90°$.

同理 $\angle ICI' = 90°$. $\therefore$ I、B、I'、C 四点共圆.

$\therefore$ $IE \cdot I'E = BE \cdot CE$， $\therefore$ $EI' = \dfrac{BE \cdot CE}{IE}$.

$\because$ $AD \perp BC$，$OK \perp BC$，$I'F \perp BC$，

$\therefore\quad \dfrac{AD}{I'F}=\dfrac{AE}{EI'},\ \dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}.$

$\therefore\quad \dfrac{I'F}{OK}=\dfrac{AI\cdot EI'}{IK\cdot AE}=\dfrac{AI\cdot BE\cdot CE}{IK\cdot AE\cdot IE}.$

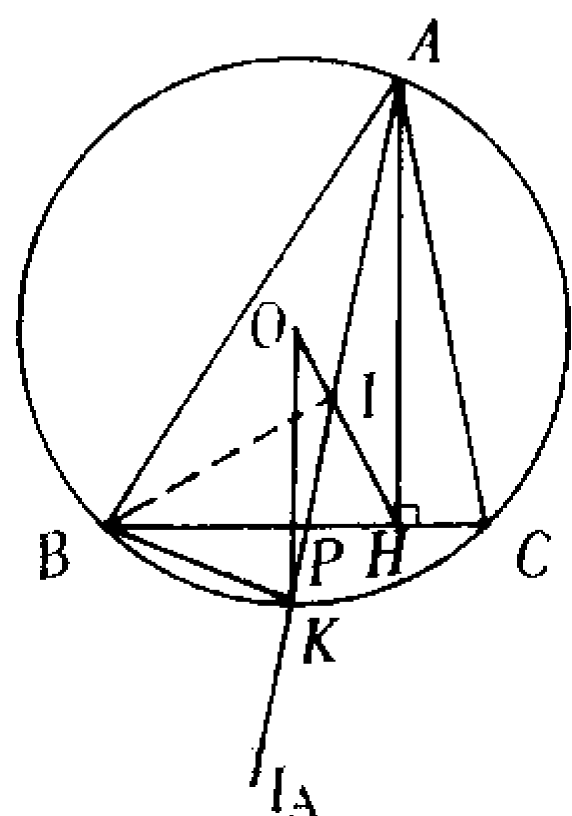
$\because\quad IB$ 平分$\angle ABC$， $\therefore\quad \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AI}{IE}.$

$\therefore\quad \dfrac{I'F}{OK}=\dfrac{BE\cdot CE}{IK\cdot AE}\cdot\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{CE\cdot AB}{IK\cdot AE}.$

又 $\triangle ABE\backsim\triangle CKE$，有 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{CK}{CE}$， 故 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{IK}{CE}.$

$\therefore\quad AB\cdot CE=IK\cdot AE.\quad \therefore\quad \dfrac{I'F}{OK}=1,\ \therefore\quad I'F=OK.$

又 OK 为$\odot O$ 半径，$I'F$ 为旁切圆半径，则$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于BC 边上的旁切圆的半径.



[证 6] 设 BC 边的旁切圆半径为 R_A，圆心 I_A. K 为AI 与外接圆交点，显然，A、I、K、I_A 共线，且 K 为点B、I、C、I_A 外接圆圆心.

$\because\quad R=OK,\ \therefore\quad \dfrac{R}{AH}=\dfrac{KI}{IA},\ \dfrac{R_A}{AH}=\dfrac{I_AP}{PA}.$

$\therefore$ 要证 $R=R_A$ 只需证 $\dfrac{KI}{IA}=\dfrac{I_AP}{PA}.$

$\because\quad I_AP=I_AK+KP=IK+KP,$

且 $PA=PI+IA$，

只需证 $\dfrac{KI}{IA}=\dfrac{IK+KP}{PI+IA}$， 即 $KI\cdot PI=IA\cdot KP$，

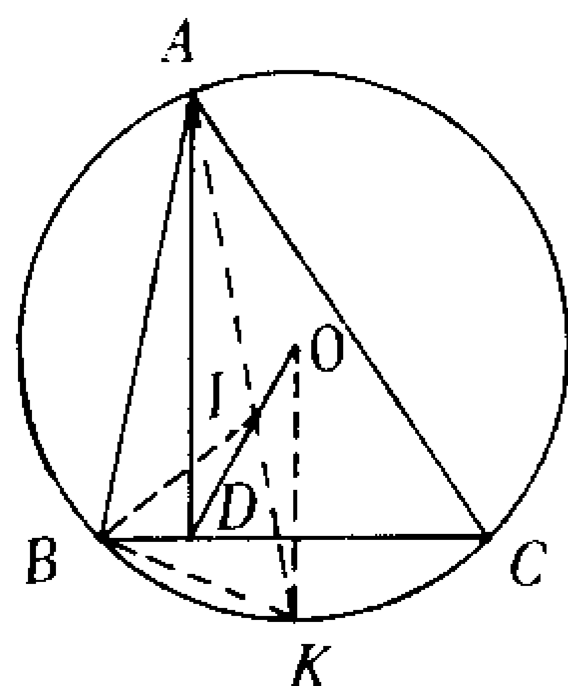
或 $\dfrac{PI}{PK}=\dfrac{AI}{IK}.$

$$\because\quad \frac{PI}{PK}=\frac{BI\sin\dfrac{B}{2}}{BK\sin\dfrac{A}{2}},$$

$$\text{又}\quad \frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{AB\sin\dfrac{B}{2}}{BK\sin\dfrac{A+B}{2}},$$

故有 $\dfrac{BI}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{AB}{\sin\dfrac{A+B}{2}}$.

这在$\triangle ABI$中应用正弦定理即可.



[证 7] 记$AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. 设AI的延长线交$\triangle ABC$的外接圆O于K点,则OK是$\odot O$的半径,记为R,因为$OK\perp BC$,所以$OK /\!/ AD$.从而,

$$\frac{AI}{IK}=\frac{AD}{OK}=\frac{c\sin B}{R}=2\sin B\sin C. \quad ①$$

又 $\angle ABI=\angle IBC=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle CBK=\angle CAK=\frac{1}{2}\angle A$,

$\angle AKB=\angle ACB=\angle C$, $\angle BAK=\frac{1}{2}\angle A$,

$$\therefore \quad \frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BI\cdot\sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}BK\cdot BI\cdot\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{AB}{BK}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}. \quad ②$$

由①、②得 $2\sin B\sin C=\dfrac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$.

$$\therefore \quad 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1. \quad ③$$

设$\triangle ABC$的BC边上的旁切圆半径为r_a,

则 $\frac{1}{2}bc\sin A=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$.

$$\therefore \quad r_a=\frac{bc\sin A}{b+c-a}=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

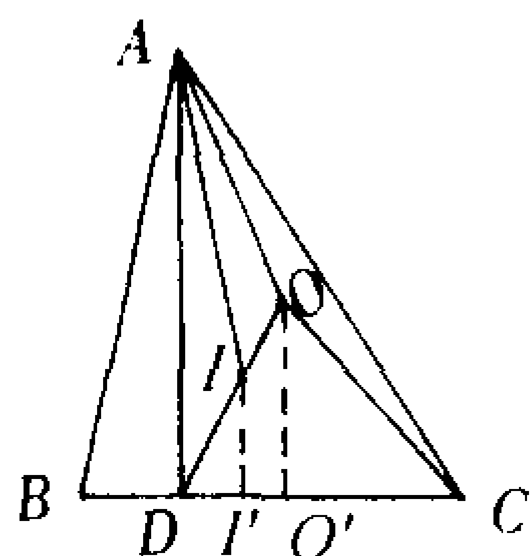
$$=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$= R \cdot \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin \frac{B+C}{2} \cdot 2\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= R \quad (由③),$$

即$\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上旁切圆的半径.



［证 8］ 记$AB=c, BC=a, CA=b$，$\triangle ABC$的外接圆半径为R，BC边上的旁切圆半径为r_a，作$II' \perp BC$于I'，$OO' \perp BC$于O'.

$$\because \quad \angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD,$$

$$\therefore \quad \angle DAI = \angle OAI. \quad \therefore \quad \frac{AD}{AO} = \frac{DI}{IO} = \frac{DI'}{I'O'}.$$

$$\because \quad DI' = BI' - BD = \frac{a+c-b}{2} - c \cdot \cos B$$

$$= \frac{a+c-b}{2} - c \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(b-c)\cdot(b+c-a)}{2a}.$$

$$I'O' = BO' - BI' = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2},$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AO} = \frac{b+c-a}{a}, \quad R = AO = \frac{AD \cdot a}{b+c-a} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}.$$

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} r_a \cdot (b+c-a)$.

$$\therefore \quad R = \frac{r_a(b+c-a)}{b+c-a} = r_a,$$

即 $\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.

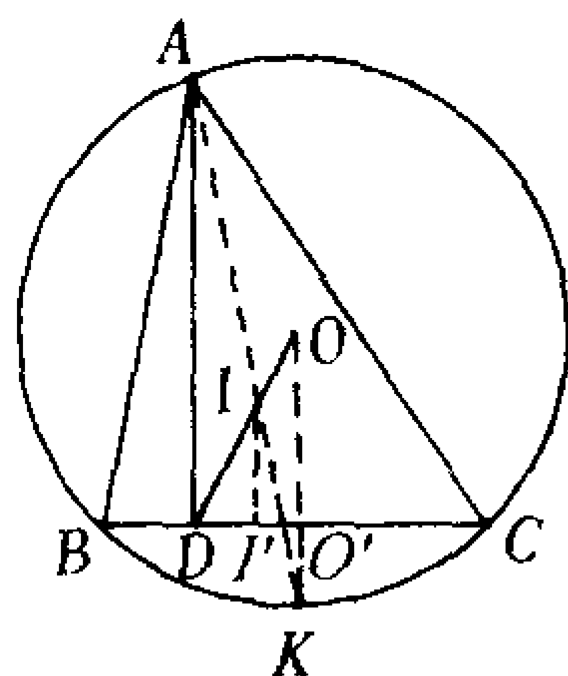
［证 9］ 设AI的延长线交$\triangle ABC$的外接圆于K，连OK交BC于O'，则$OK \perp BC$，作$II' \perp BC$于I'，易知：$AD /\!/ II' /\!/ OK$. 由D、I、O共线，

$$\therefore \quad \frac{DI'}{I'O'} = \frac{DI}{IO} = \frac{AD}{OK}.$$

又∵ $DI' = BI' - BD = \frac{a+c-b}{2} - c\cos B$

$$= \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}.$$

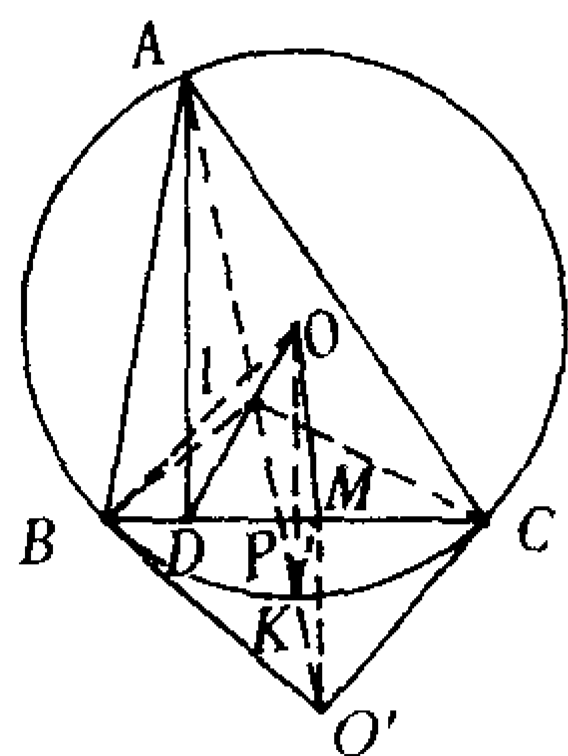
$I'O' = BO' - BI' = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2}.$



∴ $\frac{b+c-a}{a} = \frac{AD}{R}.$

故 $R = \frac{a\cdot AD}{b+c-a} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}$.（下同证 8）

[证 10] 如图，连 AI 并延长交于⊙O 于 K，设 O' 为旁切圆圆心，则 O' 在 AK 的延长线上.



连 OK，过 O' 作 $O'M\perp BC$ 于 M.

连 OM、MK、BI、CI、$O'B$、$O'C$，则 OK、$O'M$ 分别为外接圆半径及旁切圆半径.

易知 B、I、C、O' 共圆.

又 $BK=IK=CK$，设 K 为 $BICO'$ 的外接圆圆心，即 $IK=O'K$.

又 $AP\cdot PK = BP\cdot PC = IP\cdot O'P$，

∴ $\frac{PK}{IP} = \frac{O'P}{AP}$. 又∵ $AD /\!/ O'M$，

∴ $\frac{PK}{IP} = \frac{O'P}{AP} = \frac{MP}{DP}$， ∴ $MK /\!/ ID$，$\angle PMK = \angle IDP$，

而 D、I、O 共线， $OK\perp BC$， $O'M\perp BC$.

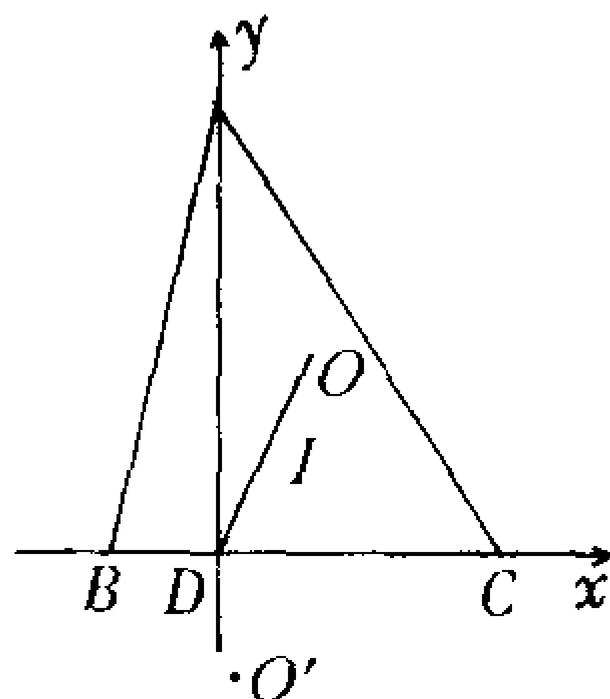
∴ $OK /\!/ O'M$，

故 $\angle IOK = \angle KMO'$， $\angle OKI = \angle MOK$， $IK = O'K$.

∴ $\triangle OIK \cong \triangle MKO'$，

故 $OK = O'M$， 即 $R = r_a$.

[证 11] 记△ABC 的 BC 边上的旁切圆圆心为 O'.



以 D 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系.

设 A 点坐标为 $(0,a)$，B 点坐标为 $(-b,0)$，C 点坐标为 $(c,0)$ $(a,b,c>0)$. 则 AB 中点坐标为

$\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$. 又 $k_{AB}=-\frac{a}{b}$.

所以,AB 中垂线方程为 $y-\frac{a}{2}=-\frac{b}{a}\left(x+\frac{b}{2}\right)$.

又 BC 中垂线方程为 $x=\frac{-b+c}{2}$,

所以,解得 O 点坐标为$\left(\frac{-b+c}{2},\frac{a^2-bc}{2a}\right)$.

又$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|AC|=\sqrt{c^2+a^2}$, $|BC|=c+b$.

由三角形内心坐标公式,可得 I 点坐标为(记 $T=c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}$):

$$\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{c^2+a^2}}{T},\ \frac{a(c+b)}{T}\right).$$

$$\therefore\quad k_{DI}=\frac{a(c+b)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{c^2+a^2}}.$$

又 $k_{DO}=\frac{a^2-bc}{a(c-b)}$, 由 D、I、O 共线得 $k_{DI}=k_{DO}$,

即 $a^2(c^2-b^2)=(a^2-bc)(c\sqrt{a^2+b^2}-b\cdot\sqrt{c^2+a^2})$. $\qquad(*)$

下面来求 O'点坐标.

$\because$ $BO'\perp BI$, $CO'\perp CI$, 又 $k_{BI}=\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\therefore\quad k_{BO'}=-\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

BO'方程为 $y=-\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot(x+b)$. ①

又 $k_{CI}=-\frac{a}{c+\sqrt{a^2+c^2}}$,

$$\therefore\quad k_{CO'}=\frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a},$$

CO'方程为 $y=\frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}\cdot(x-c)$. ②

①、②两式联立解得 O'坐标为

$$\left(\frac{c^2-b^2+c\sqrt{a^2+c^2}-b\sqrt{a^2+b^2}}{c+b+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}},\right.$$

$$\left.-\frac{(b+c)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}\right).$$

所以,旁切圆半径就是 O'点纵坐标的相反数,即

$$r_A=\frac{(c+b)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}.$$

而外接圆半径

$$R=|OA|=\sqrt{\left(\frac{c-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2-bc}{2a}-a\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2a}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

只需证 $\frac{1}{2a}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$$=\frac{(c+b)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}. \qquad ③$$

而式③等价于

$$(a^2-bc)(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})$$
$$=(c+b)(c\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2bc).$$

由(*)式有 $a^2-bc=\frac{a^2(c^2-b^2)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{a^2+c^2}}.$

所以,式(3)又等价于

$$\frac{a^2(c^2-b^2)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{a^2+c^2}}\cdot(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})$$
$$=(c+b)(c\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2bc)$$

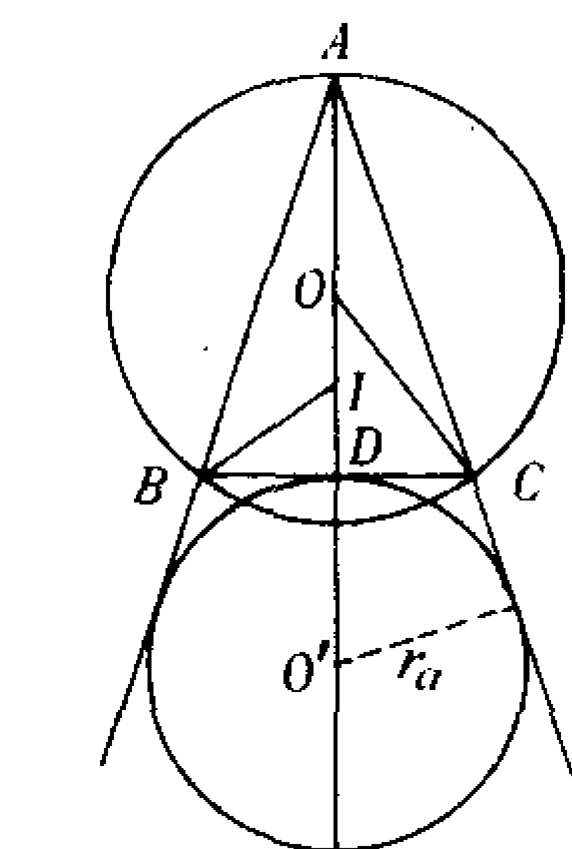
即 $a^2(c-b)(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})$

$$=(c^2-b^2)a^2-b(a^2-c^2)\sqrt{a^2+b^2}+c(a^2-b^2)\sqrt{a^2+c^2}$$

或 $c(a^2-bc)\sqrt{a^2+b^2}+b(a^2-bc)\sqrt{a^2+c^2}=(c^2-b^2)a^2.$

这由(*)立得.

注1 三角形内心坐标公式:$\triangle ABC$ 三边为 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. 在平面直角坐标系下 A、B、C 坐标分别为 (x_A,y_A), (x_B,y_B), (x_C,y_C), 则它的内心坐标为 $\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$.



注2 本命题结论可以推广,因此问题可一般叙述为:O、I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, AD 是 BC 边上的高, I 在线段 OD 上. 如果 $AB\neq AC$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆的半径.

其逆命题:

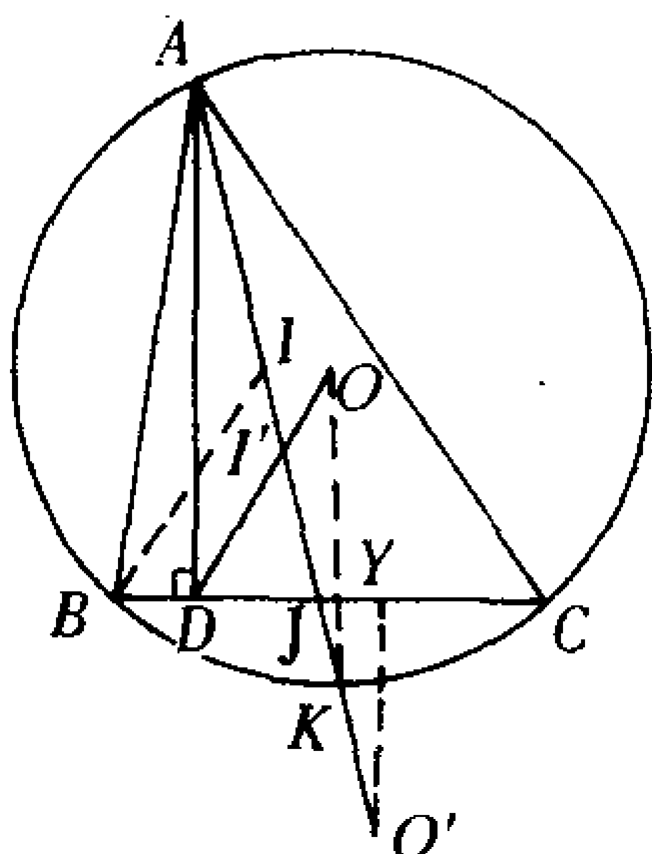
$\triangle ABC$ 中, $AB\neq AC$, O 是外心, I 是内心, AD 是 BC 边上的高. 如果 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆半径, 则 I 在线段 OD 上.

其证明思路如下:

$\because$ $AB\neq AC$, 所以外心 O 不在高 AD 上.

连结 OD 交 AO' 于 I', 则由

$\triangle ADI'\backsim\triangle KOI'$, $\triangle ADJ\backsim\triangle O'YJ$,



得 $\dfrac{AI'}{I'K}=\dfrac{AD}{R}=\dfrac{AD}{r_a}=\dfrac{AJ}{JO'}$,

$\therefore$ $\dfrac{AI'}{AI'+I'K}=\dfrac{AJ}{AJ+JO'}$.

即 $\dfrac{AI'}{AK}=\dfrac{AJ}{AO'}$. ㊀

若 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 则 A、I、J、K、O' 共线, 根据 $\triangle ABC$ 的一般性质, 有

$\dfrac{AI}{AK}=\dfrac{AJ}{AO'}$. (**)

对照㊀与(**)得 $AI'=AI$.

所以 I 与 I' 重合, 即 D、I、O 共线.

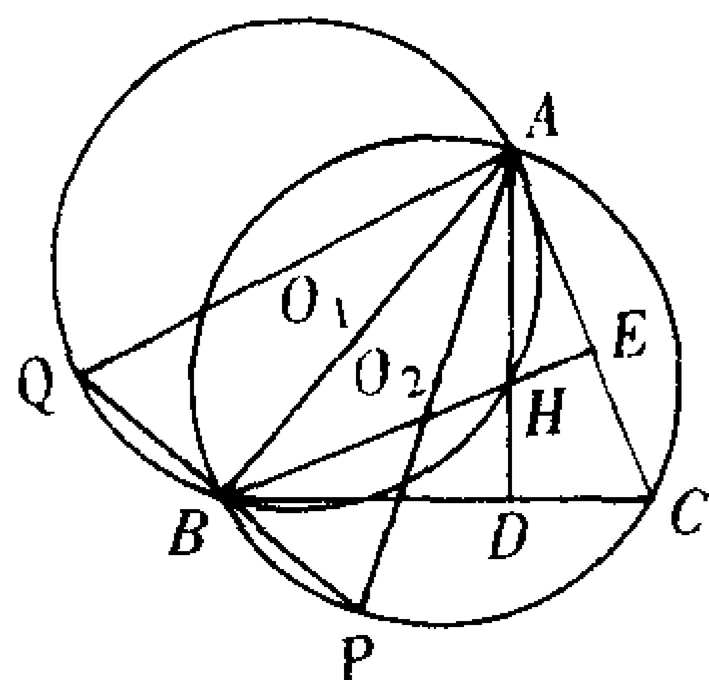
1·43 已知: $\triangle ABC$ 的高 AD, BE 交于 H, $\triangle ABC$、$\triangle ABH$ 的外接圆分别为 $\odot O$ 和 $\odot O_1$, 求证: $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的半径相等.

(中国山西省太原市数学竞赛,1993年)

[证] 如图, 过 A 作 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的直径 AP、AQ, 连接 PB、QB.

$\because$ $\angle ABP=90^\circ=\angle ABQ$,

$\therefore$ P、B、Q 共线.



∵ A、H、B、Q 共圆,

∴ $\angle Q=\angle AHE$. ①

又∵ A,B,P,C 共圆,

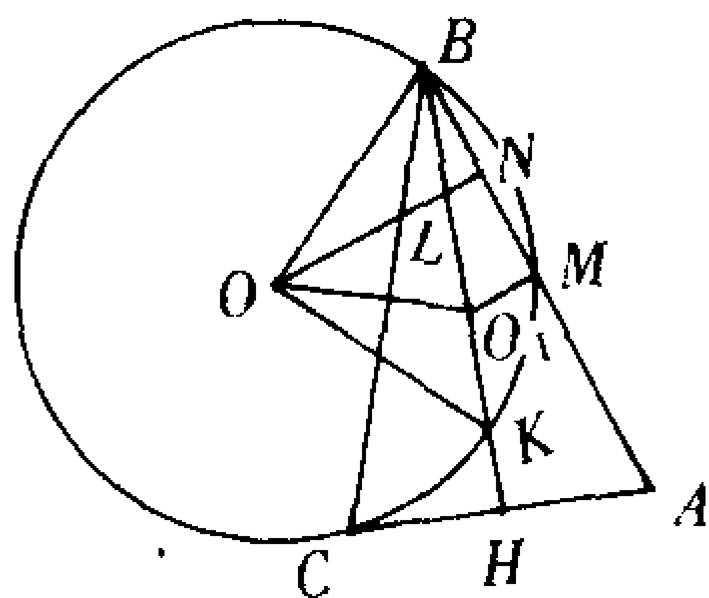
∴ $\angle P=\angle C$. ②

∵ E、H、D、C 共圆,

∴ $\angle C=\angle AHE$. ③

由①、②、③,得 $\angle P=\angle Q$.

∴ $AP=AQ$,即 $\odot O$ 与$\odot O_1$ 半径相等.



1·44 在等腰△ABC 中,$AB=BC$,BH 是高,点 M 是边AB 的中点,而经过点 B、M 与 C 的圆同 BH 的交点是K.求证:$BK=\frac{3}{2}R$,其中 R 是△ABC 的外接圆半径.

(莫斯科数学奥林匹克,1962 年)

[证] 设过 M、B、C 圆的圆心是 O,△ABC 的外接圆为$\odot O_1$,半径为 R.又 BM 的中点是N,ON 与BH 交于L.

∵ $OO_1\perp BC$, $O_1M\perp AB$, $ON\perp BM$,

∴ $BL=LO_1$, $\angle OO_1B+\angle O_1BC=90^\circ$,

$\angle OLO_1+\angle O_1BN=\angle BLN+\angle O_1BN=90^\circ$.

但 $\angle O_1BC=\angle O_1BN$,

∴ $\angle OO_1B=\angle OLO_1$.

又 $OB=OK$, $\angle OBO_1=\angle OKL$,

∴ △OBO_1≌△OLK. 有 $BO_1=LK=R$.

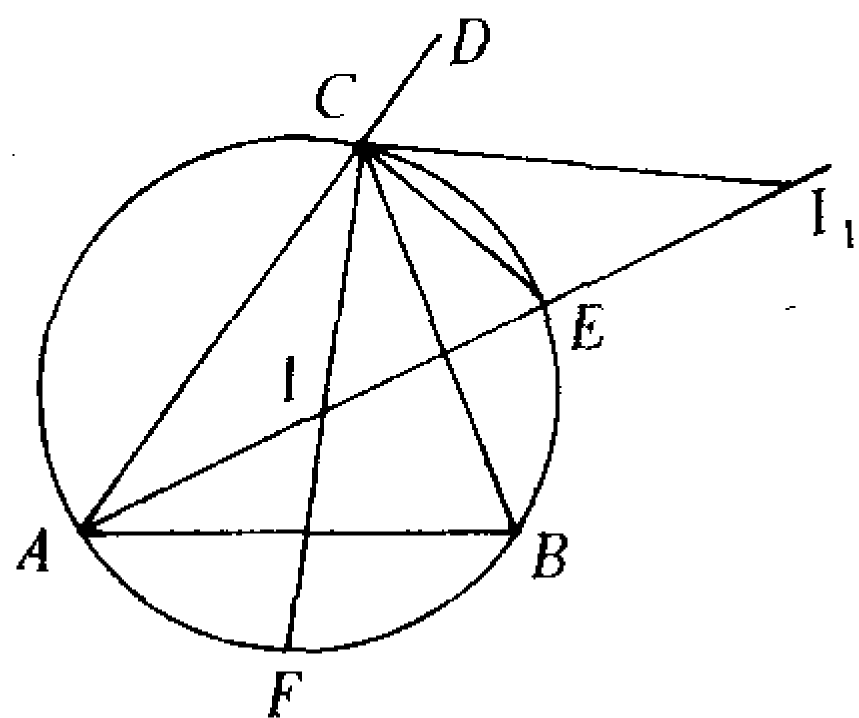
故 $BK=\frac{3}{2}R$.

1·45 试证:对于任何三角形,其内切圆圆心和旁切圆圆心的连线,都被其外接圆圆周所平分.

(莫斯科数学奥林匹克,1949 年)

[证] 设△ABC 的内心为 I,切于 BC 边的旁切圆圆心为 I_1,△ABC 的外接圆$\odot I$ 与 II_1 交于 E,与 CI 交于F.连接诸线段如下图:

∵ $\angle DCI_1=\angle I_1CB$,



$\angle ACF = \angle BCF$,

$\therefore \quad \angle I_1CI = 90°$.

又 $\angle EIC \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{AF})$,

$\angle ECI \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{BF})$,

但 $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BF}$,

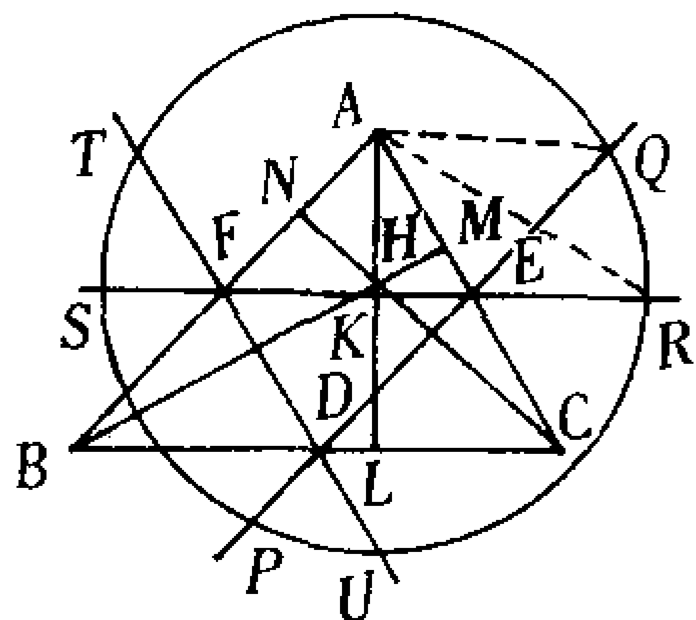
$\therefore \quad \angle EIC = \angle ECI$.

故 E 是 II_1 的中点.

1·46 H 为$\triangle ABC$ 的重心,D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点,一个以 H 为圆心的圆交直线 DE 于 P、Q,交直线 EF 于 R、S,交直线 FD 于 T、U,求证:$CP = CQ = AR = AS = BT = BU$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[证] 设 AL、BM、CN 为$\triangle ABC$ 的高,r 为圆 H 的半径.



又设 AL 交中位线 EF 于 K,则 $AK = \frac{1}{2}AL$,连 AR.

$$
\begin{aligned}
\text{又} \quad AR^2 &= AK^2 + KR^2 = AK^2 + r^2 - HK^2 \\
&= r^2 + (AH + HK)^2 - HK^2 \\
&= r^2 + AH(AK + HK) \\
&= r^2 + AH \cdot HL.
\end{aligned}
$$

同理 $AS^2 = r^2 + AH \cdot HL$, $BT^2 = r^2 + BH \cdot HM$,

$BU^2 = r^2 + BH \cdot HM$, $CP^2 = r^2 + CH \cdot HN$,

$CQ^2 = r^2 + CH \cdot HN$.

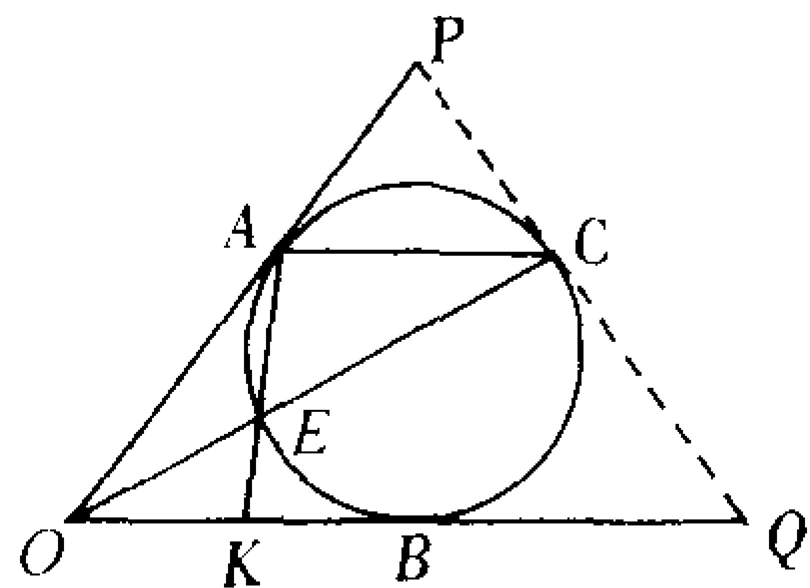
由于 A、C、L、N 共圆, 有 $AH \cdot HL = CH \cdot HN$,

由于 B、N、M、C 共圆, 有 $BH \cdot HM = CH \cdot HN$.

$\therefore \quad AR = AS = BT = BU = CP = CQ$.

1·47 过圆外一点 O 作圆的两条切线,切点分别为 A、B,过点 A 作弦 $AC \parallel OB$,连结 OC 交圆于点 E,直线 AE、OB 交于点 K,求证:$OK = KB$.

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)



[证 1] 过点 C 作圆的切线分别交直线 OA、OB 于点 P 和 Q，于是 $PA=PC$.

$\because\quad AC/\!/OQ$,

$\therefore\quad OB=OA=CQ=BQ$.

$\because\quad \angle OAK=\angle ACO=\angle COK$,

$\quad\ \angle AOK=\angle Q$,

$\therefore\quad \triangle AOK\backsim\triangle OQC$.

$\therefore\quad \dfrac{OK}{OA}=\dfrac{CQ}{OQ}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\quad OK=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}OB$.

$\therefore\quad OK=KB$.

[证 2] $\because$ OA 为圆的切线，则 $AC/\!/OQ$,

$\therefore\quad \angle OAK=\angle ACO=\angle EOK$.

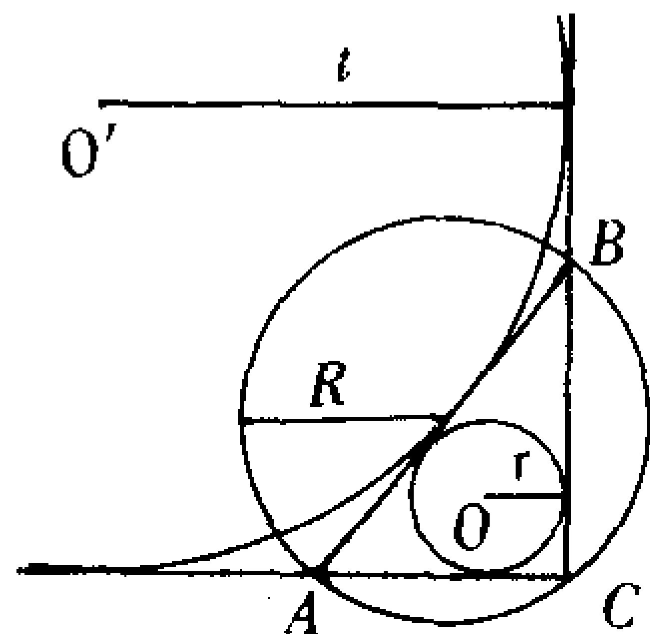
$\therefore\quad \triangle AOK\backsim\triangle OEK$. $\quad\therefore\quad KO^2=KA\cdot KE$.

又 $\because\quad KB^2=KA\cdot KE$. $\quad\therefore\quad KB^2=KO^2$.

$\therefore\quad OK=KB$.

1·48 若一直角三角形的外接圆半径为 R，其内切圆半径为 r，与斜边相切的旁切圆半径为 t，若 R 为 r 及 t 的比例中项，证明：这直角三角形为等腰直角三角形.

（中国北京市数学竞赛，1957 年）



[证] 如图，设直角三角形的斜边为 c，直角边为 a、b，则

$$r=\frac{a+b-c}{2},\quad t=\frac{a+b+c}{2},\quad R=\frac{c}{2}.$$

$\because$ R 为 r 及 t 的比例中项,

$\therefore\quad R^2=rt$,

即 $\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a+b-c}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{2}$，或

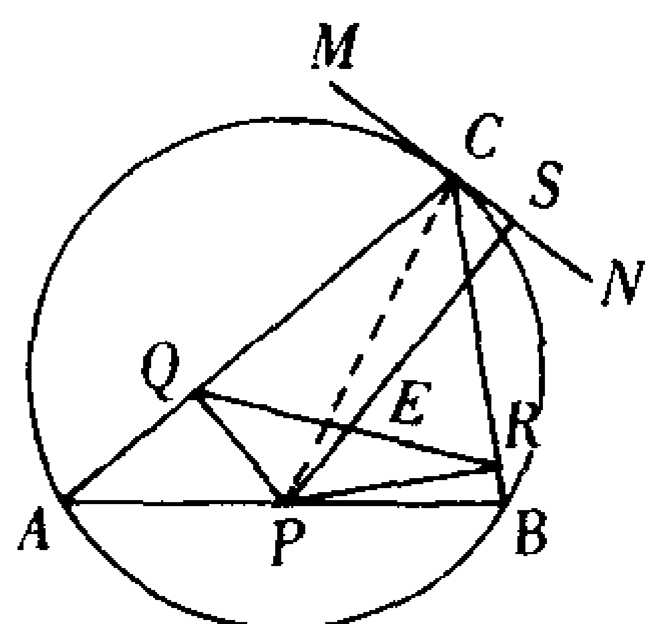
$\quad 2c^2=(a+b)^2$,

又 $c^2=a^2+b^2$，$\therefore\quad (a-b)^2=0$，有 $a=b$.

即这直角三角形为等腰直角三角形.

1·49 若△ABC 内接于圆 O，过 AB 中点 P 作 $PQ\perp AC$、$PR\perp$

BC,垂足为 Q、R,过 C 作圆的切线 MN,过 P 作 $PS\perp MN$ 于 S,连 QR 交 PS 于 E.求证:$QE=RE$.



(中国湖北省荆州地区数学竞赛,1986年)

[证] 连结 PC.

∵ $\angle PQC=\angle PRC=\angle PSC=90^\circ$,

∴ Q、R、S 都在以 PC 为直径的圆周上.

在 $\triangle PER$ 和 $\triangle APC$ 中,

∵ $\angle EPR=\angle RCS=\angle A$,

$\angle PRE=\angle PCA$,

∴ $\triangle PER\backsim\triangle APC$ ∴ $\dfrac{ER}{PC}=\dfrac{PE}{AP}$. ①

同理 $\triangle PEQ\backsim\triangle BPC$ ∴ $\dfrac{QE}{PC}=\dfrac{PE}{PB}$. ②

∵ $AP=PB$, ∴ 由①、②得 $QE=ER$.

1·50 $\triangle ABC$ 中,$AB=BC$,又 CD 是角平分线,O 是其外心,过 O 作 CD 的垂线交 BC 于 E,再过 E 作 CD 平行线交 AB 于 F.求证:$BE=FD$.

(第22届全俄数学奥林匹克,1996年)

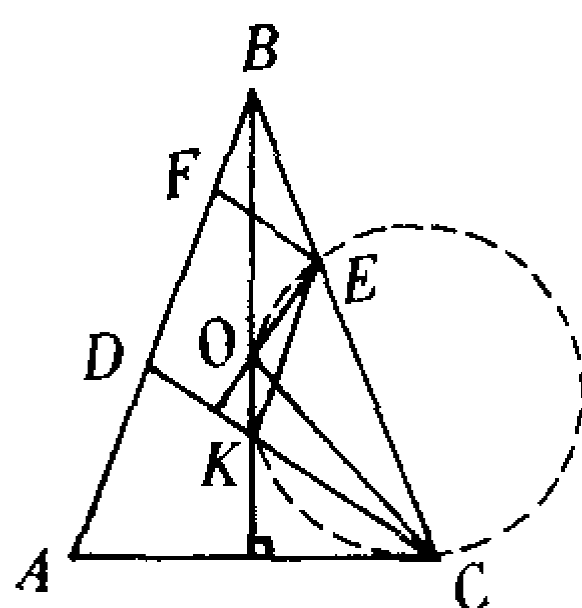


图1

[证] 设 O 是$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心,K 是直线 BO 和 CD 的交点(见图1).

由于锐角$\angle BOE$ 与$\angle DCA$ 的两边互相垂直,故$\angle BOE=\angle DCA$.

于是 $\angle BOE=\angle KCE$(CD 是角平分线).

所以,点 K、O、E、C 共圆(在图1中,$\angle KOE+\angle KCE=180^\circ$;在图2中,$\angle KOE=\angle KCE$.当点 K 与 O 重合时,结论显然成立).

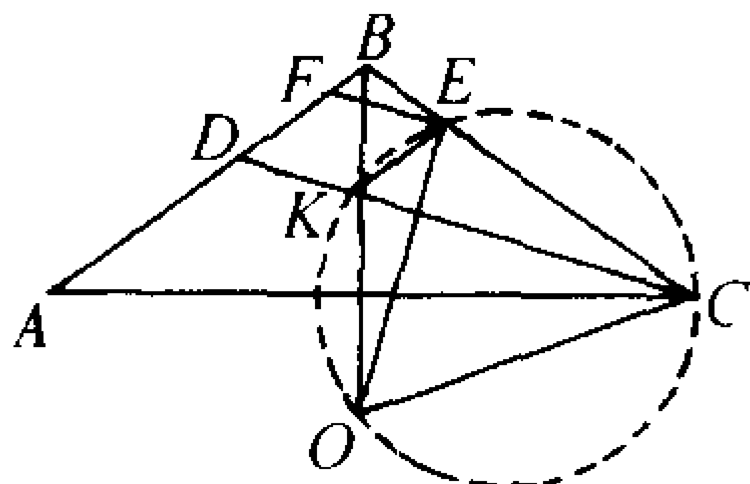


图2

由此推出,$\angle OKE=\angle OCE$(图1,同弧上的圆周角相等).

或 $\angle OKE+\angle OCE=180^\circ$(图2).

∵ $OB=OC$, ∴ $\angle OCE=\angle OBE$.

于是 $\angle BKE=\angle KBE$.

从而 $BE=KE$.

又　$\angle BKE=\angle KBE=\angle KBA$.

∴　$KE /\!/ AB$.

于是，四边形 $FEKD$ 为平行四边形.

∴　$DF=KE$. 故 $DF=KE=BE$.

1·51　直线 l 与以 AB 为直径的圆相交于 C、D 两点，C、D 与 A、B 均不重合，由 A 及 B 向 l 分别作垂线 AE 及 BF. 证明：$EC=DF$.

（第 11 届全俄数学奥林匹克，1985 年）

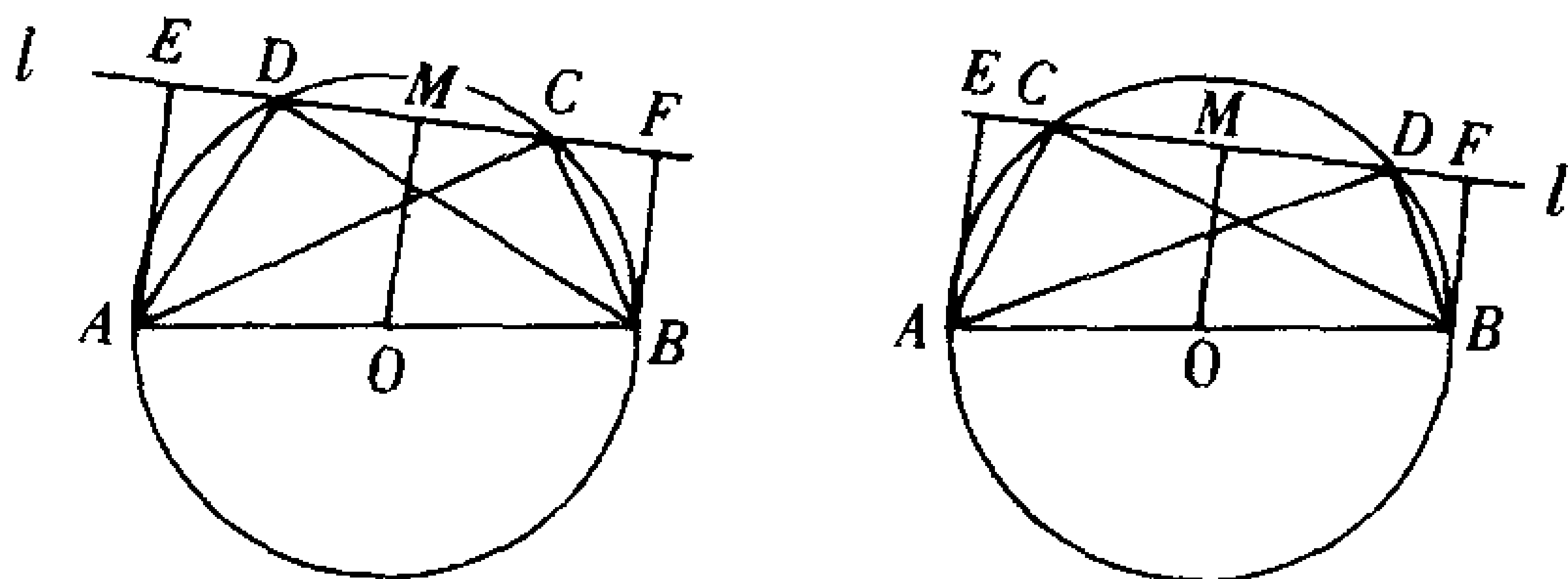
［证］　若直线 l 经过圆心 O，则本题得证.

若直线 l 不经过圆心 O，由 O 作 $OM\perp l$ 于 M，于是 $DM=MC$.

下面分两种情况讨论.

(1)线段 AB 与 CD 不在圆内相交.

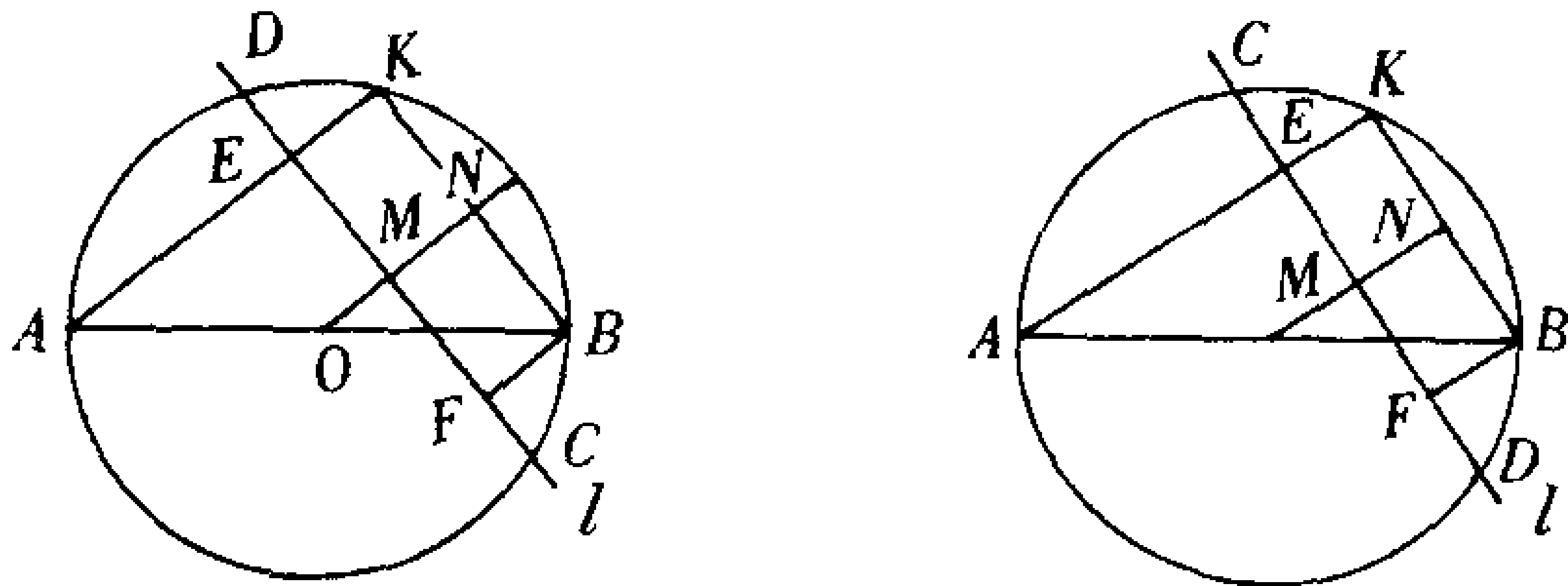
这时$\angle ADC$ 和$\angle BCD$ 都是钝角，垂足 E、F 必在线段 CD 之外(如图有两种情形).



由　$EM=MF$ 及 $DM=MC$，可得　$EC=DF$.

(2)线段 AB 和 CD 在圆内相交，

这时 E、F 在线段 CD 内(如图有两种情形).



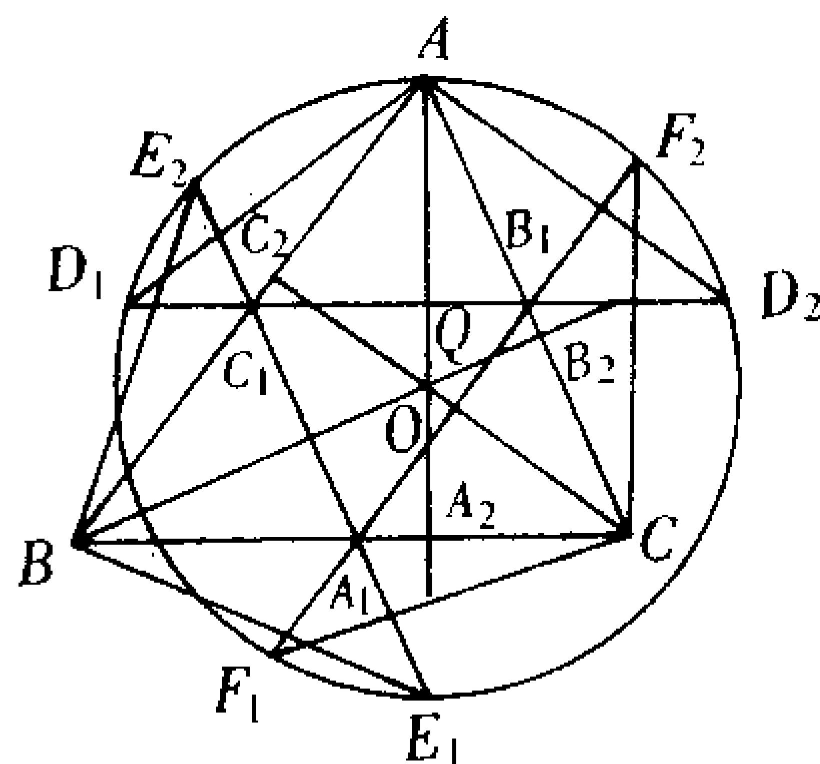
延长 AE 交圆周于 K，连 BK.

于是 $BK /\!/ CD$，又 OM 的延长线交 BK 于 N，则

$ON \parallel AK$, $ON \perp BK$.

$\therefore$ $BN = NK$, $EM = MF$.

又$\because$ $DM = CM$, $\therefore$ $EC = DF$.



1·52 $\triangle ABC$ 的高交于点 O. 点 A_1、B_1、C_1 各是 BC、CA、AB 的中点,以 O 为圆心的圆交 B_1C_1 于点 D_1、D_2,交 C_1A_1 于点 E_1、E_2,交 A_1B_1 于点 F_1、F_2. 求证:$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$.

(英国数学奥林匹克,1981 年)

[证] 用 A_2、B_2、C_2 分别表示边 BC、CA 和 AB 上高的垂足.

由 A、C_2、A_2、C 四点共圆可得

$OA \cdot OA_2 = OC \cdot OC_2$.

同理 $OB \cdot OB_2 = OC \cdot OC_2$, $OA \cdot OA_2 = OB \cdot OB_2$.

由于 B_1C_1 是$\triangle ABC$ 的中位线,所以它与高 AA_2 的交点 Q 平分 AA_2,即 $QA = QA_2$.

并且由 $B_1C_1 \parallel BC$ 及 $AA_2 \perp BC$ 可得 $AQ \perp B_1C_1$.

在直角$\triangle AD_iQ(i=1,2)$中,由勾股定理

$$AD_i^2 = AQ^2 + D_iQ^2 = AQ^2 + (R^2 - OQ^2)$$
$$= R^2 + (AQ + OQ)(AQ - OQ) \quad (i = 1,2)$$

其中 R 为圆的半径.

考虑到$\triangle ABC$ 的垂心 O 在三角形内部、外部和顶点的不同情形,则有

$AD_i^2 = R^2 \pm OA \cdot OA_2$.

其中当 O 在$\triangle ABC$ 内部时(如图)取“+”号,否则取“-”号.

同理可证: $BE_i^2 = R^2 \pm OB \cdot OB_2$, $CF_i^2 = R^2 \pm OC \cdot OC_2$.

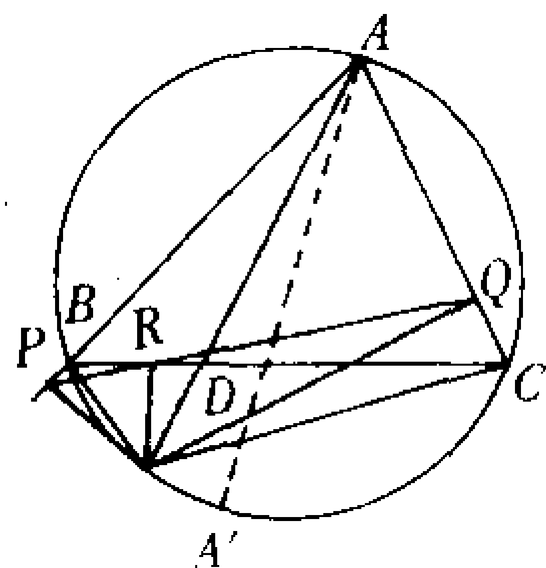
再由 $OA \cdot OA_2 = OB \cdot OB_2 = OC \cdot OC_2$ 可得

$AD_i = BE_i = CF_i (i = 1,2)$

1·53 设 D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的一个内点. AD 交$\triangle ABC$ 外接圆于 X,P、Q 是 X 分别到 AB 和 AC 的垂足,Γ 是直径为 XD 的圆. 证明:PQ 与 Γ 相切当且仅当 $AB = AC$.

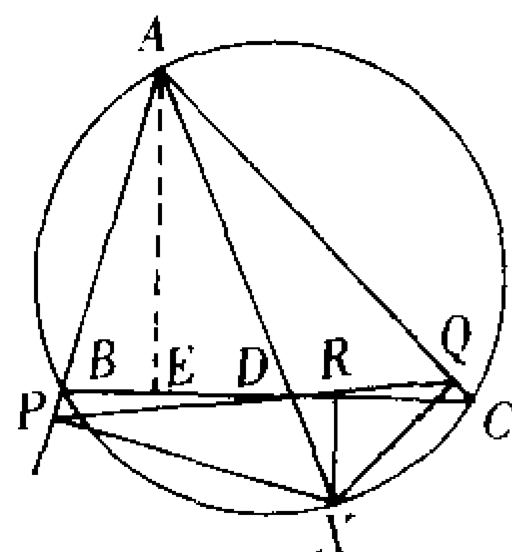
(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证] 设 A'是外接圆直径上与 A 相对的点.因 B、C 的对称性,不失一般性,可设 X 在$\overset{\frown}{BA'}$上.则 Q 在射线 CA 上,而 P 在射线 AB 上,且位于外接圆的外部(注意:点的这种安排,$\angle BCA$ 不是钝角).



令 R 是 X 到 BC 的垂足,则点 P、R、Q 共线(X 关于$\triangle ABC$ 的西蒙松(Simson)线).

令 E 是 A 到 BC 的垂足.设 D 在 E 与 C 之间,这只在 $AC>AB$ 时发生.



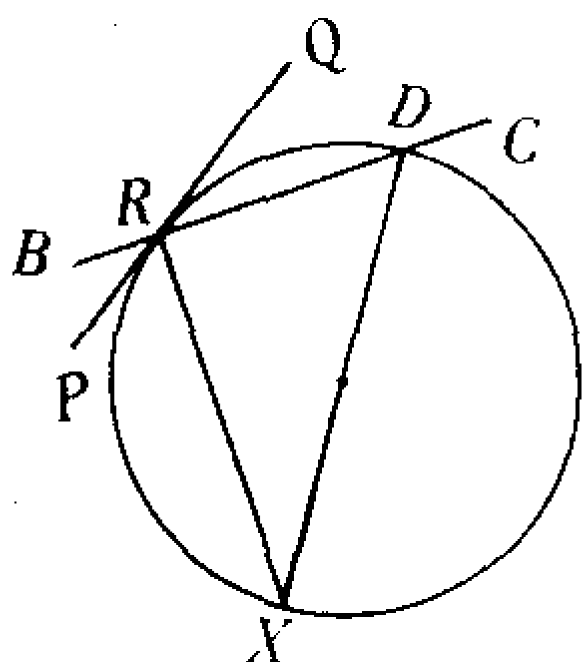
则 R 在 D 与 C 之间,因此,PR 与 Γ 的直径 DX 相交,交点在 D 与 X 之间.所以,PR 也即 PQ 不能与 Γ 相切,结论成立.

剩下的是 D 在 B 与 E 之间(可能与 E 重合)的情形.由此,R 在射线 DB 上.所以,D 在 RC 上.

这时,如 Q 在 AC 上(当$\triangle ABC$ 是锐角三角形时),则

$\angle RXD=\angle RXQ-\angle QXD$,

$\angle QXC=\angle DXC-\angle QXD$.



如 Q 在射线 AC 上,且在外接圆的外部,则上面等式中的减号须用加号代替.另一方面,

$$\angle RXD-\angle QXC=\angle RXD-\angle DXC. \qquad ①$$

$\angle RXQ$、$\angle BCA$ 都是锐角,它们的两条边又两两垂直,因此,$\angle RXQ=\angle BCA$.

注意到 $\angle DXC=\angle AXC=\angle CBA$,

又因 $QRXC$ 是圆内接四边形,

又有 $\angle QXC=\angle QRC$.等式①就成为

$$\angle RXD-\angle QRC=\angle BCA-\angle CBA. \qquad ②$$

考察圆 Γ.因 $XR\perp BC$,所以 Γ 过点 R.又 Q、X 在 RC 的两侧,D 在 RC 上,可得 RQ 与 Γ 相切当且仅当$\angle QRC=\angle RXD$.由②,这时结论也成立.

1·54 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,其对边 AD 与 BC 的延长线交于圆 O 外一点 E,自 E 引一直线平行于 AC,交 BD 的延长线于 M,自 M 引 MT 切圆 O 于 T,则 $MT=ME$.

(中国江苏省南京市数学竞赛,1957 年)

[证] ∵ $\angle MED=\angle DAC=\angle DBC$,

∴ $\triangle MED \backsim \triangle MBE$,

有 $\dfrac{MD}{ME}=\dfrac{ME}{MB}$,

即 $ME^2=MD\cdot MB$,

又∵ $MT^2=MD\cdot MB$,

∴ $ME=MT$.

1·55 若圆的内接四边形的两条对角线互相垂直,则从对角线的交点到一边中点的线段长等于从圆心到这一边的对边的距离.

(中国上海市数学竞赛,1978年)

[证] 设圆内接四边形 $ABCD$ 中,$AC\perp BD$,外接圆圆心为 O,又 $AE=ED$,且 $OG\perp BC$.

延长 EH 交 BC 于 F,连 OE、GH.

∵ $\angle ADB=\angle ACB$,$\angle EHD=\angle EDH=\angle ACB$.

∴ $\angle FHC=90^\circ-\angle EHD=90^\circ-\angle ACB$.

∴ $\angle EFC=90^\circ$, ∴ $EF\perp BC$.

∵ $OG\perp BC$, ∴ $OG/\!/EF$.

∵ $OG\perp BC$,G 为 BC 的中点, 又∵ $OE\perp AD$,

同理可证 $GH\perp AD$, ∴ $GH/\!/OE$.

∴ $OEHG$ 为平行四边形. ∴ $OG=EH$.

1·56 设圆的外切四边形的对角线的交点是该圆的圆心.求证:该四边形是菱形.

(莫斯科数学奥林匹克,1953年)

[证] 设 O 是⊙O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,切点分别为 E、F、G、H.

设 AC 交⊙O 于 M、N,BD 交⊙O 于 P、Q(如图),则

$\overset{\frown}{MH}=\overset{\frown}{MG}=x$, $\overset{\frown}{GQ}=\overset{\frown}{QF}=y$,

$\overset{\frown}{EN}=\overset{\frown}{NF}=z$, $\overset{\frown}{HP}=\overset{\frown}{EP}=w$.

∵ $x+2y+z=180^\circ$,$x+2w+z=180^\circ$,

∴ $y=w$.

同理　$x=z$.

$$\angle CAD \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{NG}-\overset{\frown}{MG})=\frac{1}{2}(2y+z-x)=y.$$

同理　$\angle ACD \overset{m}{=} y$.

∴　$\angle CAD=\angle ACD$,

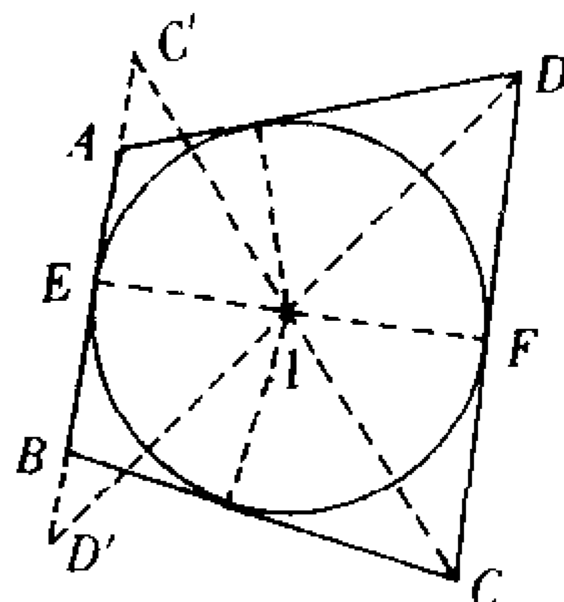
故　$AD=CD$.

同理可证　$BC=CD$，$AB=BC$.

故　$ABCD$ 是菱形.

1·57　若一个圆外切四边形有两条对边相等,则圆心到另外两边中点的距离相等.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年）



[证]　设四边形是 $ABCD$,且 $AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$DA=d$,圆心为 I,并设 $b=d$.

设 AB、CD 的中点分别为 E、F. 下面我们证明 $IE=IF$.

在直线 AB 上截 $BC'=BC$,$AD'=AD$. 则 E 是 $C'D'$ 的中点,且有

$C'D'=AD'+BC'-a=d+b-a=c=CD$.

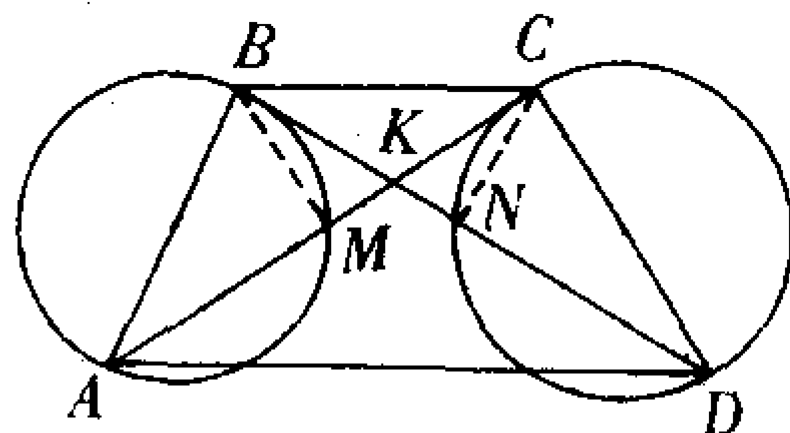
又可证 $IC=IC'$，$ID=ID'$.

因此有　$\triangle IC'D' \cong \triangle ICD$.

∴　$IE=IF$.

1·58　梯形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 K 点. 分别以梯形的两腰为直径各作一圆(圆心在腰的中点处),现知点 K 位于这个圆之外. 求证:由点 K 向这两个圆所作的切线长相等.

（莫斯科数学奥林匹克,1996 年）



[证]　如图,AB、CD 为梯形两腰,且对角线 AC、BD 与以腰与直径的两圆另外交点分别为 M 和 N. 连 BM、CN.

由切割线定理知:由 K 作两圆切线长的平方分别等于 $KM\cdot KA$ 和 $KN\cdot KD$,故只需证明两积相等即可.

由　$\angle AMB=90°$，$\angle CND=90°$,

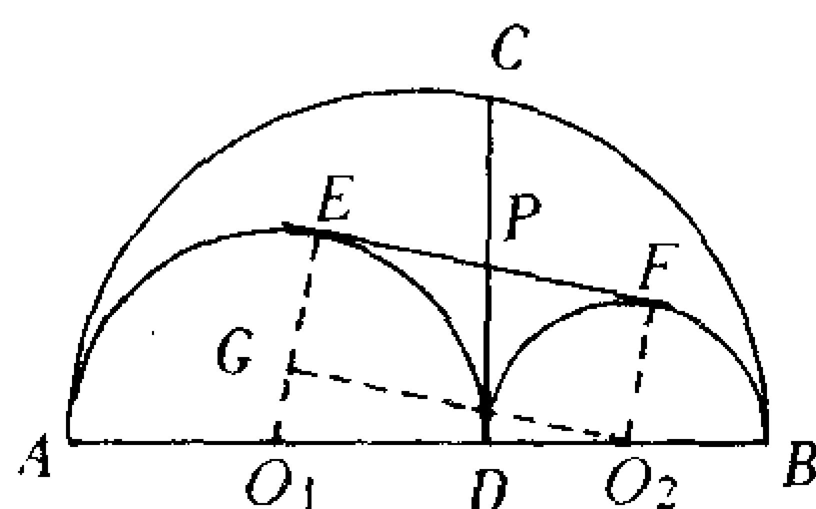
知　$\angle BMC=90^{\circ}$，$\angle BNC=90^{\circ}$.

从而　B、M、N、C 四点共圆，且 BC 为该圆直径，注意到　$BC\,/\!/\,AD$，

$\therefore$　$\angle CMN=\angle CBN=\angle BDA$

故　$\angle AMN+\angle NDA=180^{\circ}$，知 A、M、N、D 四点共圆.

从而　$KM\cdot KA=KN\cdot AD$.



1·59　从半圆上一点 C 向直径 AB 作垂线 CD，D 是垂足. 以 AD、DB 为直径在 ACB 半圆内分别作两个半圆，设这两半圆的外公切线为 EF，而 E、F 为切点. 求证：(1) $CD=EF$；(2) D、E、C、F 是矩形的四个顶点.

（中国江苏省数学竞赛，1978 年）

［证］　图中 O_1 和 O_2 为两个小圆的圆心，设 r_1 和 r_2 分别是它们的半径. 连 O_1E、O_2F，作 $O_2G\perp O_1E$，G 为垂足.

(1) $\because$　$CD^2=AD\cdot DB=2r_1\cdot 2r_2=4r_1r_2$.

又　$EF^2=O_2G^2=O_1O_2^2-(O_1E-O_2F)^2$

$=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2$

$=4r_1r_2$.

$\therefore$　$CD=EF$.

(2) 设公切线 EF 与 CD 交于 P，则 $PE=PD=PF$，

$\therefore$　$PD=\dfrac{1}{2}EF$.　$\because$　$CD=EF$，

$\therefore$　$PD=\dfrac{1}{2}CD$.　$\because$　$PC=PD$.

由于四边形 $DECF$ 的对角线互相平分，而且对角线等长，所以 D、E、C、F 是矩形的四个顶点.

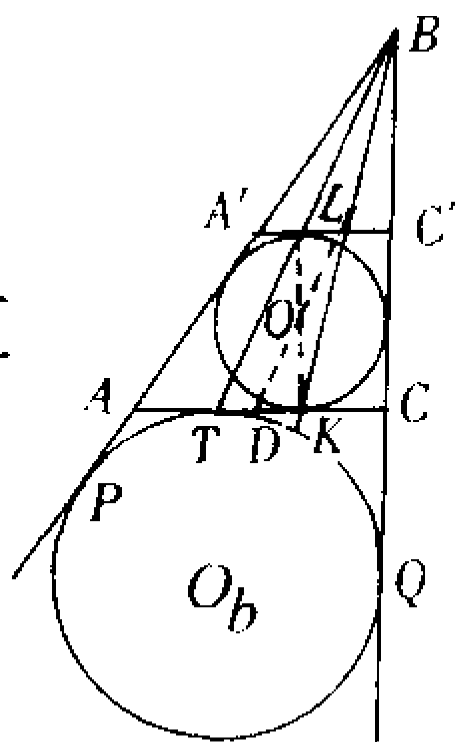
1·60　$\triangle ABC$ 的内切圆切 AC 于点 K，求证：过 AC 中点与内切圆圆心的直线平分线段 BK.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1968 年）

［证］　设 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

$\because$　D 为边 AC 的中点，则 $CK=p-c$.

在 AC 外侧作$\triangle ABC$ 的旁切圆$\odot O_b$，切 AC 于 T，分别切 BA、BC 延长线于P、Q.



则 $AT=BP-AB=P-C=CK$.

设 O 为$\triangle ABC$ 内切圆圆心，又$\odot O$ 过点 K 的直径另一端点为L.

过 L 作$A'C' /\!/ AC$，则 $A'C'$切$\odot O$ 于L.

易知 $\triangle BA'C' \backsim \triangle BAC$.

由于它们的旁切圆分别为$\odot O$ 与$\odot O_b$，则在以 B 为中心的位似变换下，使$\odot O$ 变为$\odot O_b$，此时切点 L 变为切点T，故 T 即为 BL 与AC 的交点.

由 $AD=CD$，$AT=CK$，得 $TD=KD$，即 D 为TK 中点.

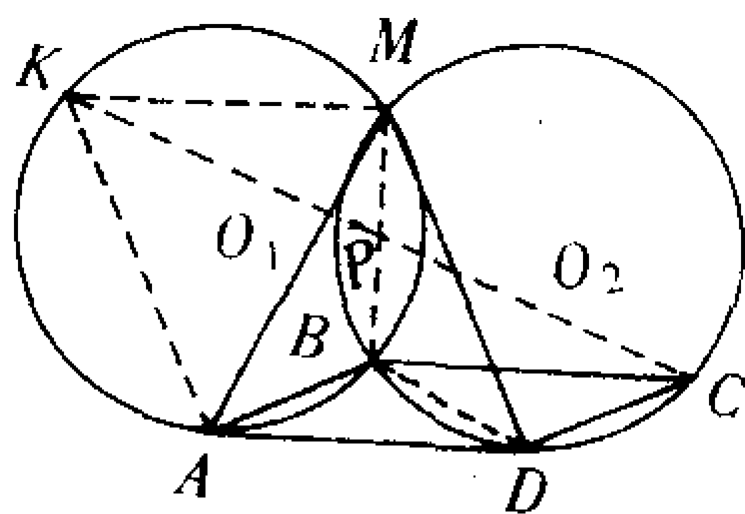
又 O 为KL 中点，OD 为$\triangle KLT$ 的中位线，知 $OD /\!/ TB$.

在$\triangle KBT$ 中，易知过 TK 中点D 且平行于BT 的直线DO 平分 BK.

1·61 半径均为 R 的两圆之一过平行四边形$ABCD$ 的顶点A 和 B，而另一圆则过顶点 B 和C. 点 M 是两圆除B 外的另一个交点. 求证：$\triangle AMD$ 的外接圆半径长也是R.

（第 19 届全俄数学奥林匹克，1985 年）

［证］ 设两圆分别为$\odot O_1$ 和$\odot O_2$（见图）又设 P 是BM 的中点，K 是点C 关于P 的对称点，它显然在$\odot O_1$ 上，且



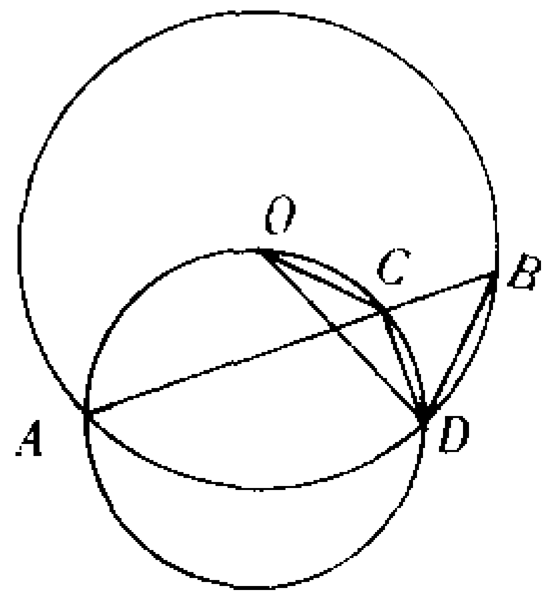
$KM \underline{\underline{/\!/}} BC \underline{\underline{/\!/}} AD$.

$\therefore$ 四边形 $AKMD$ 是平行四边形.

$\therefore$ $\triangle AMD \cong \triangle MAK$.

$\therefore$ $\triangle AMD$ 的外接圆半径等于$\triangle MAK$ 的外接圆的半径，即$\odot O_1$ 的半径 R.

1·62 C 是$\odot O$ 的弦AB 上一点，D 是$\odot O$ 同$\triangle ACD$ 外接圆的交点. 求证：$CD=CB$.

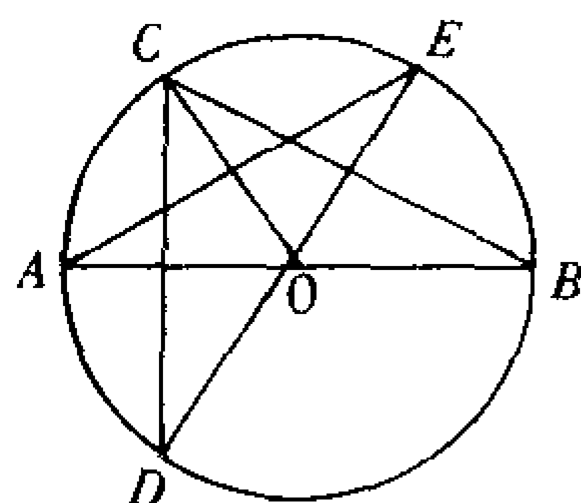


（莫斯科数学奥林匹克，1980 年）

［证］ 在$\triangle ACO$ 的外接圆中（如图）显然有

$\angle ACD=\angle AOD$.

而在$\odot O$中,由 $\angle AOD=2\angle B$,



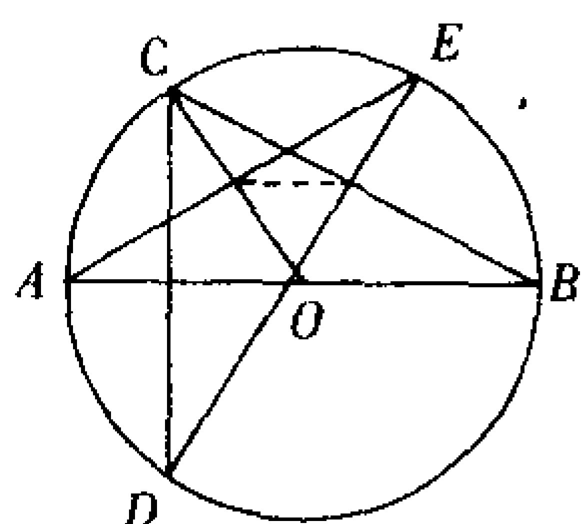
$\therefore$ $\angle ACD=2\angle B$, $\therefore$ $\angle B=\angle CDB$.

故 $CD=CB$.

1·63 $\odot O$ 的弦CD垂直于直径AB,又弦 AE 平分半径 OC.求证:弦 DE 平分弦BC.

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1996 年)

[证] 记OC的中点为M,且DE与BC交点为N,连MN.



$\because$ AB为$\odot O$直径,

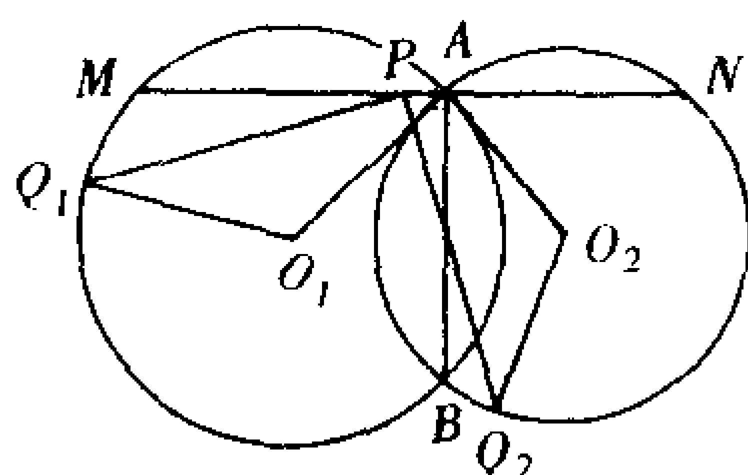
$\therefore$ $CD\perp AB$,

有 $\angle OCB=\angle OBC=\angle AED$,

$\therefore$ C、M、N、E四点共圆. 故 $MN/\!/AB$.

$\because$ M是OC的中点, $\therefore$ N为BC的中点.

1·64 如图,已知:$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、B,直线MN垂直AB于A,且又分别与$\odot O_1$,$\odot O_2$交于M、N. P为线段MN的中点,又$\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$.求证:$PQ_1=PQ_2$.



(中国广州、武汉、福州初中数学竞赛,1985 年)

[证] 连BQ_1、NQ_2、BQ_2,则

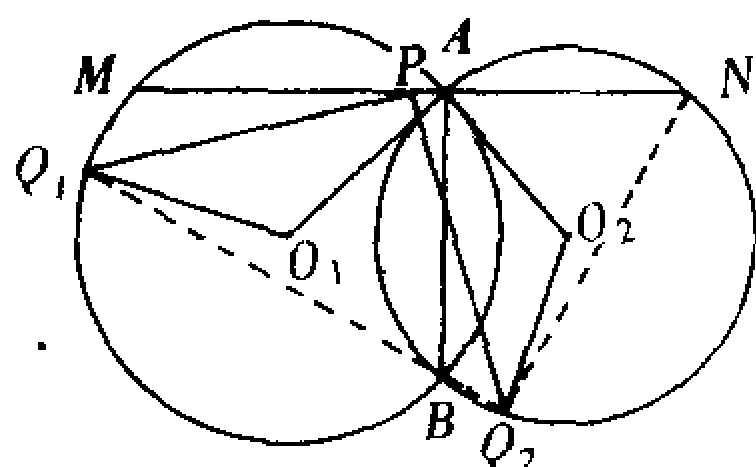
$\angle ABQ_1=\dfrac{1}{2}\angle AO_1Q_1$, $\angle ANQ_2=\dfrac{1}{2}\angle AC_2Q_2$,

$\angle ABQ_2=180°-\angle ANQ_2=180°-\dfrac{1}{2}\angle AO_2Q_2$.

$\because$ $\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$, $\therefore$ $\angle ABQ_1+\angle ABQ_2=180°$.

知Q_1,B,Q_2三点共线.连MQ_1.

$\because$ $MN\perp AB$,$\angle MAB=90°$,$\angle NAB=90°$,且



A、B、Q_1、M四点共圆,

A、B、Q_2、N四点共圆.

$\therefore$ $\angle MQ_1B=90°$, $\angle NQ_2B=90°$.

$\therefore$ 四边形Q_1Q_2NM为直角梯形.

$\because$ P为MN的中点,且直角梯形

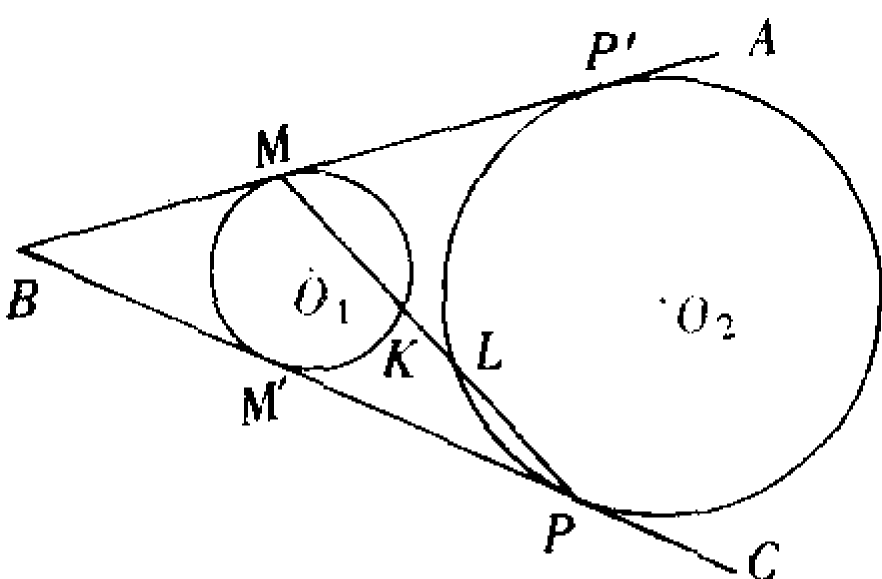
Q_1Q_2NM 的中位线是直角腰 Q_1Q_2 的垂直平分线.

$\therefore\quad PQ_1=PQ_2$.

1·65 在$\angle ABC$内有两个互不相交的$\odot O_1$和$\odot O_2$,它们均与角的两边相切,$\odot O_1$在BA上的切点是M,$\odot O_2$在BC上的切点是P.求证:$\odot O_1$和$\odot O_2$在直线MP上所截出的弦等长.

(莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[证] 如图,设MK和PL为相应的弦.M'、P'为两圆与$\angle ABC$两边的另一切点.



由圆幂定理知 $PK\cdot PM=(PM')^2=(MP')^2=ML\cdot MP$.

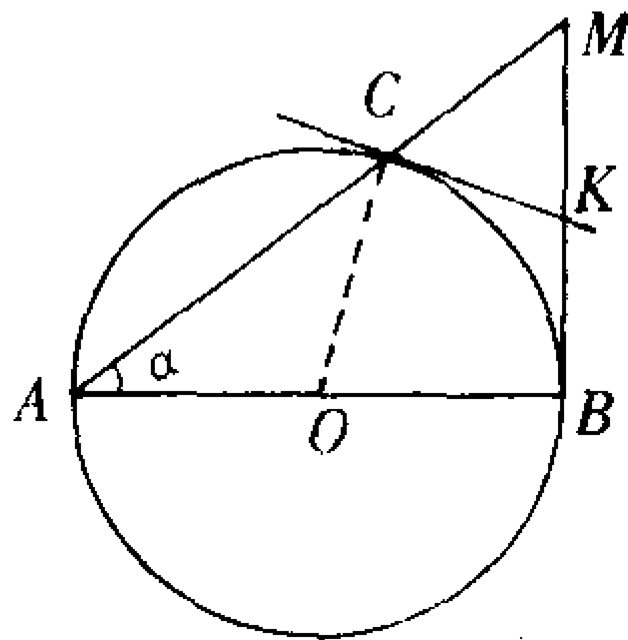
$\therefore\quad PK=ML$.

故 $PL=MK$.

1·66 若AB为$\odot O$的直径,C为圆上一点,圆的过点B的切线与直线AC相交于点M.求证:圆的过点C的切线平分线段BM.

(莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[证] 设K为两切线交点,连OC(如图).又设$\angle CAB=\alpha$,则 $\angle ACO=\angle CAO=\alpha$.



由 $KC=KB$,

又$\angle OCK=90^\circ$,

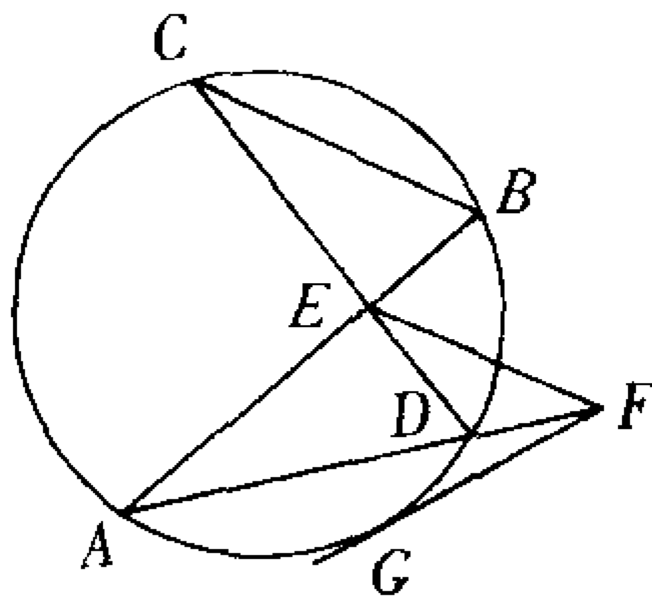
$\therefore\quad \angle KCM=180^\circ-(\angle OCK+\angle ACO)$
$=90^\circ-\alpha=\angle AMB$.

故 $KM=KC=KB$.

1·67 已知:E为圆内两弦AB和CD的交点(如图).直线$EF\parallel CB$,交AD的延长线于F,FG切圆于G.求证:$EF=FG$.

(中国辽宁省数学竞赛,1978年)

[证] 在$\triangle DFE$与$\triangle EFA$中,



$\angle DFE=\angle EFA$,

$\angle FED=\angle C=\angle A$,

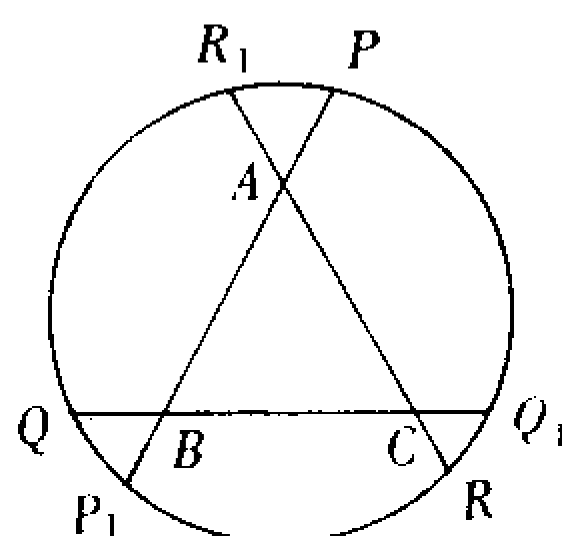
$\therefore\quad \triangle DFE\backsim\triangle EFA$.

于是 $\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{FD}{EF}$,

即　$EF^2=FD\cdot FA$.

又由圆幂定理得　$FG^2=FD\cdot FA$,

∴　$EF^2=FG^2$, 则　$EF=FG$.



1·68　圆中三条弦 PP_1、QQ_1、RR_1 两两相交,交点分别为 A、B、C(见左图),又 $AP=BQ=CR$,且　$AR_1=BP_1=CQ_1$.求证:$\triangle ABC$ 是正三角形.

(中国北京市数学竞赛,1979 年)

[证]　设 $BC=x$, $CA=y$, $AB=z$,及 $AP=BQ=CR=m$,且 $AR_1=BP_1=CQ_1=n$.

由圆的相交弦定理有

$$\begin{cases} n(m+x)=m(x+y),\\ n(m+y)=m(n+z),\\ n(m+z)=m(n+x). \end{cases}$$

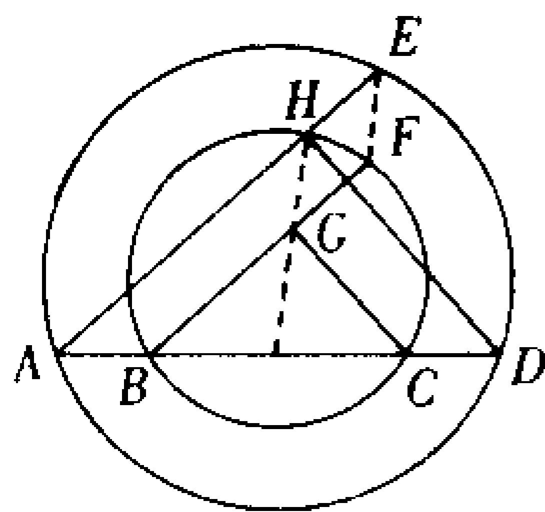
即　$$\begin{cases} nx=my,\\ ny=mz,\\ nz=mx. \end{cases}$$

上三式相加可得　$m=n$, 从而　$x=y=z$.

即　$\triangle ABC$ 是正三角形.

1·69　设有一直线与两同心圆相截,交点顺次为 A、B、C、D,过 A、B 各引大圆及小圆的平行弦 AE、BF,过 C 作 BF 的垂线,垂足为 G,过 D 作 AE 的垂线,垂足为 H.求证:$EH=FG$.

(中国上海市数学竞赛,1958 年)



[证]　由对称性易证得　$\angle A=\angle E$.

设弦 BC 的中点为 P,则 P 也是弦 AD 的中点.

∵　$\triangle AHD\backsim\triangle BGC$,

∴　$\triangle AHP\backsim\triangle BGP$,

则　$\angle BPG=\angle APH$,

即　H、G、P 三点共线,

于是　$\angle AHG=\angle AHP=\angle A$.

而　$\angle A=\angle E$,　故　$\angle AHG=\angle E$,

则　$HG/\!/EF$,　∴　$EFGH$ 是平行四边形,

于是　$EH=FG$.

1·70 相等二圆 O、O'交于P点，另二圆 A、B 各内切于圆O且外切于圆 O'，又互相外切于 Q 点，求证：P、Q 到OO'中点M 的距离相等.

（中国福建省数学竞赛，1962 年）

［证 1］ 设圆 O、圆 A、圆 B 的半径分别为r、a、b、$OM=d$.

在 $\triangle AOQ$ 和$\triangle BOQ$ 中，

$OA^2=OQ^2+AQ^2-2OQ\cdot AQ\cos\angle OQA$，

$OB^2=OQ^2+BQ^2+2OQ\cdot BQ\cos\angle OQA$，

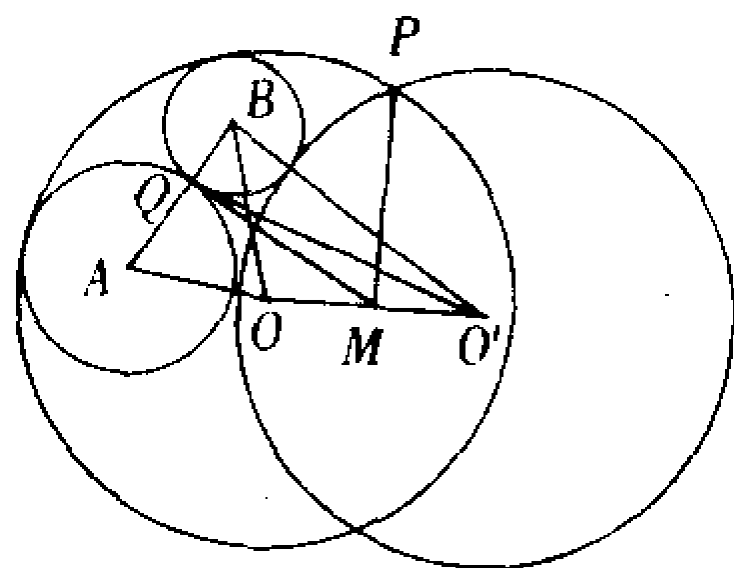
$\therefore\quad OA^2\cdot BQ+OB^2\cdot AQ=OQ^2\cdot AB+AQ\cdot BQ\cdot AB$，

$$OQ^2=\frac{OA^2\cdot BQ+OB^2\cdot AQ}{AB}-AQ\cdot BQ, \qquad ①$$

同理 $$O'Q^2=\frac{O'A^2\cdot BQ+O'B^2\cdot AQ}{AB}-AQ\cdot BQ. \qquad ②$$

在$\triangle OQO'$中， $\because\quad OM=O'M'$，

$\therefore\quad QM^2=\frac{1}{2}(OQ^2+O'Q^2)-OM^2$.



把①、②代入上式并化简得

$QM^2=r^2-d^2=PM^2$，

$\therefore\quad PM=QM$.

［证 2］ 设圆 A 切圆O 于 T，切圆 O'于 S，则 OA 过 T，$O'A$ 过S.

连结 TS 并延长交圆O'于 T'，连结 $O'T'$.

由 $\angle ATS=\angle AST=\angle O'ST'=\angle O'T'S$，可得 $O'T'/\!/OT$.

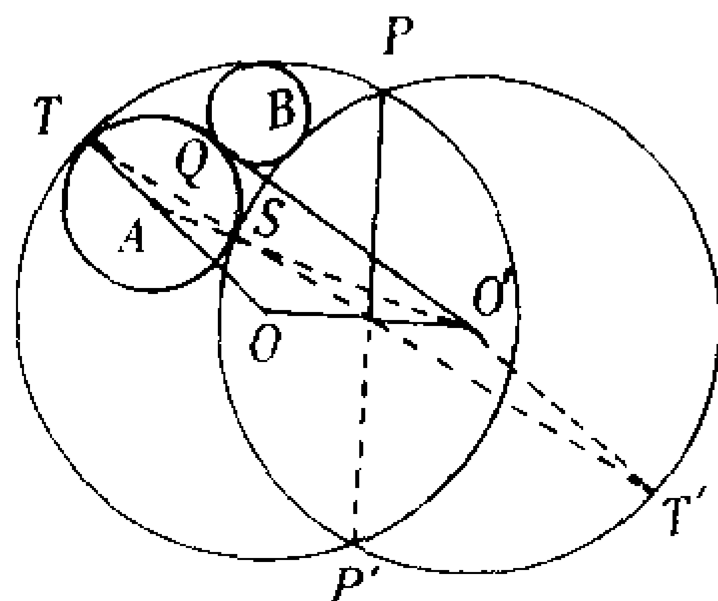
易证 $\triangle TOM\cong\triangle T'O'M'$.

$\therefore\quad MT'=MT$，且 TT'过M点.

设圆 O 与圆O'的另一交点为P'，则 PP'与 OO'互相垂直平分于M点.

$\therefore\quad MP\cdot MP'=MS\cdot MT'$，

即 $MP^2=MS\cdot MT$.



自 M 作圆A 的切线，切点为 Q_1，则

$MQ_1^2=MS\cdot MT$，

$\therefore\quad MQ_1=MP$.

自 M 作圆 B 的切线,切点为 Q_2.

同理得　$MQ_2 = MP$.

因此,M 在圆 A 和圆 B 的内公切线 MQ 上,

∴　$MQ = MP$.

1·71　两圆外切于点 O,一直线切一圆于 A,交另一圆于 B、C 两点.求证:点 A 到直线 BD 和 CD 的距离相等.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[证]　设 l 为过点 D 的两圆公切线,且交 AC 于 F 点.

由弦切角的性质不难有

$$\begin{aligned}\angle BDA &= \angle BDF + \angle FDA\\ &= \angle DCB + \angle FAD\\ &= \angle ADE.\end{aligned}$$

故　AD 系 $\angle BDE$ 平分线,知 A 到 $\angle BDE$ 两边 BD、DE(CD)的距离相等.

1·72　平面上两圆相交,A 为一个交点.两动点同时从 A 出发,以匀速分别在各自的圆周上依相同方向绕行,旋转一周后,同时回到出发点.求证:在平面上存在一点 P,使得在任何时刻从 P 到两动点的距离都相等.

(第 21 届国际数学奥林匹克,1979 年)

[证]　由已知,两个动点 Q_1、Q_2 具有相同的角速度,所以无论何时,$\overset{\frown}{AQ_1}$ 与 $\overset{\frown}{AQ_2}$ 的度数总是相同的.

连结 Q_1B、Q_2B、AB.

(1)点 Q_2 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上(或点 Q_1 在劣弧 $\overset{\frown}{BA}$ 上).这时有

$$\begin{aligned}\angle Q_1BA &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_1}\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_2}\text{的度数}\\ &= \angle Q_2BA.\end{aligned}$$

所以 Q_1、Q_2、B 三点共线.(如图 1).

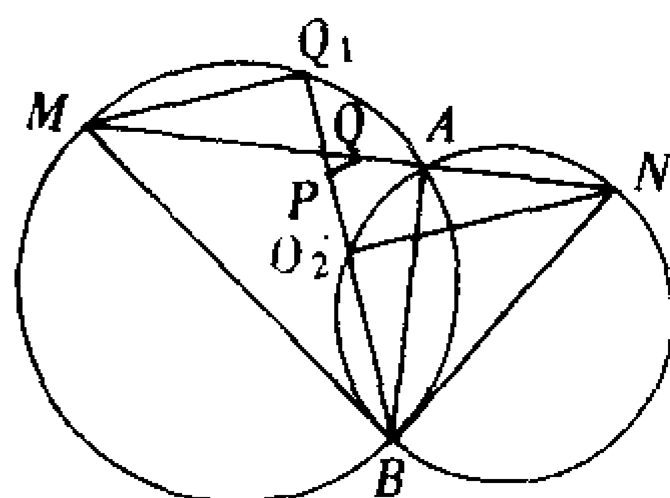


图 1

(2)点 Q_1 和 Q_2 分别在优弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BA}$ 上,于是

$$\angle Q_1BA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_1}\text{的度数},$$

$\angle Q_2BA=180^\circ-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_2}$的度数，

$\angle Q_1BA+\angle Q_2BA=180^\circ$.

∴ Q_1、Q_1、B 三点共线.

过 B 点分别作两圆的直径 BM，BN，则 M、A、N 三点共线，连结 MN 必过 A 点且 $AB\perp MN$.

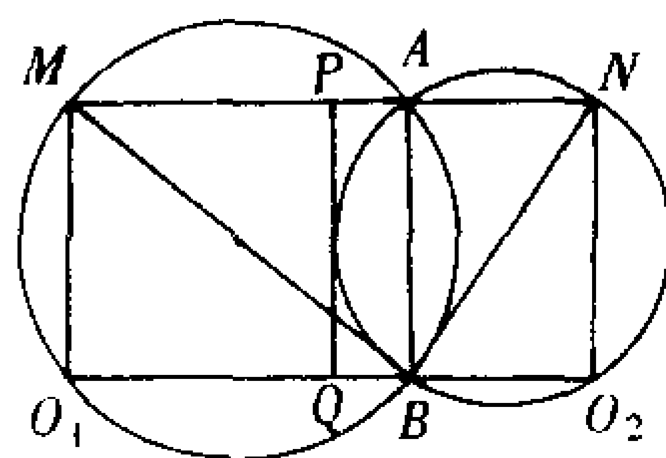


图 2

作线段 Q_1Q_2 的垂直平分线 QP，交 Q_1Q_2 于 Q，交 MN 于 P，则

$PQ_1=PQ_2$.

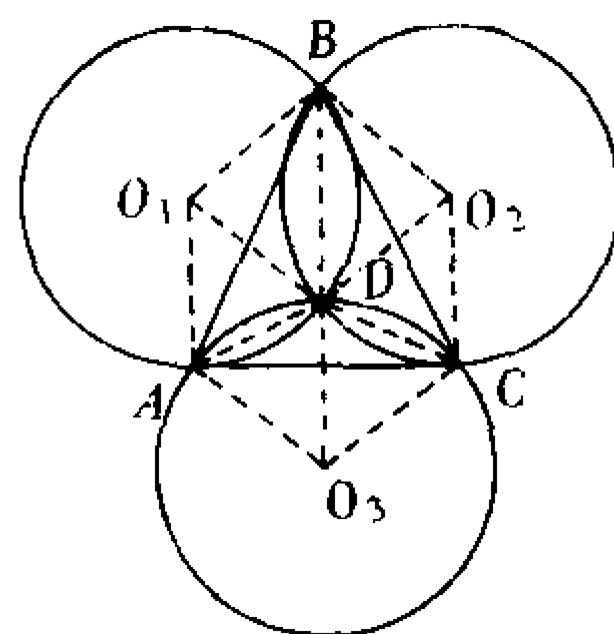
∵ $\angle MQ_1B=90^\circ=\angle NQ_2B$， ∴ $MQ_1\parallel QP\parallel NQ_2$.

从而 P 是 MN 的中点，因而 P 是定点，即当 Q_1、Q_2 运动时，P 点不动，于是 P 点即为所求.

1·73 三个半径都为 R 的圆有公共点，这些圆两两相交于另外三点，求证：过此三点的圆的半径也为 R.

（第 12 届全俄数学奥林匹克，1986 年）

[证] 如图，由于$\triangle AO_1D\cong\triangle AO_3D$，



∴ $\angle AO_1D=\angle AO_3D$，

设 $\angle AO_1D=\angle AO_3D=\angle 1$，

$\angle DO_1B=\angle DO_2B=\angle 2$，

$\angle DO_2C=\angle DO_3C=\angle 3$.

∴ $\angle BDC=180^\circ-\angle DBC=\angle DCB$

$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle 3-\frac{1}{2}\angle 2$.

且 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=\frac{1}{2}\angle 2+\frac{1}{2}\angle 3$.

∴ $\angle BDC+\angle BAC=180^\circ$.

由于 $\triangle DBC$ 的外接圆半径为 R，则 $\sin\angle BDC=\frac{BC}{2R}$，

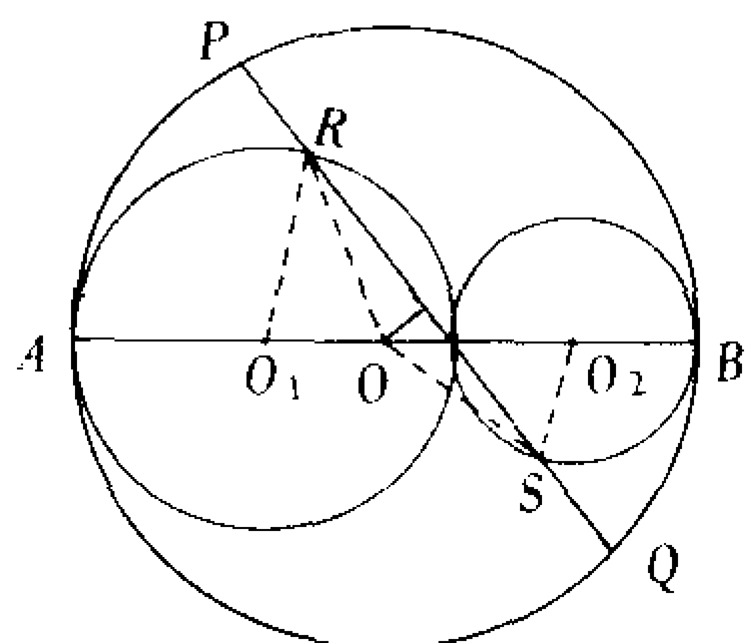
设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 x，则 $\sin\angle BAC=\frac{BC}{2x}$，

∵ $\sin\angle BAC=\sin\angle BDC$，

∴ $\frac{BC}{2R}=\frac{BC}{2x}$， 有 $x=R$.

1·74 在线段 AC 上任取一点 B,分别以线段 AB、BC 和 AC 为直径作圆 O_1、O_2 和 O.过点 B 任作一直线,与圆 O 相交于点 P 和 Q,与圆 O_1 及 O_2 分别相交于点 R 和 S.求证:$PR=QS$.

(莫斯科数学奥林匹克,1964 年)



[证] 设此 3 个圆分别为 $\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$、$\odot O(r)$ (如图,括号内字母代表其半径).

在 $\triangle O_1RO$ 和 $\triangle O_2OS$ 中

$\because$ $O_1R=OO_2=r_1$, 及

$O_1O=O_2S=r_2$.

又 $O_1R/\!/O_2S$, $\angle OO_1R=\angle OO_2S$,

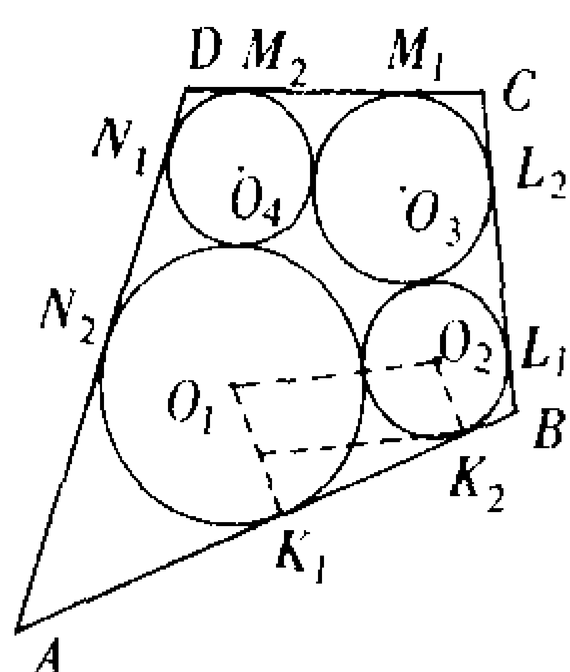
$\therefore$ $\triangle O_1RO\cong\triangle O_2OS$. 故 $OR=OS$.

作 $OH\perp PQ$ 于 H, 则 $PH=QH$, $RH=SH$.

故 $PR=PH-RH=QH-SH=QS$.

1·75 在凸四边形内有四个小圆,每个圆都和四边形的两条边及另外两个圆相切.已知该四边形有内切圆,求证:上述四个圆中至少有两个圆相等.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)



[证] 设该四边形为 $ABCD$.

因为四边形 $ABCD$ 有内切圆,所以有

$$AB+CD=AD+BC. \quad ①$$

再由切线长定理及①式有

$$K_1K_2+M_1M_2=L_1L_2+N_1N_2. \quad ②$$

其中 K_1、K_2、L_1、L_2、M_1、M_2、N_1、N_2 依次是 AB、BC、CD 和 DA 与诸圆的切点.

设半径 $O_1K_1=r_1$, $O_2K_2=r_2$, $O_3M_1=r_3$, $O_4M_2=r_4$,

作出如图的辅助线得

$$K_1K^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2,$$

$$\therefore\quad K_1K_2=2\sqrt{r_1r_2}.$$

同理可得 $N_1N_2=2\sqrt{r_1r_4}$, $L_1L_2=2\sqrt{r_2r_3}$, $M_1M_2=2\sqrt{r_3r_4}$.

由②式可得　$2\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_3r_4}=2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_1r_4}$. 有

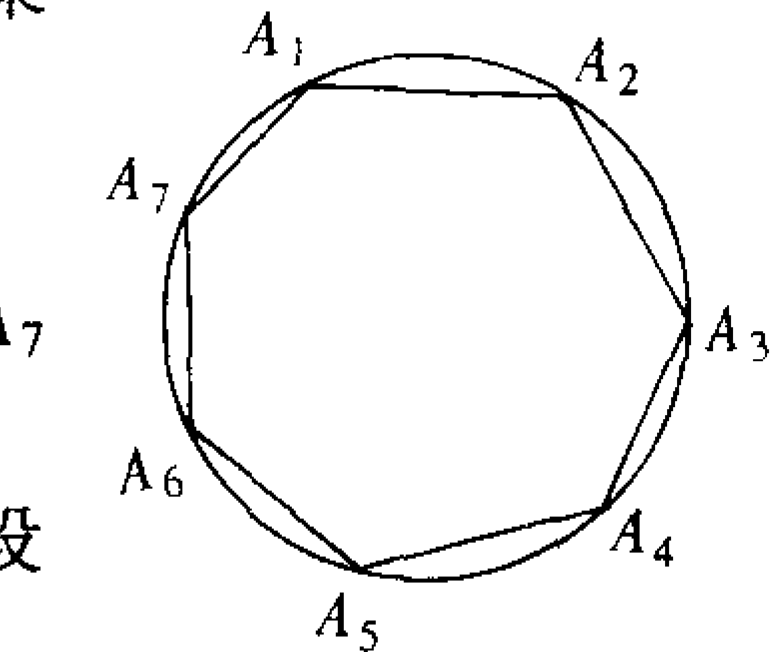
$$(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3})(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_4})=0.$$

$\therefore$　$r_1=r_3$　或　$r_2=r_4$.

即四个圆中必有两个圆的半径相等.

1·76　某凸七边形内接于圆,已知:它有某3个角都等于120°.求证:它有两条等长的边.

(莫斯科数学奥林匹克,1975年)



[证]　用反证法.设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 为圆内接七边形,如图.

若3个120°的角均不相邻,不失一般性,设为$\angle A_1,\angle A_3,\angle A_5$,则

$$\overparen{A_7A_1A_2}+\overparen{A_2A_3A_4}+\overparen{A_4A_5A_6}+\overparen{A_6A_7}$$

$$=3\times\frac{1}{2}(360°-120°)+\overparen{A_6A_7}=360°+\overparen{A_6A_7}>360°$$

矛盾.

故3个120°的角中一定有两个角相邻.设为$\angle A_1$、$\angle A_2$,则

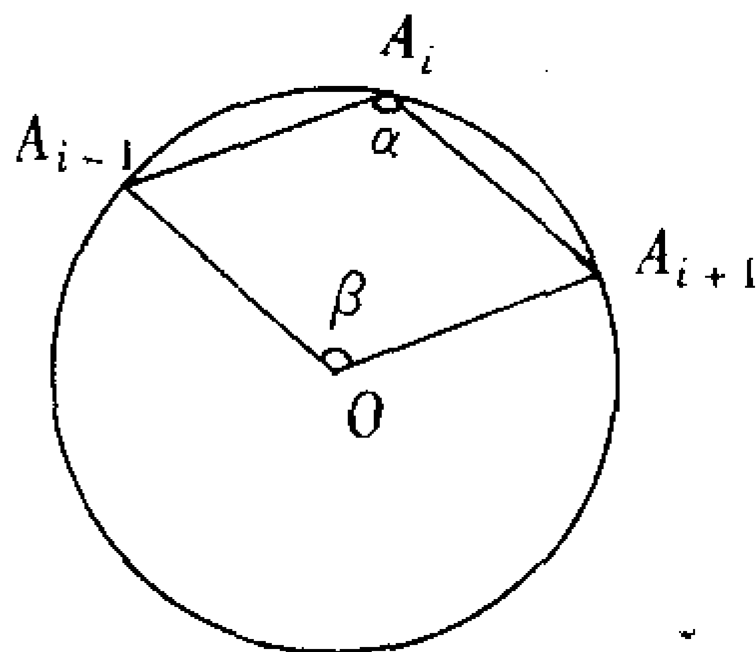
$$\overparen{A_7A_1A_2}=\overparen{A_1A_2A_3}.$$

$\therefore$　$\overparen{A_7A_1}=\overparen{A_2A_3}$,

故　$A_7A_1=A_2A_3$.

1·77　证明:如果边数是奇数的多边形内接于圆,并且它的全部内角都相等,那么它是正多边形.

(波兰数学奥林匹克,1966年)



[证]　设圆 O 的内接多边形 W 的顶点依次记作A_1、A_2、…、A_n(n 是奇数),并且它的各个内角相等.

当 $n=3$ 时,$\triangle A_1A_2A_3$ 显然是正三角形.

下面设 $n\geqslant5$.且设 $A_0=A_n$,$A_1=A_{n+1}$.

若点 A_{i-1}、A_i、A_{i+1}是多边形 W 的三个相邻顶点,并设$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}=\alpha$,因为$n\geqslant5$,所以 $\alpha\geqslant180°$,因此弧$A_{i-1}A_iA_{i+1}$小于半圆,因而多边形 $OA_{i-1}A_iA_{i+1}$是凸的.

可以求出 $\beta=360^\circ-2\alpha$.

将多边形 W 绕点 O 按照顶点 A_1、A_2,…,A_n 的方向旋转角度 β. 旋转后顶点 A_{i-1} 将变成点 A_{i+1},即旋转后每个顶点重合于下标比原下标大 2 的顶点,并且 A_{n-1} 重合于 $A_{n+1}=A_1$,及 A_n 重合于 A_2.

因此,顶点

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n \quad ①$$

分别重合于点

$$A_3,A_4,A_5,\cdots,A_n,A_1,A_2. \quad ②$$

依次连接①中相邻两点的线段在旋转后变为依次连接②中相邻两点的线段,于是对奇数 n

$$A_1A_2=A_3A_4=A_5A_6=\cdots=A_{n-2}A_{n-1}=A_nA_1, \quad ③$$

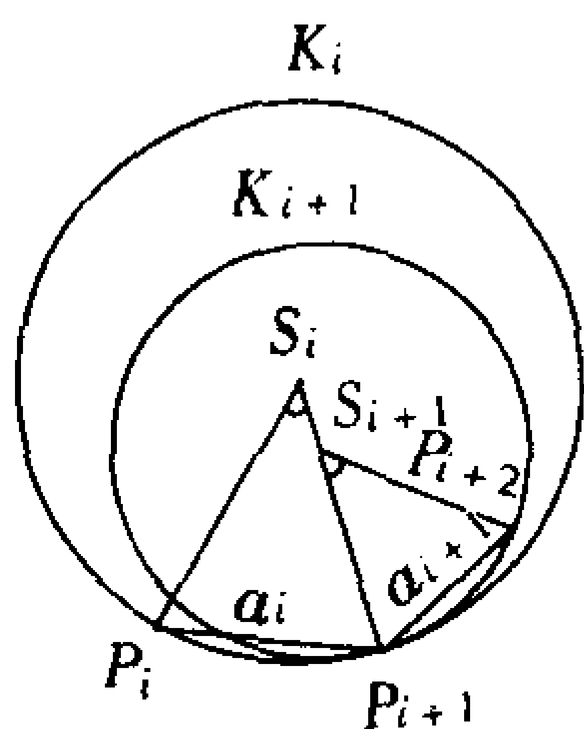
$$A_2A_3=A_4A_5=A_6A_7=\cdots=A_{n-1}A_n=A_1A_2. \quad ④$$

由①,②可得　多边形的各边相等.

因而,多边形 W 是正多边形.

1·78　已知:凸 n 边形的各角都相等,并且顺次各边满足关系式 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$.求证:$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

(第 5 届国际数学奥林匹克,1963 年)



[证]　设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是题设凸 n 边形,这里 $P_iP_{i+1}=a_i(i=1,2,\cdots,n$,且 P_{n+1} 与 P_n 重合).

以 P_iP_{i+1} 为底向凸多边形内作等腰 $\triangle P_iP_{i+1}S_i$,且使顶角 $\angle P_iS_iP_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$.

然后以 S_i 为圆心,S_iP_i 为半径作圆 K_i.类似地作圆 K_{i+1}.

今考察$\odot K_i$ 与$\odot K_{i+1}$的关系.

$$\because\quad \angle S_iP_{i+1}P_i=\angle S_{i+1}P_{i+1}P_{i+2}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right)=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{2n},$$

而　$\angle P_iP_{i+1}P_{i+2}=\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$(多边形各角等),

知　$\angle S_{i+1}$在 S_iP_{i+1}上.

若 $a_i=a_{i+1}$，即 $P_iP_{i+1}=P_{i+1}P_{i+2}$，则圆心 S_i 和 S_{i+1} 重合，此时 $\odot K_i$ 和 $\odot K_{i+1}$ 也重合.

若 $a_i>a_{i+1}$，则点 S_{i+1} 位于 S_i 和 P_{i+1} 之间，此时 $\odot K_i$ 和 $\odot K_{i+1}$ 在点 P_{i+1} 内切，且 $\odot K_{i+1}$ 在 $\odot K_i$ 内部(切点 P_{i+1} 除外).

这样，若有某个 $a_i>a_{i+1}$ 成立，由 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 可推知，由 P_nP_1 作出的 $\odot K_n$ 在由 P_1P_2 作出的 $\odot K_1$ 内部，且与 $\odot K_1$ 至多有一个公共点 P_n(仅在 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>a_n$，即 $\odot K_{n-1}$ 与 $\odot K_1$ 重合时才有可能)，而点 P_1 在 $\odot K_1$ 内.

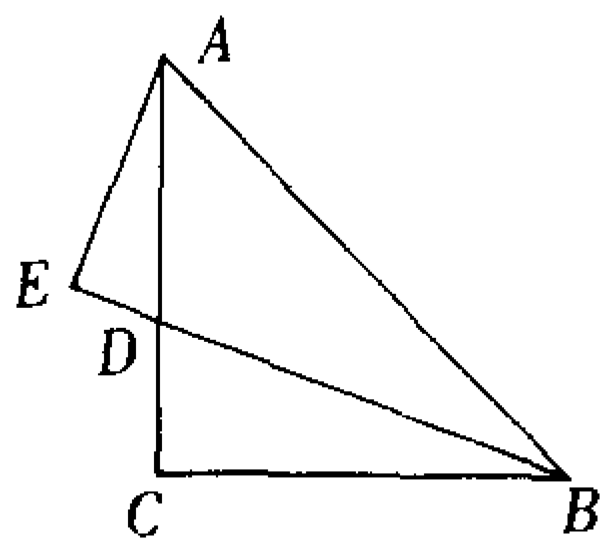
但 $\odot K_1$ 是由 P_1P_2 作出的，故 P_1 在 $\odot K_1$ 上.这是不可能的.

因而只能是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

(二)角相等

1. 三角形中的角相等问题

1·79 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，D 是 AC 上一点，且 AE 垂直 BD 的延长线于 E，又 $AE=\frac{1}{2}BD$，求证：BD 是 $\angle ABC$ 的平分线.



(中国北京市数学竞赛，1990)

[证] 延长 AE、BC 交于 F，在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，

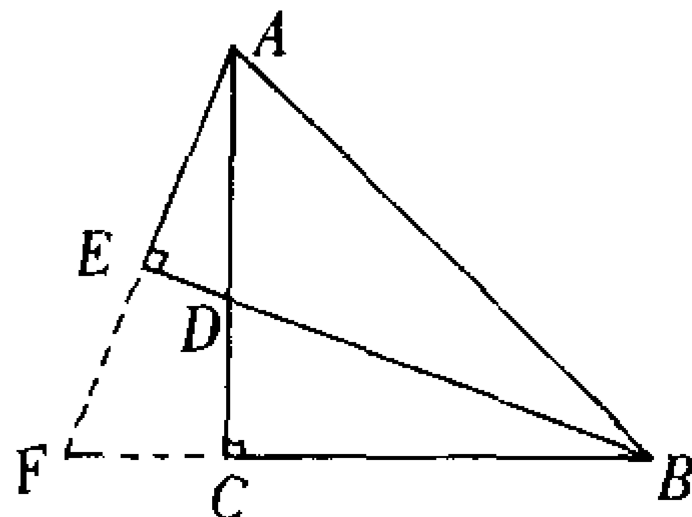
$\because$ $\angle CAF=\angle CBD$，$AC=BC$.

$\therefore$ $\triangle ACF\cong\triangle BCD$. $\therefore$ $AF=BD$.

$\because$ $AE=\frac{1}{2}BD$，$\therefore$ $AE=\frac{1}{2}AF$.

从而 $AE=EF$.

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle FBE$ 中，$AE=EF$，$BE=BE$，



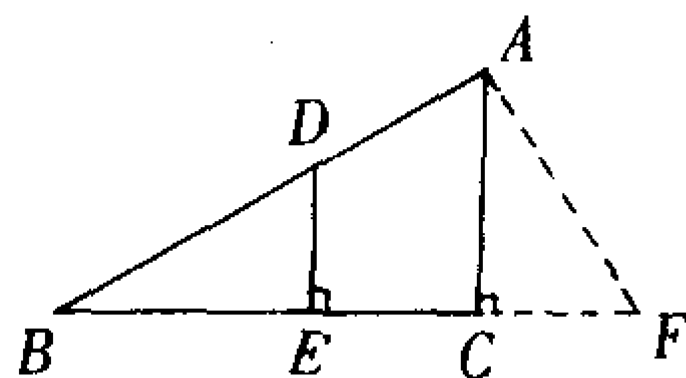
$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle FBE$，

$\therefore\quad \angle ABE=\angle FBE$. 即 BD 是$\angle ABC$ 的平分线.

1·80　$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,D 为 AB 上一点,作 $DE\perp BC$ 于 E,使 $BE=AC$,且 $BD=\frac{1}{2}$,又 $DE+BC=1$,求证:$\angle ABC=30°$.

(中国北京市数学竞赛,1986 年;汉江杯数学竞赛,1990 年)

[证 1]　延长 BC 至 F,使 $CF=DE$,连 AF.



在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle AFC$ 中,

由 $BE=AC,DE=CF$,

知$\triangle BDE\cong\triangle AFC$.

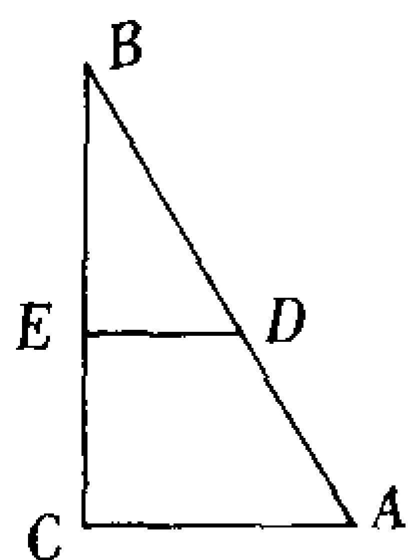
则　$AF=BD=\frac{1}{2}$, $\angle DBE=\angle CAF$,

$\therefore\quad \angle BAF=\angle BAC+\angle CAF$

$\quad=\angle BAC+\angle ABC=90°$.

在 Rt$\triangle ABF$ 中, $AF=\frac{1}{2}$, $BF=BC+CF=BC+DE=1$,

$\therefore\quad \angle ABC=30°$.



[证 2]　设 $DE=x$.

$\because\quad \triangle BED\backsim\triangle BCA$,

$\therefore\quad \frac{x}{CA}=\frac{BE}{BC}$.

由　$BC+ED=1$, 得 $BC=1-x$,

又　$BE=CA$, $BD=\frac{1}{2}$,

$$\therefore\quad x=\frac{CA\cdot BE}{BC}=\frac{BE^2}{1-x}=\frac{\frac{1}{4}-x^2}{1-x},$$

得　$x-x^2=\frac{1}{4}-x^2$, $\therefore\quad x=\frac{1}{4}$.

在 Rt$\triangle BED$ 中, $BD=\frac{1}{2}$, $ED=x=\frac{1}{4}$,

$\therefore\quad \angle B=30°$, 即　$\angle ABC=30°$.

1·81　如果三角形的三边 a、b、c 满足关系式　$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=$

$\frac{3}{a+b+c}$,那么其中有一个角等于60°.

（基辅数学奥林匹克,1963年）

［证］ 由题设有

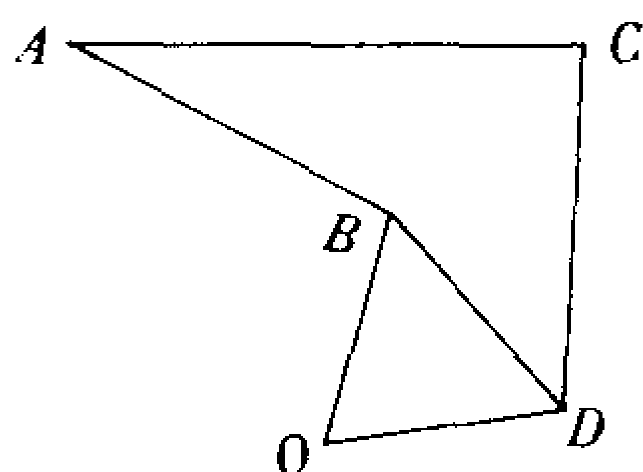
$(a+b+c)[(b+c)+(a+b)]=3(a+b)(b+c)$,

即 $a^2+c^2-ac=b^2$,

但 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

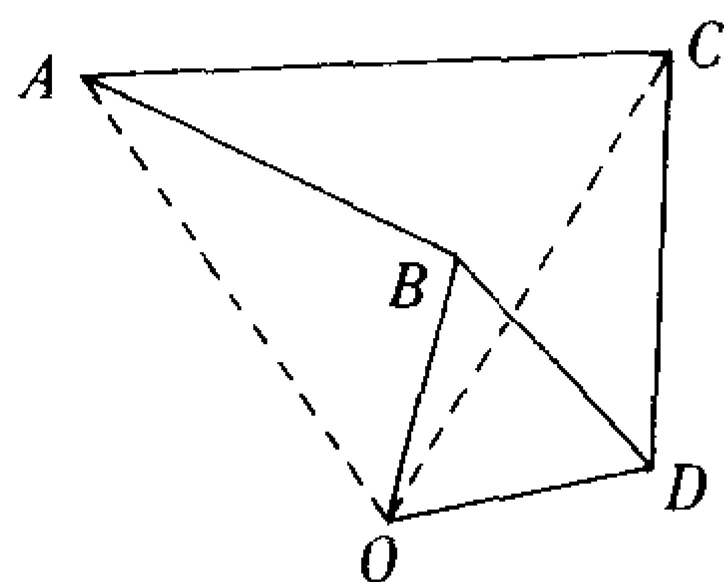
∴ $2\cos B=1$, 故 $\angle B=60°$.

1·82 如图,已知:$AB=CD$,而AC、BD的垂直平分线相交于O,求证:$\angle ABO=\angle CDO$.



（中国湖南省韶关市数学竞赛,1984年）

［证］ 连结AO、CO.



∵ 点O是AC、BD的垂直平分线交点,

∴ $AO=CO$, $BO=DO$.

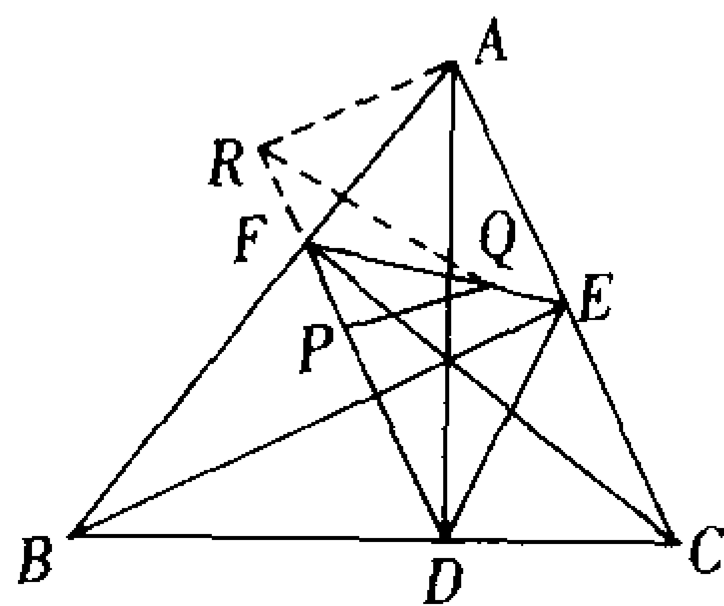
又∵ $AB=CD$, ∴ $\triangle AOB\cong\triangle COD$,

∴ $\angle ABO=\angle CDO$.

1·83 AD、BE与CF为锐角$\triangle ABC$的高,P、Q分别在线段DF、EF上且使$\angle PAQ$,$\angle DAC$同向相等,求证:AP为$\angle FPQ$的平分线.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1988年）

［证］ 延长PF到R,使$FR=FQ$.



则 $\angle FRQ=\angle FQR$.

由A、F、D、C共圆可得

$\angle DFC=\angle DAC$.

∴ $\angle PAQ=\angle DAC=\angle DFC$

$=\frac{1}{2}\angle DFE=\angle FRQ$

所以,P、Q、A、R共圆,从而

$\angle APR=\angle AQR$, ①

$\angle APQ=\angle ARQ$. ②

∵ $\angle FRQ=\angle DFC$, ∴ $RQ\parallel FC$. 故 $AF\perp RQ$.

又∵ $FR=FQ$,

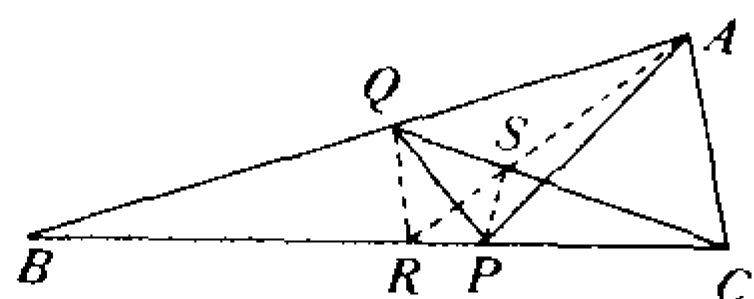
故 AF 是线段 RQ 的垂直平分线,于是

$$\angle AQR=\angle ARQ, \quad ③$$

内①、②和③得 $\angle APR=\angle APQ$. 即 AP 平分 $\angle FPQ$.

1·84 在等腰△ABC 中,$\angle ABC=20°$,$BC=AB$.在边 AB 和 BC 上分别取点 Q 和 P,使得 $\angle PAC=50°$,$\angle QCA=60°$, 证明:$\angle PQC=30°$.

(莫斯科数学奥林匹克,1952 年)



[证] 由顶点 A 引直线 AR,使之与底边 AC 交成 $60°$角,连 QR.设 AR 与 QC 相交于点 S,连结 PS,如图.

∵ △ASC 是等边三角形,

∴ $\angle QSR=\angle ASC=60°$,

又∵ $SQ=SR$.

∴ △QSR 也是等边三角形.

∵ $\angle BAC=\angle BCA=80°$,

∴ $\angle APC=180°-80°-50°=50°=\angle PAC$.

∴ $PC=CA=SC$.

又 $\angle QCR=\angle QAR=20°$,

∴ $\angle CSP=\frac{1}{2}(180°-20°)=80°$.

$\angle QSP=100°=\angle QRP$,

$QR=QS$, $QP=QP$.

∴ △QRP≌△QSP.

$$\angle PQC=\angle PQR=\frac{1}{2}\angle SQR=30°.$$

1·85 设 P 和 Q 为锐角△ABC 的边 AB、AC 上各一点,过 P 作 AB 的垂线与过 Q 作 AC 的垂线交于点 D,M 为边 BC 的中点,求证:$PM=QM$ 的充分必要条件是 $\angle BDP=\angle CDQ$.

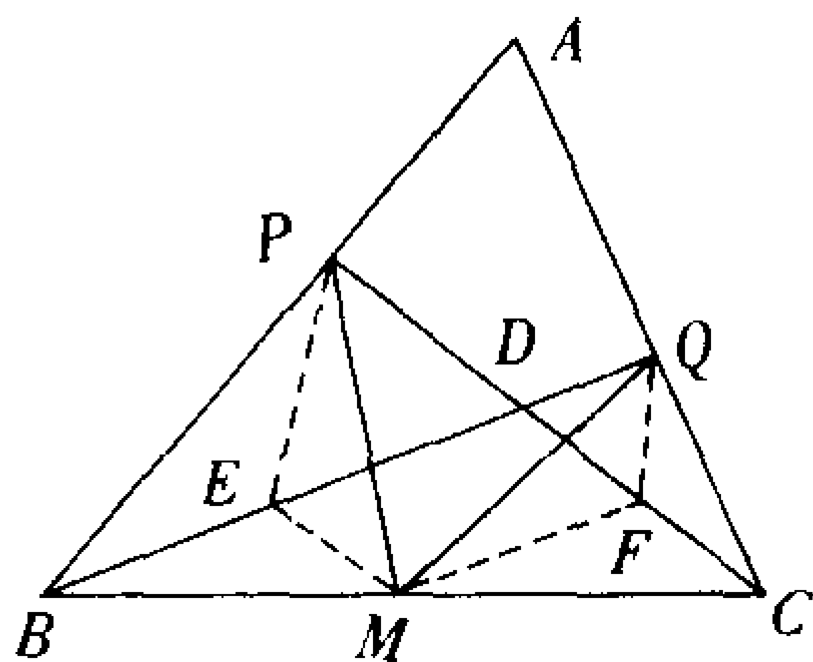
(中国国家集训队测验题,1995 年)

[证] 分别取 BD、CD 的中点 E 和 F,连结 PE、EM、FM、QF.

∵ M 为 BC 的中点,

$\therefore \quad EM=\frac{1}{2}CD=QF,$

$FM=\frac{1}{2}BD=PE.$



若 $PM=QM$,则$\triangle PEM\cong\triangle MFQ$.

$\therefore \quad \angle PEM=\angle QFM.$

$\because \quad \angle DEM=\angle DFM,$

$\therefore \quad \angle PED=\angle QFD.$

$\therefore \quad \angle PBD=\frac{1}{2}\angle PED=\frac{1}{2}\angle QFD=\angle QCD.$

$\therefore \quad \angle PDB=\angle QDC$,必要性成立.

若 $\angle PBD=\angle QDC$,则 $\angle PED=\angle QFD$.

$\because \quad \angle DEM=\angle DFM$,$\therefore \quad \angle PEM=\angle QFM$.

$\therefore \quad \triangle PEM\cong\triangle MFQ$. $\therefore \quad PM=QM$,充分性成立.

1·86 已知:一个三角形的三条边长 a、b、c 与各边的对角 A、B、C 满足关系式 $a+b=\mathrm{tg}\frac{C}{2}(a\,\mathrm{tg}A+b\,\mathrm{tg}B)$. 证明:这个三角形是等腰三角形.

(第 8 届国际数学奥林匹克,1966 年)

[证] 由于 A、B、C 为$\triangle ABC$ 的三个内角,则

$$A+B+C=\pi,\text{或}\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}.$$

有 $$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\mathrm{ctg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{AB}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

已知等式可以改写为

$$a\left(1-\mathrm{tg}A\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)+b\left(1-\mathrm{tg}B\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)=0,$$

即 $a\left(1-\dfrac{\sin A\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos A\cdot\sin\dfrac{A+B}{2}}\right)+b\left(1-\dfrac{\sin B\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos B\cdot\sin\dfrac{A+B}{2}}\right)=0$,

或 $a\cos B\left(\sin\dfrac{A+B}{2}\cos A-\cos\dfrac{A+B}{2}\sin A\right)$

$+b\cos A\left(\sin\dfrac{A+B}{2}\cos B-\cos\dfrac{A+B}{2}\sin B\right)=0$,

则 $a\cos B\sin\dfrac{B-A}{2}+b\cos A\sin\dfrac{A-B}{2}=0$,

$\therefore\ \sin\dfrac{B-A}{2}(a\cos B-b\cos A)=0$.

由正弦定理得 $\sin\dfrac{B-A}{2}\cdot 2R(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=0$,

即 $\sin\dfrac{B-A}{2}\cdot\sin(A-B)=0$.

故 $\sin^2\dfrac{B-A}{2}\cos\dfrac{B-A}{2}=0$.

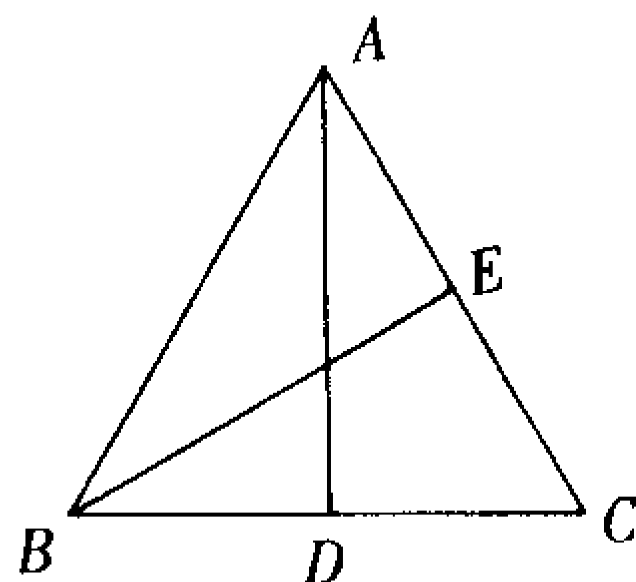
$\because\ -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{B-A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore\ \cos\dfrac{B-A}{2}\neq 0$,

$\therefore\ \sin\dfrac{B-A}{2}=0$, 有 $\dfrac{B-A}{2}=0$. 即 $B=A$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

1·87 在$\triangle ABC$中引中线AD和BE,又$\angle CAD=\angle CBE=30°$.求证:$\triangle ABC$为正三角形.

(莫斯科数学奥林匹克,1972年)



[证] 如图,$\because\ \triangle ADC\backsim\triangle BEC$;

$\therefore\ \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{DC}{EC}=\dfrac{2DC}{2EC}=\dfrac{BC}{AC}$.

$AC^2=BC^2$, $AC=BC$.

在$\triangle BEC$中, $\angle BEC=30°$, $EC=\dfrac{1}{2}BC$.

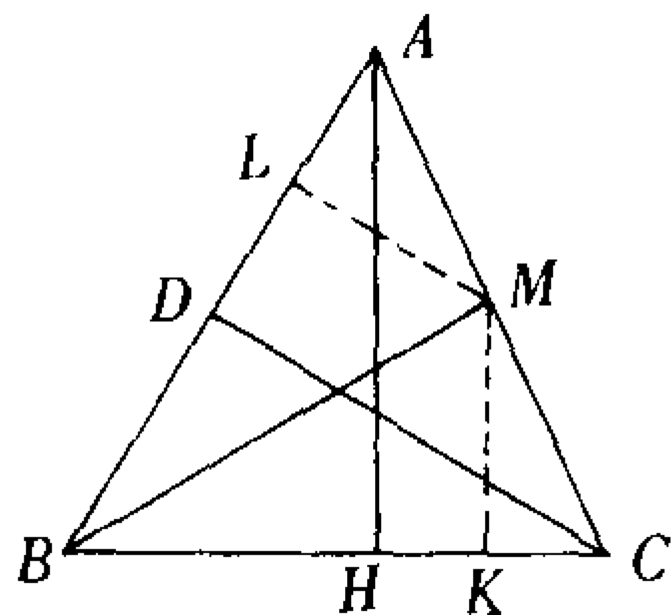
$\therefore\ \angle BEC=90°$, $\angle C=60°$.

故 $\triangle ABC$为正三角形.

1·88 在锐角$\triangle ABC$中，最大的高AH等于中线BM，也等于内角平分线CD，求证：$\triangle ABC$是等边三角形.

（第1届全苏数学奥林匹克，1967年）

［证］ 过点M作$ML\perp AB$于L，作$MK\perp BC$于K，于是有



$$MK=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM,$$

$$ML\leqslant\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}BM.$$

$\therefore\quad \angle MBC=30^\circ,\ \angle MBA\leqslant 30^\circ.$

$\therefore\quad \angle ABC\leqslant 60^\circ.$

另一方面，由中线定理知于同一三角形中，大边上的中线小而小边上的中线大. 因为边BC上的中线$AE\geqslant AH=BM$，边AB上的中线$CF\leqslant CD=BM$，所以BM是最小中线，从而有

$AC\geqslant BC,\ AC\geqslant AB.$

$\therefore\quad \angle ABC\geqslant\angle BAC,\ \angle ABC\geqslant\angle ACB.$

$\therefore\quad \angle BAC\leqslant 60^\circ,\ \angle ABC\leqslant 60^\circ,\ \angle ACB\leqslant 60^\circ.$

$\therefore\quad \angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ.$

$\therefore\quad \triangle ABC$为等边三角形.

1·89 已知：三角形三内角成等差数列，三条高也成等差数列，求证：这个三角形是等边三角形.

（第3届拉丁美洲地区数学奥林匹克，1988年）

［证］ 设三角形ABC的三内角为$A\leqslant B\leqslant C$.

因为 A、B、C成等差数列，所以$B=60^\circ$.

设BC、CA、AB上的高依次为 h_a、h_b、h_c，则 $h_a\geqslant h_b\geqslant h_c$，

所以 由h_a、h_b、h_c成等差数列得 $2h_b=h_a+h_c$.

设 $\triangle ABC$的面积为S，则 $\dfrac{2S}{b}=\dfrac{S}{a}+\dfrac{S}{c}$.

故 $2ac=ab+bc$.

由正弦定理得 $2\sin A\sin C=\sin A\sin B+\sin B\sin C$,

令 $A=60^\circ-\theta,\ C=60^\circ+\theta$，则

$$2\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}[\sin(60^\circ-\theta)+\sin(60^\circ+\theta)],$$

即 $\cos2\theta+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\sin60^\circ\cos\theta$,

或 $2\cos^2\theta-1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cos\theta$,

亦即 $4\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$.

所以 $(\cos\theta-1)(4\cos\theta+1)=0$.

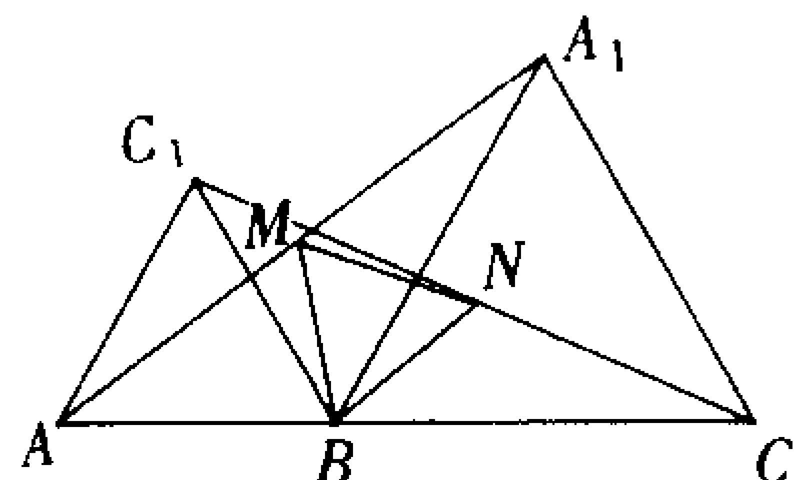
因为 $\cos\theta>0$,所以 $4\cos\theta+1>0$,于是 $\cos\theta=1$,得 $\theta=0^\circ$.

即 $A=C=60^\circ$.

所以$\triangle ABC$为等边三角形.

1·90 在直线上给定了3个点 A、B、C,而 B 点在 A 点和 C 点之间.以线段 AB 为一边作等边三角形 ABC_1,以 BC 为一边也作一个等边三角形 BCA_1,使得 A_1 和 C_1 位于直线 AB 的同一侧.设点 M 是线段 AA_1 的中点,点 N 是线段 CC_1 的中点.求证:$\triangle BMN$ 是等边三角形.

(莫斯科数学奥林匹克,1946年)



[证] 如图,易证

$\triangle ABA_1\cong\triangle C_1BC$,

$\therefore$ $AA_1=CC_1$, $\angle MA_1B=\angle NCB$,

且 $MA_1=NC$, $A_1B=BC$,

$\therefore$ $\triangle A_1BM\cong\triangle CBN$,

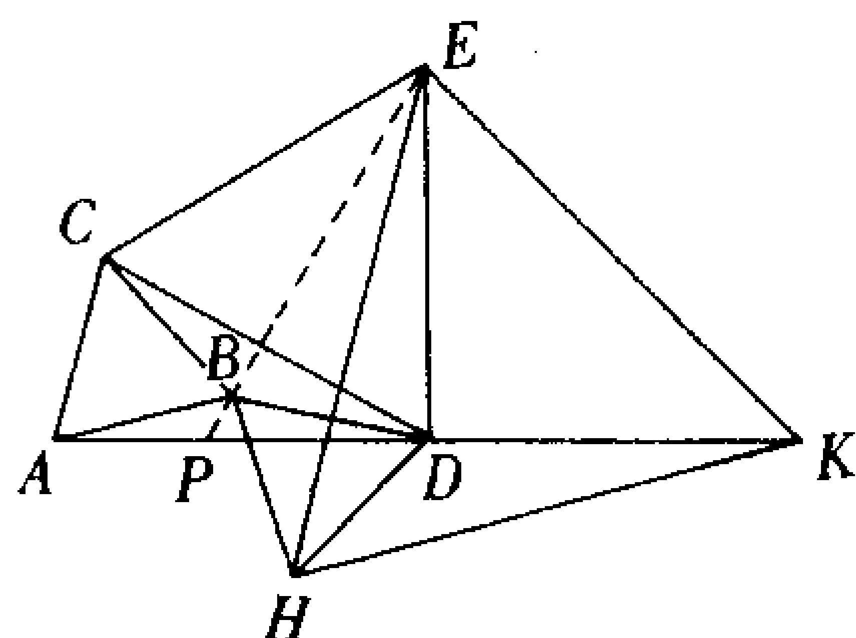
有 $BM=BN$, $\angle MBA_1=\angle NBC$,

$$\therefore\ \angle MBN=\angle MBA_1+\angle A_1BN=\angle NBC+\angle A_1BN=\angle A_1BC=60^\circ$$

$\therefore$ $\triangle BMN$ 是等边三角形.

1·91 位于同一平面内的正$\triangle ABC$、正$\triangle CDE$ 和正$\triangle EHK$(顶点依逆时针方向排列)两两地有公共点 C 和 E,且 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$.求证:$\triangle BHD$ 也是正三角形.

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)



[证] 将$\triangle CAD$ 绕点 C 逆时针旋转 60°,此时它变至$\triangle CBE$.

因$\triangle ABC$ 和$\triangle CDE$ 均为正三角形,且同向(顶点依逆时针方向排列),可有

$AD=BE$,且 AD 与 BE 间夹角

$\angle EPD=60°$.

再将$\triangle HBE$绕点H顺时针方向旋转60°,由于$\triangle EHK$系正三角形,故E点变至K.

$\because \quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}, \quad \therefore \quad DK=AD=BE.$

已知$\angle EPD=60°$,故在此旋转中,射线EB变为射线KD,点B变至点D.

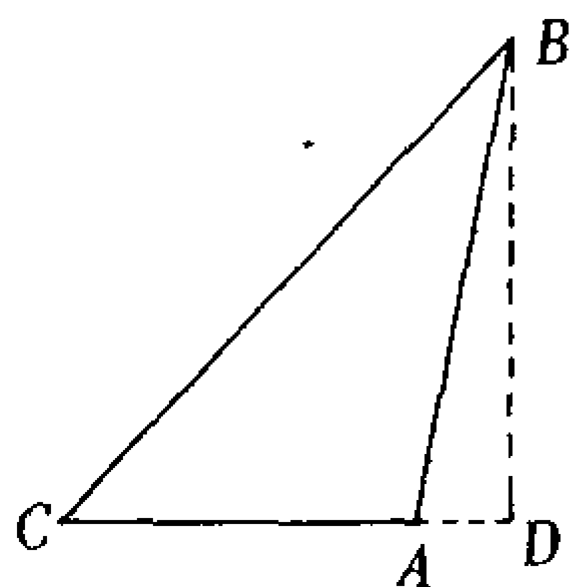
$\therefore \quad HB=HD, \ \angle BHD=60°.$

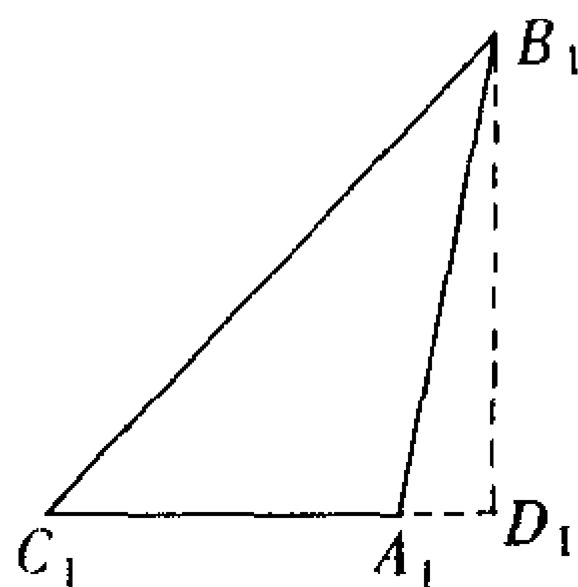
因此$\triangle BHD$是正三角形.

1·92 (1)已知$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中,$AB=A_1B_1$,$BC=B_1C_1$,$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=100°$.试证:$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.(2)若将(1)中条件改为$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=70°$,其余条件不变,结论是否仍成立?为什么?

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1984年)

[证] (1)如图,分别过B、B_1作对边CA、C_1A_1上的高BD、B_1D_1,其中D、D_1为垂足.





$\because \quad \angle BAC=\angle B_1A_1C_1=100°>90°$

$\therefore \quad D$、D_1在CA、C_1A_1的延长线上.

于是 $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1=80°$.

又 $BA=B_1A_1$, $\angle BDA=\angle B_1D_1A_1=90°$,

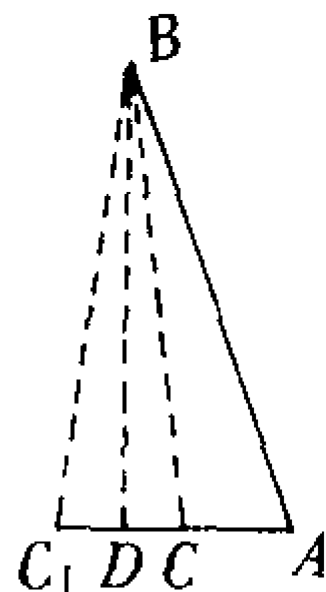
$\therefore \quad \triangle ABD\cong\triangle A_1B_1D_1$.

$\therefore \quad BD=B_1D_1, \ AD=A_1D_1$.

又 $\because \quad BC=B_1C_1, \ \angle D=\angle D_1=90°$,

$\therefore \quad \mathrm{Rt}\triangle BCD\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1C_1D_1$,

$\therefore \quad CD=C_1D_1$, 有 $AC=A_1C_1$.



$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

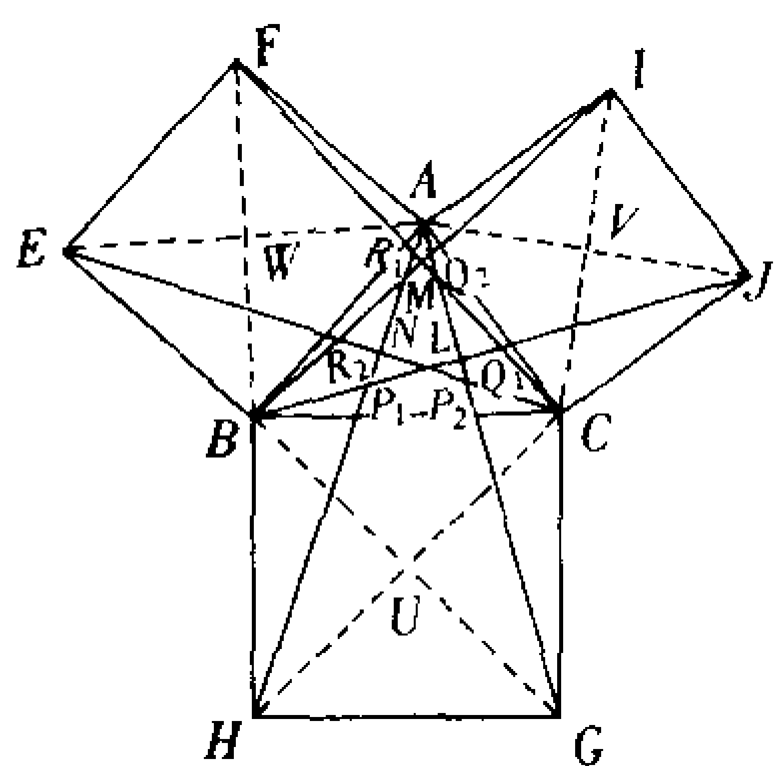
(2)此时结论不成立.

$\because\quad \angle BAC = 70° < 90°$.

作 $BD \perp AC$,垂足为 D.以 DB 为轴,取 C 对称点 C_1.

由于 $BC = BC_1$, BA 为公共边, $\angle BAC$ 为公共角,

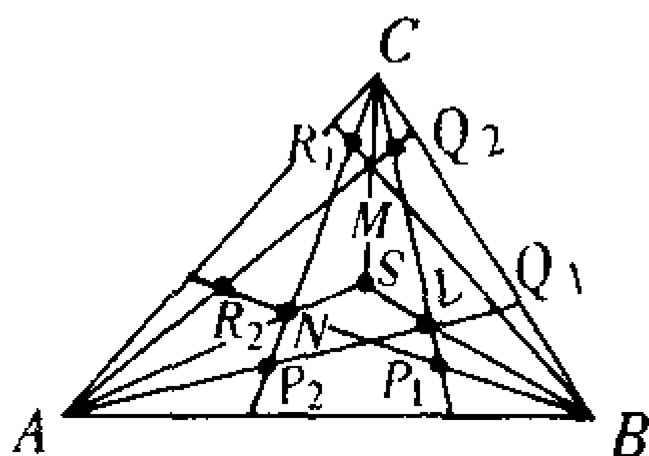
显然$\triangle ABC$ 与$\triangle ABC_1$ 满足题设条件,但它们并不全等.



1·93 分别以$\triangle ABC$ 的三边为一边向形外作正方形$ABEF$、$BCGH$、$CAIJ$,设 $AH \cap BJ = P_1$, $BJ \cap CF = Q_1$, $CF \cap AH = R_1$, $AG \cap CE = P_2$, $BI \cap AG = Q_2$, $CE \cap BI = R_2$,求证:$\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle P_2Q_2R_2$.

(中国国家集训队选拔考试,1989 年)

[证] 令 $CF \cap BI = M$, $CE \cap AH = N$, $AG \cap BJ = L$. 当将$\triangle ABI$ 绕点 A 旋转 90°时,就重合于$\triangle AFC$,故有 $BI \perp FC$.



因此知 A、F、B、M 和 M、B、U、C 分别四点共圆.

所以有$\angle AMF = \angle ABF = 45° = \angle CBU = \angle CMU$.

故知 A、M、U 三点共线.

同理, B、N、V 和 C、L、W 分别三点共线.

易证,直线 AU、BV、CW 恰为$\triangle UVW$ 三条高所在的三条直线,

故 三线共点 S,而 S 恰为$\triangle UVW$ 的垂心.

因为 $\angle SMR_2 = 45° = \angle SNR_1$, $\angle SMR_1 = 135° = \angle SNR_2$,

所以 M、R_1、R_2、N、S 五点共圆.

从而有 $SR_1 = SR_2$ 且 $\angle R_1SR_2 = 90°$.

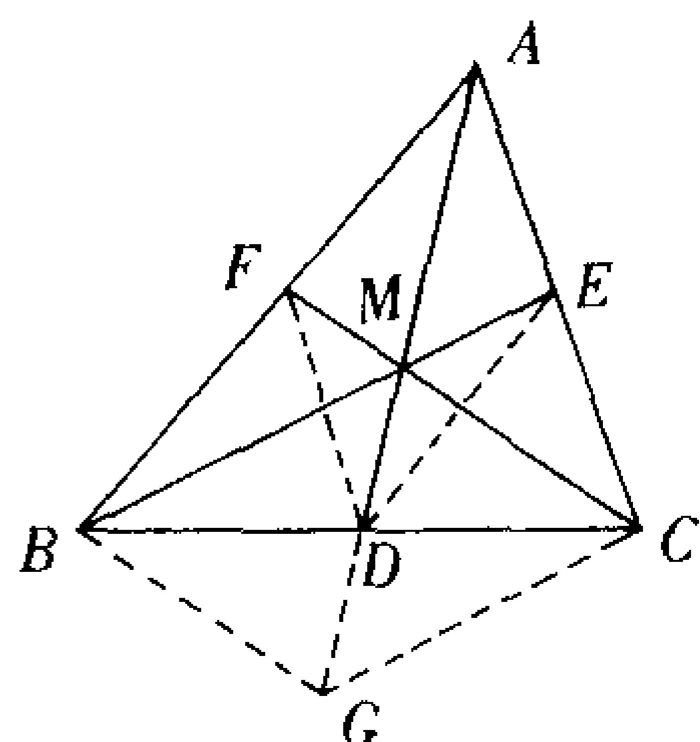
同理 $SP_1 = SP_2$, $SQ_1 = SQ_2$ 且 $\angle P_1SP_2 = \angle Q_1SQ_2 = 90°$.

由此可见,当将$\triangle P_1Q_1R_1$ 绕点 S 旋转 90°时,便重合于$\triangle P_2Q_2R_2$.所以 $\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle P_2Q_2R_2$.

1·94 已知:三角形 T'的三条边的长度分别等于三角形 T 的三条中线的长度,且两个三角形有一组角相等.求证:这两个三角形相似.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1989 年)

[证]　设 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线，M 是重心.



延长 AD 到 G，使 $DG=MD$，

连 BG、CG、FD、DE.

显然，为证明本题结论，只需证明

$\triangle ABC \backsim \triangle CMG$（不计顶点顺序）.

(1)当$\angle MGC=\angle ACB$ 时，

由　$\angle BMG=\angle MGC=\angle ACB$，

从而　M、D、C、E 四点共圆.

$\therefore$　$\angle ACB=\angle AGB=\angle GMC$，故$\triangle ABC \backsim \triangle CGM$.

(2)当$\angle MGC=\angle ABC$ 时，此时 A、B、G、C 四点共圆，

$\therefore$　$\angle ACB=\angle AGB=\angle GMC$，因而　$\triangle ABC \backsim \triangle CGM$.

(3)当$\angle MGC=\angle BAC$ 时，$\angle BMG=\angle MGC=\angle BAC=\angle BFD$.

$\therefore$　F、B、D、M 四点共圆，有　$\angle GMC=\angle ABC$，

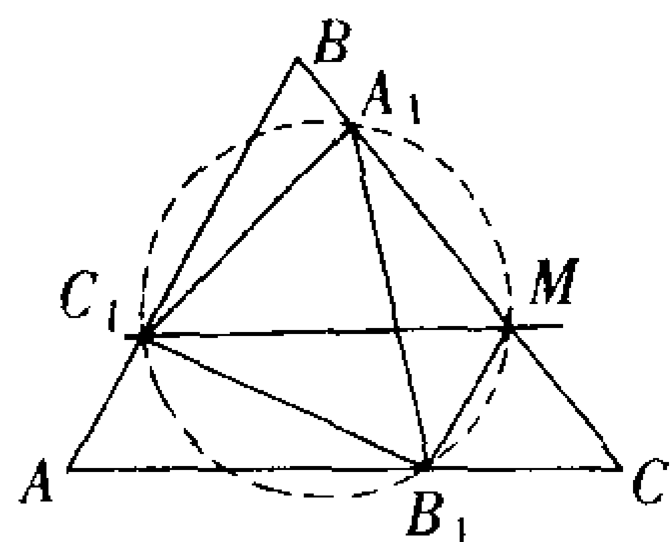
因而　$\triangle ABC \backsim \triangle GMC$.

由(1)、(2)、(3)本题得证.

1·95　$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 和 CA 上分别有点 C_1、A_1 和 B_1（异于$\triangle ABC$ 的顶点），满足 $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{CB_1}{B_1A}$ 及$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$，求证：$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

[证]　过 C_1 作 $C_1M /\!/ AC$ 交 BC 于 M（如图，注意两种情况），则

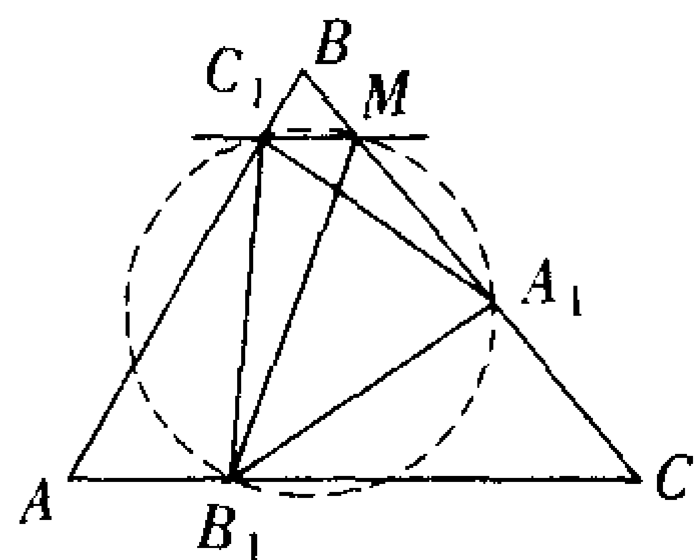


$$\frac{CM}{MB}=\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CB_1}{B_1A}$$

$\therefore$　$B_1M /\!/ AB$.

知　AB_1MC_1 是平行四边形.

因此，$\angle B_1A_1C_1=\angle A=\angle B_1MC_1$ 由此得 A_1、B_1、C_1、M 共圆.



$\therefore$　$\angle A_1B_1C_1=C_1MB=\angle C$.

又　$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$，

故　$\triangle A_1C_1B_1 \backsim \triangle ABC$.

上述证明是在点 M 不与点 A_1 重合(不论点 M 在 A_1、C 或 A_1B 之间)的情况下适用.若 M 与 A_1 重合,则 A_1、B_1、C_1 分别为 BC、CA、AB 的中点,易证$\triangle A_1B_1C_1$ 相似于$\triangle ABC$.

1·96 在$\triangle ABC$ 中,G 为重心,M 为 BC 的中点,X 在 AB 上,Y 在 AC 上,且 X、G、Y 共线,直线 $XY /\!/ BC$.设 XC 与 GB 交于 Q,YB 与 GC 交于 P.求证:$\triangle MPQ \backsim \triangle ABC$.

(亚太地区数学奥林匹克,1991 年)

[证] 设 E 为 AB 的中点.

因为 $XY /\!/ BC$,则 $\triangle GPY \backsim \triangle CPB$.

$$\therefore \quad \frac{GP}{PC}=\frac{GY}{BC}=\frac{XY/2}{BC}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \quad \frac{PC}{GC}=\frac{3}{4}=\frac{PC}{(2/3)\cdot CE}, \text{ 即 } \frac{PC}{CE}=\frac{1}{2}.$$

$CP=PE$.因而 MP 为$\triangle CEB$ 的中位线.

于是 $MP /\!/ AB$. 又 $MP=\dfrac{1}{4}AB$.

同理还有 $MQ /\!/ AC$,$MQ=\dfrac{1}{4}AC$.

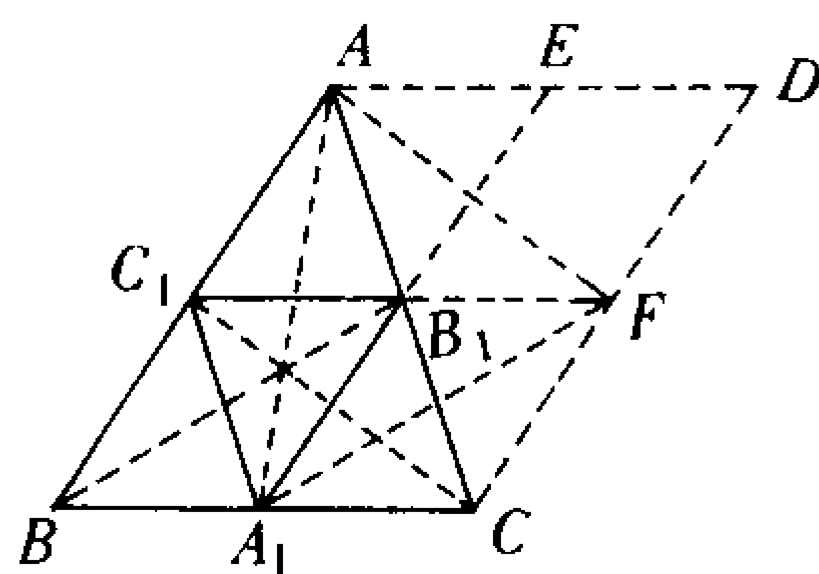
因而 $\angle PMQ=\angle BAC$,且 $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{AB}{AC}$.

$\therefore \quad \triangle MPQ \backsim \triangle ABC$.

1·97 求证:每一个三角形的三条中线可以构成新的三角形.再证明:如果 H_1 是原来的三角形,H_2 是 H_1 的中线构成的三角形,H_3 是 H_2 的中线构成的三角形,那么三角形 H_1 和 H_3 相似.

(匈牙利数学奥林匹克,1940 年)

[证] (1)设 A、B、C 是三角形 H_1 的顶点,A_1、B_1、C_1 是边 BC、CA、AB 的中点.



把三角形 H_1 扩充成平行四边形 $ABCD$,设 F 是 CD 的中点,E 是 AD 的中点.

由于四边形 BA_1FB_1 和四边形 AC_1CF 是平行四边形.则

$$AF=CC_1,\quad A_1F=BB_1.$$

因此$\triangle AA_1F$的三边长恰为$\triangle ABC$的三条中线长. 于是三角形的三条中线可以构成新的三角形.

(2)由于$\triangle AA_1F$的中线和$\triangle ABC$的对应边的比为$\frac{3}{4}:1$,即H_3的三边与H_1的三边之比为3:4.

因此三角形H_3与三角形H_1相似.且相似比为3:4.

2. 多边形中的角相等问题

1·98 在凸四边形$ABCD$的边BC上取两点E、F(E比F离B较近).若$\angle BAE=\angle CDF$,且$\angle EAF=\angle FDE$.求证:$\angle FAC=\angle EDB$.

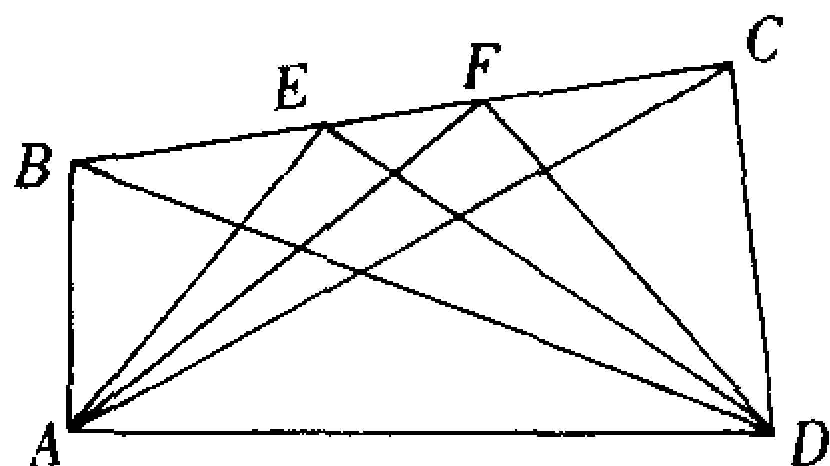
(第30届全俄数学奥林匹克,1996年)

[证] 由$\angle EAF=\angle FDE$,知四边形$AEFD$内接于圆. 所以$\angle AEF+\angle FDA=180°$. 又 $\angle BAE=\angle CDF$, 故有

$\angle ADC+\angle ABC$

$=\angle FDA+\angle CDF+\angle AEF-\angle BAE$

$=180°$



于是,四边形$ABCD$内接于圆.

则 $\angle BAC=\angle BDC$.

故 $\angle FAC=\angle EDB$.

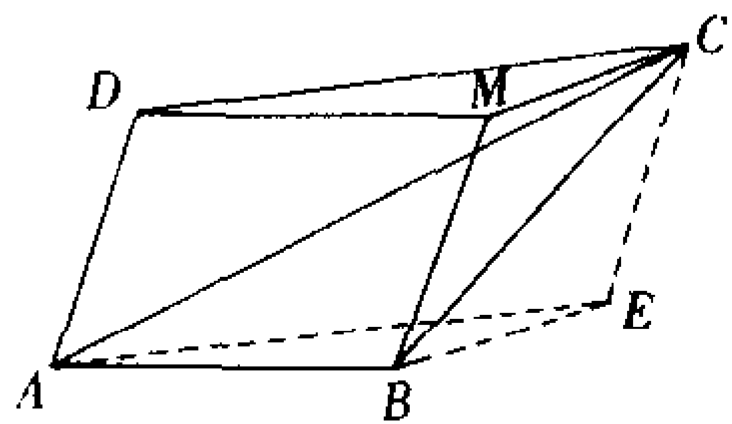
1·99 点M是四边形$ABCD$内的一点,使得四边形$ABMD$是平行四边形且有$\angle CBM=\angle CDM$,求证:$\angle ACD=\angle BCM$.

(第12届全苏数学奥林匹克,1978年)

[证] 过点C作$CE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} MB$,连结$AE$、$BE$,于是四边形$AECD$和$BECM$都是平行四边形.

$\therefore$ $\angle EAB=\angle CDM=\angle CBM$

$=\angle BCE$.

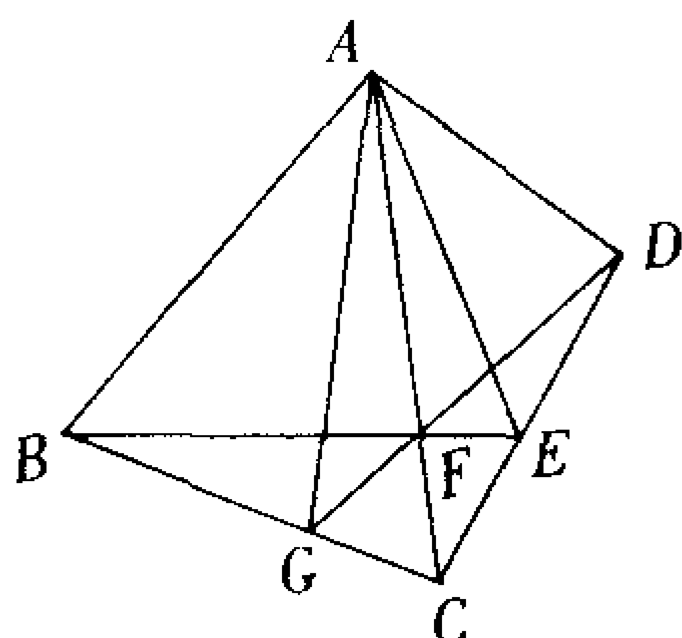


$\therefore$ A、B、E、C四点共圆.

$\therefore$ $\angle ACB=\angle AEB=\angle DCM$.

$\therefore$ $\angle ACD=\angle BCM$.

1·100 如图,在四边形$ABCD$中,对角线AC平分$\angle BAD$.在CD上取一点E,过BE交AC于F,延长DF交BC于G.求证:$\angle GAC=$



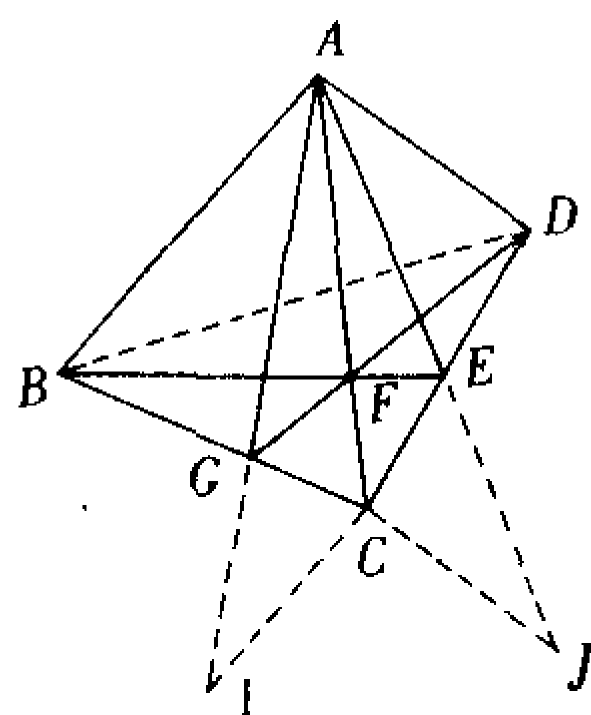
$\angle EAC$.

（中国高中数学联赛，1999年）

［证］ 连结 BD 交 AC 于 H，在 $\triangle BCD$ 中由塞瓦定理有

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1.$$

又 AH 平分 $\angle BAD$，则知 $\dfrac{BH}{HD}=\dfrac{AB}{AD}$.



$$\therefore\quad \frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1.$$

过点 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I，作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J.

则 $\dfrac{CG}{GB}=\dfrac{CI}{AB}$，$\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{AD}{CJ}$，

$\therefore\quad \dfrac{CI}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{AD}{CJ}=1$，从而 $CI=CJ$.

又$\because$ $CI\parallel AB, CJ\parallel AD$,

$\therefore\quad \angle ACI=\pi-\angle BAC=\pi-\angle DAC$

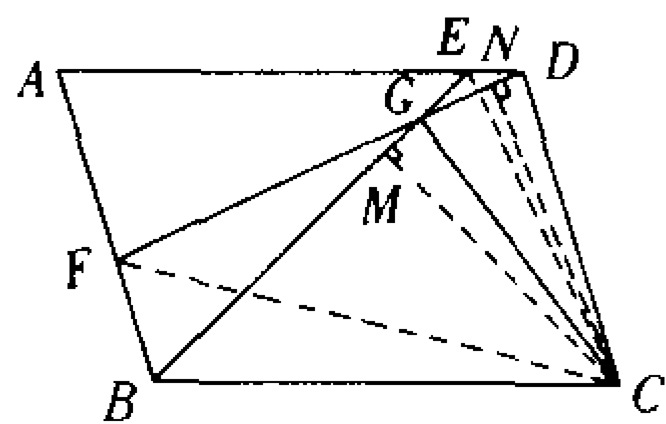
$=\angle ACJ$.

故 $\triangle ACI\cong\triangle ACJ$，从而 $\angle IAC=\angle JAC$，

即 $\angle GAC=\angle EAC$.

1·101 在$\square ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，F 为 AB 上一点，且 $BE=DF$，BE 与 DF 交于 G，求证：$\angle BGC=\angle DGC$.

（中国吉林省长春市数学竞赛，1990年）



［证］ 过 C 作 $CM\perp BE$ 于 M，作 $CN\perp DF$ 于 N.

连 CF、CG，则

$$S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=S_{\triangle CFD}$$

$\because$ $BE=DF$，$\therefore$ $CM=CN$.

从而 $\text{Rt}\triangle CMG\cong\text{Rt}\triangle CNG$. 即有 $\angle BGC=\angle DGC$.

1·102 给定一个凸四边形 $ABCD$，将它的对角线交点记作 O. 现知$\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle ADO$ 的周长彼此相等. 求证：四边形

$ABCD$ 是菱形.

（莫斯科数学奥林匹克，1972 年）

[证] 设 a、b、c、d 分别为四条线段 OA、OB、OC、OD 的长度. 如果它们不等，则可设 $c \geqslant a$，$d \geqslant b$. 于是可在 OC 上截取 $OM = a$，在 OD 上截取 $ON = b$. 连 AN、BM 和 MN，如图 1.

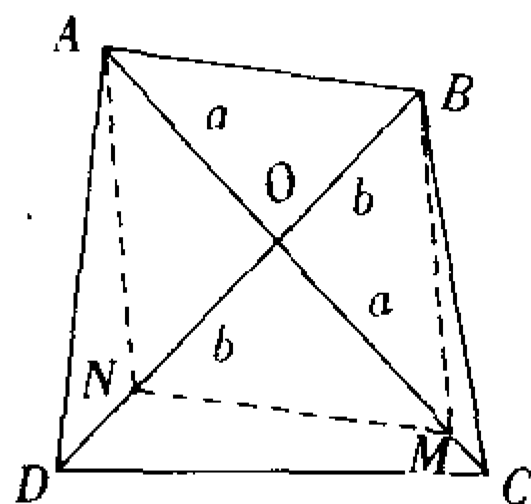


图 1

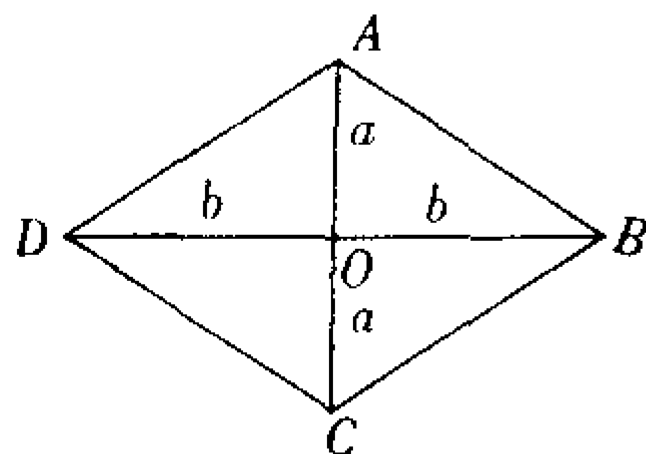


图 2

则 $ABMN$ 是平行四边形.

$\triangle ABO$ 的周长 $=\triangle MNO$ 的周长 $=\triangle CDO$ 的周长，

故 M 与 C 重合，N 与 D 重合，$ABCD$ 为平行四边形. 如图 2.

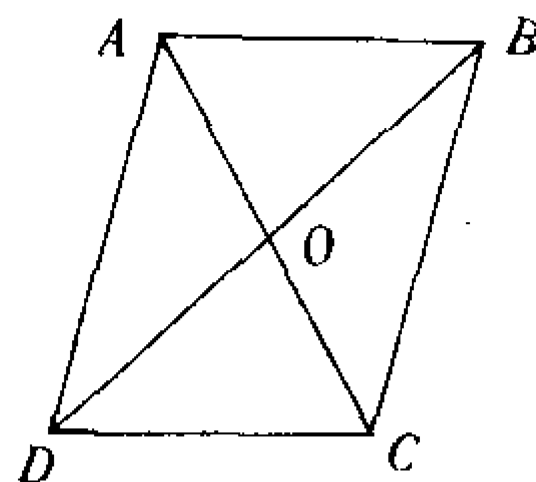
$\because$ $\triangle ABO$ 的周长 $=\triangle ADO$ 的周长，

即 $a+b+AB=a+b+AD$.

$\therefore$ $AB=AD$，故 $\square ABCD$ 为菱形.

1·103 如图，O 是$\square ABCD$ 内一点，且$\angle AOB+\angle COD=180°$. 求证：$\angle OBC=\angle ODC$.

（加拿大数学奥林匹克，1997 年）



[证 1] 将$\triangle DOC$ 延 DA 方向平移使 DC 与 AB 重合，得$\triangle ABO'$.

$\because$ $\angle AO'B=\angle DOC$，

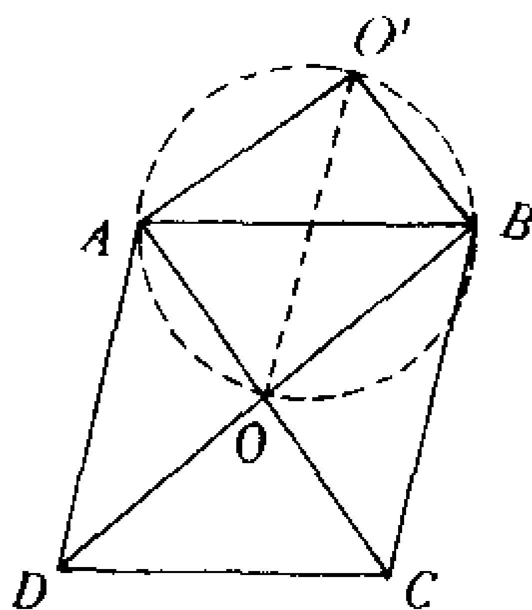
$\therefore$ $\angle AO'B+\angle AOB=\angle DOC+\angle AOB=180°$，

$\therefore$ A、O、B、O'四点共圆.

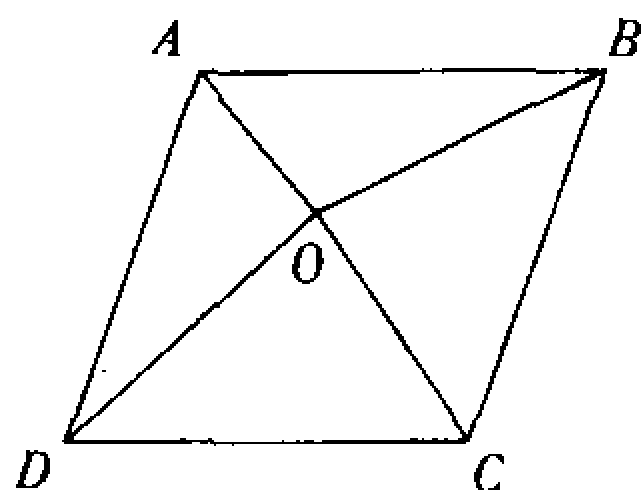
又$\because$ $O'O /\!/ BC$，

$\therefore$ $\angle OBC=\angle BOO'=\angle O'AB=\angle ODC$，

即 $\angle OBC=\angle ODC$.



[证 2] 令$\angle AOB=\theta$，$\angle BOC=\alpha$. 则$\angle COD=180°-\theta$，$\angle AOD=180°-\alpha$.



$\because\ AB=CD$, $\sin\theta=\sin(180^\circ-\theta)$，对$\triangle OCD$和$\triangle OAB$使用正弦定理，有

$$\frac{\sin\angle CDO}{OC}=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{CD}=\frac{\sin\theta}{AB}=\frac{\sin\angle ABO}{OA}.$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{OC}=\frac{\sin\angle ABO}{\sin\angle CDO}. \qquad ①$$

类似地，对$\triangle OBC$和$\triangle OAD$使用正弦定理，有

$$\frac{\sin\angle CBO}{OC}=\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{AD}=\frac{\sin\angle ADO}{OA}.$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{OC}=\frac{\sin\angle ADO}{\sin\angle CBO}. \qquad ②$$

由①、②，可得 $\sin\angle ABO\sin\angle CBO=\sin\angle ADO\sin\angle CDO$.

则 $\cos(\angle ABO+\angle CBO)-\cos(\angle ABO-\angle CBO)$

$=\cos(\angle ADO+\angle CDO)-\cos(\angle ADO-\angle CDO)$.

$\because\ \angle ADC=\angle ABC$，又 $\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC$，且$\angle ABO+\angle CBO=\angle ABC$.

则 $\cos(\angle ABO-\angle CBO)=\cos(\angle ADO-\angle CDO)$.

下面分两种情况讨论：

情形1：$\angle ABO-\angle CBO=\angle ADO-\angle CDO$，

由于 $\angle ABO+\angle CBO=\angle ADO+\angle CDO$，

把这两等式相减，有 $2\angle CBO=2\angle CDO$.

即 $\angle CBO=\angle CDO$ 本题得证.

情形2：$\angle ABO-\angle CBO=\angle CDO-\angle ADO$.

又 $\angle ABO+\angle CBO=\angle CDO+\angle ADO$.

把这两等式相加，有 $2\angle ABO=2\angle CDO$，

即 $\angle ABO=\angle CDO$，$\angle CBO=\angle ADO$.

把 $\angle ABO=\angle CDO$ 代入①，有 $OA=OC$.

又由 $\angle CBO=\angle ADO$，

可得 $\angle ADO+\angle ABO=\angle CBO+\angle ABO=\angle ABC$.

$\because\ ABCD$是平行四边形. $\therefore\ \angle ABC=180^\circ-\angle BAD$.

故 $\angle BAD+\angle ADO+\angle ABO=180^\circ$. 即 $\angle DOB=180^\circ$.

∴　点 D、O、B 共线，这时有右图，且

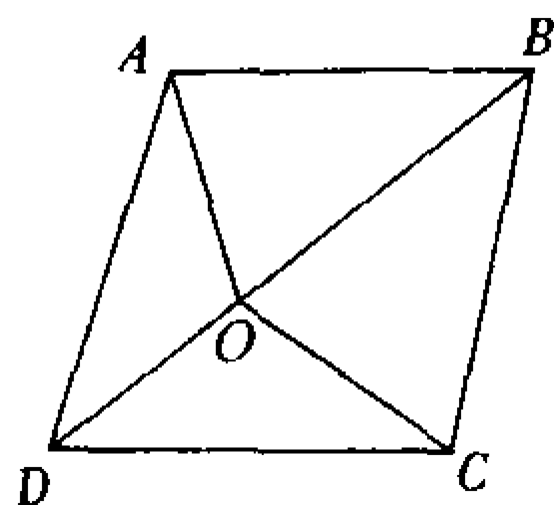
$\angle COD+\angle BOC=180^\circ$.

故有　$\angle BOC=\theta=\angle AOB$.

∴　$\triangle AOB\cong\triangle COB$，

因而 $\angle ABO=\angle CBO$.

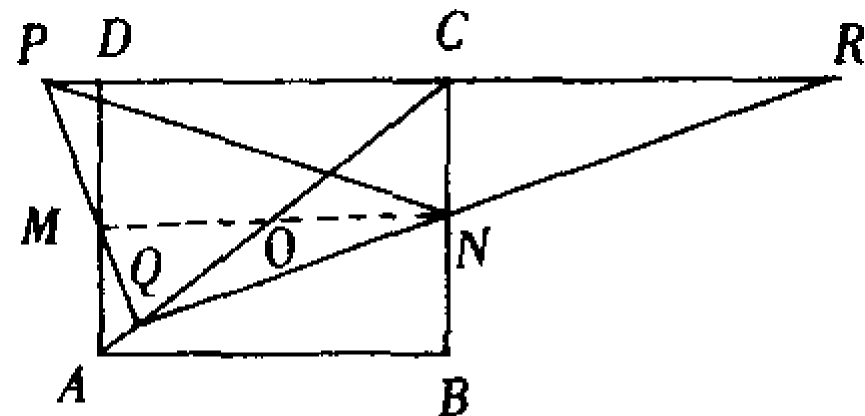
又∵　$\angle ABO=\angle CDO$，即得　$\angle CBO=\angle CDO$.



1·104　在矩形 $ABCD$ 中，点 M 是 AD 边的中点，N 是 BC 边的中点，在 DC 的反向延长线上取点 P，用 Q 表示直线 PM 与 AC 的交点．求证：$\angle QNM=\angle MNP$

（第 6 届全苏数学奥林匹克，1972 年）

［证］　设 R 是直线 QN 与 CD 的交点，O 是矩形的中心．连 MN.



由　$OM=ON$，得　$PC=CR$.

∴　$PN=RN$，$\angle CPN=\angle CRN$.

∵　$MN/\!/PR$.

∴　$\angle MNP=\angle CPN$，$\angle QNM=\angle CRN$.

∴　$\angle QNM=\angle MNP$.

1·105　▱$ABCD$ 中，以 AC 为边长在两侧各作一个正三角形 $\triangle ACP$、$\triangle ACQ$，试证：四边形 $BPDQ$ 为平行四边形．

（中国湖北省武汉市数学竞赛，1984 年）

［证］　连结 BD 交 AC 于 O，连 PO、QO.

∵　$\triangle APC$ 是正三角形，且 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$PO\perp AC$.

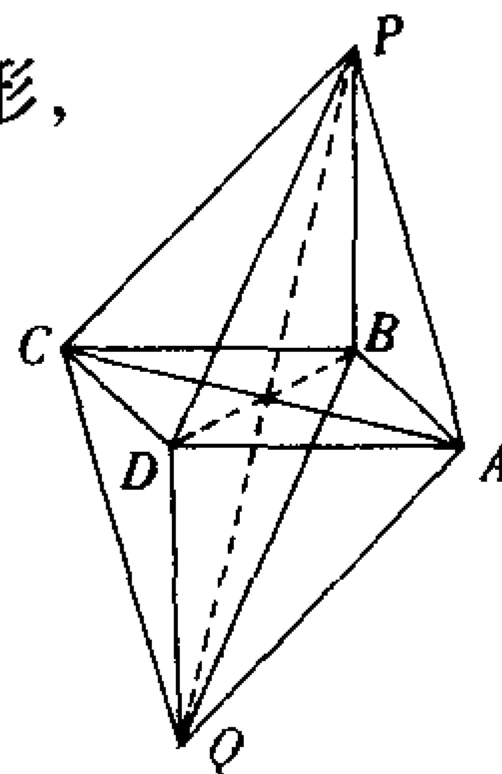
同理　$QO\perp AC$.　∴　P、O、Q 三点共线．

∵　$AP=AQ$，而 AO 是 PQ 边上的高．

∴　AO 是 PQ 的中线，即 $PO=QO$.

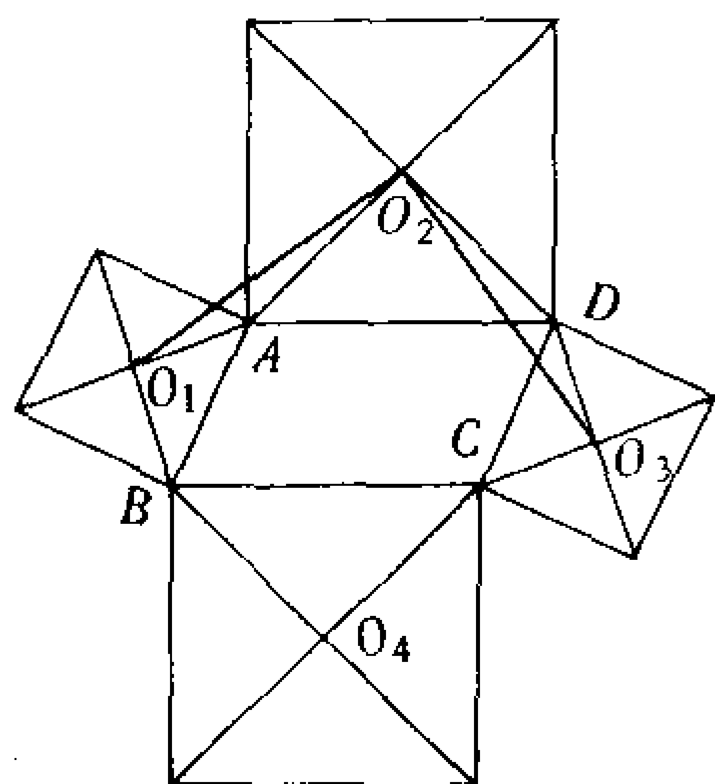
又∵　$BO=DO$，

∴　四边形 $PDQB$ 是平行四边形．



1·106　以平行四边形的各边为边向外作正方形．求证：所得 4 个正方形的中心恰是某个正方形的顶点．

（莫斯科数学奥林匹克，1941 年）



[证] 如下图,设以□$ABCD$的边为边向外所作正方形的中心分别为O_1、O_2、O_3、O_4,连O_1O_2、O_2O_3.

$\because$ $AO_2=DO_2, AO_1=DO_3$,

且 $\angle O_1AO_2=360^\circ-\angle BAD$
$=360^\circ-(180^\circ-\angle CAD)$
$=180^\circ+\angle CAD$
$=\angle O_3DO_2$,

$\therefore$ $\triangle O_1AO_2\cong\triangle O_3DO_2$,

$\therefore$ $O_2O_1=O_2O_3, \angle AO_2O_1=\angle DO_2O_3$,

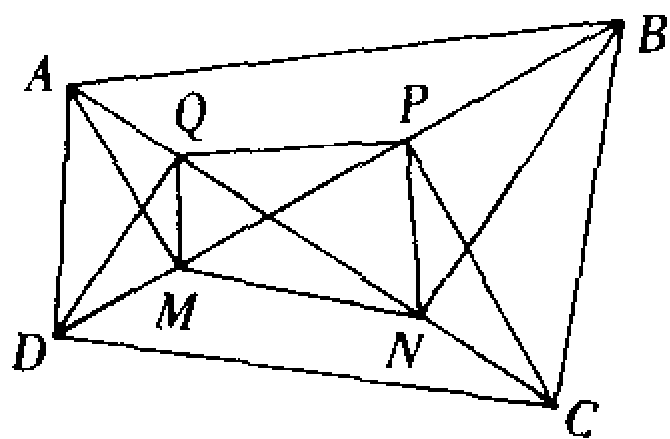
$\therefore$ $\angle O_1O_2O_3=\angle O_1O_2A+\angle AO_2O_3=\angle DO_2O_3+\angle AO_2O_3$
$=\angle AO_2D=90^\circ$.

同理可证 $O_4O_1=O_3O_1$, 且 $\angle O_1O_4O_3=90^\circ$,

$\therefore$ $O_1O_2O_3O_4$是正方形.

1·107 在四边形$ABCD$中,从顶点A和C作对角线BD的垂线,从顶点B和D作对角线AC的垂线.求证:四边形$ABCD$与$MNPQ$相似(M、N、P、Q是垂线的垂足).

(莫斯科数学奥林匹克,1964年)



[证] 如图,由四点共圆判定法则知A、D、M、Q四点共圆,

$\therefore$ $\angle MQN=\angle ADM$.

故 $\triangle OMQ\backsim\triangle OAD$.

同理 $\triangle OQP\backsim\triangle OBA$,

及$\triangle OPN\backsim\triangle OCB$ 和 $\triangle ONM\backsim\triangle ODC$.

由于点的位置顺序的规则,故 四边形$MQPN\backsim$四边形$DABC$.

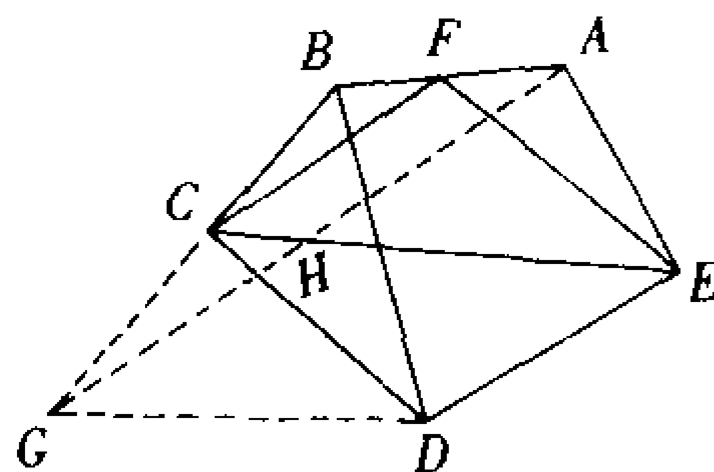
1·108 已知:凸五边形$ABCDE$满足$DC=DE$,$\angle DCB=\angle DEA=90^\circ$.点$F$是线段$AB$内一点,并且$AF:BF=AE:BC$.证明:$\angle FCE=\angle ADE$,$\angle FEC=\angle BDC$.

(波兰数学奥林匹克,1997年)

[证 1] 延长BC至G,使$AE=CG$,连接AG、DG.设AG交CE于H.

由条件,易知$\triangle AED\cong\triangle GCD$,从而$AD=GD$,$\angle CDG=$

$\angle ADE$.



由 $\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{BC}{AE}=\dfrac{BC}{CG}$，有 $CF /\!/ AG$，

于是 $\angle FCE=\angle AHE$.

下证 $\angle AHE=\angle ADE$.

事实上，由于 $\angle CDG=\angle ADE$，故 $\angle ADG=\angle CDE$，

而 $\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{ED}{DC}=1$，∴ $\triangle ADG \backsim \triangle EDC$，

从而 $\angle CED=\angle GAD$，故 A、H、D、E 四点共圆.

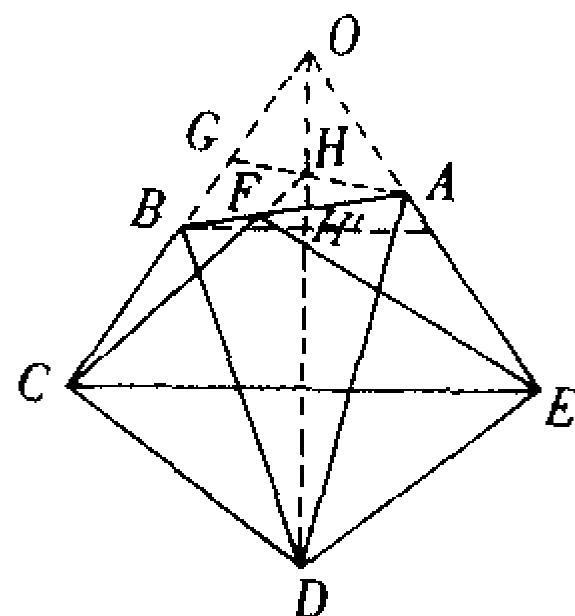
∴ $\angle AHE=\angle ADE$，亦即有 $\angle FCE=\angle ADE$.

类似可证 $\angle FEC=\angle BDC$.

［证 2］ 延长 CB、EA 交于点 O，连 DO，过 A 作 $AG /\!/ CE$ 交 CO 于 G，交 DO 于 H.

由条件，易证 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OCE$ 关于 OD 成轴对称，$CE \perp OD$，$AG \perp OD$，$AE=CG$，$GH=HA$.

注意到 $\dfrac{CB}{CG}\cdot\dfrac{GH}{HA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CB}{AE}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$，



由梅涅劳斯定理，C、F、H 三点共线.

在 $\triangle OHC$ 和 $\triangle OAD$ 中，

易知 $\angle COH=\angle DOA$，

$\dfrac{OH}{OA}=\cos\angle DOA=\cos\angle COH=\dfrac{CO}{DO}$，

∴ $\triangle OHC \backsim \triangle OAD$，

故有 $\angle OCH=\angle ODA$.

再由 $\angle OCE=90^\circ-\angle COD=90^\circ-\angle EOD=\angle ODE$.

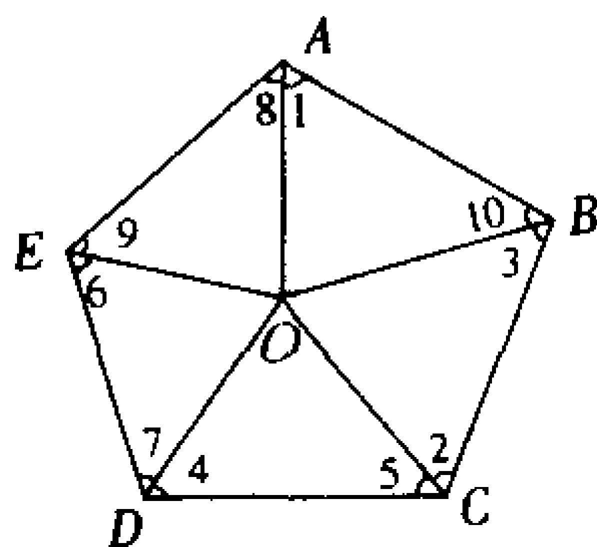
从而 $\angle FCE=\angle ADE$.

类似地，过 B 作 CE 平行线交 OD 于 H'. 重复上述过程可证 E、F、H' 三点共线，$\triangle OH'E \backsim \triangle OBD$，进而，可证 $\angle FEC=\angle BDC$.

1·109 如图，O 为凸五边形 $ABCDE$ 内一点，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$. 求证：$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

（中国初中数学联赛，1985 年）

［证 1］ 由正弦定理及已知条件，得



$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}=\frac{OC}{\sin\angle 3}=\frac{OC}{\sin\angle 4}$$
$$=\frac{OD}{\sin\angle 5}=\frac{OD}{\sin\angle 6}=\frac{OE}{\sin\angle 7}=\frac{OE}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9}.$$

从而　$\sin\angle 10=\sin\angle 9$，故　$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

[证 2]　由于对定线段的张角的定角的点的轨迹是以定线段为弦的张角等于定角的两个相等的弓形弧.所以由 $\angle 1=\angle 2$ 得

$\triangle OAB$ 的外接圆与 $\triangle OCB$ 的外接圆为等圆;同理,$\triangle OCB$ 的外接圆与 $\triangle OCD$ 的外接圆为等圆;

$\triangle OCD$ 的外接圆与 $\triangle ODE$ 的外接圆为等圆;

$\triangle ODE$ 的外接圆与 $\triangle OAE$ 的外接圆为等圆.

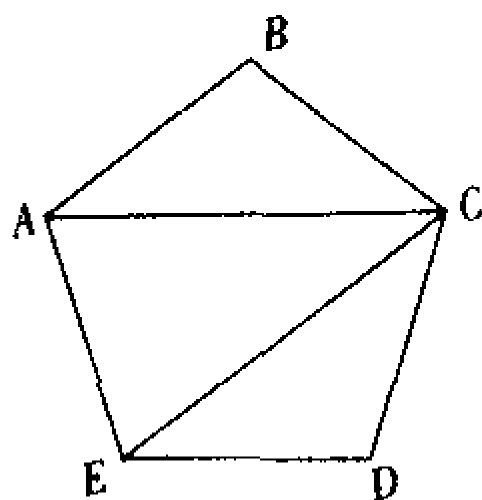
于是　$\triangle OAB$ 的外接圆与 $\triangle OAE$ 的外接圆为等圆.

从而　$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

1·110　设等边凸五边形 $ABCDE$ 的各个角满足 $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C\geqslant\angle D\geqslant\angle E$.求证:它一定是正五边形.

（第 22 届国际数学奥林匹克候选题,1981 年）

[证]　$\because$　$AC=2AB\sin\dfrac{B}{2}\geqslant 2CD\sin\dfrac{D}{2}=CE$,



$\therefore$　在 $\triangle ACE$ 中，$\angle AEC\geqslant\angle EAC$.

另一方面,有

$$\begin{aligned}\angle EAC&=\angle A-\frac{180^\circ-\angle B}{2}\\&=\angle A+\frac{1}{2}\angle B-90^\circ\\&\geqslant\angle E+\frac{1}{2}\angle D-90^\circ\\&=\angle E-\frac{180^\circ-\angle D}{2}=\angle AEC.\end{aligned}$$

$\therefore$　$\angle AEC=\angle EAC$.

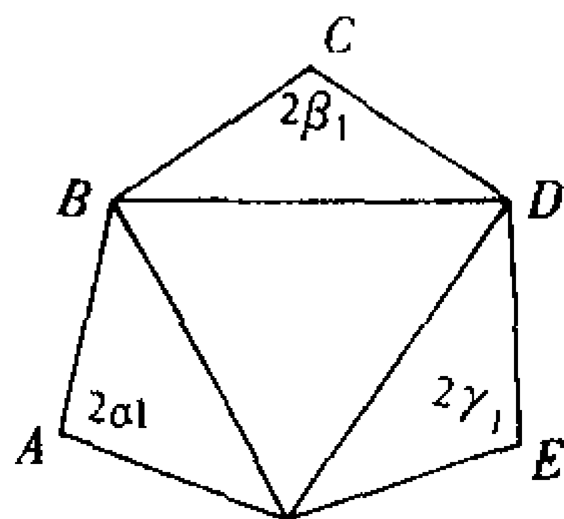
并且仅当　$\angle A=\angle E$，$\dfrac{1}{2}\angle B=\dfrac{1}{2}\angle D$，即 $\angle B=\angle D$,从而 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$ 时才有可能.

因此 $ABCDE$ 一定是正五边形.

1·111 在等边凸六边形 $ABCDEF$ 中,顶角$\angle A$、$\angle C$、$\angle E$ 之和等于顶角$\angle B$、$\angle D$、$\angle F$ 之和.求证:$\angle A=\angle D$,$\angle B=\angle E$,$\angle C=\angle F$.

(匈牙利数学奥林匹克,1953 年)

[证] 先证明下面的引理:



如果 α、β、γ 和 α_1、β_1、γ_1 是正角,$\alpha+\beta+\gamma=180°$,$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$,且

$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\sin\alpha_1:\sin\beta_1:\sin\gamma_1$, ㊀

那么 $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$.

事实上,设 α、β、γ 所在三角形的三边分别为 a、b、c,而 α_1、β_1、γ_1 所在三角形的三边分别为 a_1、b_1、c,则内(*)可得

$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$,

$a_1:b_1:c_1=\sin\alpha_1:\sin\beta_1:\sin\gamma_1$,

$a_1:b_1:c_1=a:b:c$.

从而这两个三角形相似,于是 $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$.

设六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a, $\angle A=2\alpha$, $\angle C=2\beta_1$, $\angle E=2\gamma_1$.

由于六边形内角和为 720°,所以 $2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1=360°$,

即 $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$.

从而$\triangle BDF$ 的三边为 $BF=2a\sin\alpha_1$, $DB=2a\sin\beta_1$, $FD=2a\sin\gamma_1$.

设$\triangle BDF$ 的三个内角为 α、β、γ,且 BF 对$\angle\alpha$, BD 对$\angle\beta$, DF 对$\angle\gamma$,则由正弦定理有

$BF:BD:DF=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.

从而有 $\sin\alpha_1:\sin\beta_1:\sin\gamma_1=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$,

由引理可得 $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, 于是

$\angle CDE=\alpha+(90°-\beta_1)+(90°-\gamma_1)=2\alpha_1$.

即 $\angle A=\angle D$,

同理 $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

1·112 设在凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 中,有 $A_1A_2=$

B_1B_2，$A_2A_3=B_2B_3\cdots$，$A_nA_1=B_nB_1$，且知它们之间还有 $n-3$ 对处于对应位置上的角分别相等. 试问：这两个多边形是否一定全等？

（莫斯科数学奥林匹克，1954 年）

［**解**］ 这两个多边形一定全等.

不失一般性，假定$\angle A_n=\angle B_n$，则 $\triangle A_1A_{n-1}A_n\cong\triangle B_1B_{n-1}B_n$.

$\therefore\quad A_1A_{n-1}=B_1B_{n-1}$

于是在 $n-1$ 条边对应相等，$n-3-1=(n-1)-3$ 个角对应相等的条件下，只要证明

$n-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}\cong n-1$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{n-1}$即可.

注意 A_n，B_n 分别在此两个 $n-1$ 边形之外.

设$\angle A_i=\angle B_i$ 是$(n-1)-3$ 个相等对应角中编号最大的一对，则给这两个 $n-1$ 边形重新编号为 $A'_1A'_2\cdots A'_{n-1}$，$B'_1B'_2\cdots B'_{n-1}$且

$$\angle A'_{n-1}=\angle A_i=\angle B_i=\angle B'_{n-1},$$

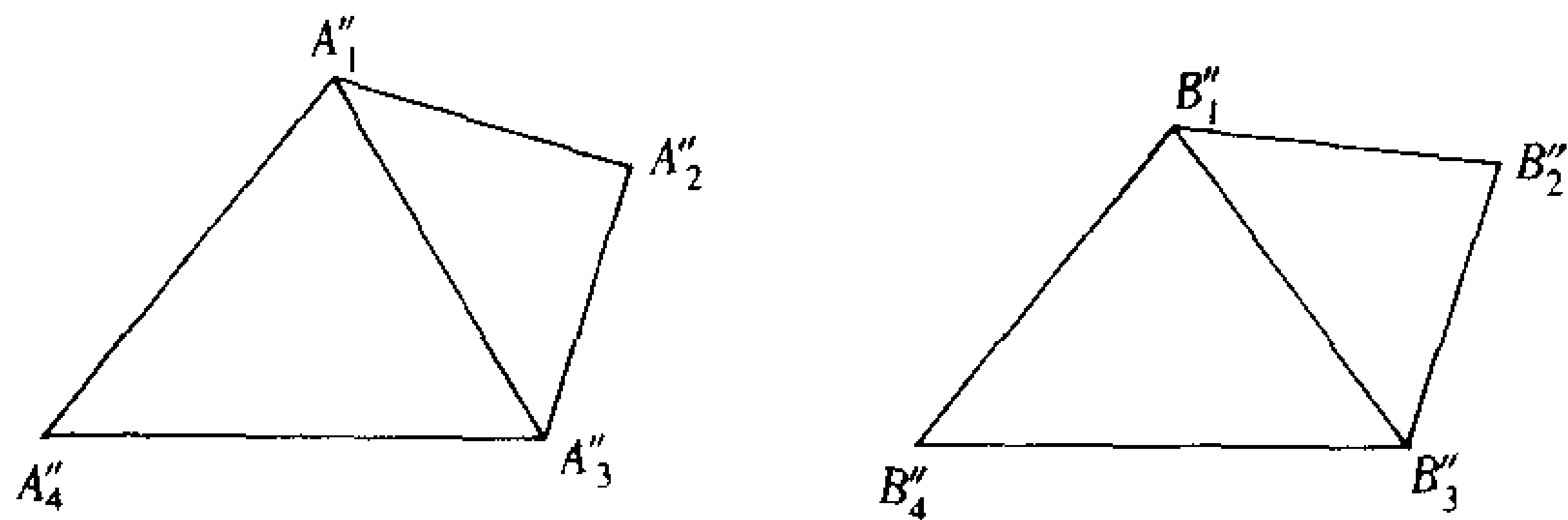
于是仿前又得 $A'_1A'_{n-2}=B'_1B'_{n-2}$，

如此继续下去……

最后，假定在四边形 $A''_1A''_2A''_3A''_4$ 与 $B''_1B''_2B''_3B''_4$ 中，

$A''_1A''_2=B''_1B''_2$，$A''_2A''_3=B''_2B''_3$，$A''_3A''_4=B''_3B''_4$，$A''_4A''_1=B''_4B''_1$，

且$\angle A''_4=\angle B''_4$. 如图.



则 $\triangle A''_1A''_3A''_4\cong\triangle B''_1B''_3B''_4$，$\therefore\quad A''_1A''_3=B''_1B''_3$.

故 $\triangle A''_1A''_2A''_3\cong\triangle B''_1B''_2B''_3$.

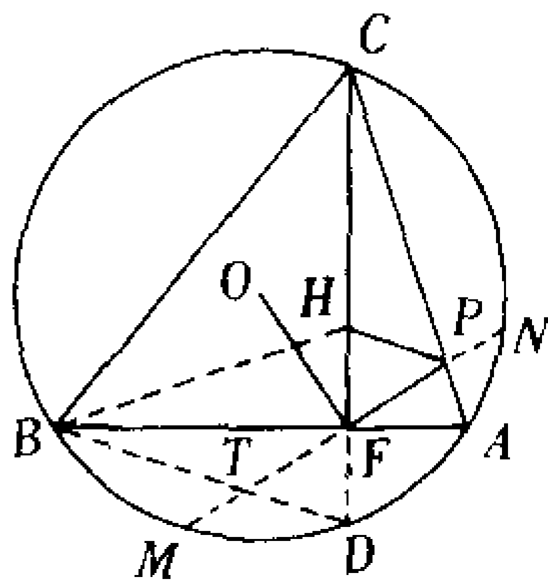
又 A''_4、B''_4 分别在此两个三角形之外，因此两个 4 边形全等，从而两个 n 边形全等.

3. 直线形与圆中的角(弧)相等问题

1·113　设$\triangle ABC$是锐角三角形,且$BC>CA$,O是它的外心,H是它的垂心,F是高CH的垂足,过F作OF的垂线交边CA于P.证明:$\angle FHP=\angle BAC$.

（第37届国际数学奥林匹克预选题,1996年）

[证]　延长CF交$\odot O$于D点,连BD、BH.



由于$\angle BHF=\angle CAF=\angle D$且$BF\perp HD$.则$F$为$HD$的中点.

设FP所在直线交$\odot O$于M、N两点,交BD于T点.

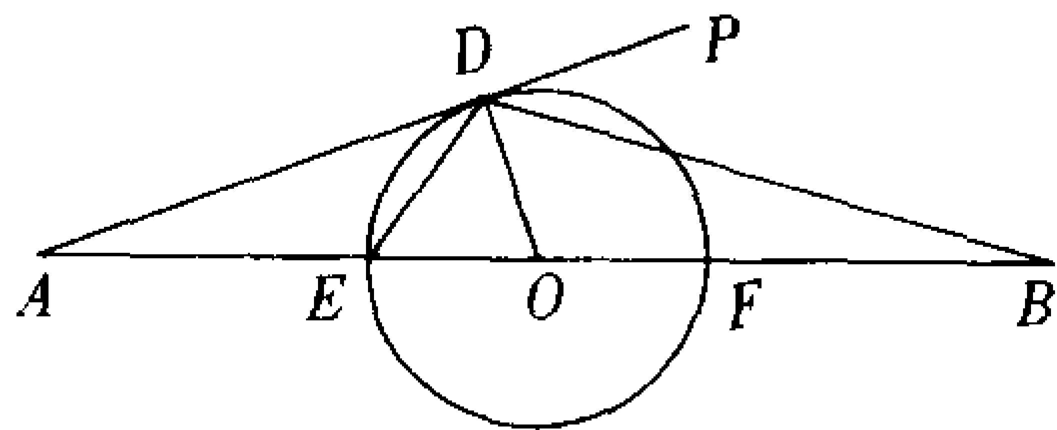
由$OF\perp MN$知F为MN的中点.由蝴蝶定理即得F为PT的中点.

又因F为HD的中点,

故$HP/\!/TD$.

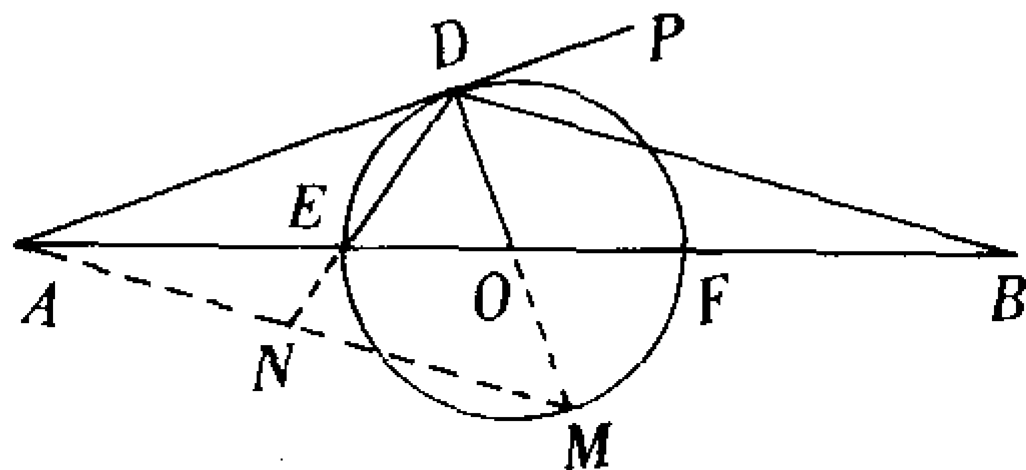
所以$\angle FHP=\angle D=\angle BAC$.

1·114　如图,直线AB与$\odot O$交于点E、F,又EF为$\odot O$的直经,且$AE=EF=FB$,直线AP与$\odot O$半径OD垂直于D.求证:$\angle ADE=\angle PDB$.



（中国湖北省黄冈市数学竞赛,1996年）

[证]　延长DO交$\odot O$于M,连AM,延长DE交AM于N,则$\triangle OAM\cong\triangle OBD$,有$\angle OAM=\angle OBD$,知　$AM/\!/BD$,



故　$\angle PDB=\angle DAN$.

$\because$　$AE=EF$,O为EF和DM的中点,则E为$\triangle ADM$的重心.

$\therefore$　N为AM的中点.

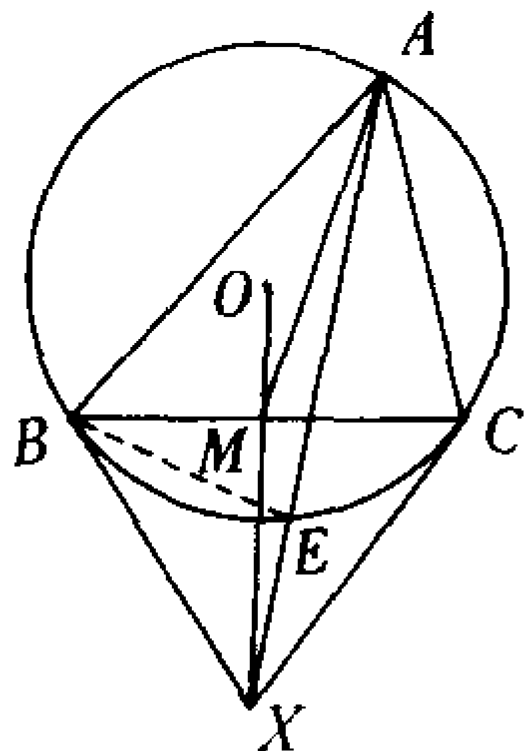
又$AD\perp OD$,即DN为$\mathrm{Rt}\triangle ADM$斜边AM的中线,则

$DN = AN = NM$.

$\therefore\ \angle ADE = \angle DAN = \angle PDB$.

1·115 锐角$\triangle ABC$的外接圆在B、C处的切线相交于X，M为BC的中点，求证：(1)$\angle BAM = \angle CAX$. (2)$\angle \dfrac{AM}{AX} = \cos\angle BAC$.

（第26届国际数学奥林匹克候选题，1985年）



［证］ 设$AB = C$，$BC = a$，$CA = b$，

$\angle BAM = \alpha$，$\angle CAX = \beta$，

$AM = m$，$AX = e$，$XC = d$.

由弦切角等于所夹弧上的圆周角可得

$\angle XBC = \angle A$，$\angle XCA = \angle A + \angle C = \pi - B$.

又 $d = \dfrac{MC}{\cos\angle MCX} = \dfrac{MC}{\cos A} = \dfrac{a}{2\cos A}$.

由余弦定理可得

$$e^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\angle XCA = b^2 + \left(\frac{a}{2\cos A}\right)^2 + \frac{ab\cos B}{\cos A}$$

则
$$\begin{aligned} e^2\cos^2 A &= b^2\cos^2 A + \frac{a^2}{4} + ab\cos B\cos A \\ &= b^2\cos^2 A + \frac{a^2}{4} + ab[\cos(A+B) + \sin A\sin B] \\ &= b^2\cos^2 A + \frac{a^2}{4} + a\sin B\cdot b\sin A - ab\cos C \\ &= b^2\cos^2 A + \frac{a^2}{4} + b^2\sin^2 A + ab\cos C \\ &= b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= m^2. \end{aligned}$$

于是 $\dfrac{AM}{AX} = \cos\angle BAC$. 从而(2)得证.

在$\triangle ABM$中，$\sin\alpha = \dfrac{BM\cdot\sin B}{AM} = \dfrac{a\sin B}{2m}$.

在$\triangle AXC$中，$\sin\beta = \dfrac{XC\cdot\sin\angle XCA}{AX}$

$$=\frac{a\cdot\sin B}{2\cos A\cdot\frac{m}{\cos A}}$$

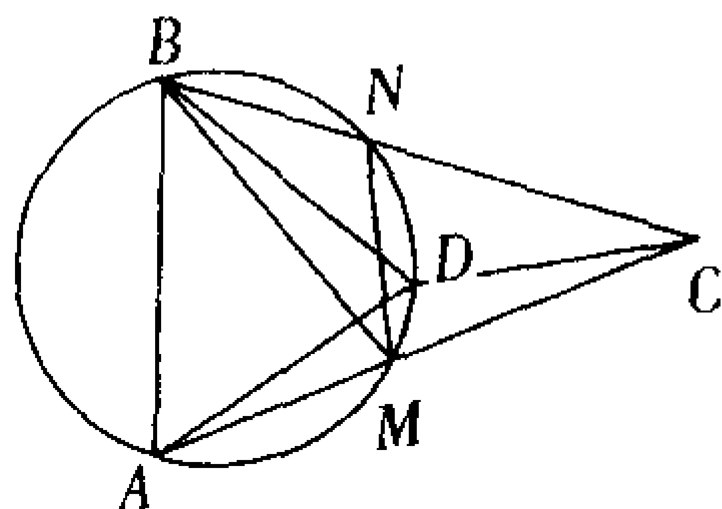
$$=\frac{a\sin B}{2m}.$$

于是 $\alpha=\beta$,即$\angle BAM=\angle CAX$.从而(1)得证.

1·116 点 D 是锐角$\triangle ABC$ 的外心,过 A、B、D 作圆分别交 AC、BC 于 M、N,求证:$\triangle ABD$ 和$\triangle MNC$ 的外接圆相等.

(第 25 届全俄数学奥林匹克,1991 年)

[证] 由题设,$\triangle ABD$ 与$\triangle MNB$ 内接于同一个圆,而$\triangle MNB$ 与$\triangle MNC$ 有公共边 MN,因此要证明$\triangle ABD$ 与$\triangle MNC$ 的外接圆相等,即只需证明$\angle MBN=\angle MCN$(由正弦定理).



事实上,$\because$ $DB=DC$, $DA=DC$,

$\therefore$ $\angle DBN=\angle DCN$, $\angle MAD=\angle MCD$.

又 $\angle MAD=\angle MBD$,

$$\therefore\ \angle MBN=\angle MBD+\angle DBN=\angle MAD+\angle DCN=\angle MCD+\angle DCN=\angle MCN.$$

于是$\triangle MBN$ 与$\triangle MNC$ 外接圆相等,即$\triangle ABD$ 与$\triangle MNC$ 的外接圆相等.

1·117 $\triangle ABC$ 中,$AB\neq AC$,过点 A 引一切可能的直线.求证:在这些直线的每一条上,只能有不多于一个(异于三角形的顶点)点 M,使得$\angle ABM=\angle ACM$.试确定在所考虑的直线中,有哪些是不含有这样的点的直线.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[解] 设过点 A 所引的直线为 l,分三种情况来讨论.

(1)直线 l 过顶点 B 或 C 时,显然 l 上不存在满足条件的点 M(这时仅当 $M=A$ 才有$\angle ABM=\angle ACM$).

(2)点 B 和 C 位于直线 l 的同侧(图 1).这时由$\angle ABM=\angle ACM$ 知 A、B、C、M 共圆,即 M 是直线 l 与$\triangle ABC$ 外接圆的交点(异于 A),当 l 与$\triangle ABC$ 的外接圆相切时,这样的交点便不存在;除这种情况外,

直线 l 上这样的点 M 存在且惟一.

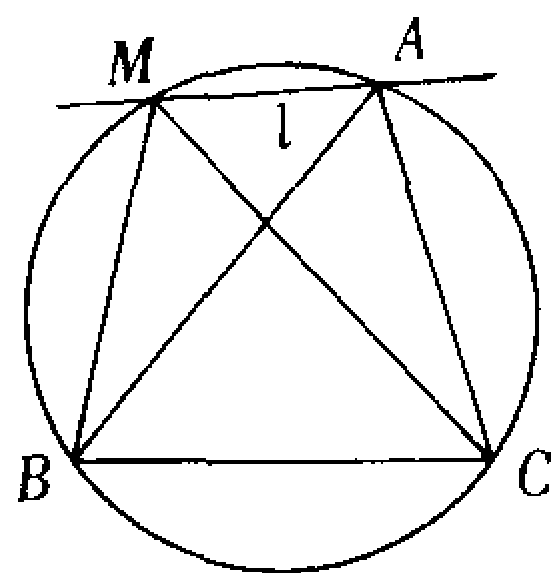


图 1

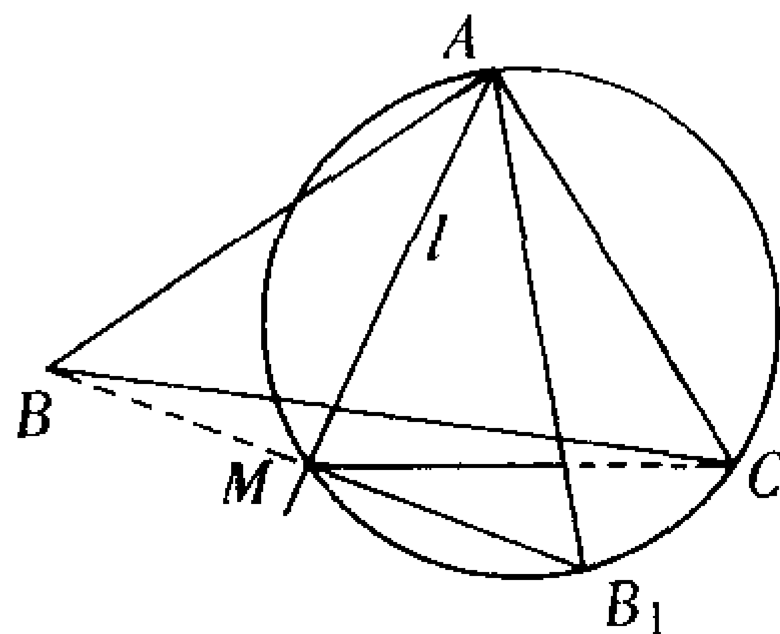


图 2

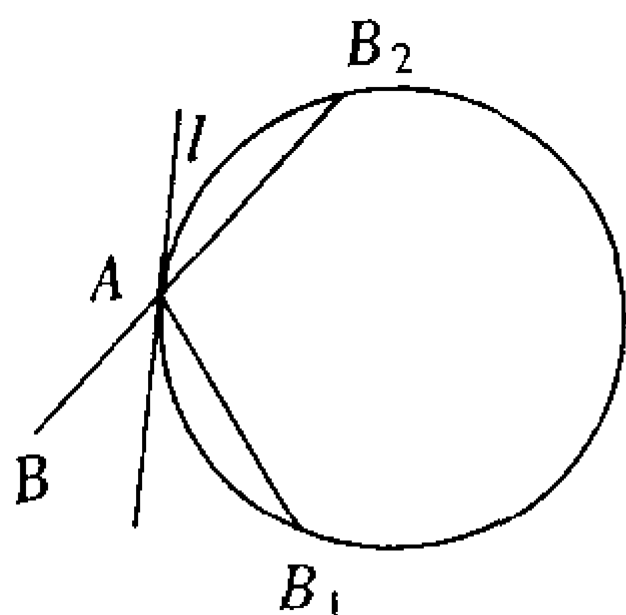


图 3

(3)点 B 和 C 分别在直线 l 的两侧,作点 B 关于 l 的对称点 B_1. 如果 B_1 不在 AC 上(图 2),那么可用 $\triangle AB_1C$ 来替代 $\triangle ABC$(对一切直线 l 上的点 M,都有 $\angle ABM=\angle AB_1M=\angle ACM$).

这时 B_1, C 在 l 的同侧,由(2)的讨论知,l 上满足题设条件的点不多于 1 个,只要 l 不与 $\triangle AB_1C$ 的外接圆相切,这样的点就惟一存在.

如果 l 是 $\triangle AB_1C$ 外接圆的切线时(图 3),设 BA 与 $\triangle AB_1C$ 外接圆的另一交点为 B_2,显然弦 AB_1、AB_2 与切线 l 所夹的角相等.

易知 $AB_1=AB_2$,从而 $AB_2=AB$. 而 $\triangle AB_2C$ 的外接圆与 $\triangle AB_1C$ 的外接圆合一.

所以只要作出点 B 关于 A 点的中心对称点 B_2,$\triangle AB_2C$ 的外接圆过点 A 的切线上也不存在满足题设条件的点.

最后,如果 B_1 落在直线 AC 上,那么 l 是 $\angle BAC$ 的平分线,当 $M\neq A$ 时,$\angle AB_1M\neq\angle ACM$.(因为 $AB_1=AB\neq AC$)

综上可知,下列五种情况时 l 上不存在满足题设条件的点 M:

l 重合于 AB 或 AC;l 切 $\triangle ABC$ 或 $\triangle AB_2C$ 的外接圆;l 是 $\angle BAC$ 的平分线,

除此之外,l 上都在惟一满足题设条件的点 M.

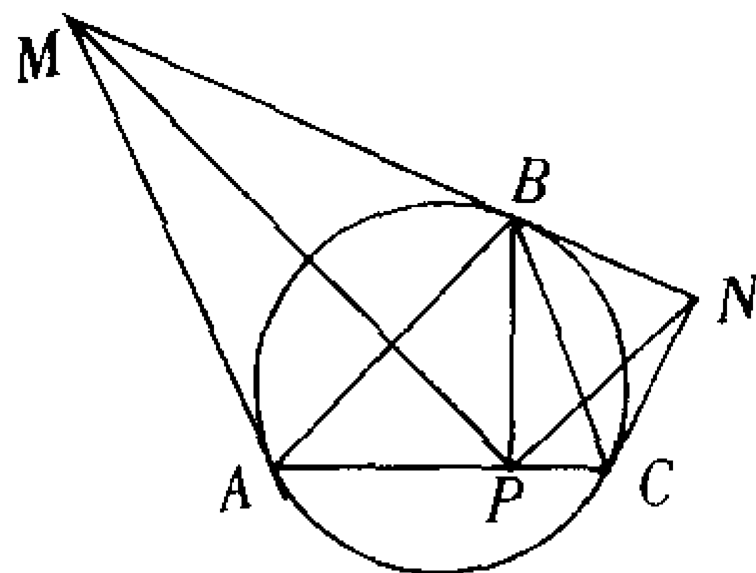
1·118　锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆. 过点 A 和 C 引外接圆的切线,它们分别交过点 B 的切线于 M、N. 而 BP 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上的高(P 为

垂足). 求证:BP 是$\angle MPN$ 的平分线.

(第 22 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[证] 设 $AB=c, AC=b, BC=a$,

$\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$.



显然 $\angle MAB=\gamma, \angle NCB=\alpha$(如图).

$\therefore$ $\angle MAP=\angle NCP=\alpha+\gamma$.

$\because$ $\triangle MAB$ 是等腰三角形($MA=MB$),

因而 $AM=\dfrac{C}{2\cos\gamma}$.

又在 Rt$\triangle APB$ 中, $AP=c\cos\alpha$.

同理 $CN=\dfrac{a}{2\cos\alpha}$, $CP=a\cos\gamma$.

$\therefore$ $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{c\cos\alpha}{a\cos\gamma}=\dfrac{c}{2\cos\gamma}\Big/\dfrac{a}{2\cos\alpha}=\dfrac{AM}{CN}$.

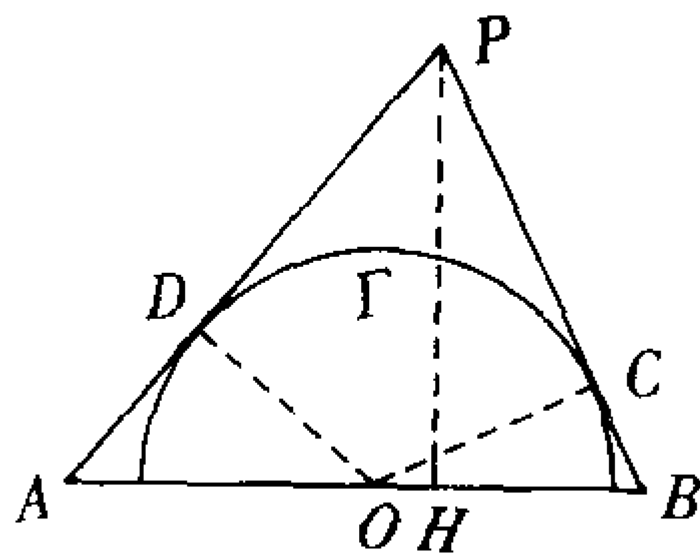
$\therefore$ $\triangle AMP\backsim\triangle CNP$, 有 $\angle APM=\angle CPN$.

故 $\angle MPB=\angle NPB$, 即 BP 平分$\angle MPN$.

1·119 在一条直线 l 的一侧画一个半圆 Γ, C 和 D 是 Γ 上的两点,分别过 C 和 D 作 Γ 的切线,分别交 l 于点 B 和 A 且使 Γ 的圆心在线段 AB 上.线段 AC 和 BD 交于点 E,过 E 作 $EF\perp l$ 于点 F,求证:EF 平分$\angle CFD$.

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[证] 设直线 AD 和 BC 的交点为 P,过 P 作 $PH\perp l$ 于点 H.将半圆 Γ 的圆心记为 O,连结 OC、OD,于是有



$\angle ADO=90^\circ=\angle AHP$,

$\angle BCO=90^\circ=\angle BHP$.

$\therefore$ $\triangle ADO\backsim\triangle AHP$, $\triangle BCO\backsim\triangle BHP$.

$\therefore$ $\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{PH}{OD}$, $\dfrac{PH}{OC}=\dfrac{BH}{BC}$.

$\because$ $OC=OD$, $\therefore$ $\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{BH}{BC}$.

$\because \quad PD=PC, \therefore \quad \dfrac{AH}{HB} \cdot \dfrac{BC}{CP} \cdot \dfrac{PD}{DA}=1.$

由塞瓦定理的逆定理知 AC、BD、PH 三线共点,此公共点即为点 E,所以点 F 与 H 重合,直线 EF 与 PH 重合.

$\because \quad \angle PDO=\angle PCO=\angle PHO=90°,$

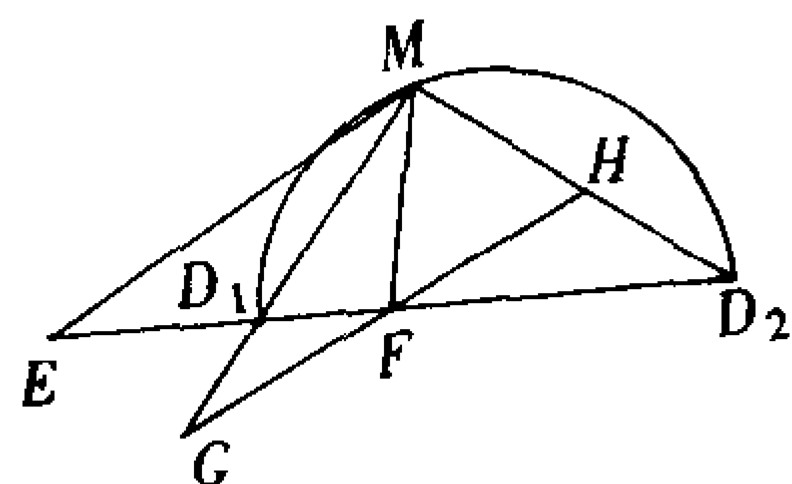
$\therefore \quad P$、D、O、H、C 五点共圆,且 OP 为此圆的直径.

$\therefore \quad \angle DFP=\angle DOP=\angle POC=\angle PFC,$

即 PF 平分$\angle DFC$,亦即 EF 平分$\angle DFC$.

1·120 在$\triangle ABC$ 中,$AB=\sqrt{7}$,$BC=\sqrt{13}$,$CA=\sqrt{19}$.分别以 A、B、C 为圆心,以$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{3}$、1 为半径作圆,求证:在这三个圆上可以各取一点 A'、B'、C',使得$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

(中国国家集训队选拔考试,1992 年)



[证] 显然,$\odot A$、$\odot B$ 和$\odot C$ 三个圆两两相离.将它们的半径分别记为 r_A、r_B 和 r_C.于是有 $r_A : r_B : r_C=1:2:3$.

为证本题的结论,先证如下的两个引理.

引理 1 设 D_1 和 D_2 分别是线段 EF 的内外定比分点,亦即有 $D_1E : D_1F=D_2E : D_2F=\lambda \neq 1$,$M$ 为以 D_1D_2 为直径的圆上的任意一点,则 $ME:MF=\lambda$.

引理 1 的证明 过点 F 作 EM 的平行线,交 MD_2 于点 H,交 MD_1 的延长线于点 G(如图),直线 D_1FD_2 与$\triangle GHM$ 相截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{GF}{FH} \cdot \frac{HD_2}{D_2M} \cdot \frac{MD_1}{D_1G}=1.$$

$\because \quad GH /\!/ EM, \therefore \quad \dfrac{HD_2}{D_2M}=\dfrac{FD_2}{D_2E}=\dfrac{1}{\lambda}, \ \dfrac{MD_1}{D_1G}=\dfrac{ED_1}{D_1F}=\lambda.$

$\therefore \quad \dfrac{GF}{FH}=1$, 即 $\quad GF=FH.$

$\because \quad \angle GMH=\angle D_1MD_2=90°, \therefore \quad MF=HF.$

$\therefore \quad \dfrac{ME}{MF}=\dfrac{ME}{HF}=\dfrac{D_2E}{D_2F}=\lambda.$

引理 2　在$\triangle ABC$所在的平面上存在一点M.使得$MA:MB:MC=1:2:3$.

引理 2 的证明　对线段AB,AC分别按比值$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$作出引理 1 中所述的圆.易知点A位于此二圆的内部,故知这两个圆相交,设M为交点之一.于是由两圆的作法知$MA:MB:MC=1:2:3$.

回到本题结论的证明,找出引理 2 中所给出的点M,然后令$\triangle ABC$绕点M旋转.

当点A转到圆周A上时即停止,并将此时点A的位置记为A'.

同样,把这时点B和C的位置记为B'和C'.

因为$MA:MB:MC=1:2:3=r_A:r_B:r_C$,

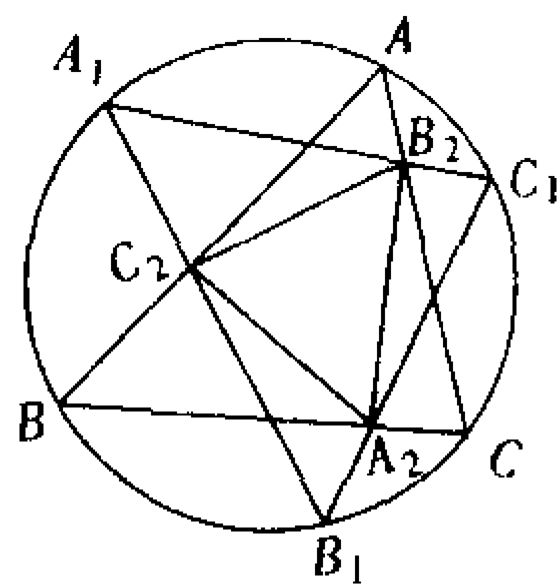
所以当点A到达圆A上时,点B和C也分别到达圆周B和C,即B'和C'分别位于$\odot B$和$\odot C$上,且显然有

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC.$$

1·121　把$\triangle ABC$绕着外接圆圆心旋转小于180°的某一角度得到$\triangle A_1B_1C_1$,彼此对应的线段AB和A_1B_1相交于点C_2.BC和B_1C_1相交于点A_2,CA和C_1A_1相交于点B_2.求证:$\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$.

（第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年）

[证]　由题设知$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$,



连AA_1、AC_1、CC_1.

$\therefore\ \angle B_2AC_2=\angle C_2A_1B_2$,

可得　C_2,A_1,A,B_2共圆.

$\therefore\ \angle AB_2C_2=180°-\angle AA_1C_2$.

而　$\angle AC_1B_1=180°-\angle AA_1C_2$,

$\therefore\ \angle AB_2C_2=\angle AC_1B_1$.

同理　A_2、B_2、C_1、C共圆.$\therefore\ \angle A_2B_2C=\angle A_2C_1C$.

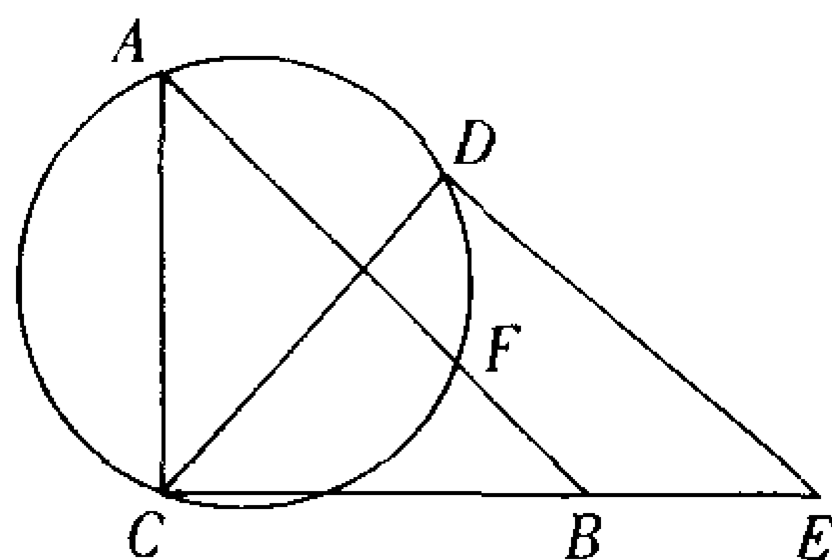
$\angle AB_2C_2+\angle A_2B_2C=\angle AC_1B_1+\angle A_2C_1C=\angle AC_1C$,

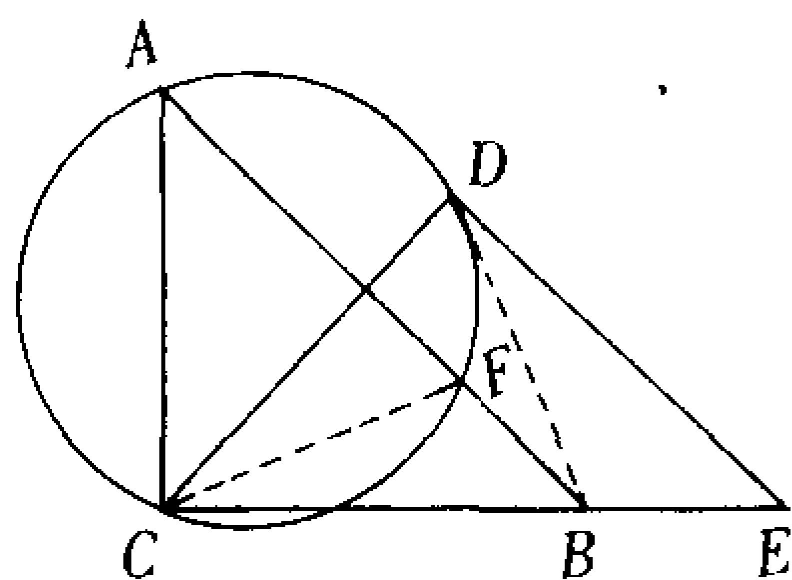
$$\therefore\ \angle C_2B_2A_2=180°-(\angle AB_2C_2+\angle A_2B_2C)$$
$$=180°-\angle AC_1C=\angle B.$$

同理可证　$\angle B_2A_2C_2=\angle A$,$\angle B_2C_2A_2=\angle C$.

$\therefore\ \triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$.

1·122　如图,已知:$\angle ACE=\angle CDE=90°$,点$B$在$CE$上,$CA=$





$CB=CD$,过 A、C、D 三点的圆交 AB 于点 F.求证:F 为$\triangle CDE$ 的内心.

(中国初中数学联赛,1995 年)

[证 1] $\because$ $AC=BC$,又$\angle ACB$ 为直角,

$\therefore$ $\angle CAB=\angle CBA=45^\circ$;

又$\because$ A、C、F、D 四点共圆,

$\therefore$ $\angle CDF=\angle CAF=45^\circ$,

且 $\angle CDE=90^\circ$,

因而 $\angle EDF=\angle CDE-\angle CDF=45^\circ=\angle CDF$,

故 DF 平分$\angle CDE$.

由 $CB=CD$,有$\angle CBD=\angle CDB$,

又$\angle FBD=\angle CBD-45^\circ$,$\angle FDB=\angle CDB-45^\circ$,

有 $\angle FBD=\angle FDB$,因而 $FB=FD$.

于是 $\triangle BCF\cong\triangle DCF$,故 $\angle BCF=\angle DCF$,

所以 CF 平分$\angle DCE$.

因此 F 是$\triangle CDE$ 的内心.

[证 2] DF 平分$\angle CDE$ 证法同上.

又$\because$ A、C、F、D 四点共圆,故

$$\begin{aligned}\angle CFD&=180^\circ-\angle CAD=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACD\right)\\&=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACD\\&=90^\circ+\frac{1}{2}(90^\circ-\angle DCE)=135^\circ-\frac{1}{2}\angle DCE\end{aligned}$$

因而
$$\begin{aligned}\angle DCF&=180^\circ-(\angle CDF+\angle CFD)\\&=180^\circ-\left(45^\circ+135^\circ-\frac{1}{2}\angle DCE\right)\\&=\frac{1}{2}\angle DCE.\end{aligned}$$

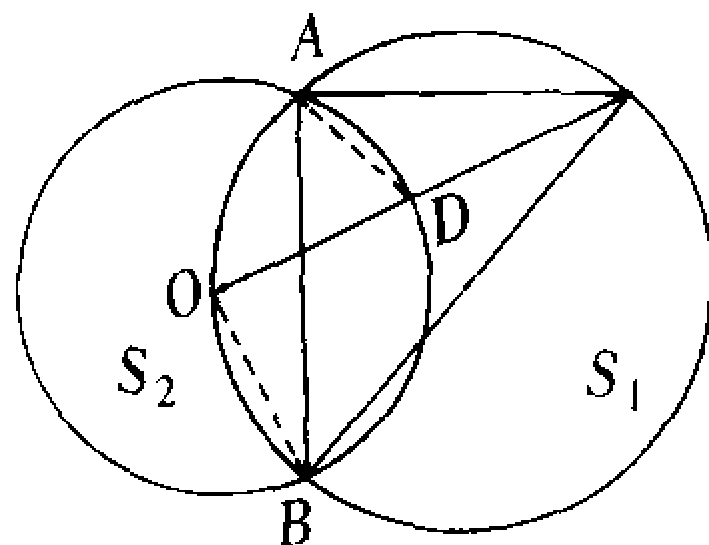
即 CF 平分$\angle DCE$.

故 F 点是$\triangle CDE$ 的内心.

1·123　设 OC 是$\odot S_1$ 的一条弦，以 O 为圆心的$\odot S_2$ 与 OC 交于点 D 且 D 异于 C，$\odot S_2$ 与$\odot S_1$ 交于点 A 和 B，求证：点 D 是$\triangle ABC$ 的内心.

（前苏联教委推荐试题，1990 年）

［证］　连结 OB、AD.



$\because$　A、O、B、C 都在$\odot S_1$ 上，

$\therefore$　$\angle BAC=\angle BOC$.

$\because$　$\angle BAD$ 和$\angle BOD$ 分别为$\overset{\frown}{BD}$所对的圆周角和圆心角.

$$\therefore\quad \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC$$

$$=\frac{1}{2}\angle BAC,$$

即　DA 平分$\angle BAC$.

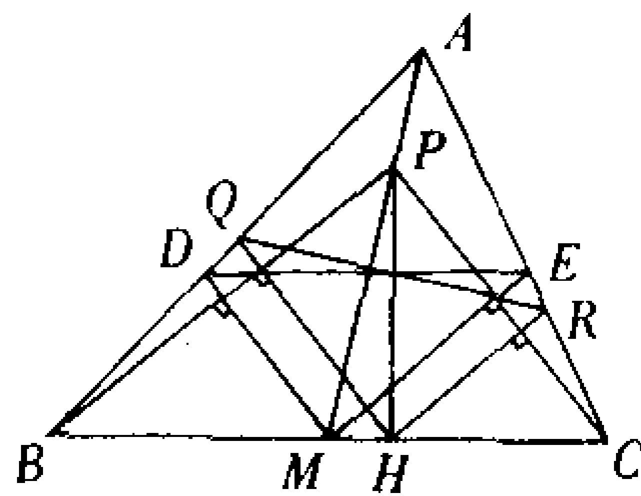
同理　BD 平分$\angle ABC$.

$\therefore$　点 D 为$\triangle ABC$ 的内心.

1·124　已给锐角$\triangle ABC$. 设 M 是 BC 边的中点，在线段 AM 上取点 P 使得 $PM=BM$. 令 H 是自 P 到 BC 的垂足，过 H 分别作 PB 的垂线交 AB 于 Q，作 PC 的垂线交 AC 于 R. 求证：$\triangle QHR$ 的外接圆切 BC 于 H.

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

［证］　由已知　$PM=MB=MC$，所以$\triangle BPC$ 为直角三角形，



又　$HQ\perp PB$，$HR\perp PC$，则$\triangle QHR$ 为直角三角形.

作 $MD\perp PB$ 交 AB 于 D，$ME\perp PC$ 交 AC 于 E. 由$\triangle MPB$ 为等腰三角形，则 MD 平分$\angle PMB$. 同理，ME 平分$\angle PMC$，于是

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{CM}=\frac{AE}{EC}.$$

$\therefore$　$DE /\!/ BC$，

又　$DM /\!/ PC$，$EM /\!/ PB$，

$\therefore\quad \triangle DME \backsim \triangle PBC$. 有 $\dfrac{DM}{EM}=\dfrac{PC}{PB}$.

由 $DM /\!/ QH$, $KH /\!/ EM$ 可知

$$\frac{RH}{EM}=\frac{CH}{CM},\ \frac{DM}{QH}=\frac{BM}{BH}.$$

$\therefore\quad \dfrac{RH}{QH}\cdot\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{RH}{QH}\cdot\dfrac{DM}{EM}=\dfrac{CH}{CM}\cdot\dfrac{BM}{BH}=\dfrac{CH}{BH}$.

在直角三角形 PBC 中,由于 PH 是斜边 BC 上的高,从而有

$\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{PC^2}{PB^2}=\dfrac{RH}{QH}\cdot\dfrac{PC}{PB}$, 即 $\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{RH}{QH}$,

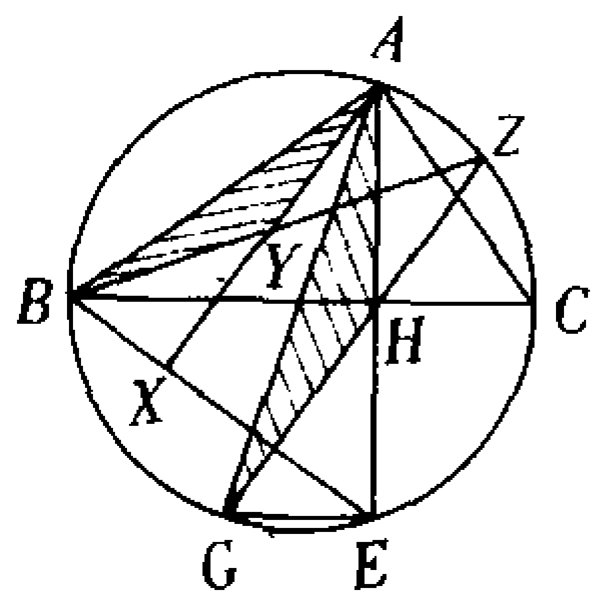
于是 $\triangle PBC \backsim \triangle QHR$, $\angle PBC=\angle RQH$,

又 $\angle RHC=\angle PBC=\angle RQH$.

于是$\triangle QHR$ 的外接圆切 BC 于 H.

1·125 设$\triangle ABC$ 满足$\angle A=90°$,$\angle B<\angle C$,过 A 作$\triangle ABC$ 外接圆 Ω 的切线,交直线 BC 于 D. 设 A 关于直线 BC 的对称点为 E,由 A 到 BE 所作垂线的垂足为 X,AX 的中点为 Y,BY 与 Ω 交于 Z 点. 证明:直线 BD 为$\triangle ADZ$ 外接圆的切线.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)



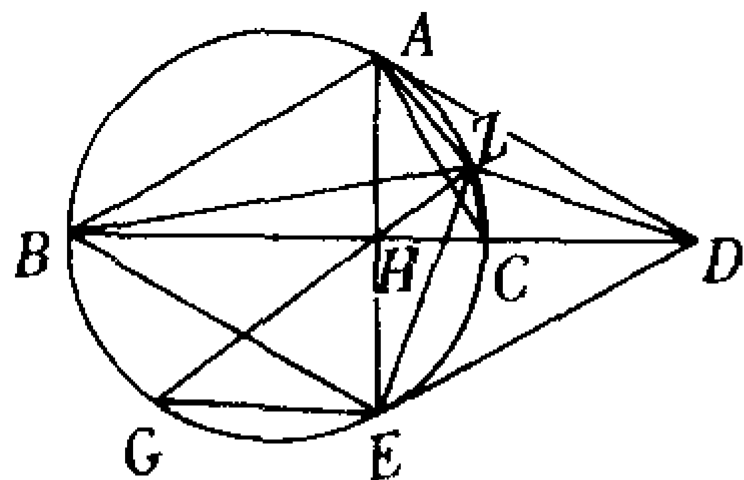
[证] 设 GA 为$\triangle ABC$ 外接圆的直径,H 为 AE 与 BD 的交点. 因$\angle B<\angle C$,故 B、G 在 AE 的同侧.

由于 $\angle AEG=90°=\angle AXB$,

$\angle AGE=\angle ABE=\angle ABX$,

$\therefore\quad \triangle AGE \backsim \triangle ABX$.

故 $\angle GAE=\angle BAX$, $\dfrac{GA}{BA}=\dfrac{AE}{AX}$.



因为 H、Y 分别为 AE、AX 的中点,则 $\dfrac{AE}{AX}=\dfrac{AH}{AY}$.

$\therefore\quad \triangle AGH \backsim \triangle ABY$. 故 $\angle AGH=\angle ABY$.

设 GH 交 Ω 于 Z', 则$\angle ABZ'=\angle AGZ'=\angle ABY=\angle ABZ$.

故 Z 与 Z' 重合.从而 G、H、Z 三点共线.

因为$\angle AZH=\angle AZG=90°$,$AD$、$DE$ 是Ω 的切线,

$\therefore\quad \angle DAZ=\angle AEZ,\ \angle DEZ=\angle EAZ,$

且 $\angle DHZ=90°-\angle AHZ$

$=\angle EAZ=\angle DEZ.$

故 $ZHED$ 是圆内接四边形.

有 $\angle ZDH=\angle ZEA=\angle EAZ,$

从而 DB 为$\triangle ADZ$ 外接圆的切线.

1·126 设$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 内接于同一圆,证明:它们的周长相等的充分必要条件是 $\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F$.

(美国纽约数学奥林匹克,1978 年)

[证] 设 R 是$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 外接圆的半径,由正弦定理得

$BC=2R\sin\angle A,\ CA=2R\sin\angle B,\ AB=2R\sin\angle C,$

$EF=2R\sin\angle D,\ FD=2R\sin\angle E;\ DE=2R\sin\angle F.$

于是 $BC+CA+AB=2R(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C),$

且 $EF+FD+DE=2R(\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F).$

显然,当周长相等,即 $BC+CA+AB=EF+FD+DE$ 时,

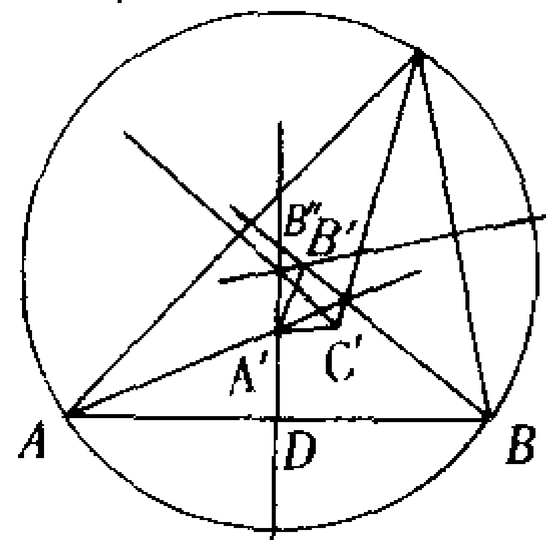
$$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F.$$

反之也成立.

1·127 在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线交AB 边的中垂线于A',$\angle B$ 的平分线交BC 边的中垂线于B',$\angle C$ 的平分线交CA 边的中垂线于C'.求证:(1)若 A'与B'重合,则$\triangle ABC$ 为正三角形;(2)若 A'、B'、C'互异,则$\angle B'A'C'=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$.

(德国数学奥林匹克,1993 年)

[证] (1)若 A'与 B'重合,则由题设,$\triangle ABC$ 的外心与内心重合,因而$\triangle ABC$ 为正三角形.



(2)设 AB 的中垂线$A'D$ 交$\angle B$ 的平分线于B'',$\triangle ABC$ 的内心为I.

下面证明$\triangle A'B''B'\backsim\triangle A'IC'$.

$$\because\quad \angle B'B''A' = 90^\circ - \frac{B}{2} = \frac{A}{2} + \frac{C}{2},$$

$$\angle AIC' = \frac{A}{2} + \frac{C}{2},$$

$$\therefore\quad \angle B'B''A' = \angle AIC'.$$

设 $AB = c$，$BC = a$，$CA = b$，则

$$A'B'' = B''D - A'D = \frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = \frac{c}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},$$

$$B'B'' = BB'' - BB' = \frac{c-a}{2\cos\frac{B}{2}}.$$

从而 $$\frac{A'B''}{B'B''} = \frac{c\sin\frac{B-A}{2}}{(c-a)\cos\frac{A}{2}} \qquad ①$$

$$A'I = AI - AA' = \frac{b+c-a}{2\cos\frac{A}{2}} - \frac{c}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{b-a}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

$$IC' = CC' - CI = \frac{b-(a+b-c)}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{c-a}{2\cos\frac{C}{2}}.$$

$$\frac{A'I}{IC'} = \frac{\cos\frac{C}{2}(b-a)}{\cos\frac{A}{2}(c-a)} = \frac{2R\cos\frac{C}{2}(\sin B - \sin A)}{\cos\frac{A}{2}(c-a)}$$

$$= \frac{2R\cos\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}}{(c-a)\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2R\sin C\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{(c-a)\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{c\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{(c-a)\cos\frac{A}{2}}.\qquad ②$$

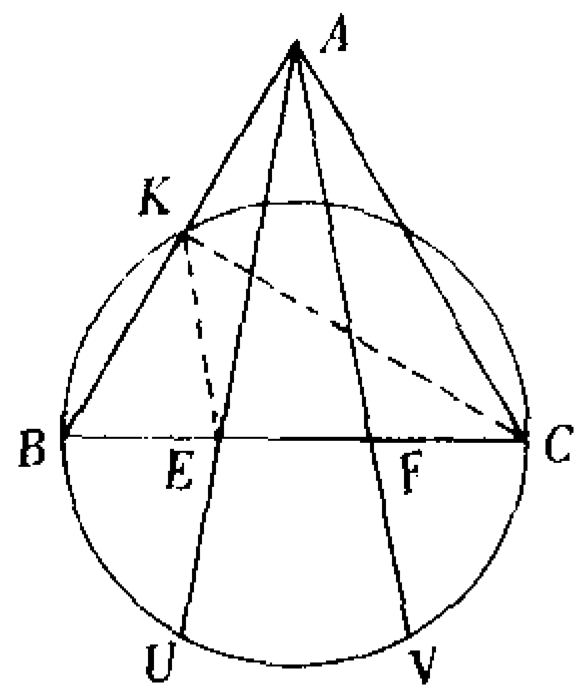
由①、②得 $\frac{A'B''}{B'B''}=\frac{A'I}{IC'}$.

$\therefore$ $\triangle A'B''B'\backsim\triangle A'IC'$，有 $\angle B'AB''=\angle IA'C'$.

于是有 $\angle B'A'C'=\angle B''A'I=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$.

1·128 设$\triangle ABC$为正三角形，Γ为以BC为直径向外作的半圆，证明：若过A的直线三等分BC，则它也三等分半圆Γ.

(第30届国际数学奥林匹克候选题，1989年)



[证] 设E、F为BC的三等分点，AE的延长线交Γ于U. 以BC为直径的圆与AB交于K.

由于$CK\perp BK$以及$\triangle ABC$为正三角形，则K为AB的中点.

$\therefore$ $KE\parallel AF$.

又$\because$ $AE=AF$,

$\therefore$ $\angle BEK=\angle AFE=\angle AEF=\angle BEU$.

从而K和U关于直径BC对称.

$\therefore$ $\overset{\frown}{BU}=\overset{\frown}{BK}\overset{m}{=}2\angle BCK=60^\circ$.

于是 U为半圆Γ的三等分点.

同理 V也为半圆Γ的三等分点.

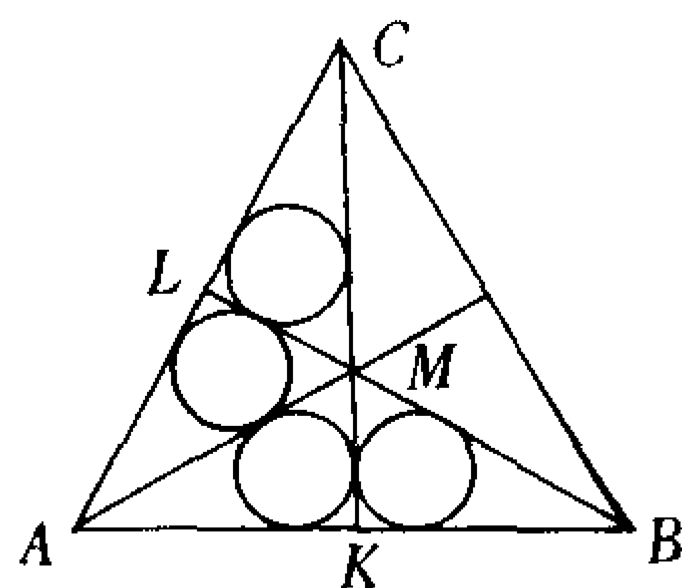
于是 $\overset{\frown}{BU}=\overset{\frown}{UV}=\overset{\frown}{VC}$.

1·129 $\triangle ABC$的三条中线将三角形分为六个三角形，已知：这些三角形的内切圆中的四个相等. 求证：$\triangle ABC$为正三角形.

(第2届全苏数学奥林匹克，1968年)

[证] $\triangle ABC$三条中线交于重心M. $\triangle ABC$被分得的六个小三角形面积相等. 其中有四个小三角形的内切圆相等，则必有两个小三角形相邻，且内切圆相等.

不妨设$\triangle AKM$与$\triangle BKM$，内切圆半径相等，由公式$S=p\cdot r$，推知$AM=MB$.



所以等腰$\triangle AMB$的中线MK也是高，即$CK\perp AB$，

又 $AK=KB$，所以 $AC=BC$.

另外具有相等内切圆的小三角形要么在$\triangle AML$，要么在$\triangle CML$的位置(其他情况与其对称).

若$\triangle ALM$与$\triangle AKM$的内切圆半径相等，这样$\triangle AKM$与$\triangle ALM$面积相等，周长相等，且一条对应边相等，可证得 $\triangle AKM\cong\triangle ALM$.

$\therefore$ $AL=AK$，于是 $AC=AB$.

因此 $AB=AC=BC$，$\triangle ABC$是正三角形.

若$\triangle CLM$与$\triangle KMB$内切圆相等，则$\triangle CLM$与$\triangle KMB$有相等的周长，根据圆的切线定理

$CL+CM+LM=2CL+2x=2BK+2x$.

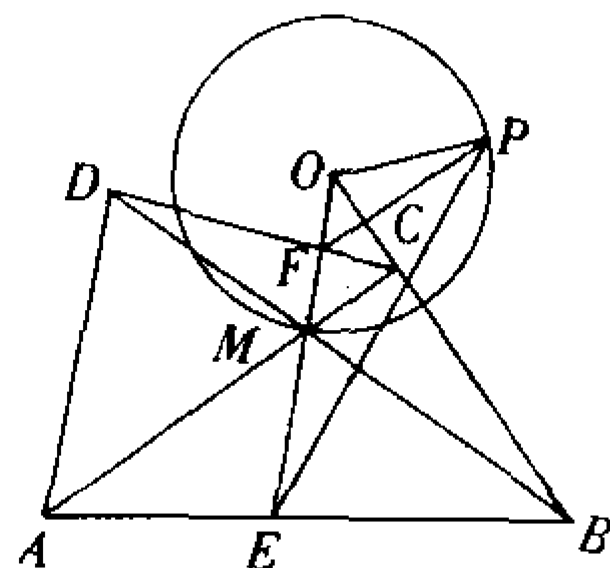
(其中x是从点M到对应圆的切线长，由$\angle CML=\angle BMK$，及两个内切圆半径相等，可以证得M到两个内切圆的切线长都相等，且都等于x)

所以 $2CL=2BK$，即 $AC=AB$.

因此 $AC=AB=BC$，即$\triangle ABC$是正三角形.

1·130 设凸四边形$ABCD$的对角线AC、BD交于点M，过M作AD的平行线分别交AB、CD于点E、F，交BC的延长线于点O，P是以O为圆心，以OM为半径的圆上一点(如图所示)，求证：$\angle OPF=\angle OEP$.

(中国初中数学联赛，1996年)



[证1] 直线OCB分别与$\triangle DMF$和$\triangle AEM$的三边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{DB}{MB}\cdot\frac{MO}{FO}\cdot\frac{FC}{DC}=1,\quad \frac{AB}{EB}\cdot\frac{EO}{MO}\cdot\frac{MC}{AC}=1.$$

$$\therefore\ \frac{OF}{OM}=\frac{DB}{MB}\cdot\frac{FC}{DC},\quad \frac{OE}{OM}=\frac{EB}{AB}\cdot\frac{AC}{MC}.$$

$$\therefore\ \frac{OF\cdot OE}{OM^2}=\frac{DB}{MB}\cdot\frac{FC}{DC}\cdot\frac{EB}{AB}\cdot\frac{AC}{MC}. \qquad ①$$

$\because \quad EF /\!/ AD, \quad \therefore \quad \dfrac{DB}{MB}=\dfrac{AB}{EB}, \quad \dfrac{FC}{DC}=\dfrac{MC}{AC}.$

$$\therefore \quad \frac{DB}{MB}\cdot\frac{EB}{AB}=1, \quad \frac{FC}{DC}\cdot\frac{AC}{MC}=1. \qquad ②$$

将②代入①,得到 $\dfrac{OF\cdot OE}{OM^2}=1.$

$\therefore \quad OF\cdot OE=OM^2=OP^2. \quad \therefore \quad \dfrac{OF}{OP}=\dfrac{OP}{OE}.$

$\therefore \quad \triangle OFP \backsim \triangle OPE. \quad \therefore \quad \angle OPF=\angle OEP.$

[证 2] 延长 AD、BO 交于点 G.

$\because \quad AG /\!/ EO,$

$\therefore \quad \dfrac{OF}{OM}=\dfrac{GD}{GA}, \quad \dfrac{OE}{OM}=\dfrac{GA}{GD}.$

$\therefore \quad \dfrac{OF\cdot OE}{OM^2}=1.$

$\therefore \quad OF\cdot OE=OM^2=OP^2.$

以下证明同证 1.

1·131 四边形 $ABCD$ 内接于圆,直线 AB、DC 交于点 E,直线 AD、BC 交于点 F. $\angle AEC$ 的平分线交 BC 于点 M,交 AD 于点 N, $\angle BFD$ 的平分线交 AB 于点 P,交 CD 于点 Q.求证:四边形 $MPNQ$ 是菱形.

(波兰数学奥林匹克,1950 年)

[证] 如图,记 $\angle NOP=n$, $\angle A=\alpha$, $\angle DCB=\beta$,

$\angle NFP=CFP=\angle 1$, $\angle QEN=\angle PEN=\angle 2$, $\angle FQC=\angle 3$, $\angle FNO=\angle 4$.

内三角形任一外角等于它不相邻的两个内角的和可得

$$\beta=\angle 1+\angle 3=\angle 1+\angle 2+n.$$

$$n=\angle 1+\angle 4=\angle 1+\angle 2+\alpha.$$

$$n=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

因为 $ABCD$ 为圆内接四边形,所以 $\alpha+\beta=180°$,于是 $n=90°$.

从而　$PQ \perp MN$.

在$\triangle NFM$中,因为FO是$\angle NFM$的平分线又是MN的高线,则

$$MO=NO.$$

同理　$QO=OP$.

于是四边形$MPNQ$的对角线互相垂直平分,因而$MPNQ$为菱形.

1·132　已知:在凸五边形$ABCDE$中,$\angle BAE=3\alpha$,$BC=CD=DE$,且$\angle BCD=\angle CDE=180^\circ-2\alpha$.求证:$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

（中国初中数学联赛,1990年）

[证]　连BD、CE.

$\because$　$BC=CD=DE$,

$\angle BCD=\angle CDE=180^\circ-2\alpha$,

$\therefore$　$\triangle BCD\cong\triangle CDE$.

则　$\angle CBD=\angle CDB=\angle DCE=\angle DEC=\alpha$.

$\therefore$　$\angle BCE=(180^\circ-2\alpha)-\alpha=180^\circ-3\alpha$.

又$\because$　$\angle BAE=3\alpha$,

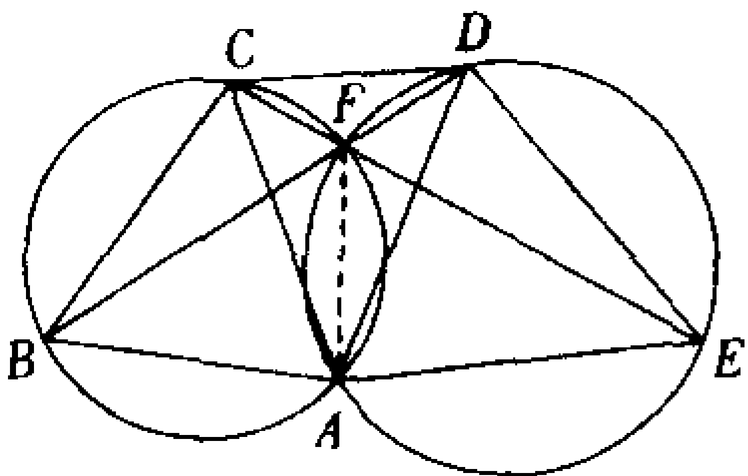
$\therefore$　A、B、C、E共圆.

同理可证　A、B、C、D、E共圆.

由此知A、B、C、D、E共圆,故$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

1·133　在凸五边形$ABCDE$中,若$\angle ABC=\angle ADE$,$\angle AEC=\angle ADB$.求证:$\angle BAC=\angle DAE$.

（第21届全俄数学奥林匹克,1987年）



[证]　如图;设凸五边形的对角线BD、CE交于点F,连AF.

$\because$　$\angle AEF=\angle ADF$,

$\therefore$　A、E、D、F四点共圆.

有$\angle AFE=\angle ADE$.

又　$\angle ADE=\angle ABC$,

则　$\angle AFE=\angle ABC$.

$\therefore$　A、B、C、F四点共圆.

于是　$\angle BAC=\angle BFC$,

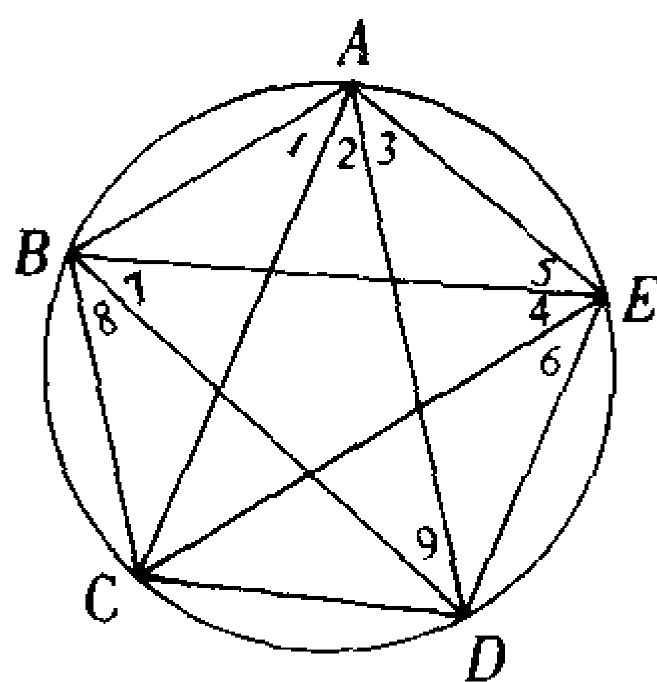
又 $\angle BFC=\angle DFE$，$\angle DFE=\angle DAE$，

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DAC$.

1·134 设 $ABCDE$ 是圆内接五边形,假设 AC、BD、CE、DA 和 EB 分别平行于 DE、EA、AB、BC 和 CD. 问是否可以推出这个五边形是正五边形? 证明你的结论.

(英国数学奥林匹克,1992 年)

[解] 结论是肯定的.



下面我们来证明五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

由同弧圆周角相等可得

$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 5$，$\angle 3=\angle 7$.

又因为 $AB /\!/ CE$,

所以 $\angle 6=\angle 7$. 因而 $\angle 3=\angle 6$.

从而 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 6$,

即 $\angle A=\angle B$.

同理可证 $\angle B=\angle C$，$\angle C=\angle D$，$\angle D=\angle E$.

所以 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.

又因为 $\angle 2=\angle 8=\angle 9=\angle 3$,

所以 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$, 即 $CD=BC$.

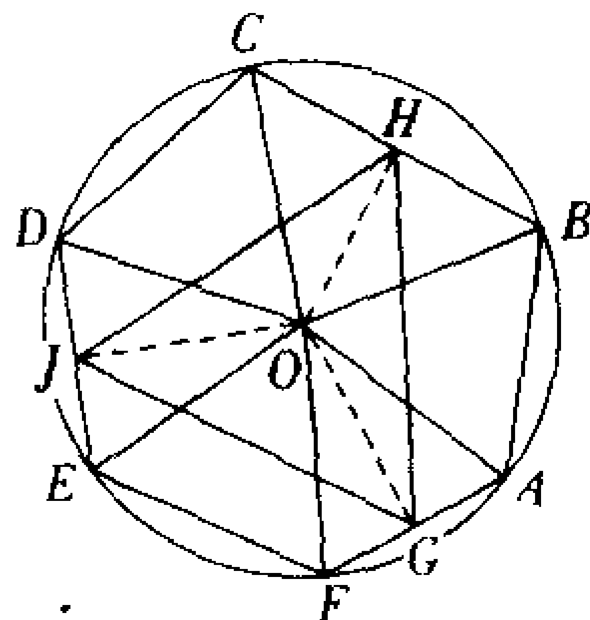
同理可证 $BC=AB$，$AB=AE$，$AE=ED$.

所以 $AB=BC=CD=DE=EA$.

综上可知,$ABCDE$ 是正五边形.

1·135 六边形 $ABCDEF$ 内接于一圆. 它的边 AB、CD、EF 等于圆的半径. 求证:六边形 $ABCDEF$ 的其他三边的中点是正三角形的顶点.

(匈牙利数学奥林匹克,1941 年)



[证] 设 O 是六边形 $ABCDEF$ 的外接圆的圆心,r 是它的半径. G、H、J 是边 FA、BC、DE 的中点.

设 $\alpha=\angle GOF=\angle GOA$，$\beta=\angle HOB=\angle HOC$，$\gamma=\angle JOD=\angle JOE$.

由于 $AB=CD=EF=r$,

则 $\triangle AOB$、$\triangle COD$、$\triangle EOF$ 是等边三角形，

$$\angle AOB=\angle COD=\angle EOF=60^\circ.$$

于是 $2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ-3\times60^\circ=180^\circ$.

即 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

在$\triangle GOH$ 中，由余弦定理得

$$GH^2=GO^2+HO^2-2GO\cdot HO\cdot\cos(\alpha+60^\circ+\beta).$$

又 $GO=\Gamma\cos\alpha$， $HO=r\cos\beta$， $\alpha+60^\circ+\beta=150^\circ-\gamma$.

因此可用 Γ、α、β、γ 表示 GH.

$$GH^2=\Gamma^2[\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(150^\circ-\gamma)]$$
$$=\Gamma^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma\cos150^\circ-\cos^2\gamma$$
$$-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)$$

又 $\cos^2\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$$=1-\sin^2\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$
$$=1-\sin\gamma[\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta]$$
$$=1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

所以有 $GH^2=r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$.

同理可求 $HJ^2=r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$.

$$JG^2=r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

因而 $GH=HJ=JG$. 所以 $\triangle JGH$ 是正三角形.

1·136 在正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的边 A_1A_2 和 A_2A_3 上分别取点 K 和 N，使 $\angle KA_{n+2}N=\frac{\pi}{2n}$. 试证：$NA_{n+2}$ 平分 $\angle KNA_3$.

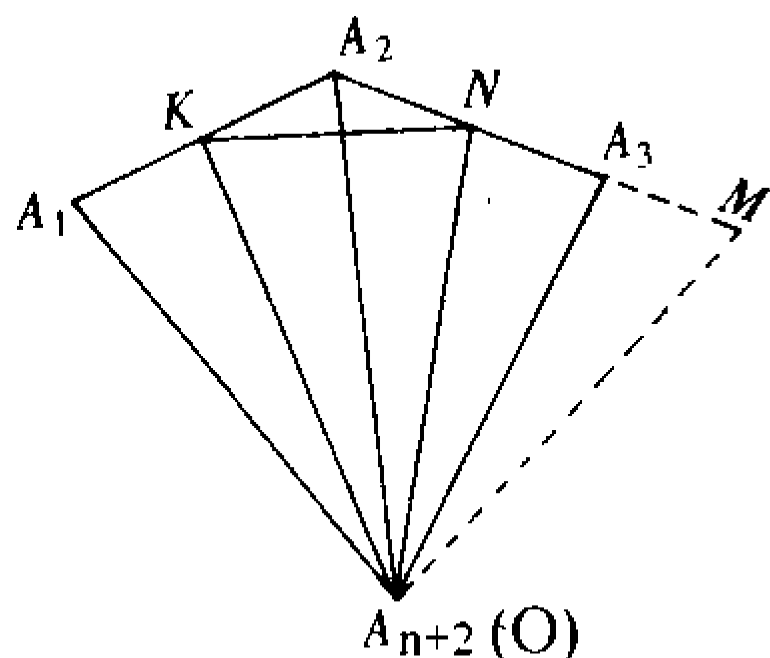
（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

［证］ 记 A_{n+2} 为 O，因多边形系正 $2n$ 边形，易知 A_2O 是正 $2n$ 边形外接圆直径. 因而

$$\angle OA_1K=\angle OA_3N=\frac{\pi}{2}.$$

且 $\angle A_1OA_3=\frac{\pi}{n}$.

又 $A_1O=A_3O$，将$\triangle A_1KO$绕点O顺时针旋转$\frac{\pi}{n}$至$\triangle A_3MO$处，则M在直线A_2A_3上.



$\because$ $KO=MO$，$ON=ON$，

且 $\angle NOM=\angle A_1OA_3-\angle KON=\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}=\angle KON$，

$\therefore$ $\triangle KNO\cong\triangle MNO$，

于是 $\angle KNO=\angle A_3NO$，即 NA_{n+2}平分$\angle KNA_3$.

1·137 两圆相切(内切或外切)于点P，一直线与两圆之一相切于A而与另一圆相交于B、C.求证：直线PA是$\angle BPC$的平分线(在内切时)或是$\angle BPC$补角的平分线(在外切时).

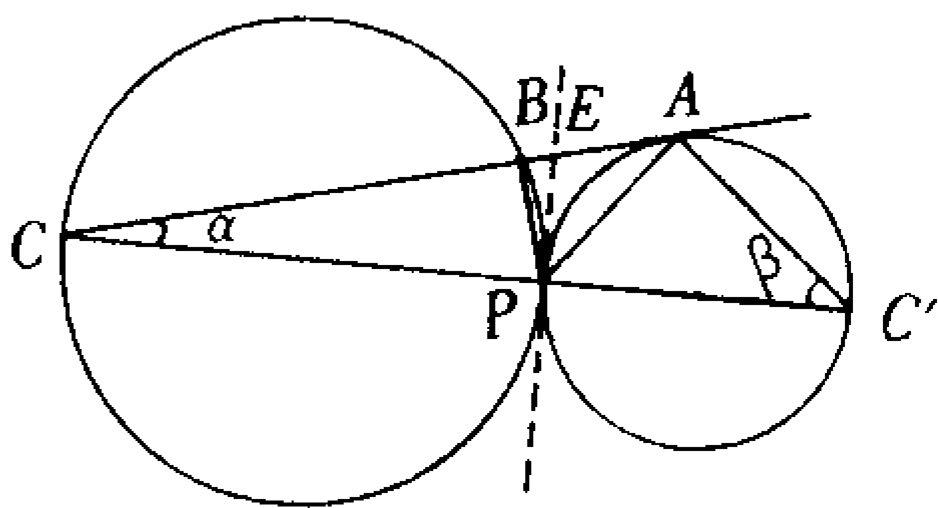
(卢森堡等五国国际数学竞赛，1980年)

注：卢森堡等五国是指比利时、英国、卢森堡、荷兰和前南斯拉夫

[证] (1)当两圆外切时.

过P作两圆内公切线交AC于E.

令$\angle BPE=\alpha$，$\angle EPA=\beta$.



由于 $\angle BPE$，$\angle EPA$，$\angle EAP$都是弦切角，

所以$\angle BCP=\alpha$，$\angle EAP=\beta$，$\angle PC'A=\beta$.

故 $\angle CAC'=180°-(\alpha+\beta)$，

且 $\angle PAC'=180°-(\alpha+\beta)-\beta=180°-\alpha-2\beta$.

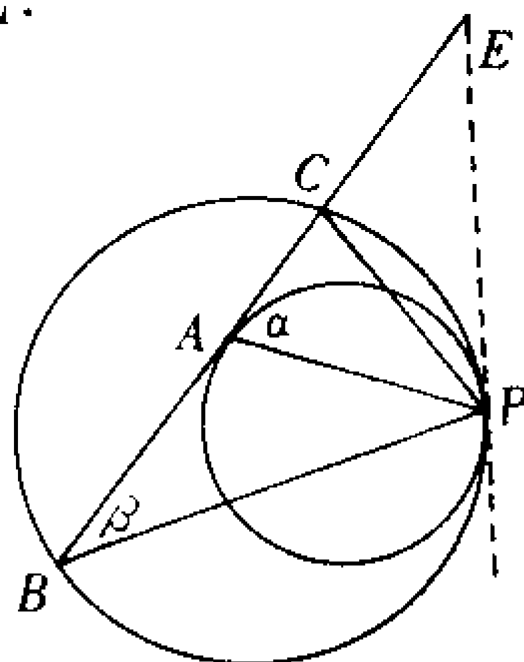
$\angle APC'=180°-\beta-(180°-\alpha-2\beta)=\alpha+\beta=\angle BPA$.

因此，直线PA是$\angle BPC$的补角$\angle BPC'$的平分线.

(2)当两圆内切时.

过P作两圆外公切线，与直线BC交于E.

令$\angle APE=\alpha$，$\angle CPE=\beta$.



因为$\angle CPE$、$\angle APE$、$\angle EAP$都是弦切角，所以有

$$\angle EAP=\alpha,\ \angle CBP=\beta.$$

又 $\angle APB=\angle CAP-\angle CBP=\alpha-\beta$, $\angle APC=\alpha-\beta$.

即 $\angle APB=\angle APC$.所以 PA 是$\angle BPC$ 的平分线.

1·138 已知:A 为平面上两个半径不等的圆 O_1 和圆 O_2 的一个交点,两圆的外公切线分别为 P_1P_2 和 Q_1Q_2,切点分别为 P_1、P_2、Q_1、Q_2. M_1、M_2 分别是 P_1Q_1、P_2Q_2 的中点.求证:$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

(第 24 届国际数学奥林匹克,1983 年)

[证] 记两条外公切线 P_1P_2 与 Q_1Q_2 的交点为 C,则 C 为位似中心.

连结 CA 并延长交$\odot O_2$ 于 D,连 DO_2、DM_2、BM_2.

连结 BA 并延长交P_1P_2 于 N,则由

$NA\cdot NB=NP_2^2$, $NA\cdot NB=NP_1^2$.

可知 N 是P_1P_2 的中点.

所以线段 M_1M_2 与 AB 互相垂直平分.

从而有 $BM_2/\!/AM_1$.

又∵ $\triangle CM_1A\backsim\triangle CM_2D$, ∴ $AM_1/\!/DM_2$.

因而 B、M_2、D 三点共线,这样

$$\angle ADM_2\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AEB}\overset{m}{=}\angle AO_2M_2.$$

于是 A、M_2、O_2、D 四点共圆,所以有

$\angle M_1AM_2=\angle AM_2D=\angle AO_2D=\angle O_1AO_2$.

1·139 两个圆 Γ_1 和 Γ_2 被包含在圆 Γ 内,且分别与圆 Γ 相切于两个不同的点M 和N. Γ_1 经过 Γ_2 的圆心.经过 Γ_1 和 Γ_2 的两个交点的直线与 Γ 相交于点A 和B.直线 MA 和MB 分别与Γ_1 相交于点 C 和D.试证:CD 与Γ_2 相切.

(第 40 届国际数学奥林匹克,1999 年)

[证] 先证明一个引理.

引理 已知圆 Γ_1 被包含在圆 Γ 内且与Γ 相切于U 点.Γ 的一条弦PQ 与Γ_1 相切于 V 点.设 W 为Γ 上不包含U 点的弧$\overset{\frown}{PQ}$的中点,则 U、V、W 三点共线,且有 $WU\cdot WV=WP^2$.

引理的证明　如图 1 所示，以 U 点为位似中心，将圆 Γ_1，变为圆 Γ 的位似变换把 PQ 变成 Γ 的一条平行于 PQ 的切线，就是经过 W 点的切线. 因此，U、V、W 三点共线.

又因 $\angle QPW = \angle WUP$，故 $\triangle UWP \backsim \triangle PWV$. 于是 $WU \cdot WV = WP^2$.

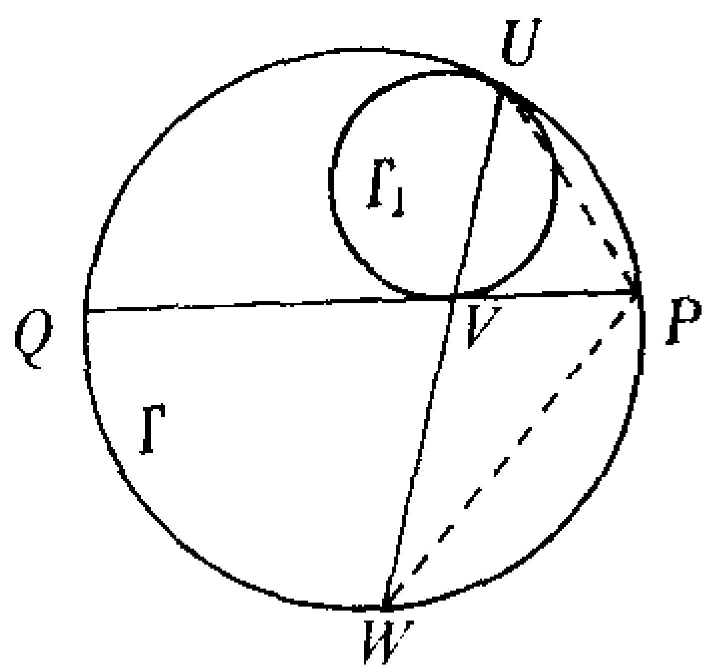


图 1

我们回到原命题. 如图 2 所示，设 O_1、O_2 分别为圆 Γ_1、Γ_2 的圆心，t_1 和 t_2 为它们的两条公切线，设 α、β 分别为圆 Γ 上如同引理那样被 t_1、t_2 截出的弧.

根据引理，弧 α、β 的中点关于圆 Γ_1、Γ_2 的幂相等，所以它们落在 Γ_1、Γ_2 的根轴上. 这说明点 A 和 B 分别是弧 α 和 β 的中点. 又由引理可知 C、D 分别为 t_1 和 t_2 在 Γ_1 上的切点.

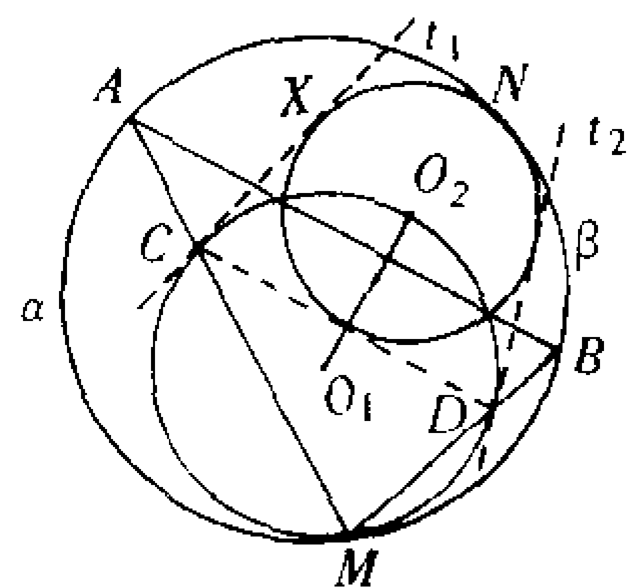


图 2

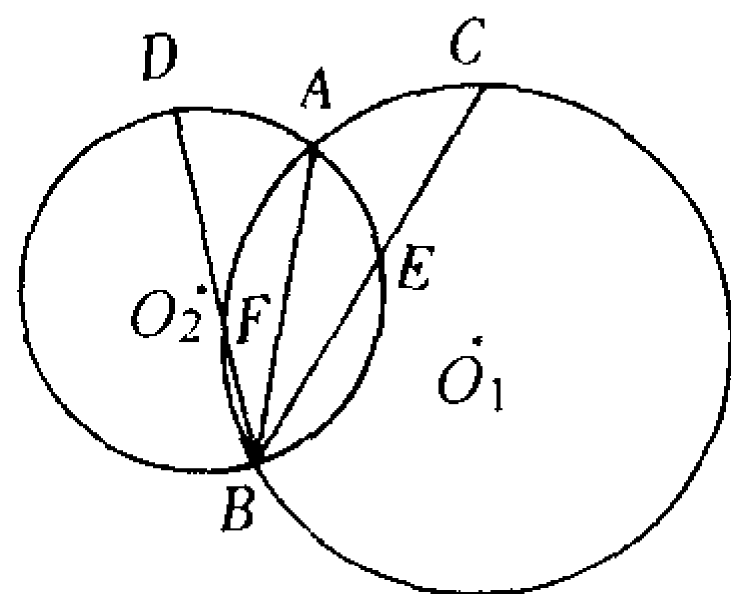
令 H 是以 M 为位似中心，将 Γ_1 变成 Γ 的位似变换，则 H 把 CD 变成 AB.

于是 $AB /\!/ CD$. 这说明 $CD \perp O_1O_2$ 且 O_2 是 Γ_1 上某一段 CD 弧的中点.

记 X 为 t_1 在 Γ_1 上的切点，则

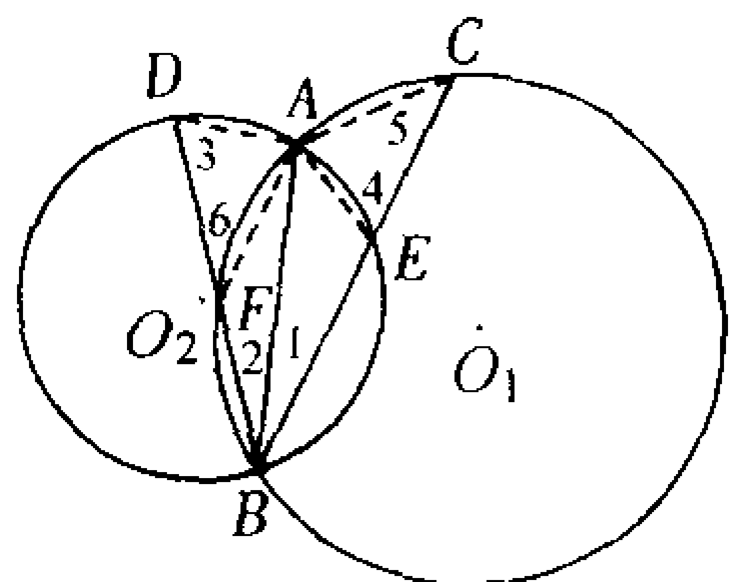
$$\angle XCO_2 = \frac{1}{2}\angle CO_1O_2 = \angle DCO_2.$$

因此 O_2 在 $\angle XCD$ 的角平分线上，进而证得 CD 与 Γ_2 相切.



1·140　如图，两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，$\odot O_1$ 的弦 BC 交 $\odot O_2$ 于 E，$\odot O_2$ 的弦 BD 交 $\odot O_1$ 于 F. 求证：(1) 若 $\angle DBA = \angle CBA$，则 $DF = CE$；(2) 若 $DF = CE$，则 $\angle DBA = \angle CBA$.

（中国高中数学联赛，1979 年）



[证]　(1) 连接 AC、AE、AD、AF，由圆内接四边形外角性质有

$\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$（见图）.

由　$\angle 1 = \angle 2$，有　$\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{AE}$，故　$DA = AE$.

∴ $\triangle ADF \cong \triangle AEC$，有 $DF=CE$.

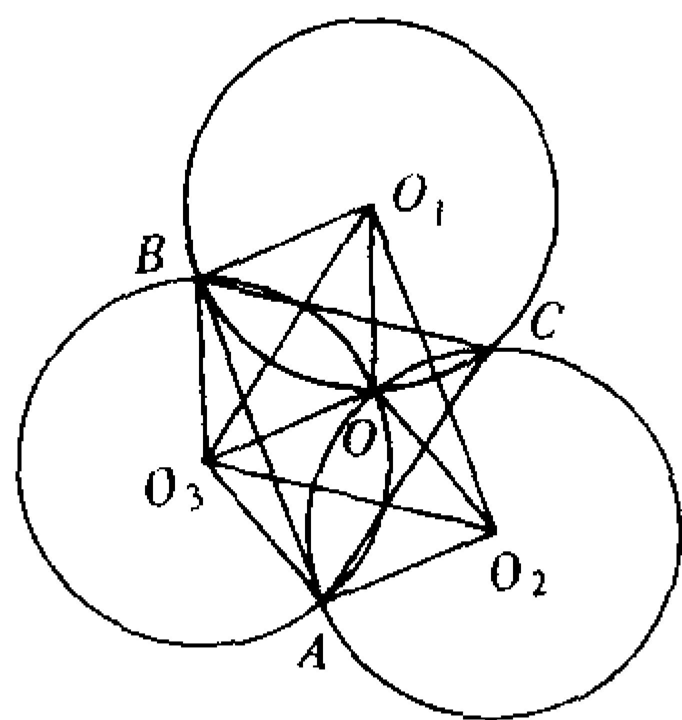
(2)若 $DF=CE$，又 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，

∴ $\triangle ADF \cong \triangle AEC$，有 $AD=AE$.

∴ $\angle 1=\angle 2$，即 $\angle DBA=\angle CBA$.

1·141　3个相等的圆周相交于同一点，它们的圆心分别是 O_1、O_2、O_3，它们间的其他交点分别是 A、B、C. 求证：$\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle ABC$.

(莫斯科数学奥林匹克，1960年)



［证］　设3个圆的公共交点为 O，连结 AB、AC、BC、AO_3、BO_3、BO_1、OO_1，如图连 OO_2、OO_3、OO_1.

∵ OO_2AO_3 是菱形，

∴ $O_2A \mathrel{\underline{\parallel}} OO_3$.

∵ OO_3BO_1 是菱形，

∴ $OO_3 \mathrel{\underline{\parallel}} O_1B$.

故 $O_2A \mathrel{\underline{\parallel}} O_1B$，$O_1O_2AB$ 是平行四边形.

则 $O_1O_2=AB$.

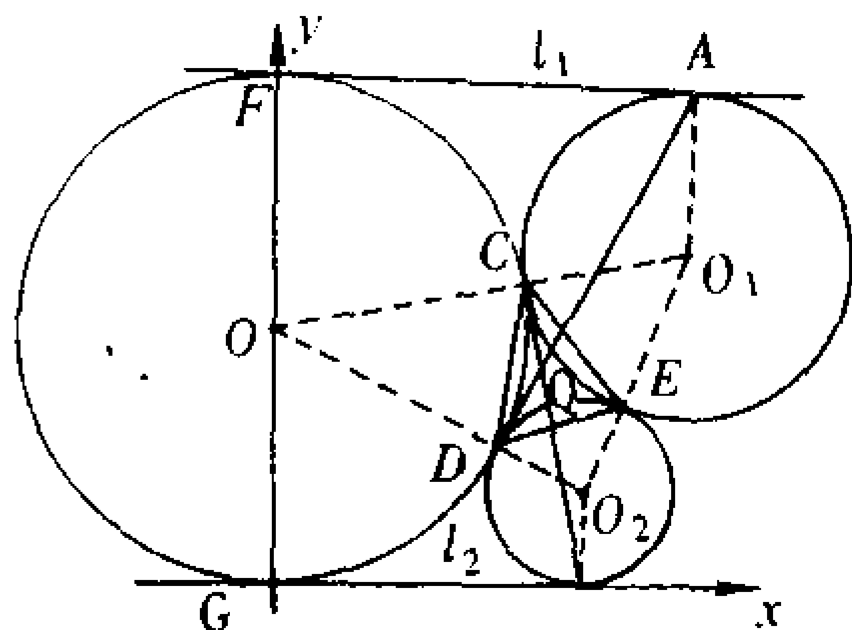
同理可证 $O_2O_3=BC$，$O_3O_1=AC$.

故 $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle ABC$.

1·142　$\odot O$ 与两条平行线 l_1、l_2 都相切，第2个圆 $\odot O_1$ 与 l_1 切于 A，与 $\odot O$ 外切于 C，第3个圆 $\odot O_2$ 与 l_2 切于 B，与 $\odot O$ 外切于 D，与 $\odot O_1$ 外切于 E，线段 AD 与 BC 交于点 Q. 求证 Q 为 $\triangle CDE$ 的外心.

(第35届国际数学奥林匹克预选题，1994年)

［证］　设 $\odot O$、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r、r_1、r_2，于是 $OO_1=r+r_1$，$OO_2=r+r_2$，$O_1O_2=r_1+r_2$.



记 $\odot O$ 与 l_1、l_2 的切点分别为 F、G，于是

$$AF^2=(r+r_1)^2-(r-r_1)^2=4rr_1,$$

$$BG^2=4rr_2.$$

取以点 G 为原点，直线 l_2 为 x 轴，GF 为 y 轴的直角坐标系，于是点 O、O_1、

O_2、B 的坐标分别为$(0,r)$,$(2\sqrt{rr_1},\ 2r-r_1)$,$(2\sqrt{rr_2},\ r_2)$,$(2\sqrt{rr_2},\ 0)$,点 C 的坐标为$\left(2\sqrt{rr_1}\frac{r}{r+r_1},\ r+(r-r_1)\frac{r}{r+r_1}\right)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad (r_1+r_2)^2 &= O_1O_2^2\\ &=(2\sqrt{rr_1}-2\sqrt{rr_2})^2+(2r-r_1-r_2)^2\\ &=4rr_1+4rr_2-8r\sqrt{r_1r_2}+4r^2+(r_1+r_2)^2-4r(r_1+r_2).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad r=2\sqrt{r_1r_2}. \qquad ①$$

为证 $BC\perp OO_1$,计算两条直线的斜率:

$$k_{OO_1}=\frac{r-r_1}{2\sqrt{rr_1}}, \qquad ②$$

$$\begin{aligned}k_{BC}&=\frac{r+(r-r_1)\frac{r}{r+r_1}}{2\sqrt{rr_1}\frac{r}{r+r_1}-2\sqrt{rr_2}}\\ &=\frac{r^2+rr_1+r^2-r_1r}{2r\sqrt{rr_1}-2r\sqrt{rr_2}-2r_1\sqrt{rr_2}}\\ &=\frac{r^2}{r\sqrt{rr_1}-2r\sqrt{rr_2}-r_1\sqrt{rr_2}},\end{aligned} \qquad ③$$

由②、③和①得到

$$\begin{aligned}k_{BC}k_{OO_1}&=\frac{r^2(r-r_1)}{2r^2r_1-2r^2\sqrt{r_1r_2}-2rr_1\sqrt{r_1r_2}}\\ &=\frac{r^2(r-r_1)}{2r^2r_1-r^3-r^2r_1}\\ &=-1.\end{aligned}$$

$\therefore\quad BC\perp OO_1$.

$\therefore\quad BC$ 为$\odot O$ 和$\odot O_1$ 的公切线.

同理 AD 为$\odot O$ 和$\odot O_2$ 的公切线.

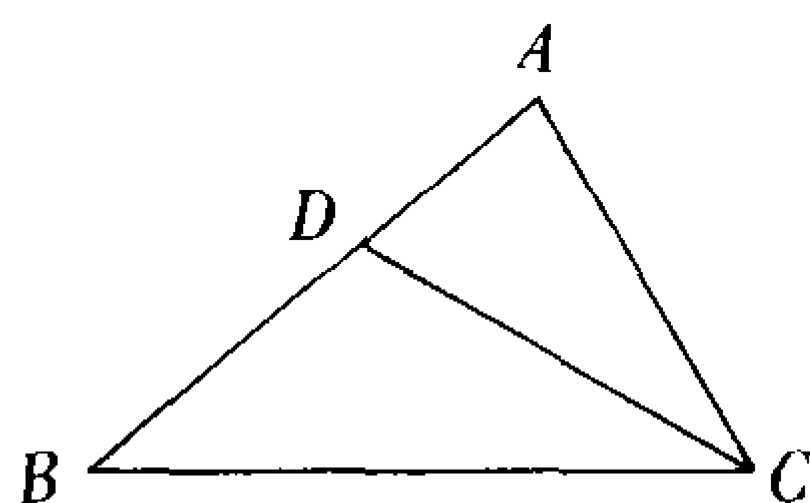
$\therefore\quad$ 点 Q 为三个圆$\odot O$、$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的根心.

$\therefore\quad EQ$ 为$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的公切线.

$\therefore\quad QC=QB=QE$,即点 Q 为$\triangle CDE$ 的外心.

第二章 线段、角或弧的和差倍分

(一)线段的和差倍分



2·1 已知:如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle A=2\angle B$,CD 是$\angle ACB$ 的平分线,求证:$BC=AC+AD$.

(中国天津市数学竞赛,1994 年)

[证] 在 CB 上截取 $CE=CA$,连 DE,在$\triangle ACD$ 和$\triangle ECD$ 中,

$AE=EC$, $\angle 1=\angle 2$, $CD=CD$,

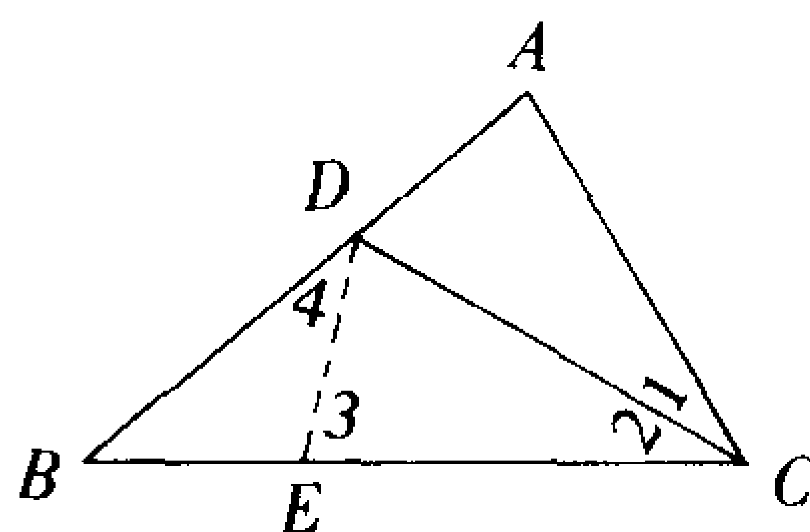
$\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle ECD$.

$\therefore$ $DA=DE$, $\angle A=\angle 3$,

$\because$ $\angle A=2\angle B$, $\angle 3=\angle 4+\angle B$.

$\therefore$ $\angle B=\angle 4$. 且 $BE=DE=AD$.

$\because$ $BC=CE+EB$,



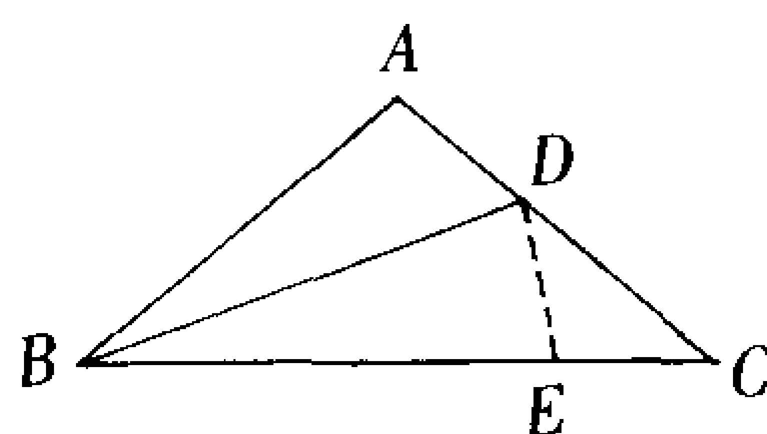
$\therefore$ $BC=AC+AD$.

2·2 等腰三角形 ABC 中,$\angle A=100°$,$AB=AC$,角 B 的平分线交AC 于D.求证:$BD+AD=BC$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991 年)

[证] 在 BC 上取一点E,使 $CE=AD$,连结 DE.则由 BD 是$\angle B$ 的平分线,得

$$\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{DC}=\frac{CE}{CD}.$$



又∵ $\angle DCE=\angle ABC=40^\circ$,

∴ $\triangle CED\backsim\triangle BAC$.

有 $\angle CDE=\angle BCA=40^\circ$,

且 $\angle BED=80^\circ$.

于是 $\angle BDE=180^\circ-20^\circ-80^\circ=80^\circ$, ∴ $BD=BE$.

∴ $BC=BE+CE=BD+AD$.

[证 2] 在 BC 上取点 E,使 $BE=BD$,连结 DE.

∵ $\angle ABC=40^\circ$, BD 平分$\angle ABC$,

∴ $\angle DEB=20^\circ$, ∴ $\angle BED=80^\circ$.

∵ $\angle A=100^\circ$, ∴ A、B、E、D 四点共圆.

∵ $\angle ABD=\angle DBE$, ∴ $AD=ED$.

又∵ $\angle CDE=\angle ABE=\angle C$, ∴ $CE=DE=AD$.

∴ $BC=BE+EC=BD+AD$.

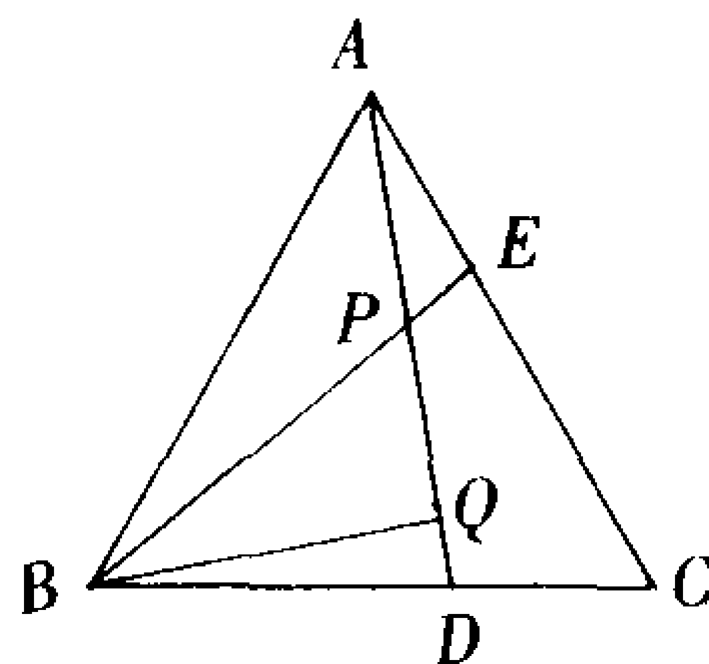
2·3 如图,已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=BC=CA$,$AE=CD$,AD、BE 相交于P,$BQ\perp AD$ 于Q,求证:$BP=2PQ$.

(中国北京市数学竞赛,1987 年)

[证] ∵ $AB=BC=CA$,

∴ $\triangle ABC$ 是正三角形.

$\angle ABC=\angle ACB=\angle CAB=60^\circ$.



又∵ $AB=AC$, $AE=DC$,

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CAD$,

有 $\angle ABE=\angle CAD$.

∵ $\angle BPQ=\angle ABE+\angle BAP$
$\quad\quad=\angle CAD+\angle BAD=60^\circ$,

∴ $\angle PBQ=30^\circ$, 且 $BP=2PQ$.

2·4 如图,$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的平分线为 AD,M 为 BC 的中点,又 $AD\parallel ME$. 求证:

$$BE=CF=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

(中国天津市数学竞赛,1994 年)

[证] 延长 EM 到 G,使 $MG=FM$.连 BG,则$\triangle BMG\cong\triangle CMF$.

$\because$ $BG=CF$, $\angle G=\angle MFC$

又 $\angle BAD=\angle DAC$, $AD/\!/ME$,

$\therefore$ $\angle BAD=\angle AEM$,

$\angle DAC=\angle MFC$.

$\therefore$ $\angle BEG=\angle BGE$.

从而 $BE=BG=CF$.

$\because$ $BE=AB+AE, AE=AF$,

$\therefore$ $2BE=AB+AE+CF=AB+AF+CF=AB+AC$,

故 $BE=\dfrac{1}{2}(AB+AC)$.

2·5 设 M、N 为三角形 ABC 的边 BC 上的两点,且满足 $BM=MN=NC$,一平行于 AC 的直线分别交 AB、AM、AN 于 D、E 和 F,求证:$EF=3DE$.

(澳大利亚数学奥林匹克,1994 年)

[证] 过 N、M 点分别作 AC 的平行线交 AB 于 H、G 点.NH 交 AM 于 K 点.由于 $BM=MN=NC$,所以 $BG=GH=HA$.

易知 $HK=\dfrac{1}{2}GM$,且 $GM=\dfrac{1}{2}HN$,

所以 $HK=\dfrac{1}{4}HN$.

即 $HK:KN=1:3$.

又因为 $DF/\!/HN$, 于是 $DE:EF=HK:KN$,

$\therefore$ $DE:EF=1:3$, 即 $EF=3DE$.

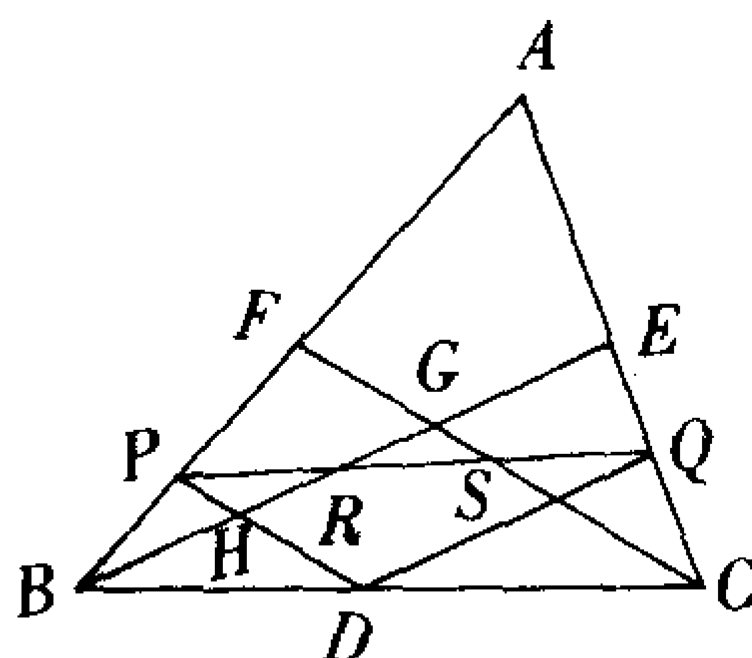
2·6 在$\triangle ABC$ 中,设 E、F 分别为 AC、AB 的中点.D 为 BC 上任一点,P 在 BF 上,$DP/\!/CF$,Q 在 CE 上,$DQ/\!/BE$,PQ 交 BE 于 R,交 CF 于 S,求证:$PQ=3RS$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[证] 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心,DP 交 BE 于 H.

$\because$ $DQ/\!/HR$,

$\therefore \quad \dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{PH}{PD}$.



又$\because \quad DP /\!/ CF$，$\therefore \quad \dfrac{PH}{PD}=\dfrac{FG}{FC}=\dfrac{1}{3}$.

从而 $\dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{1}{3}$.

同理 $\dfrac{SQ}{PQ}=\dfrac{1}{3}$.

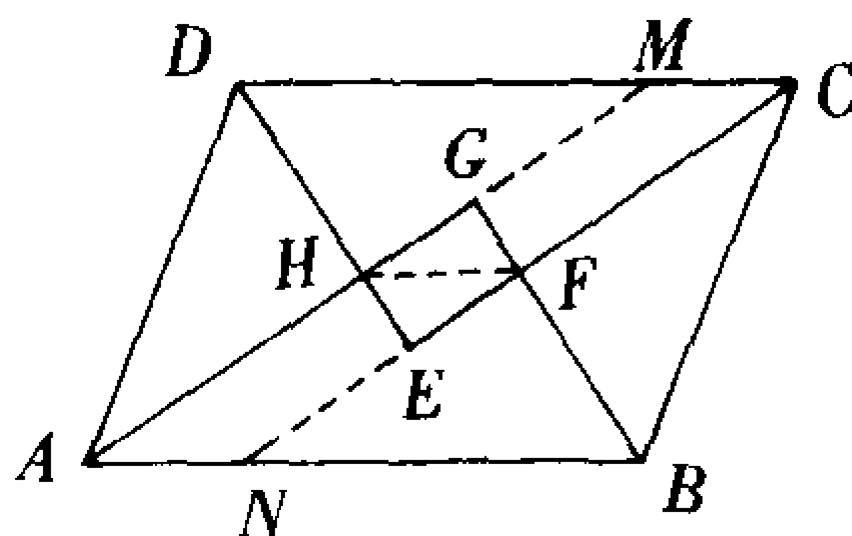
即 $PR=\dfrac{1}{3}PQ$，$SQ=\dfrac{1}{3}PQ$.

于是 $RS=PQ-PR-SQ=\dfrac{1}{3}PQ$. 即 $PQ=3RS$.

2·7 试证:平行四边形的内角平分线组成一个矩形,并且该矩形的对角线等于平行四边形两邻边之差.

（基辅数学奥林匹克,1955 年）

［证］ 如图,在▱$ABCD$ 中,它的内角的平分线组成四边形 $EFGH$.



$\because \quad \angle HDA+\angle HAD$

$=\dfrac{1}{2}(\angle CDA+\angle DAB)$

$=\dfrac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$,

$\therefore \quad \angle GHE=\angle DHA=90^\circ$.

同理可证,其他内角也是直角,故 $EFGH$ 是矩形.

延长 AG 与 DC 交于 M,延长 CE 与 AB 交于 N.

$\therefore$ $ANCM$ 是平行四边形.

$\because$ H 是 AM 的中点,F 是 CN 的中点,

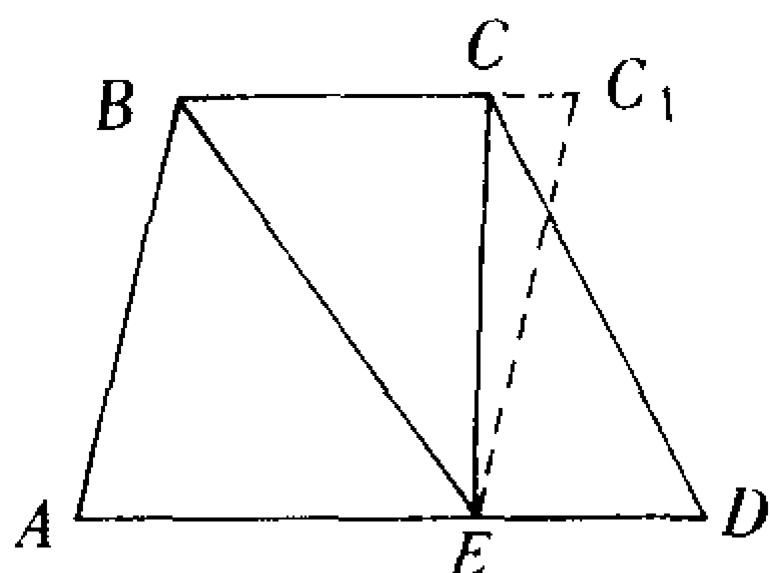
$\therefore$ $HFCM$ 是平行四边形.

故 $HE=MC=CD-DM=CD-AD$.

2·8 在梯形 $ABCD$ 的底边 AD 上有一点 E,使$\triangle ABE$、$\triangle BCE$ 和$\triangle CDE$ 周长相等.求证:$BC=\dfrac{1}{2}AD$.

（第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年）

［证］ 在 BC 或其延长线上取一点 C_1,使 $BC_1=AE$,则 ABC_1E



为平行四边形.

$\therefore$ $\triangle ABE$、$\triangle BEC_1$ 和 $\triangle BEC$ 的周长均相等.

即 $\triangle BCE$ 与 $\triangle BC_1E$ 周长相等,故 C_1 必与 C 重合.因而 $BC=AE$.

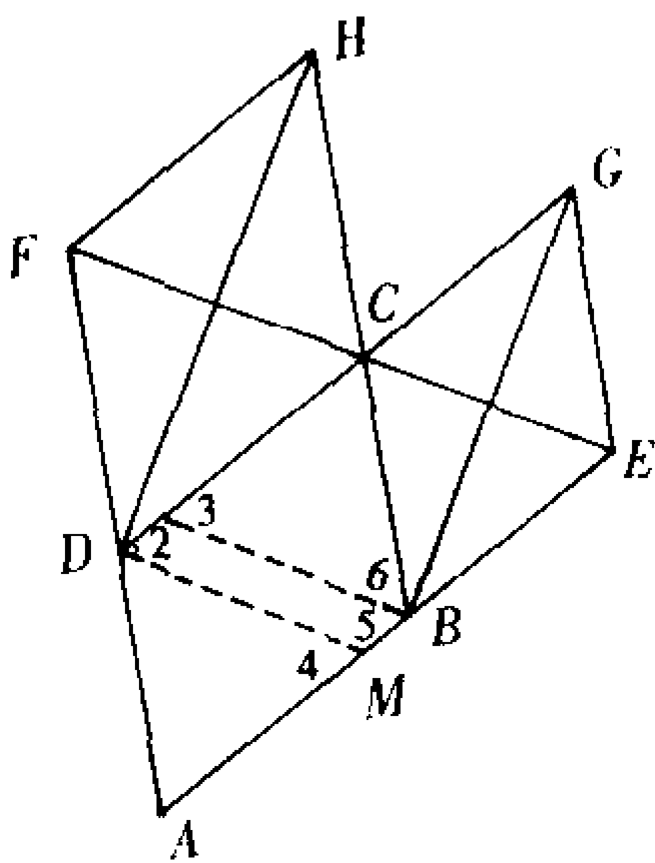
类似地可以证明 $BC=DE$,

$\therefore$ $2BC=AE+ED=AD$.

即 $BC=\dfrac{1}{2}AD$.

2·9 试证:在所有凸四边形中,仅仅只有平行四边形具有这样的性质:每个顶点到不通过它的两边的距离之和都相等.

(匈牙利数学奥林匹克,1967 年)



[证] 本题的证明基于下面的引理:

引理 假设在不大于平角的角内给定两个点,当且仅当这两点所确定的直线和这个角的平分线垂直时,这两点到角的两边距离之和相等.

下面用这个引理证明本题.

过 C 作直线与 $\angle BAD$ 的平分线垂直,与 AB、AD 所在直线分别交于 E 和 F.

过 E 作 $EG /\!/ AD$ 交直线 DC 于 G,

过 F 作 $FH /\!/ AB$ 交直线 BC 于 H.

于是 $\triangle CBE \backsim \triangle CHF$,$\triangle CGE \backsim \triangle CDF$.

由此推出 四边形 $CBEG \backsim$ 四边形 $CHFD$

即有 $\angle CBG=\angle CHD$,$\therefore$ $BG /\!/ DH$.

由引理,在 $\angle DAB$ 内,C 到 $\angle DAB$ 的两边的距离之和等于 E 到 $\angle DAB$ 两边的距离之和.

因为 $EG /\!/ AD$,则 E 和 G 到 AD 的距离相等,因此,E 到 $\angle DAB$ 两边距离之和等于 G 到 $\angle ADC$ 两边距离之和.

由题设,C 到 $\angle DAB$ 两边距离之和等于 B 到 $\angle ADC$ 两边距离之和.

于是 G 和 B 到 $\angle ADC$ 两边距离之和相等,由引理,BG 垂直于 $\angle ADC$ 的平分线.

同理，DH 垂直于$\angle ABC$ 的平分线.

因为 $GB /\!/ HD$，所以$\angle ABC$ 的平分线与$\angle ADC$ 的平分线平行；即 $DM /\!/ BN$，于是

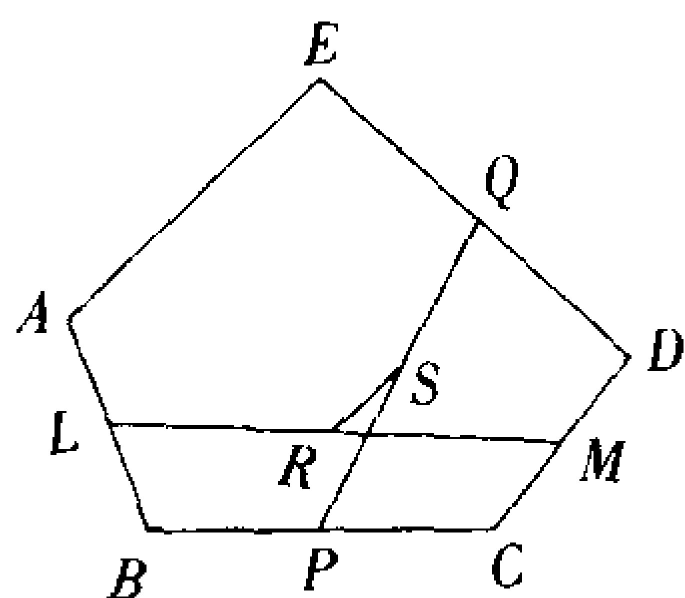
$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=\angle 5=\angle 6$，

从而　　$\angle DAB=\angle BCD$.

同理可证　$\angle ABC=\angle ADC$.

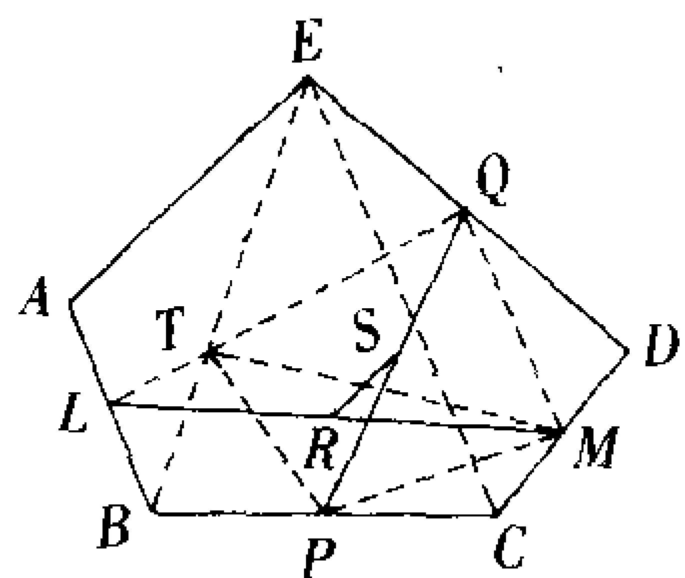
因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2·10　连接凸五边形 $ABCDE$ 边 AB、CD 的中点 LM，BC、DE 的中点 PQ. 求证：LM 和 PQ 的中点连线 $RS /\!/ AE$ 且 $RS=\frac{1}{4}AE$.



（基辅数学奥林匹克，1952 年）

［证］　连接 BE，设 T 是 BE 中点，再依图连接诸线段.



$\because$　$QM \mathrel{\underline{/\!/}} TP \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}EC$，

$\therefore$　四边形 $TPMQ$ 是平行四边形.

知其对角线 TQ、TM 互相平分于 S 点.

又　$RS \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}LT$，$LT \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AE$，

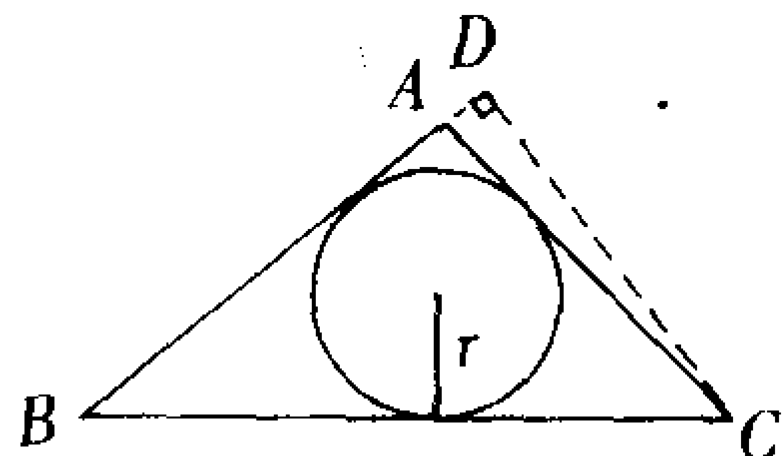
$\therefore$　$RS \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{4}AE$.

2·11　三角形的边长成等差数列. 求证：其内切圆的半径等于某一条高的$\frac{1}{3}$.

（基辅数学奥林匹克，1954 年）

［证］　不失一般性，设 $AC<AB<BC$，则可设 $AC=a$，$AB=a+d$，$BC=a+2d$

作 AB 的高线 CD，如图



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}(a+d)h_c$.

又　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(AC+AB+BC)$

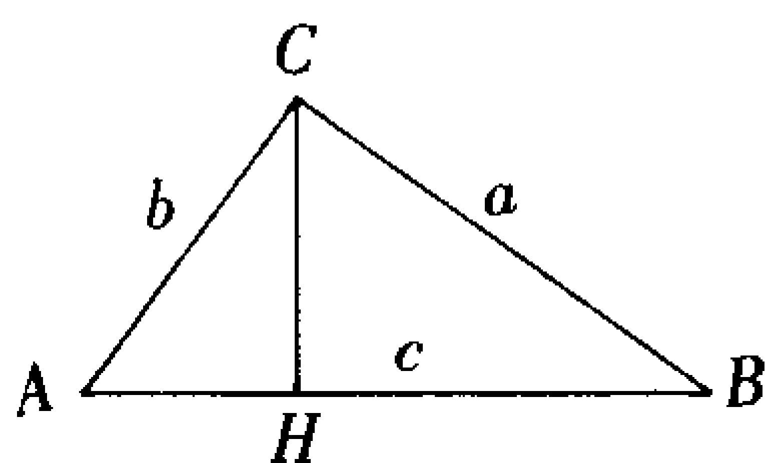
$$=\frac{1}{2}r(a+a+d+a+2d)=\frac{3}{2}r(a+d),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(a+d)h_c=\frac{3}{2}r(a+d).$$

故 $r=\frac{1}{3}h_c$.

2·12 CH 为直角△ABC 斜边 AB 上的高. 求证: △ABC、△CAH、△CBH 的内切圆半径之和等于 CH.

(基辅数学奥林匹克, 1959 年)



[证] 如图, 设△ABC 三边 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. 又设 Rt△ABC、Rt△CAH、Rt△CBH 的内切圆半径分别为 r、r_1、r_2, 则

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c),$$

$$r_1=\frac{1}{2}(AH+CH-b),$$

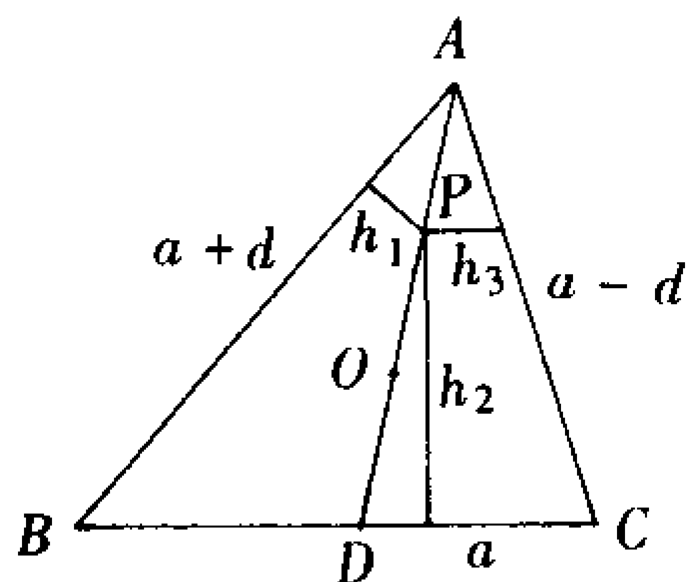
$$r_2=\frac{1}{2}(BH+CH-a)$$

故 $r+r_1+r_2=\frac{1}{2}(AH+BH)+CH-\frac{1}{2}c$

$$=\frac{1}{2}c+CH-\frac{1}{2}c=CH.$$

2·13 三角形的三边长组成等差数列. 作长为中间边的对角的平分线. 证明: 该平分线上任意一点到三角形的边的距离之和等于内切圆半径的三倍.

(基辅数学奥林匹克, 1959 年)



[证] 在△ABC 中, 设其三边 $b<a<c$, 又由题设知 $b=a-d$, $c=a+d$. 又 AD 平分∠A.

设 P 是 AD 上任一点, P 到三边的距离分别为 h_1、h_2、h_3, 则 $h_1=h_3$.

设⊙O 是△ABC 的内切圆, 半径是 r, 如图.

$$\because\quad S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}=S_{\triangle ABC}$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(a+d)h_1+\frac{1}{2}ah_2+\frac{1}{2}(a-d)h_3$

$=\frac{1}{2}[a+(a-d)+(a+d)]r$

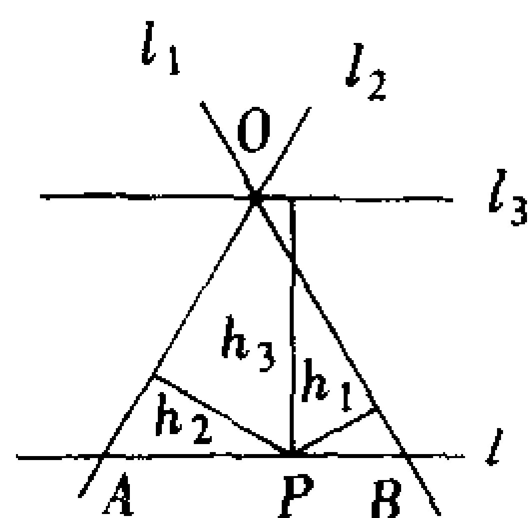
即 $\frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3)=\frac{3}{2}ar$

故 $h_1+h_2+h_3=3r$

2·14 在平面上作三条直线,使他们经过同一点并且两两相交成的角为60°.证明:平面上任何一点到最远的直线的距离等于该点到另两条直线的距离之和.

(基辅数学奥林匹克,1965年)

[证] 设l_1、l_2、l_3都经过点O.设P是平面内任一点.



(1)如果P在某一直线上,结论显然成立;

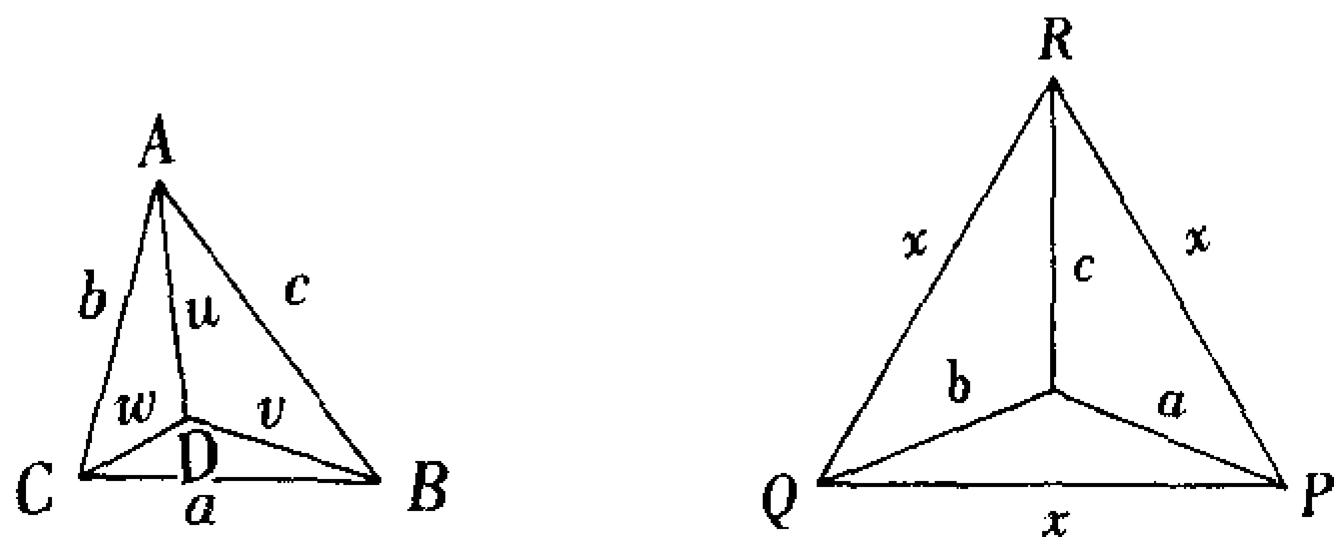
(2)如果P不在任一直线上.如图

过点P作$l \parallel l_3$与l_1、l_2分别交于A、B,则$\triangle OAB$是等边三角形,设P到l_i的距离为$h_i(i=1,2,3)$ 则

$AB \cdot h_3=2S_{\triangle ABO}=2(S_{\triangle APO}+S_{\triangle OPB})=OA \cdot h_2+OB \cdot h_1$

$\therefore \quad h_3=h_1+h_2$.

2·15 考虑如下图所示的$\triangle ABC$和$\triangle PQR$.又在$\triangle ABC$中,

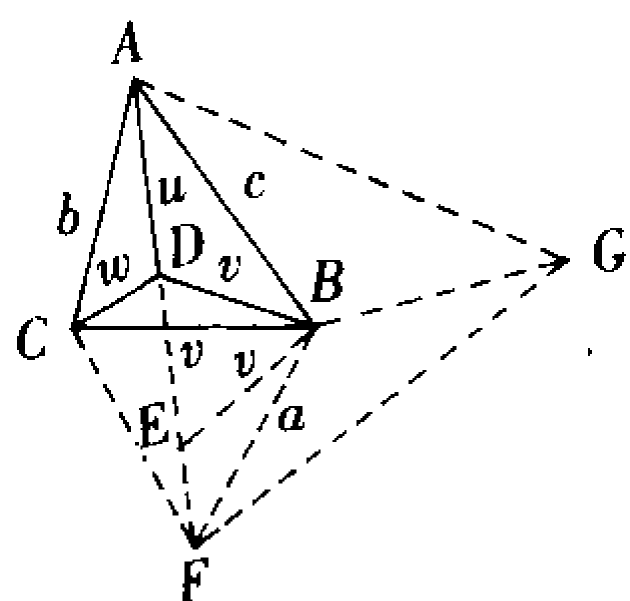


$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$.试证:$x=u+v+w$.

(第3届美国数学奥林匹克,1974年)

[证1] 将$\triangle BCD$绕着点B沿逆时针方向旋转60°,到$\triangle BEF$的位置.

此时,$\triangle BDE$和$\triangle BCF$都是等边三角形(如图),则



$DE = v$, $CF = BF = a$.

$\angle ADE = \angle ADB + \angle BDE = 120^\circ + 60^\circ$
$= 180^\circ$,

$\angle DEF = \angle DEB + \angle BEF = 60^\circ + 120^\circ$
$= 180^\circ$.

所以 A、D、E、F 共线.

则 $AF = u + v + w$.

以 AF 为一边作等边$\triangle AFG$.

在$\triangle BFG$ 和$\triangle CFA$ 中,$CF = BF = a$,

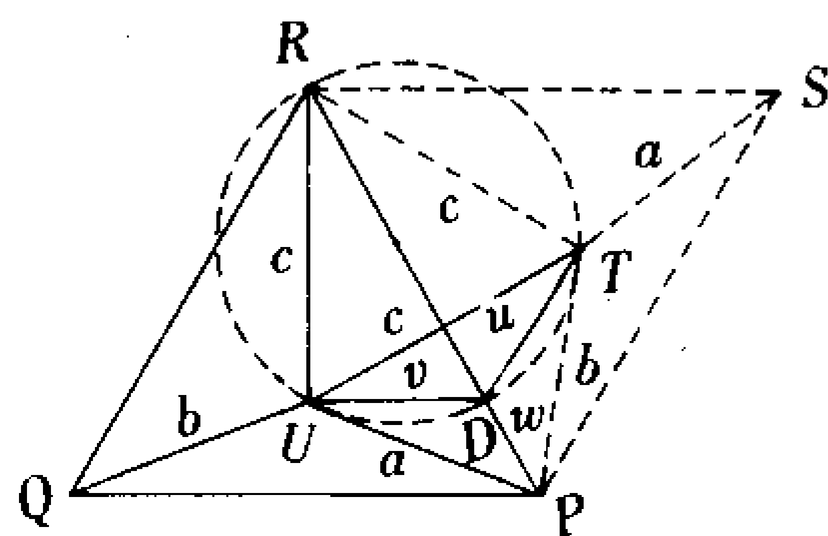
又 $AF = FG = u + v + w$,

$\angle BFG = \angle CFA = 60^\circ - \angle AFB$.

$\therefore$ $\triangle BFG \cong \triangle CFA$. 有 $BG = AC = b$.

因此 $\triangle AFG$ 就是题设中的$\triangle PQR$.

即 $x = u + v + w$.



[证 2] 将$\triangle PQR$ 绕顶点 R 沿逆时针方向旋转 60°到$\triangle SPR$(如图).

由于 P、R、U、T 四点是确定的,所以四边形 $RUPT$ 是惟一确定的,又因为 PR 为四边形的一条对角线,所以线段 a、b、c 惟一地确定等边三角形 PQR 的边.

注意到 $\triangle PUT \cong \triangle CBA$, 有 $\angle UDT = 120^\circ$.

于是 D 在等边三角形 RUT 的外接圆上,从而

$\angle RDT = \angle RUT = 60^\circ$,

又由 $\angle TDP = 120^\circ$, 所以 D 也在线段 PR 上.

根据托勒密(Ptolemy)定理有

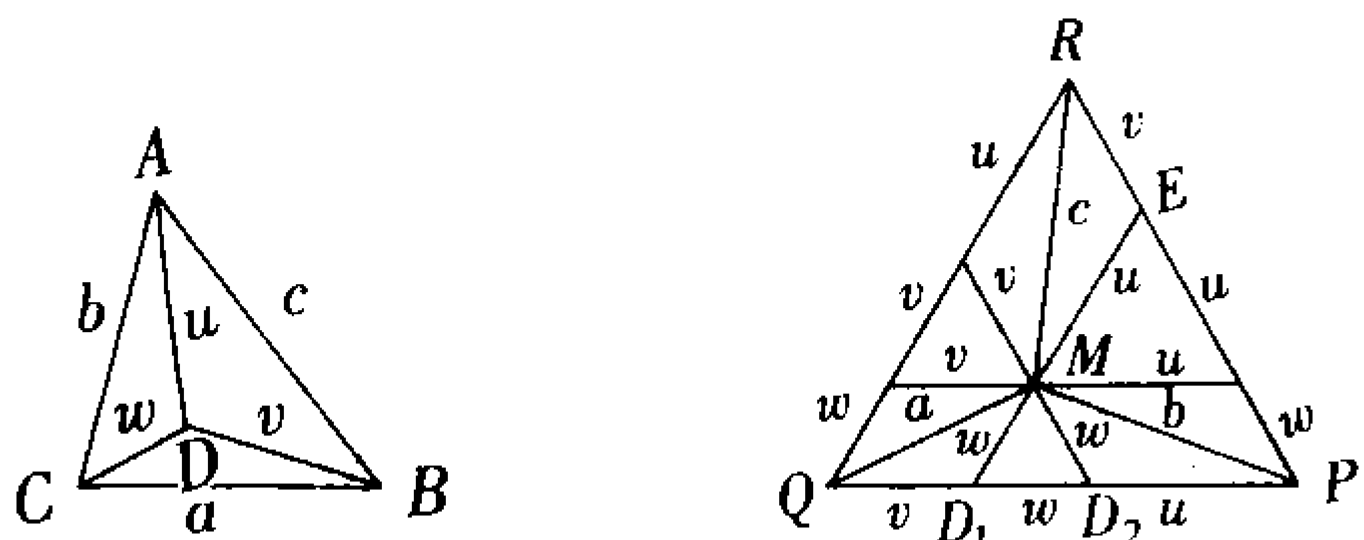
$(DU)\cdot c + (DT)\cdot c = (DR)\cdot c$,

于是 $DU + DT = DR$. 即 $u + v = DR$.

因此 $x = PD + DR = u + v + w$.

[证 3] 我们用$\triangle ABC$ 中所给定的条件作等边三角形.

为此,在任一条直线上取底边.



作　$\triangle QMD_1 \cong \triangle BCD$,

　　$\triangle MPD_2 \cong \triangle CAD$.

显然,$\triangle MD_1D_2$ 是等边三角形,且 $D_1D_2 = w$.

以 PQ 为一边作等边三角形 PQR.

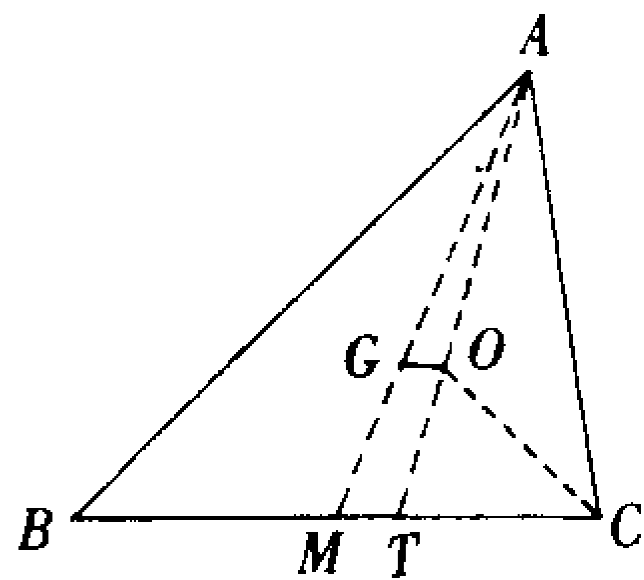
则可证明　$\triangle RME \cong \triangle BAD$. 于是　$MR = c$.

则$\triangle PQR$ 符合题设条件,此时有 $PQ = x = u + v + w$.

2·16　已知:$\triangle ABC$ 的重心 G、内心 O 的连线 GO 平行于 BC,求证:AB、BC、CA 成等差数列.

(中国福建省福州市数学竞赛,1978 年)

[证 1]　作中线 AM 和角平分线 AT,则 AM 过 G,AT 过 O.



$\because$　$GO /\!/ BC$,

$\therefore$　$\dfrac{AO}{OT} = \dfrac{AG}{GM} = 2$.

连接 CO,因 O 是$\triangle ABC$ 的内心,故 CO 是$\angle ACB$ 的平分线.

故　$\dfrac{AC}{CT} = \dfrac{AO}{OT} = 2$,

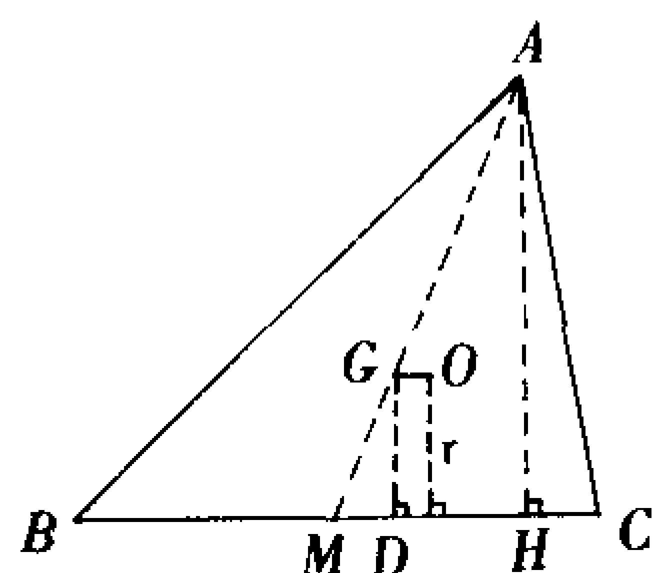
即 $AC = 2CT$.

同理　$AB = 2BT$.

$\therefore$　$AB + AC = 2(BT + CT) = 2BC$.

即 AB、BC、CA 成等差数列.

[证 2]　作中线 AM,高线 AH,则 AM 过 G. 又过 G 作 $GD \perp BC$,垂足为 D.



$\because \quad GO /\!/ BC,$

$\therefore \quad GD$ 等于$\triangle ABC$的内切圆半径r.

于是 $\dfrac{GD}{AH}=\dfrac{GM}{AM}=\dfrac{1}{3},$

从而 $AH=3GD=3r$.

由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{AB+BC+CA}{2}\cdot r$

得 $\dfrac{AB+BC+CA}{2}=\dfrac{3BC}{2},$

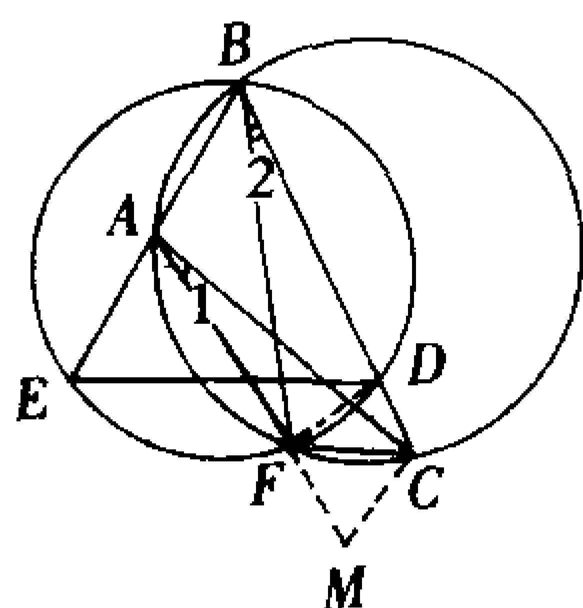
$\therefore \quad AB+CA=2BC$,即$AB$、$BC$、$CA$成等差数列.

2·17 在$\triangle ABC$中,$AB<AC<BC$,点D在BC上,点E在BA的延长线上,且$BD=BE=AC$,$\triangle BDE$的外接圆与$\triangle ABC$的外接圆交于F点.求证:$BF=AF+CF$.

(中国初中数学联赛,1991年)

[证] 延长AF到M,使$FM=CF$.

连CM、DF,在$\triangle EBD$与$\triangle FCM$中,由于$BE=BD$,$FM=CF$,因此$\triangle EBD$与$\triangle FCM$都是等腰三角形.



$\because \quad \angle EBD=\angle MFC,$

$\therefore \quad \angle BED=\angle CMF,$

又$\because \quad \angle BED=\angle BFD,$

$\therefore \quad \angle CMF=\angle BFD.$

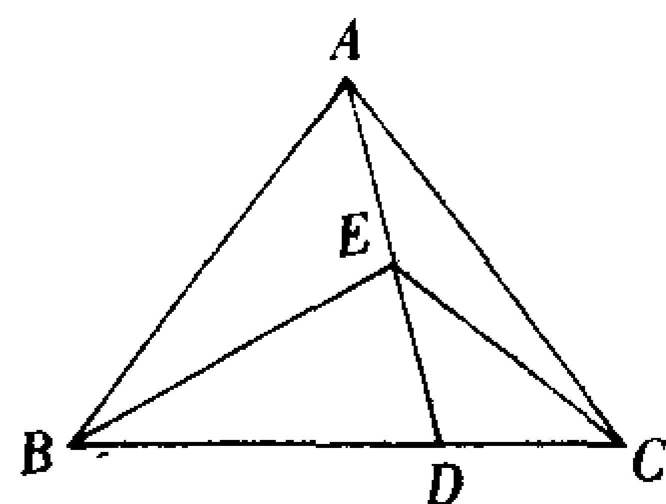
在$\triangle BFD$与$\triangle AMC$中,

$\because \quad \angle 2=\angle 1,\ \angle BFD=\angle CMF,\ BD=AC,$

$\therefore \quad \triangle BFD\cong\triangle AMC.$

有 $BF=AM=AF+FM.$

又$\because \quad FM=CF,\ \therefore \quad BF=AF+CF.$



2·18 如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是底边BC上一点,E是线段AD上一点,且$\angle BED=2\angle CED=\angle A$.求证:$BD=2CD$.

(中国初中数学联赛,1992年)

[证 1] 如左图,延长AD与$\triangle ABC$外接圆交于F点,连接CF和BF.则

$\angle BFA=\angle BCA=\angle ABC=\angle AFC$,

即 $\angle BFD=\angle CFD$,

由角平分线定理有 $BF:CF=BD:DC$.

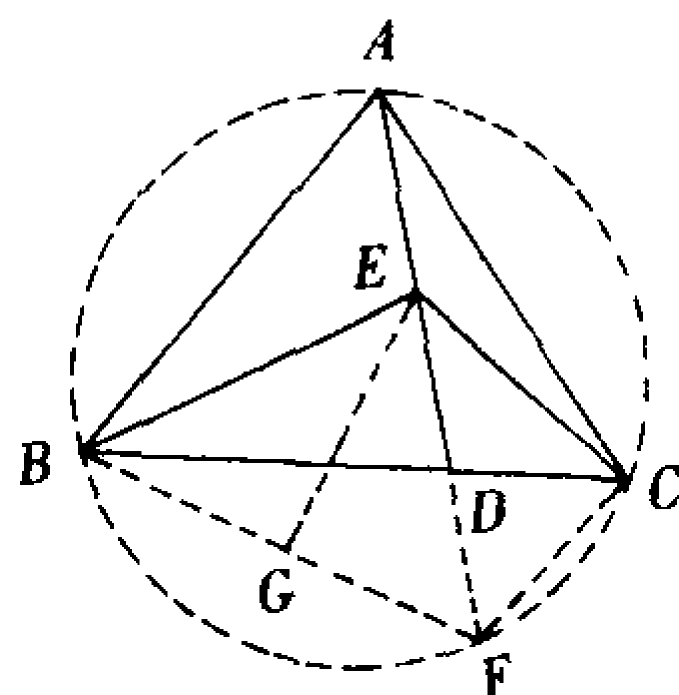
又 $\angle BEF=\angle A, \angle BFE=\angle BCA$,

故有 $\angle FBE=\angle ABC=\angle BFE$.

因此 $EB=EF$.

作$\angle BEF$的平分线交BE于G,

则 $BG=GF$.



又 $\angle GEF=\frac{1}{2}\angle BEF=\angle CEF$, $\angle GFE=\angle CFE$, $EF=EF$,

$\therefore$ $\triangle EFG\cong\triangle EFC$. 于是 $GF=CF$.

从而 $BF=2FC$,故 $BD=2CD$.

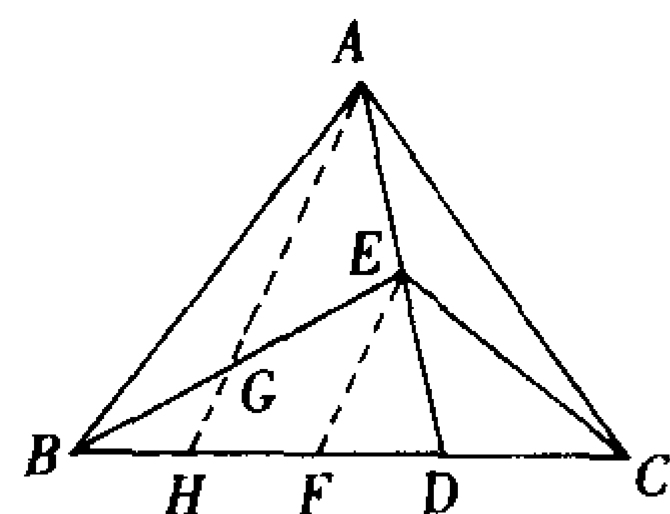
[证 2] 如图,作$\angle BED$的平分线交BC于F,又过A作$AH /\!/ EF$,与BE和BC分别交于G、H.

则$\angle EAG=\angle DEF=\angle BEF=\angle AGE=\frac{1}{2}\angle A$.

$\therefore$ $GE=AE$.

$\because$ $\angle AGE=\frac{1}{2}\angle A=\angle CED$.

$\therefore$ $\angle AGB=\angle CEA$.



$\because$ $\angle ABE+\angle BAE=\angle BED$

$=\angle A=\angle CAE+\angle BAE$,

$\therefore$ $\angle ABG=\angle CAE$.

又 $AB=CA$, 故 $\triangle ABG\cong\triangle CAE$.

有 $BG=AE, CE=AG$.

$\therefore$ $BG=GE$.

即GH是$\triangle BEF$的中位线,因此

$BH=HF$, $GH=\frac{1}{2}EF$.

$\because$ $AH /\!/ EF$, $\therefore$ $\frac{AH}{EF}=\frac{HD}{FD}$.

而 $\angle CED=\frac{1}{2}\angle A=\angle FED$,

从而 $\dfrac{CD}{FD}=\dfrac{EC}{EF}=\dfrac{AG}{EF}=\dfrac{AH-GH}{EF}=\dfrac{AH}{EF}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{HD}{FD}-\dfrac{1}{2}$,

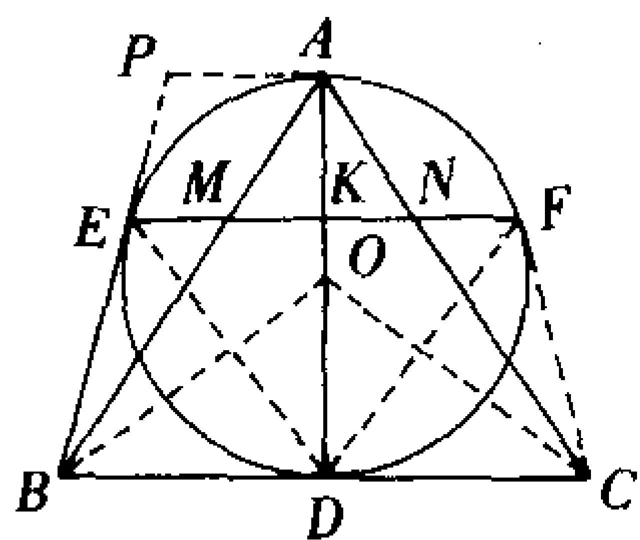
即 $CD=HD-\dfrac{1}{2}FD=HF+\dfrac{1}{2}FD=\dfrac{1}{2}BF+\dfrac{1}{2}FD=\dfrac{1}{2}BD$,

故 $BD=2CD$.

2·19 设$\triangle ABC$为等腰三角形,BC为底边,D为从A到BC的垂足,以AD为直径作圆,由B、C依次作圆的切线BE和CF(不同于BC),E、F为切点.证明:EF弦在$\triangle ABC$内部一段的长等于它在外部两段长之和.

(中国天津市数学竞赛,1978年)

[证 1] 如图,AD是等腰$\triangle ABC$的高,$\odot O$的直径是AD,BE、CF是$\odot O$的切线,E、F是切点.EF与AB、AD、AC分别交于M、K、N点.



连接OB、OC、ED、FD.在$\triangle ABC$中$AB=AC$,$AD\perp BC$,

$\therefore$ $OB=OC$,则 $\angle OBC=\angle OCB$.

$\because$ AD是$\odot O$的直径,故$AD\perp BC$,

$\therefore$ BC与$\odot O$切于D点,又BE、CF是$\odot O$的切线,

$\therefore$ $\angle EBD=\angle FCD=2\angle OBC=2\angle OCB$,

且 $BD=DC=BE=CF$,

$\therefore$ $\triangle BDE\cong\triangle CDF$.

$\therefore$ $\angle EDB=\angle FDC$,又$\because$ $\angle FED=\angle FDC$,

$\therefore$ $\angle EDB=\angle FED$,

则 $EF/\!/BC$,$EF\perp AD$.

作切线AP与BE的延长线交于P.

$\therefore$ $PA\perp AD$,$PE=PA$. 又 $PA/\!/EF/\!/BC$,

$\therefore$ $\dfrac{EM}{PA}=\dfrac{BE}{BP}$, 则 $\dfrac{MK}{BD}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{PE}{PB}$.

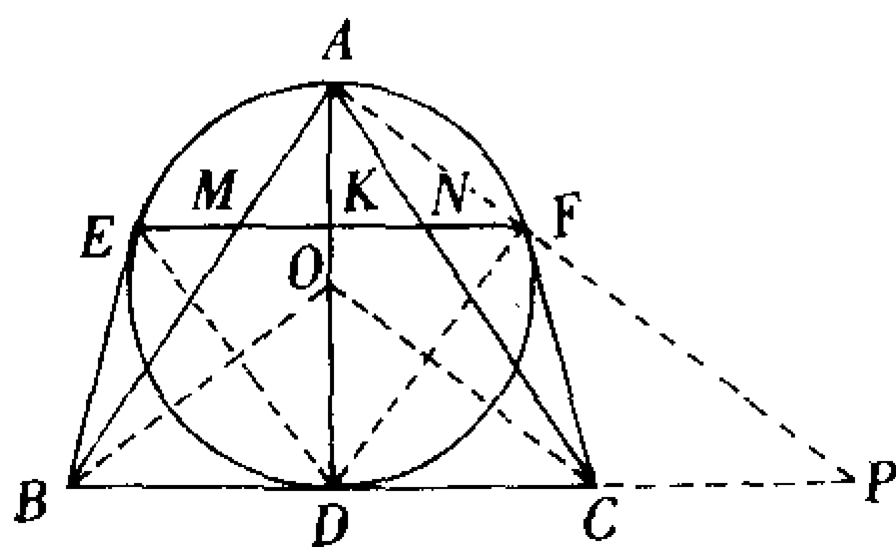
且 $EM=\dfrac{BE\cdot PA}{BP}$,$MK=\dfrac{PE\cdot BD}{PB}$.

但 $PE=PA$,$BE=BD$,$\therefore$ $EM=MK$.

同理可证 $FN=NK$.

$\therefore$ $MK+NK=EM+NF$. 即 $MN=EM+NF$.

［证 2］ 连接 OB、OC、ED、FD. 按证法 1 得 $EF /\!/ BC$,



连 A、F 并延长交 BC 的延长线于 P.

$\because$ $DF \perp AP$, 又 $CD = CF$,

$\angle OCD = \angle OCF$,

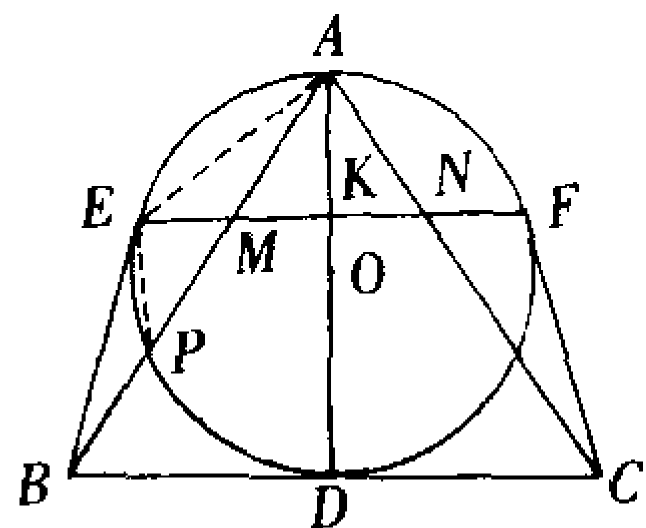
$\therefore$ $OC \perp DF$,

$\therefore$ $OC /\!/ AP$, 又 $AO = OD$, $\therefore$ $DC = CP$.

又 $\because$ $EF /\!/ DP$, 则 $FN = NK$.

同理 $EM = MK$.

$\therefore$ $MN = EM + NF$.



［证 3］ 连接 AE、EP, 则 $\triangle AEM \backsim \triangle APE$, $\triangle AEB \backsim \triangle EPB$, $\triangle AMK \backsim \triangle ABD$.

再利用相似三角形对应边成比例及有关比例性质定理,可证得 $EM = MK$.

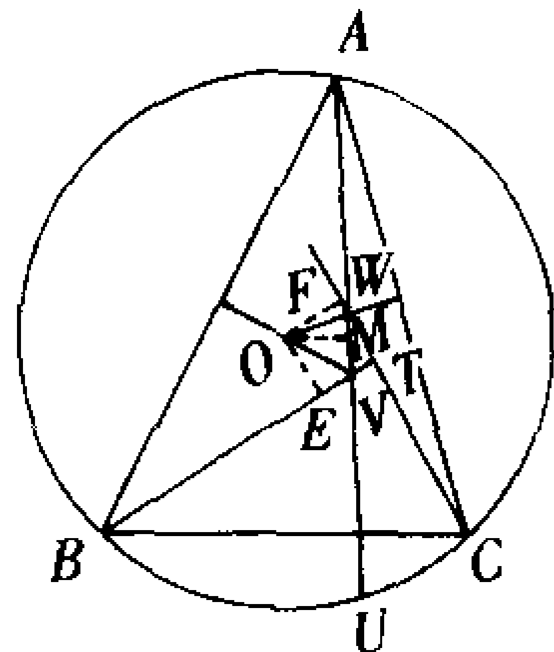
同理可证 $FN = NK$.

$\therefore$ $MN = EM + NF$.

(二)角或弧的和差倍分

2·20 设$\angle A$是$\triangle ABC$的最小内角,点 U 是$\triangle ABC$的外接圆的劣弧$\overset{\frown}{BC}$上异于 B 和 C 的任意一点,线段 AB、AC 的垂直平分线分别交线段 AU 于点 V 和 W,直线 BV 和 CW 交于点 T,求证:$AU = TB + TC$.

(第 38 届国际数学奥林匹克,1997 年)



［证 1］ 过$\triangle ABC$的外心 O 作 $OM \perp AU$ 于 M, $OF \perp CW$ 于 F, $OE \perp BV$ 于 E, 连结 OT, 于是

$$AM = \frac{1}{2} AU.$$

$\because$ OV 垂直平分 AB, OW 垂直平分 AC,

$\therefore$ $BV = AV$, $CW = AW$.

$\therefore$ $TB + TC = TV + VB + WC - TW$

$= TV + AV + AW - TW$

$= TV + AM + MV + AM - MW - TW.$

由此可见，只需证明　$TV + MV = TW + MW.$

$\because$　OV 垂直平分 AB，OW 垂直平分 AC，

$\therefore$　$\angle OVE = \angle OVM$，$\angle OWF = \angle OWM.$

又 $\because$　$\angle OEV = 90° = \angle OMV$，$\angle OFW = 90° = \angle OMW.$

$\therefore$　$\triangle OVE \cong \triangle OVM$，$\triangle OWF \cong \triangle OMM$，

$\therefore$　$OE = OM = OF$，$EV = MV$，$FW = MW.$

又 $\because$　$\angle OET = 90° = \angle OFT$，

$\therefore$　$\triangle OTE \cong \triangle OTF$. $\therefore$　$TE = TF.$

$\therefore$　$TV + MV = TV + VE = TE = TF$

$= FW + WT = MW + TW.$

$\therefore$　$TB + TC = AU.$

［证 2］　延长 CT、BT 分别交⊙O 于 X，Y，连 CX，由题设 $BV = AV$，$CW = AW$.

再由相交弦定理可得　$VU = VX$，$WU = WY.$

$\therefore$　$BX = CY = AU.$

又易证　$\angle ABX = \angle BAU$，

$\angle ACY = \angle CAU$，

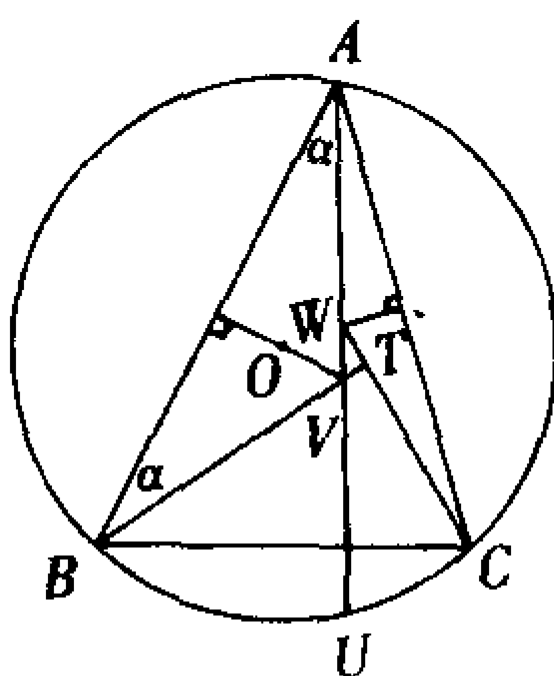
$\therefore$　$\angle BXC = \angle BAC = \angle BAU + \angle CAU$

$= \angle ABX + \angle ACY$

$= \angle ACX \angle ACY = \angle TCX.$

$\therefore$　$TC = TX$，

$\therefore$　$TB + TC = TB + TX = BX = AU$，即　$AU = TB + TC.$



［证 3］　如图所示，因为点 V 在线段 AB 的垂直平分线上，所以，

$\angle VAB = \angle VBA.$

又因 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最小内角，且 $\angle VAB = \angle UAB < \angle CAB$，故

$\angle VBA = \angle VAB < \angle CAB \leqslant \angle CBA.$

即 V 在 $\angle ABC$ 内部. 同理，W 在 $\angle ACB$ 内部.

设 $\angle UAB = \alpha$，则 $\angle VBA = \alpha$. 下面用 A、B、C

分别表示$\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$. 则有

$\angle CAU = A - \alpha$, $\angle CBT = B - \alpha$.

因为 W 在线段 AC 的垂直平分线上,所以,

$\angle ACW = \angle CAW = A - \alpha$,

$\angle BCT = C - \angle ACT = C + \alpha - A$.

于是 $\angle BTC = 180° - (B - \alpha) - (C + \alpha - A)$

$= 180° - B - C + A = 2A$.

在$\triangle BCT$ 中使用正弦定理,有

$$\frac{BC}{\sin\angle BTC} = \frac{TB}{\sin\angle TCB} = \frac{TC}{\sin\angle TBC}.$$

注意到 $B - \alpha = 180° - (C + \alpha + A)$,有

$$\begin{aligned}TB + TC &= \frac{BC}{\sin\angle BTC}(\sin\angle TCB + \sin\angle TBC)\\ &= \frac{BC}{\sin 2A}[\sin(C + \alpha - A) + \sin(B - \alpha)]\\ &= \frac{BC}{\sin 2A}[\sin(C + \alpha - A) + \sin(C + \alpha + A)]\\ &= \frac{BC}{\sin 2A}\cdot 2\sin(C + \alpha)\cos 2A\\ &= \frac{BC}{\sin A}\cdot\sin(C + \alpha).\end{aligned}$$

设$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R,则由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A} = R$. 故得

$$TB + TC = 2R\sin(C + \alpha). \quad ①$$

连接 CU. 由 A、B、U、C 四点共圆可知

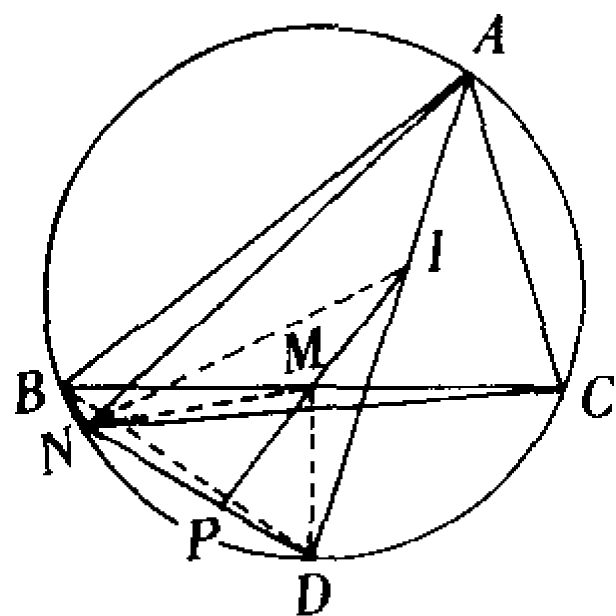
$\angle BCU = \angle BAU = \alpha$. 故 $\angle ACU = C + \alpha$.

在$\triangle ACU$ 中使用正弦定理,有 $AU = 2R\sin(C + \alpha)$.

结合①式即得 $AU = TB + TC$.

2·21 $\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的平分线交外接圆于点 D,内心为 I,边 BC 的中点为 M,P 是点 I 关于点 M 的对称点(设点 P 在圆内),延长 DP 交外接圆于点 N. 求证:在 AN、BN、CN 这 3 条线段中,必有一条线段的长等于另两条线段的长度之和.

(中国国家集训队选拔考试,1993 年)



［证］ 先设点 N 位于$\overset{\frown}{BD}$上，这时有 $AN=BN+CN$.

连结 IN、MN、MD、BD、CD.

∵ M 为 BC 中点，

∴ $S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}=2S_{\triangle MND}$.

∵ 点 P 在 ND 上且 M 为 IP 中点，

∴ $S_{\triangle IND}=2S_{\triangle MND}=S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}$.

记$\angle NAD=\theta$，于是$\angle NBD=\angle NCD=\theta$，按三角形面积公式有

$S_{\triangle IND}=\dfrac{1}{2}AN\cdot ID\sin\theta$,

$S_{\triangle BND}=\dfrac{1}{2}BN\cdot BD\sin\theta$,

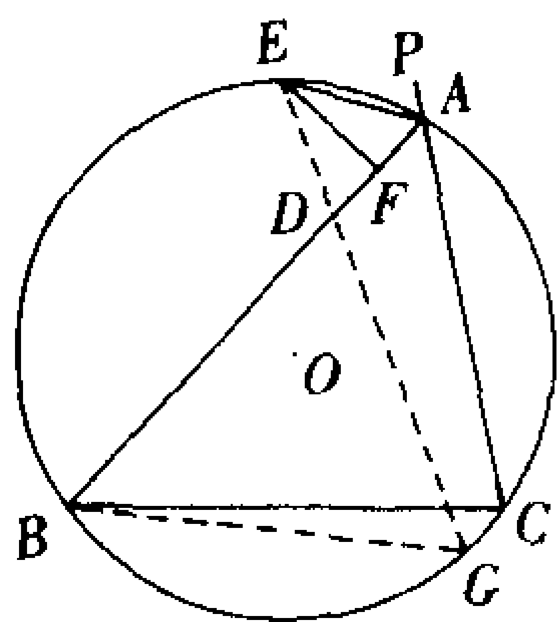
$S_{\triangle CND}=\dfrac{1}{2}CN\cdot CD\sin\theta$,

又∵ $BD=CD=ID$，∴ $AN=BN+CN$.

当点 N 位于$\overset{\frown}{AB}$上时，完全平行地可以证明 $CN=AN+BN$.

2·22 已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F. 求证：$2AF=AB-AC$.

（中国高中数学联赛，1989 年）



［证 1］ 如图，在 FB 上取点 D，使 $FD=FA$，连结 ED 并延长交圆于 G，连结 BG，则$\triangle EDA$ 为等腰三角形.

$$\therefore\ \angle EDA=\angle EAB=\frac{1}{2}\angle PAB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle C).$$

从而 $$\angle AED=180^\circ-2\angle EAB=180^\circ-(\angle ABC+\angle C)=\angle BAC,$$

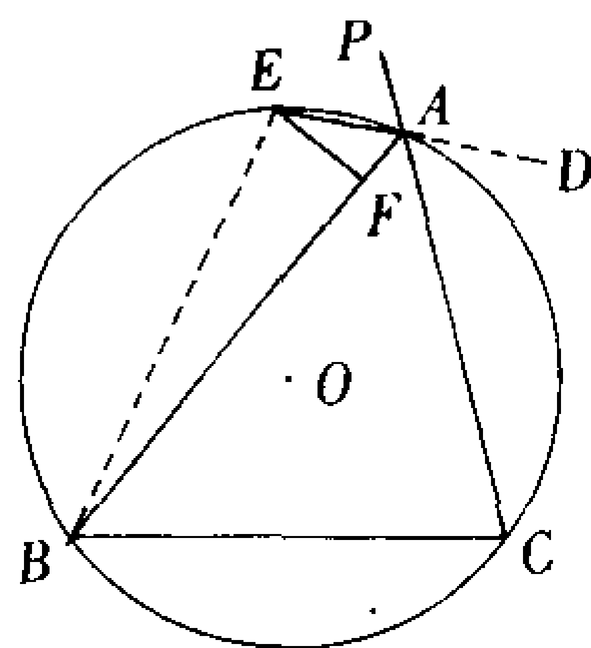
于是 $\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{AC}$，∴ $BG=AC$.

∵ $\angle G=\angle EAD=\angle EDA=\angle BDG$，

∴ $BD=BG=AC$，

即　$2AF=AD=AB-AC$.

[证2]　以 A、B、C 表示△ABC 的三个内角，R 表示△ABC 的外接圆的半径.



连结 EB. 由正弦定理，得

$$AB-AC=2R(\sin C-\sin B)$$
$$=4R\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}.$$

作 AE 的反向延长线 AD，则 AD 是 $\angle A$ 的另一外角的平分线，故 $\angle DAC=\dfrac{C+B}{2}$.

又∵　$\angle DAC$ 是圆内接四边形 $AEBC$ 的外角，

∴　$\angle EBC=\angle DAC=\dfrac{C+B}{2}$. $\angle EBA=\dfrac{C+B}{2}-B=\dfrac{C-B}{2}$.

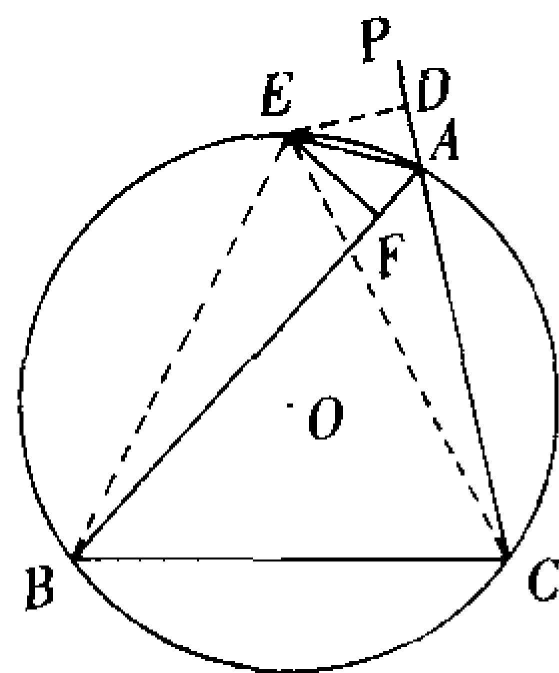
于是，由正弦定理得　$2R\sin\dfrac{C-B}{2}=AE$，

从而　$AB-AC=2AE\cos\dfrac{C+B}{2}$.

在 Rt△AEF 中，$\angle EAF=\dfrac{C+B}{2}$，

∴　$2AF=AB-AC$.

[证3]　如图，过 E 作 $ED\perp CA$，交 CA 的延长线于 D.



有 Rt△AEF≌Rt△AED，∴　$AF=AD$.

连 EC、EB，可证 Rt△CED≌Rt△BEF，

∴　$BF=CD$.

则　$AB-AF=AC+AD=AC+AF$，

从而　$2AF=AB-AC$.

2·23　在圆 Γ 上取四个不同的点 A、B、C、D，使 $\angle BCD$ 不为直角. 证明：(1) AB、AC 的垂直平分线分别与直线 AD 交于点 W 和 V，且直线 CV 和 BW 交于一点 T；(2)线段 AD、BT 和 CT 中某一条线段的长度是另两条线段长度之和.

（第38届国际数学奥林匹克预选题，1997年）

[证]　(1)证 AB、AC 的垂直平分线分别为 b、c.

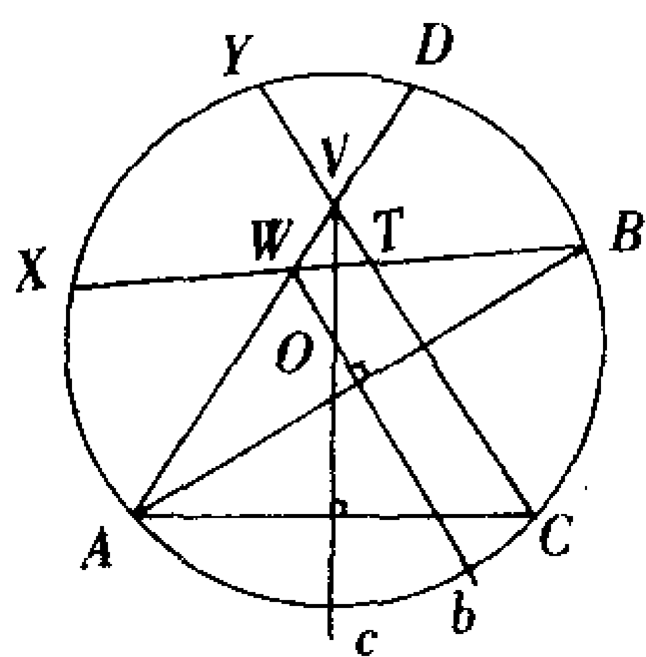


图 1

假设直线 b 和 AD 不相交，则它们平行且 $\angle DAB = 90°$. 点 D 和点 B 为某直径的两端点且 $\angle DCB = 90°$，与已知矛盾.

因此，直线 b 和 AD 必相交于某点 W.

同理，直线 c 和 AD 必相交于某点 V.

注意，BW 不能与 Γ 相切. 否则 AW 必与 Γ 相切，因而 $A = D$，与题设矛盾. CV 亦然.

我们为弧规定一个方向. 这样，记号 $\overset{\frown}{PQ}$ 就表示圆 Γ 上惟一的一段弧.

令 X、Y 分别为直线 BW 和 CV 与圆 Γ 的第二个交点. 那么，弦 CY 与弦 AD 关于轴 c 对称，因此，$\overset{\frown}{YC} = \overset{\frown}{AD}$.

同理，$\overset{\frown}{XB} = \overset{\frown}{AD}$，则 $\overset{\frown}{XB} = \overset{\frown}{YC}$. 因而，线段 BX 和 CY 关于过 BY 中点的直线 d 轴对称，其中，X 为 C 的对称点，Y 为 B 的对称点.

若直线 XB 和 YC 不相交，那么，它们平行且弦 XB 和弦 YC 关于圆 Γ 的圆心对称. 此时，点 B 和 C 为某直径的两端且 $\angle BDC = 90°$，这是不可能的. 所以，直线 BX 和 CY 必交于一点 T 且 T 必在 d 上.

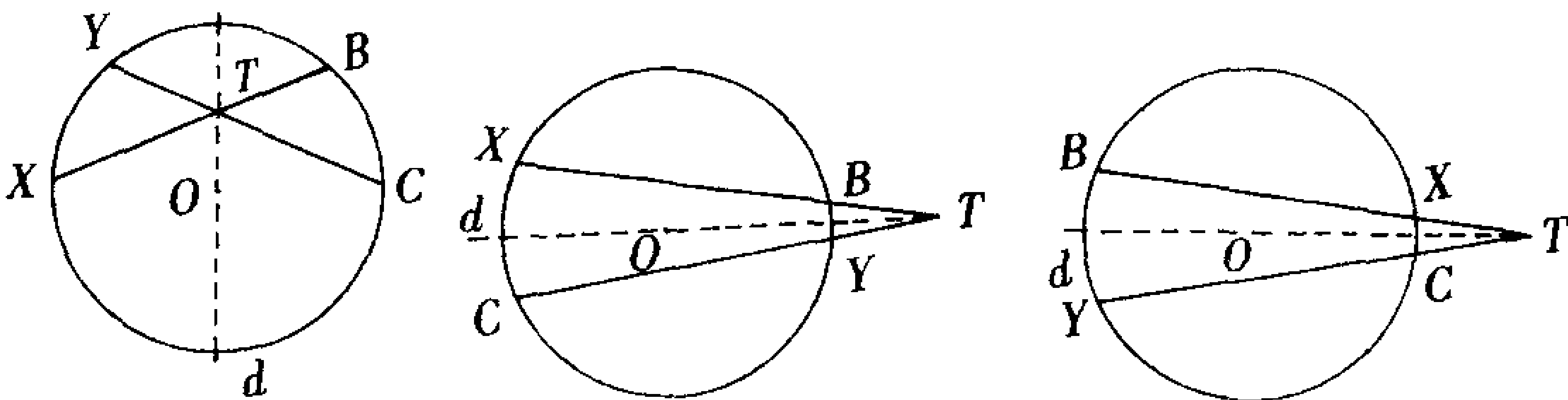


图 2

(2) 如图 2，因为点 T 在直线 d 上，且 d 同时为 BY 和 CX 的垂直平分线，则有

$$TB = TY \quad 和 \quad TC = TX.$$

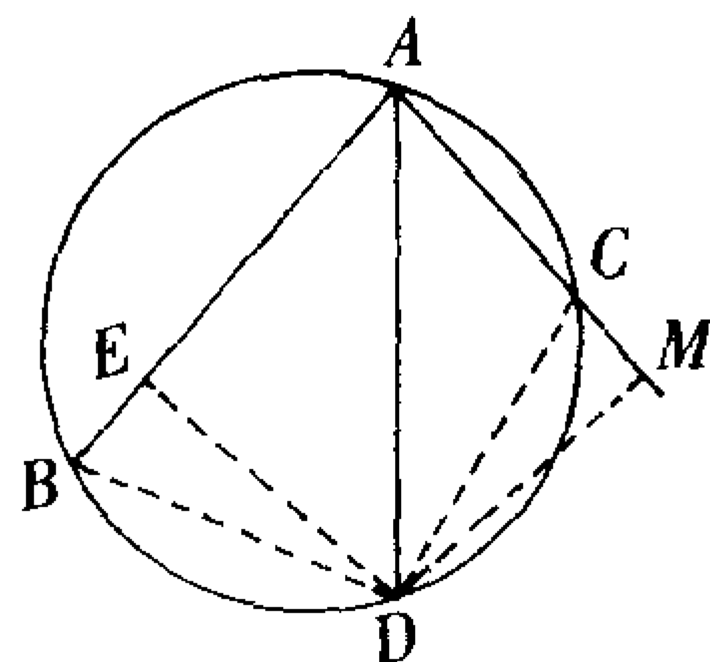
若点 T 在圆内，则有 $\quad AD = BX = BT + TX = BT + CT.$

否则，有 $\quad AD = BX = |BT - TX| = |BT - CT|.$

2·24 AB 和 AC 为同一圆的两条弦，$\angle BAC$ 的平分线交圆周于 D，过 D 作 AB 的垂线，E 为垂足，求证：$AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

[证]　如图，过 D 作 $DM\perp AC$，垂足为 M.



若 E 和 B 重合，则 $\angle ABD$ 为直角，又因为 $ABCD$ 为圆内接四边形，则 $\angle ACD$ 也为直角，于是

$$AE=AB=AC=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

若 E 和 B 不重合，则 $\angle ABD$ 或为锐角或为钝角.

若 $\angle ABD$ 为锐角，则由 $\angle ABD+\angle ACD=180^\circ$ 知，$\angle ACD$ 为钝角，于是 M 在 AC 的延长线上.

由 AD 平分 $\angle BAC$ 得　$DE=DM$.

又 $\because$　$\angle DCM=\angle ABD$,

$\therefore$　$\triangle BED\cong\triangle CMD$，有 $CM=BE$.

于是可得　$AE=AM=AB-BE=AC+CM$,

则　$2AE=AB+AC$,

故　$AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

若 B 为钝角，同理可证得　$AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

2·25　$\angle ABC$ 的顶点 B 在圆周外，射线 BA、BC 分别与圆周相交，由 BA 与圆周的交点 K 引直线垂直于 $\angle ABC$ 的平分线. 该直线交圆于另一点 P，而交射线 BC 于 M. 求证：PM 的长度为圆心至 $\angle ABC$ 平分线距离的两倍.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

[证]　若 $\angle ABC$ 的平分线过圆心（图 1），那么由对称性易知这时点 M 和点 P 重合，$PM=0$，圆心到角平分线的距离也等于 0，所以结论成立.

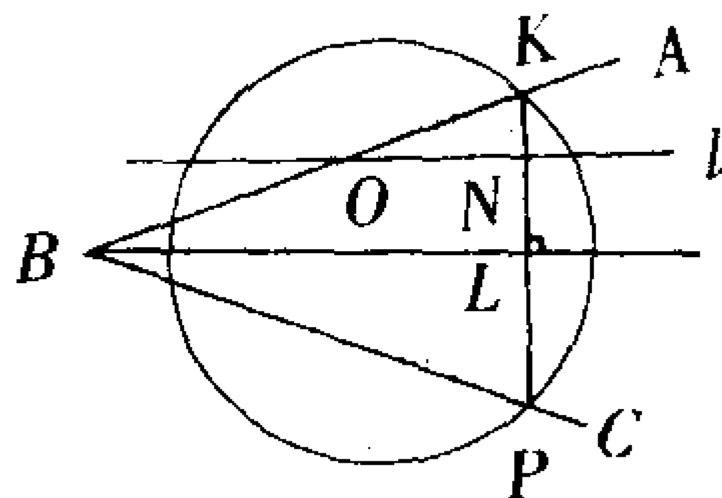


图 1

若 $\angle ABC$ 的平分线不过圆心（图 2）即点 M 在 K 与 P 之间，设 L 是 KP 与 $\angle ABC$ 的平分线的交点. 显然，由对称性知，$KL=LM$.

设圆心 O 到角平分线 BL 的距离为 d，那么在圆心 O 的另一侧引直线 $l\,/\!/\,BL$，且圆心

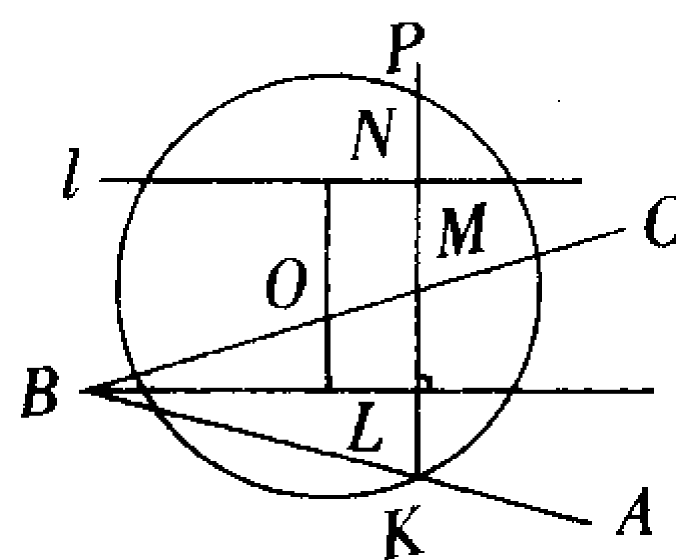


图 2

O 与 l 的距离等于 d.

设直线 l 交 KP 于 N,由对称性知 $NP = LK = LM$.

$\therefore \quad PM = PN + NM = NM + ML = NL = 2d$.

如果图形位置,即点 M 在 KP 的延长线上,同样,作直线 l,不过这时有

$$PM = LM - LP = LK - NK = LN = 2d.$$

K 点若在其他位置,同样可仿此讨论.

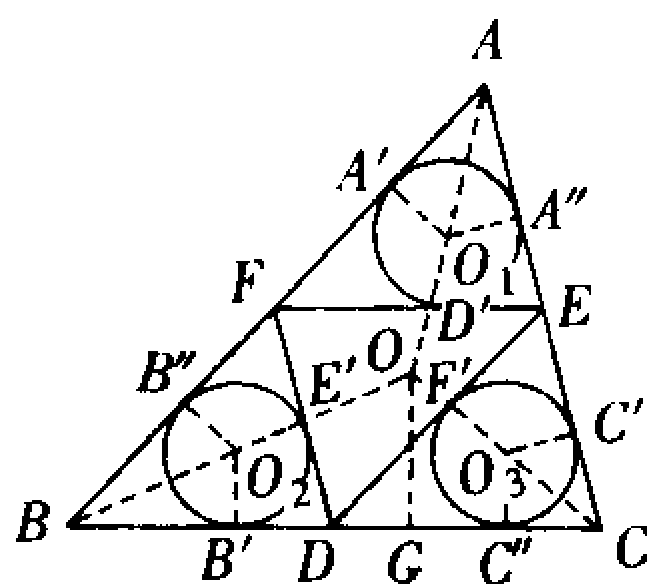
2·26 设点 D、E、F 分别在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上,且$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r,又以 r_0 和 R 分别表示$\triangle DEF$ 和$\triangle ABC$ 的内切圆半径,求证:$r + r_0 = R$.

(第 4 届中国中学生数学冬令营,1989 年)

注 中国中学生数学冬令营即中国数学奥林匹克

[证 1] 作辅助线如图,于是有

$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDF} - S_{\triangle CED} - S_{\triangle AFE} = S_{\triangle DEF} \quad ①$$



记$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的周长为 l 和 l'.

则①式可化为

$$Rl - r(l + l') = r_0 l',$$

即 $$(R - r)l = (r + r_0)l'. \quad ②$$

图中 O 为$\triangle ABC$ 的内心,$OG \perp BC$.

$\because \quad \triangle O_2BB' \backsim \triangle OBG$,

$$\therefore \quad \frac{BB'}{BG} = \frac{r}{R}, \quad ③$$

又$\because \quad A'B'' + B'C'' + C'C'' = l'$,

$\therefore \quad AA' + B''B + BB' + C''C + CC' + A''A = l - l'$.

从而由③可得 $\dfrac{l - l'}{l} = \dfrac{r}{R}$,

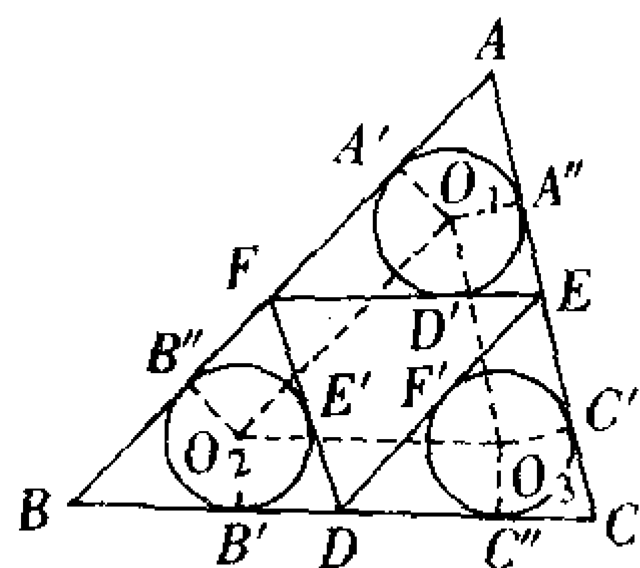
即 $(l - l')R = rl$, 或 $(R - r)l = Rl'$. ④

将④代入②得 $Rl' = (r + r_0)l'$,即 $R = r + r_0$.

[证 2] 作辅助线如图.

$\because \quad O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1$

$$=A'B''+B'C''+C'A''$$
$$=A'F+FB''+B'D+DC''+C'E+EA''$$
$$=FD'+FE'+DE'+DF'+EF'+ED'$$
$$=FD+DE+EF.$$



∴ $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle DEF$ 的周长相等，

又∵ $S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CED}$

$$=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA+DE+EF+FD)$$
$$=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA+O_1O_2+O_2O_3+O_3O_1)$$
$$=S_{ABO_2O_1}+S_{BCO_3O_2}+S_{CAO_1O_3}$$
$$=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3},$$

∴ $S_{\triangle O_1O_2O_3}=S_{\triangle DEF}$.

由于 $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle DEF$ 等周长，等面积，所以它们的内切圆半径相等，即 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆半径也是 r_0.

因为 $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle ABC$ 位似且位似中心就是二者的公共内心，从而有

$$r+r_0=R.$$

2·27 在 $\triangle ABC$ 中，B_1 在 AC 上，E 在 AB 上，G 在 BC 上，$EG\,/\!/\,AC$ 并且 EG 与 $\triangle ABB_1$ 的内切圆相切交 BB_1 于 F，设 r、r_1 和 r_2 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABB_1$ 与 $\triangle BFG$ 的内切圆的半径. 求证：$r=r_1+r_2$.

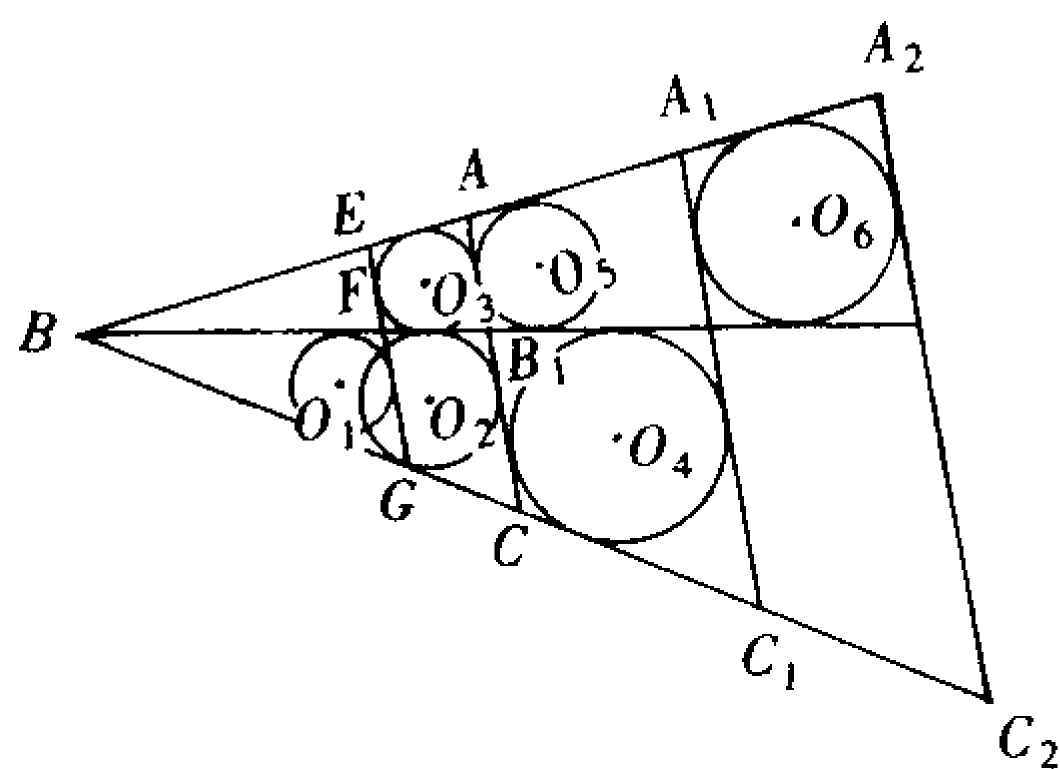
（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[证] 设 r_b 为 $\triangle ABC$ 与 B 相对的旁切圆的半径，且设 $\triangle ABC$ 的三边为 $AB=c$，$CB=a$，$AC=b$，$p=\frac{a+b+c}{2}$.

由 $$\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=p-b=r_b\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

可得 $$\frac{r}{r_b}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \qquad ①$$

设 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 分别为 $\triangle BFG$、$\triangle BCB_1$、$\triangle ABB_1$ 的内切圆，$\odot O_4$ 为 $\triangle BCB_1$ 与 B 相对的旁切圆.



以 B 为中心作位似变换 h, h'：

h：$O_1 \to O_2$，h'：$O_1 \to O_4$.

这时 $h(EG)=AC$. 设 $h(O_3)=O_5$，则 $\odot O_5$ 与 AC 相切，因此 $\odot O_5$ 是 $\triangle ABB_1$ 的旁切圆.

设 E、A、G、C、O_3 经过变换 h' 变为 A_1、A_2、C_1、C_2、O_6，则由于 O_1O_3 经变换 h 和 h' 分别变为 O_2O_5 和 O_4O_6，所以 $O_2O_5 \parallel O_4O_6$.

从而 $S_{\triangle BO_4O_5}=S_{\triangle BO_2O_6}$.

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle BO_2O_3}}{S_{\triangle BO_4O_5}}=\frac{S_{\triangle BO_2O_3}}{S_{\triangle BO_2O_6}}=\frac{BO_3}{BO_6}. \qquad ②$$

另一方面，设 R_i 为 $\odot O_i (i=1,2,\cdots,6)$ 的半径，则有

$$\frac{S_{\triangle BO_2O_3}}{S_{\triangle BO_4O_5}}=\frac{BO_2 \cdot BO_3}{BO_4 \cdot BO_5}=\frac{R_2 \cdot R_3}{R_4 \cdot R_5}.$$

由①的结果可得

$$\frac{R_2 \cdot R_3}{R_4 \cdot R_5}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle CB_1B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle AB_1B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{r_b}.$$

结合②式可得 $\dfrac{BO_3}{BO_6}=\dfrac{r}{r_b}$.

即 $\triangle ABC$ 的与 B 相对的旁切圆是内切圆在变换 h' 下的象，因此它与 $h'(AC)=A_2C_2$ 相切.

由于 $\odot O_3$ 与 EG、AC 相切，所以 $\odot O_6$ 与 A_1C_1、A_2C_2 相切.

又 $\odot O_4$ 与 AC、A_1C_1 相切，所以 $r_b=R_4+R_6$.

回到变换 h' 前的原象即得 $r=r_1+r_2$.

2·28 圆内接正 $\triangle ABC$ 边 AB 所对劣弧上有一点 D. 求证：$AD+BD=DC$.

（莫斯科数学奥林匹克，1940 年）

[证] 在 DC 上取一点 E 使 $DE=DA$，连接 AE.

$\because \quad \angle ADE=60°$,

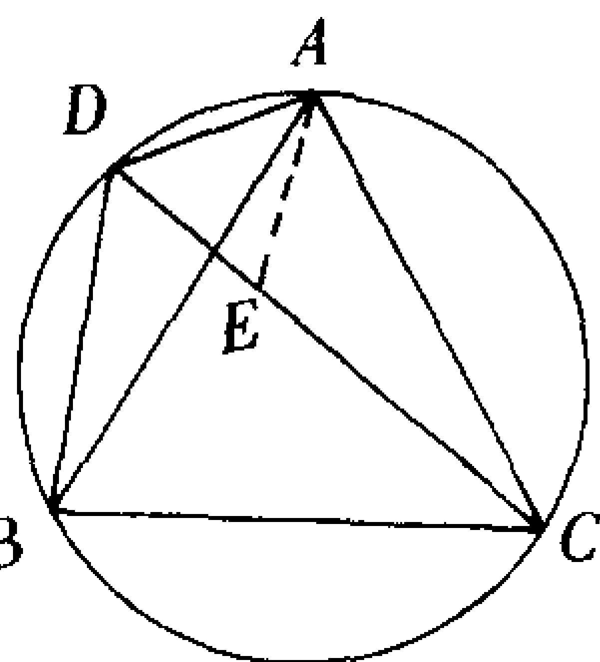
$\therefore$ $\triangle ADE$ 亦为正三角形.

又 $\because$ $AB=AC$, $AD=AE$,

且 $\angle DAB=\angle EAC=\angle 60^\circ-\angle BAE$,

$\therefore$ $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ 有 $BD=EC$.

故 $AD+BD=DE+EC=DC$.



2·29 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,其两条对角线 $AC\perp BD$. 自 O 向 AD 作垂线 OH, H 为垂足,求证: $OH=\dfrac{1}{2}BC$.

(莫斯科数学奥林匹克,1979 年)

[证] 过 D 作⊙O 的直径 DE,连 AE.

由 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ADE}-\overset{\frown}{AD}\overset{m}{=}180^\circ-\overset{\frown}{AD}$.

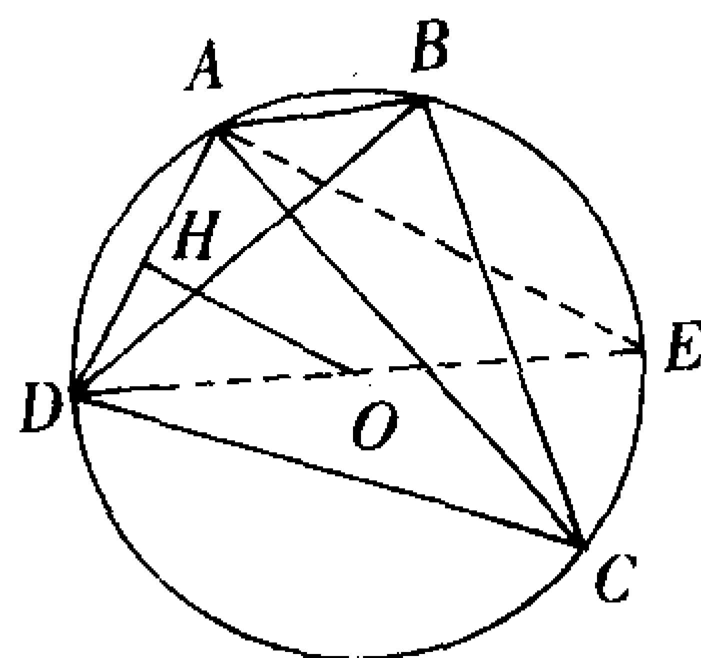
$\because$ $AC\perp BD$, $\therefore$ $\overset{\frown}{BC}\overset{m}{=}180^\circ-\overset{\frown}{AD}$.

则有 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}$, 且 $AE=BC$,

又 DE 为⊙O 直径,则 $\angle DAE=90^\circ$,

从而 $OH /\!/ AE$.

$\therefore$ $OH=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{1}{2}BC$.



2·30 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于 X,由 X 向 AB、BC、CD、DA 作垂线,垂足为 A'、B'、C'、D'. 求证: $A'B'+C'D'=B'C'+D'A'$.

(第 22 届加拿大数学奥林匹克,1990 年)

[证] 由 $XA'\perp AB$, $XB'\perp BC$ 可得

$\angle XA'B+\angle XB'B=180^\circ$,

所以 A'、B、B'、X 四点共圆.

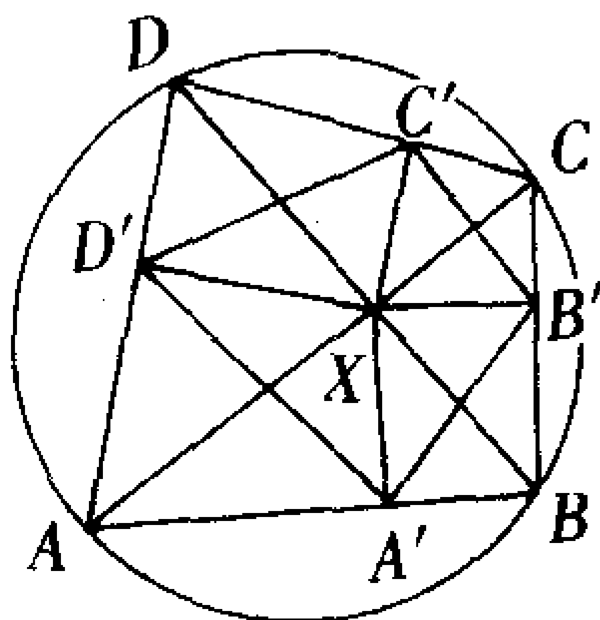
且 XB 为此圆的直径.

由正弦定理得 $A'B'=XB\cdot\sin B$.

同理可得 $C'D'=XD\cdot\sin D=XD\cdot\sin B$.

$\therefore$ $A'B'+C'D'=(XB+XD)\sin B$

$=BD\cdot\sin B=2R\sin A\cdot\sin B$.



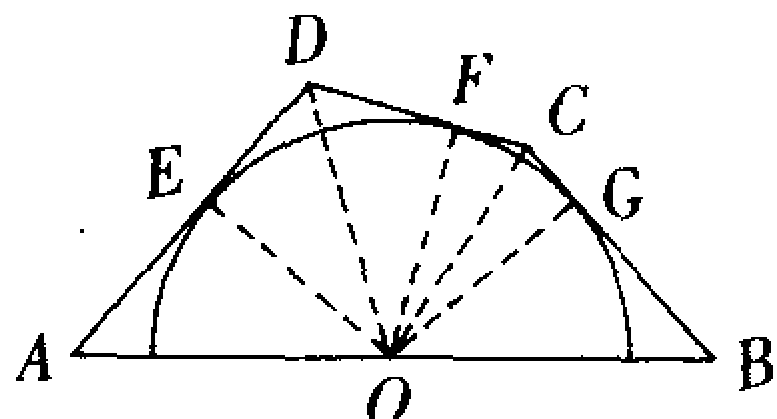
其中 R 为四边形 $ABCD$ 外接圆的半径.

同理可得 $B'C'+D'A'=2R\sin A\sin B$.

于是 $A'B'+B'C'=B'C'+D'A'$.

2·31 设四边形 $ABCD$ 内接于圆,另一圆的圆心在边 AB 上且与四边形的其余三边均相切. 求证:$AD+BC=AB$.

(第 26 届国际数学奥林匹克,1985 年)



[证 1] 记 $\angle OCB=\theta$, $\angle ODA=\varphi$, 则由四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形可知 $\angle A+2\theta=180°$, $\angle B+2\varphi=180°$.

记圆 O 的半径为 r,设 E、F、G 分别为 AD、DC、CB 与 $\odot O$ 的切点,于是在直角 $\triangle OEA$ 中,

$$\frac{OE}{\sin A}=AO,\quad 即\quad AO=\frac{r}{\sin A}=\frac{r}{\sin 2\theta},$$

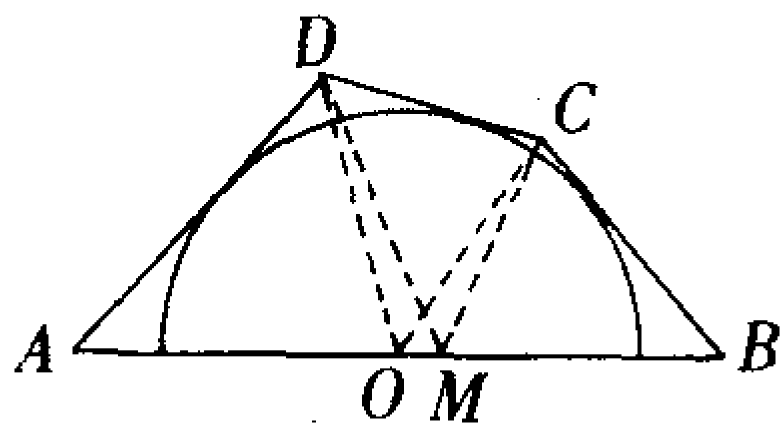
同理 $OB=\dfrac{r}{\sin 2\varphi}$,

且 $AE=r\cdot\operatorname{ctg}A=-r\operatorname{ctg}2\theta$.

及 $BG=-r\cdot\operatorname{ctg}2\varphi$. $ED=r\operatorname{ctg}\varphi$, $CG=-r\operatorname{ctg}\theta$.

利用三角函数公式,使得

$$\begin{aligned}AD+BC&=AE+ED+BG+CG\\&=r(-\operatorname{ctg}2\theta-\operatorname{ctg}2\varphi+\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\theta)\\&=r\left(-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}+\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}-\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}+\frac{1+\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}\right)\\&=r\left(\frac{1}{\sin 2\theta}+\frac{1}{\sin 2\varphi}\right).\\&=AO+OB=AB.\end{aligned}$$



[证 2] 在 AB 上取点 M,使 $MB=BC$.

若 M 异于 O,则连结 OC、OD、MC、MD. 因为

$$\angle CMB=\frac{180°-\angle B}{2}=\angle CDO.$$

于是 C、D、O、M 四点共圆,从而

$$\angle AMD=\angle DCO=\angle\frac{180°-\angle A}{2}=\angle ADM.$$

因而 $AD=AM$.

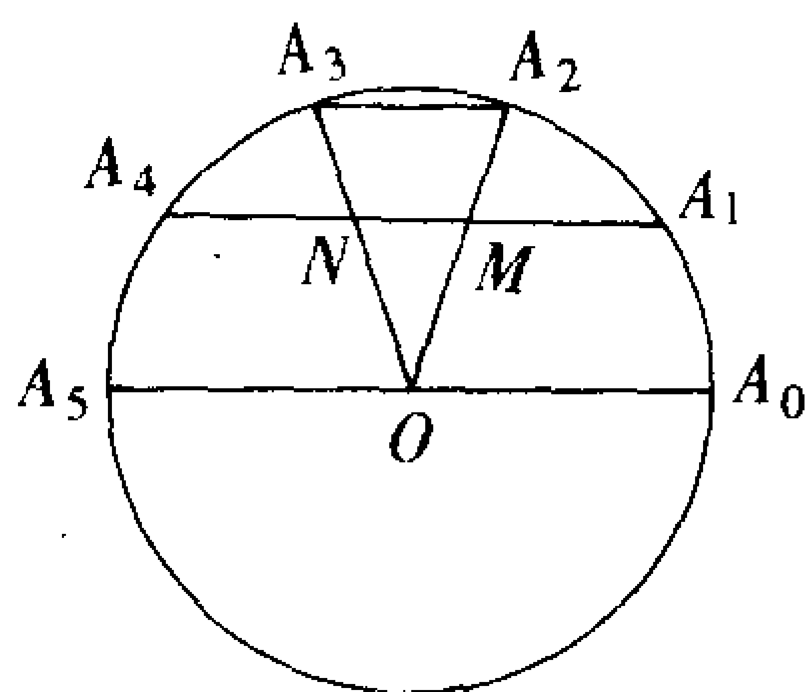
因此　$AD+BC=AM+MB=AB$.

若点 M 与 O 重合,则有

$$\begin{aligned}\angle AMD &= 180^\circ-\angle DMC-\angle CMB\\ &=180^\circ-\angle DMC-\angle MCB\\ &=180^\circ-\angle DMC-\angle DCM\\ &=\angle MDC=\angle ADM.\end{aligned}$$

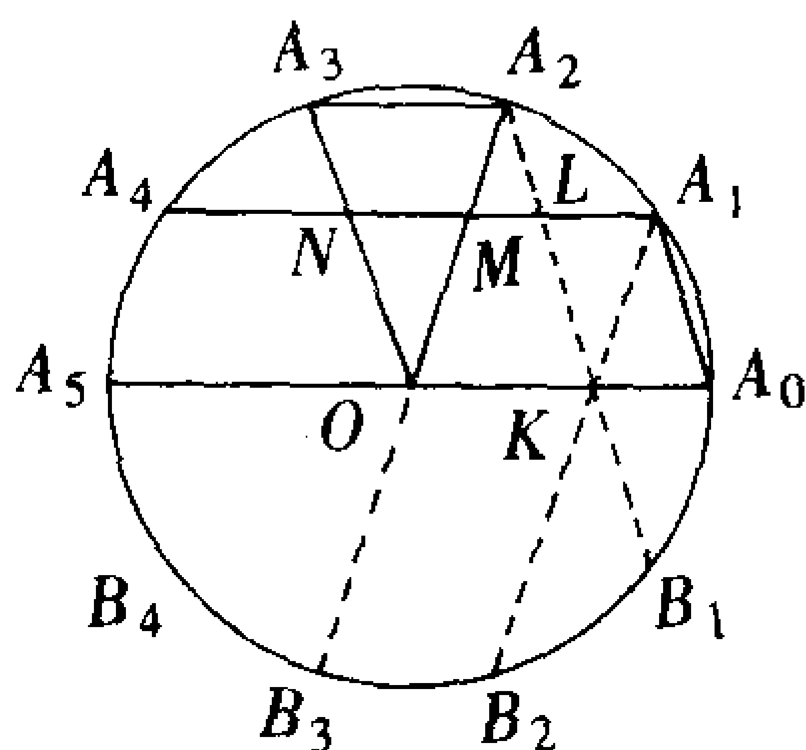
因此　$AD=AM$.　即有　$AD+BC=AB$.

2·32　直径 A_0A_5 把圆 O 分成两个半圆,其中一个半圆分成五段等弧 $\overset{\frown}{A_0A_1}$、$\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、$\overset{\frown}{A_3A_4}$、$\overset{\frown}{A_4A_5}$,又弦 A_1A_4 交 OA_2、OA_3 于点 M、N. 求证:弦 A_2A_3 与 MN 之和等于圆 O 的半径.



(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[证]　在圆 O 上标出点 A_1、A_2、A_3、A_4 关于直径 A_0A_5 的对称点 B_1、B_2、B_3、B_4,得圆内接正十边形 $A_0A_1\cdots A_5B_4B_3\cdots B_1$.



因为　$\overset{\frown}{A_2A_3}=\overset{\frown}{B_1B_2}$,

所以　$A_2B_1 /\!/ A_3B_2$.

同理　$A_2B_1 /\!/ A_1A_0$,　$OA_2 /\!/ B_2A_1$,

$A_0A_5 /\!/ A_1A_4 /\!/ A_2A_3$.

由对称性知　A_2B_1 和 B_2A_1 的交点 K 在 A_0A_5 上.

又　A_2B_1 和 A_1A_4 相交于点 L,

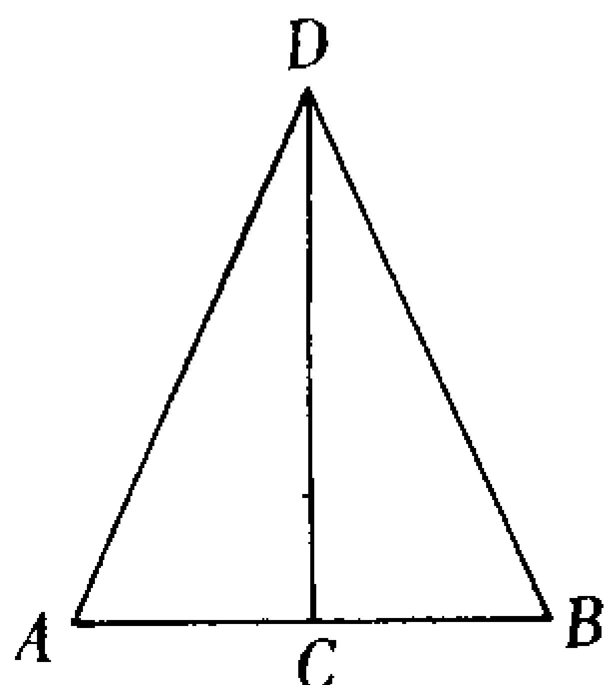
于是　KA_2A_3O、A_0A_1LK、A_1MOK、$LNOK$ 都是平行四边形.

$\therefore$　$A_2A_3=KO=A_1M=LN$,

从而　$MN=A_1L=A_0K$, 因此　$A_2A_3+MN=A_0O$.

2·33　已知:正 n 边形的边长为 a,内切圆半径为 r,外接圆半径为 R,求证:$r+R=\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)



［证 1］ 如图，设 AB 为正 n 边形的一边，O 为它的中心．作 $OC\perp AB$，C 为垂点，则

$$OA=R,\ OC=r.$$

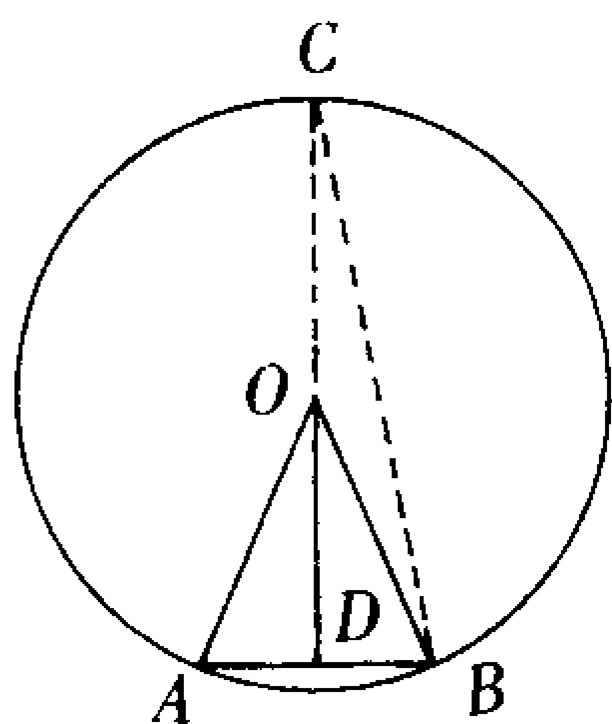
$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n},\ \angle AOC=\frac{\pi}{n},$$

$$AC=\frac{a}{2}.$$

$$\therefore\quad r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+\frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}+1}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

［证 2］ 如图，设 AB 为正 n 边形的一边，O 为它的中心．作 $OD\perp AB$，D 为垂足，延长 DO 交外接圆于 C，则



$$CD=r+R.$$

$$\because\quad \angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{\pi}{2n},$$

且 $DB=\dfrac{a}{2}$，

$$\therefore\quad \frac{r+R}{\frac{a}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n},$$

即 $r+R=\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$.

［证 3］ 如上图，在 $\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{n}$，$\angle BOD=\dfrac{\pi}{n}$，$DB=\dfrac{a}{2}$，所以

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}}=\sqrt{\frac{1+\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}}=\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}.$$

又在 $\triangle BOD$ 中，$\frac{a}{2}=\sqrt{R^2-r^2}$.

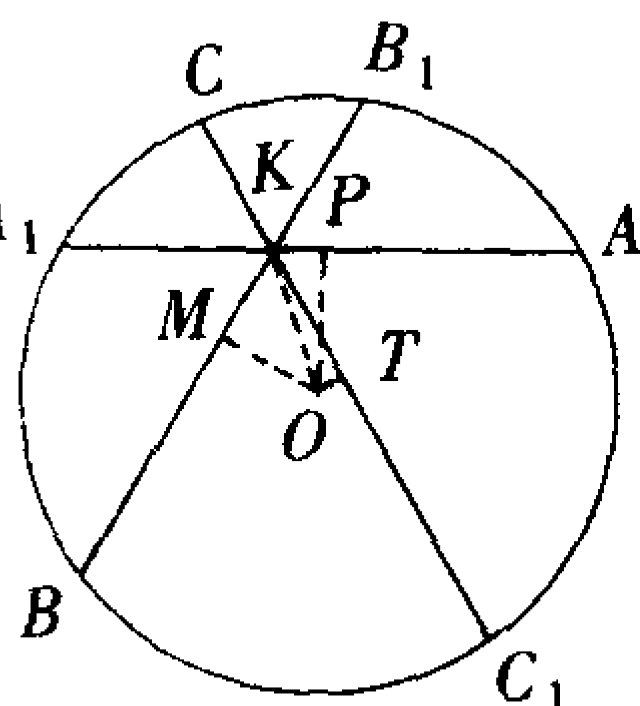
$$\therefore \quad \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}=\sqrt{R^2-r^2}\cdot\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}=R+r,$$

即 $\quad r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

2·34 图的三条弦 AA_1、BB_1、CC_1 相交于同一点 K,且交成60°的角.求证:$KA+KB+KC=KA_1+KB_1+KC_1$

(第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年)

[证] 设 O 为圆心,若 O 与 K 重合,则结论显然成立.



若 O 不与 K 重合.从 O 分别向弦 AA_1、BB_1 和 CC_1 作垂线 OM、OP 和 OT.

记 $\angle OKT=\alpha$,则

$KM=KO\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$,

$KP=KO\cdot\cos(60^\circ+\alpha)$,

$KT=KO\cdot\cos\alpha$.

由于 $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)=\cos\alpha$,

于是可得 $\quad KM+KP=KT$. ①

又 $\quad KP=\frac{1}{2}(KA-KA_1)$ ②

且 $\quad KM=\frac{1}{2}(KB-KB_1)$ ③

及 $\quad KT=\frac{1}{2}(KC_1-KC)$ ④

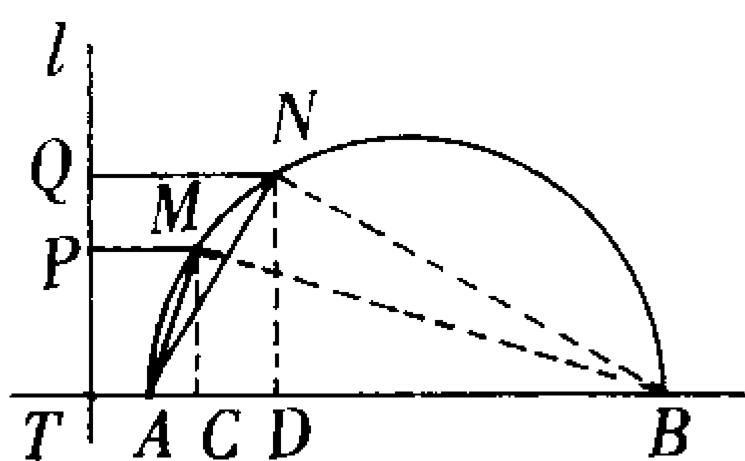
将 ②、③、④代入①即得

$KA+KB+KC=KA_1+KB_1+KC_1$.

2·35 已知:(1)半圆的直径长为 $2r$;(2)半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直,垂足为 T,$AT=2a\left(2a<\frac{r}{2}\right)$;(3)半圆上有相异两点 M、N,它们与直线的距离 $|MP|$、$|NQ|$ 满足条件 $\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1$.求证:$|AM|+|AN|=|AB|$.

(中国高中数学联赛,1982 年)

[证 1] 根据题意作 $MC\perp AB$, $ND\perp AB$, C, D 为垂足.



在 Rt△AMB 中, $AM^2=AC\cdot AB$,

在 Rt△ANB 中, $AN^2=AD\cdot AB$.

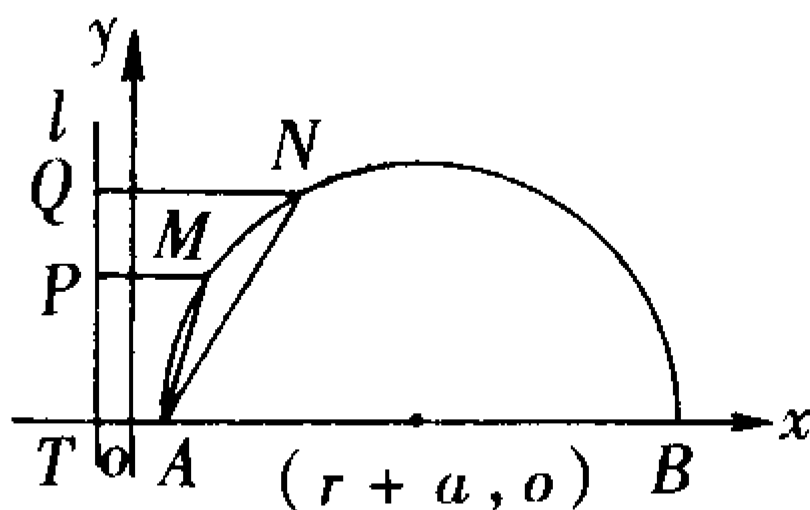
∴ $AN^2-AM^2=(AD-AC)\cdot AB$,

即 $(AN+AM)(AN-AM)=(AD-AC)\cdot AB$.

但 $AN-AM=QN-PM=TD-TC=CD=AD-AC$.

∴ $AN+AM=AB$.

[证 2] 依题意作出图形. 取 AT 中点 O 为坐标原点, 以有向直线 TA 为 x 轴建立平面直角坐标系(如图).



设 M、N 点的横坐标分别为 x_1、x_2, 圆的方程为

$$[x-(r+a)]^2+y^2=r^2.$$

抛物线方程为 $y^2=4ax$.

由题设可知 M、N 均为抛物线与圆的交点.

由 $\begin{cases} y^2=4ax, \\ (x-r-a)^2+y^2=r^2 \end{cases}$

得 $x^2+(2a-2r)x+2ra+a^2=0$

∴ $x_1+x_2=2r-2a$.

∵ $|AM|=|PM|=x_1+a$, $|AN|=|QN|=x_2+a$,

又 $|AB|=2r$, $(x_1+a)+(x_2+a)=2r$,

∴ $|AM|+|AN|=|AB|$.

2·36 向两个相互外切的圆引外公切线, 并将切点连接起来. 求证: 在所得的四边形中, 两组对边的和相等.

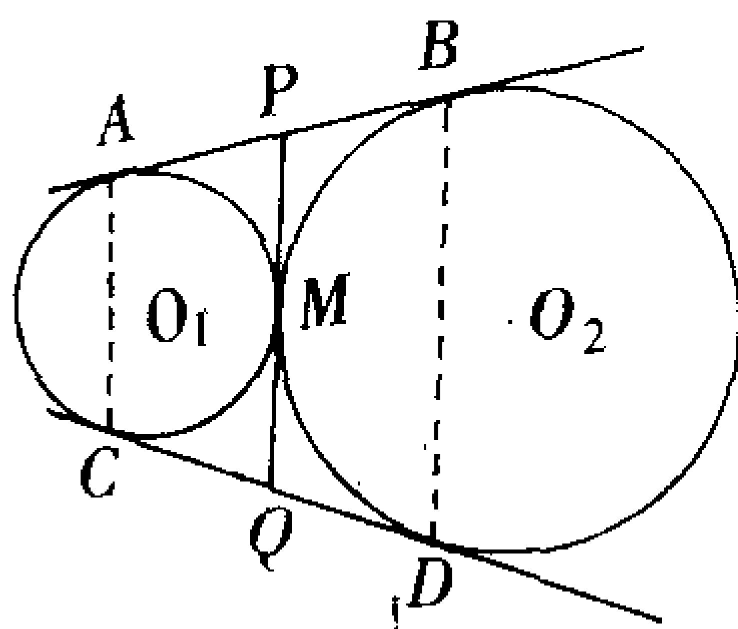
(莫斯科数学奥林匹克, 1945 年)

[证] 设⊙O_1 与⊙O_2 外切于 M 点. AB 和 CD 为两圆的外公切线, 且 A、B、C、D 为切点. 如图.

显然 $ACDB$ 为等腰梯形.

过点 M 作⊙O_1 与⊙O_2 的公切线, 分别交 AB、CD 于 P、Q, 连 PQ.

$\because \quad PM=PA=PB=\dfrac{1}{2}AB,$



$QM=QC=QD=\dfrac{1}{2}CD,$

$\therefore \quad PQ=PM+QM=\dfrac{1}{2}(AB+CD).$

由于 PQ 是梯形 $ACDB$ 的中位线，

故 $\quad PQ=\dfrac{1}{2}(AC+BD),$

且 $\quad \dfrac{1}{2}(AB+CD)=\dfrac{1}{2}(AC+BD)=PQ,$

$\therefore \quad AB+CD=AC+BD.$

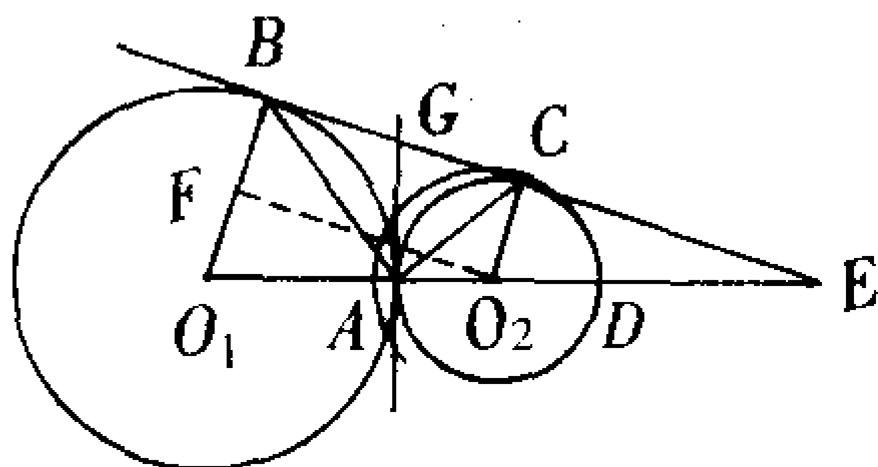
2·37 $\odot(O_1,r_1)$与$\odot(O_2,r_2)$外切于 A，$r_1>r_2$，外公切线切$\odot(O_1,r_1)$于 B，切$\odot(O_2,r_2)$于 C. 直线 O_1O_2 交$\odot(O_2,r_2)$于 $D\neq A$，交 BC 于 E，若 $BC=6DE$，求证：(1)$\triangle O_1BE$ 的边长成等差数列. (2)$AB=2AC$.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[证] (1)过 A 作两圆内公切线交 BC 于 G.

过 O_2 作直线 $O_2F\parallel CB$ 交 O_1B 于 F，则

$$BC=FO_2=\sqrt{O_1,O_2^2-O_1F^2}$$
$$=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$$
$$=2\sqrt{r_1r_2}.$$



$$DE=\frac{1}{6}BC=\frac{1}{3}\sqrt{r_1r_2}.$$

由 $\quad \triangle O_2CE\backsim\triangle O_1FO_2$，得 $\quad \dfrac{O_2E}{O_2C}=\dfrac{O_2O_1}{O_1F},$

即 $$\frac{r_2+\dfrac{1}{3}\sqrt{r_1r_2}}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}.$$

或 $\quad r_1^3-2r_2r_1^2+r_2^2r_1-36r_2^3=0.$

这是一个关于 r_1 的三次方程，此方程仅有一个实根，

即 $\quad r_1=4r_2.$

于是 $\dfrac{O_1B}{O_1E}=\dfrac{4r_2}{6r_2+\dfrac{2r_2}{3}}=\dfrac{3}{5}$.

从而$\triangle O_1BE$之比为 3:4:5，因此该三角形三边成等差数列.

(2)易知 $CG=GA=GB=\dfrac{1}{2}BC$,

而 $\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{r_1r_2}=\dfrac{r_1}{2}=\dfrac{O_1A}{2}$.

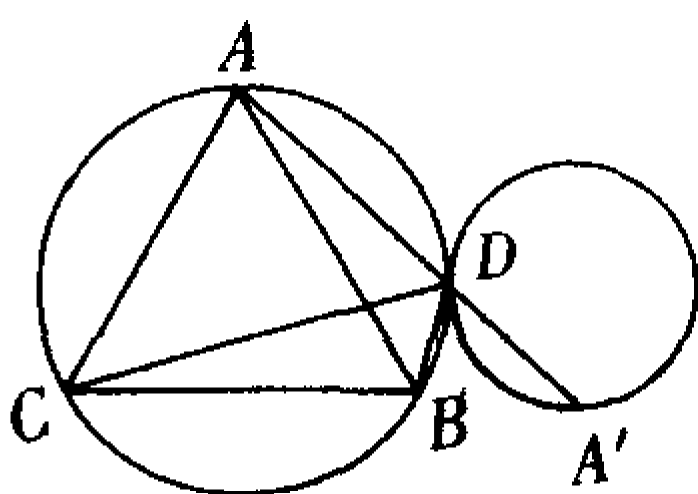
$\because$ $\angle CGA=\angle BO_1A$，$CG=GA$，$O_1A=O_1B$,

$\therefore$ $\triangle O_1AB\backsim\triangle GCA$,

于是 $AC=\dfrac{1}{2}AB$，$AB=2AC$.

2·38 设两圆相切,在大圆上内接一个等边三角形,从它的各顶点引出一条与小圆相切的直线.求证:这三条切线中,有一条切线的长度等于其他两条切线的长度之和.

(奥地利数学奥林匹克,1972年)



[证] 设两圆的切点是D,且$\triangle ABC$是大圆内接等边三角形,D在$\overset{\frown}{AB}$上.

由托勒密定理可得

$DC\cdot AB=AD\cdot BC+BD\cdot AC$,

即 $DC=AD+BD$.

设直线AD交小圆为A',则A'可以由以点D为位似中心,比例系数为$\pm\dfrac{r}{R}$的位似变换得到,其中r和R分别为小圆和大圆的半径,"+"号与"−"号依两圆外切与内切而定.

因此有 $AA'=AD\pm DA'=AD\left(1\pm\dfrac{r}{R}\right)$.

设l_A、l_B、l_C为从A、B、C向小圆所引切线的切线长,由切割线定理可以得出

$l_A^2=AD\cdot AA'=AD^2\left(1\pm\dfrac{r}{R}\right)$,

且 $l_A=AD\sqrt{1\pm\dfrac{r}{R}}$.

同理可得

$l_B = BD\sqrt{1+\frac{r}{R}}$. $\quad l_C = DC\sqrt{1+\frac{r}{R}}$.

由 $DC = AD + BD$ 可得 $l_C = l_A + l_B$.

2·39 在△ABC 的 CA、BA 的延长线上任取 D、E 两点，连接 DE，$\angle E$、$\angle C$ 的平分线 EF、CF 交于 F，则 $\angle F = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.

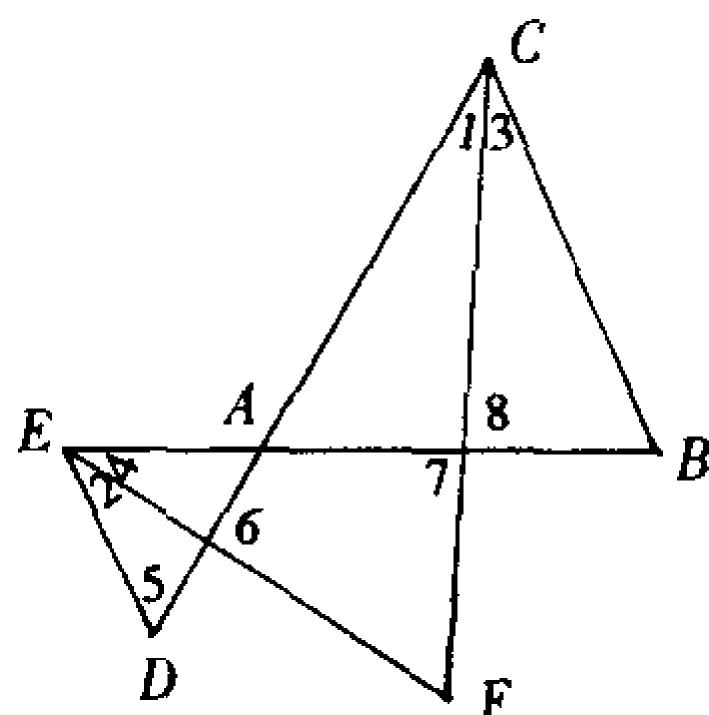
（中国湖北省荆州地区初中数学竞赛，1986 年）

[证] 如图，∵ $\angle 5 = \angle 6$，

∴ $\angle F + \angle 1 = \angle D + \angle 2$.

∵ $\angle 7 = \angle 8$，

∴ $\angle F + \angle 4 = \angle B + \angle 3$.



①式与②式相加，得

$2\angle F + \angle 1 + \angle 4$

$= \angle B + \angle D + \angle 2 + \angle 3$.

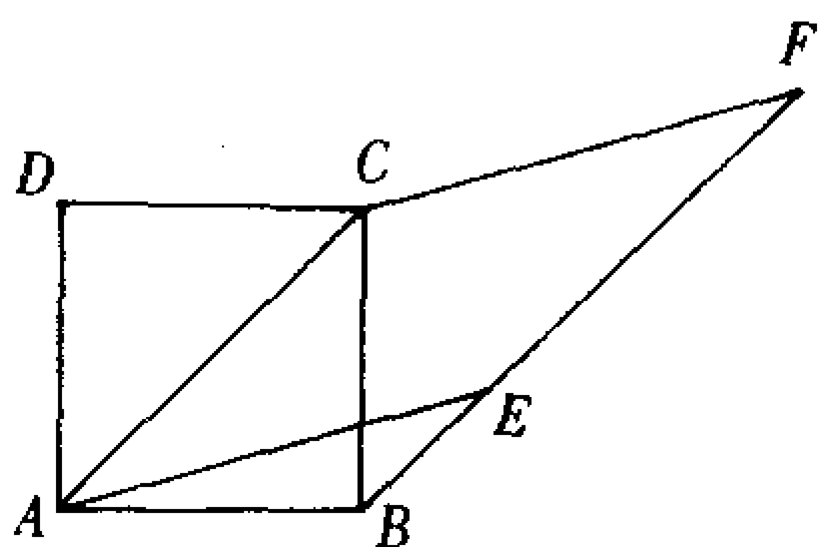
∵ CF、EF 分别是$\angle C$、$\angle E$ 的平分线，

有 $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，

∴ $2\angle F = \angle B + \angle D$，$\angle F = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.

2·40 如图，$ABCD$ 是正方形，$BF \parallel AC$，$AEFC$ 是菱形. 求证：$\angle ACF = 5\angle F$.

（中国浙江省宁波市数学竞赛，1984 年）



[证] 连 BD 交 AC 于 O，则 $BO \perp AC$，且 $BO = \frac{1}{2}AC$.

过 E 作 $EG \parallel BO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AE$

在 Rt△AEG 中，$EG = \frac{1}{2}AE$，

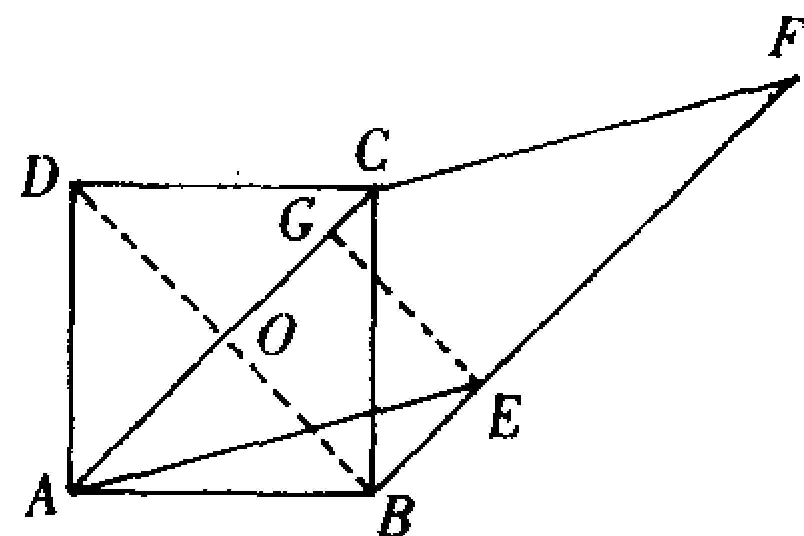
∴ $\angle EAG = 30°$.

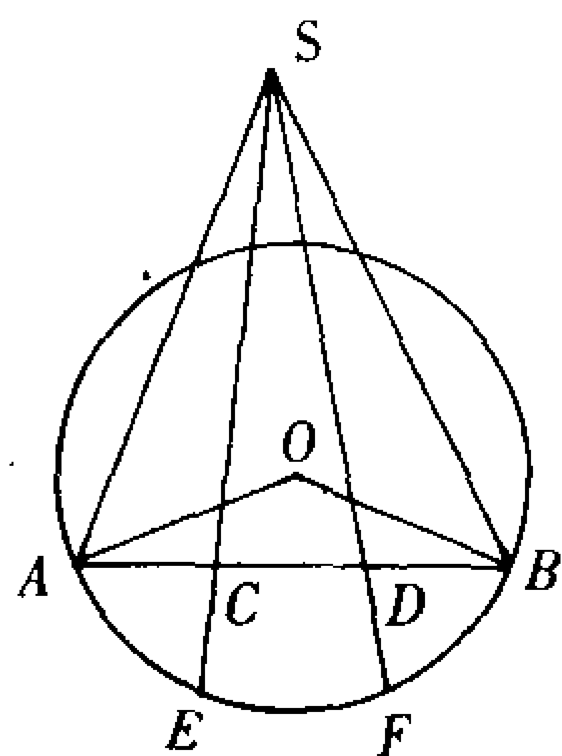
∵ $AEFC$ 是菱形，

∴ $\angle F = \angle EAG = 30°$.

且 $\angle ACF = 180° - \angle F = 150°$.

∴ $\angle ACF = 5\angle F$.





2·41　已知：AB 为$\odot O$ 的弦，C、D 为弦 AB 的三等分点，E、F 为弧 AB 的三等分点，连 EC、FD 相交于 S，连 SA、SB. 求证：$\angle ASB=\frac{1}{3}\angle AOB$.

（中国中学生数理化接力赛，1986 年）

［证］　连 OE、AE、AF，延长 SA 交 FE 延长线于 K，则由 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$　得

$AB/\!/EF$，

又　$AC=CD$，得　$KE=EF=AE$.

故　$\triangle AKF$ 是直角三角形.

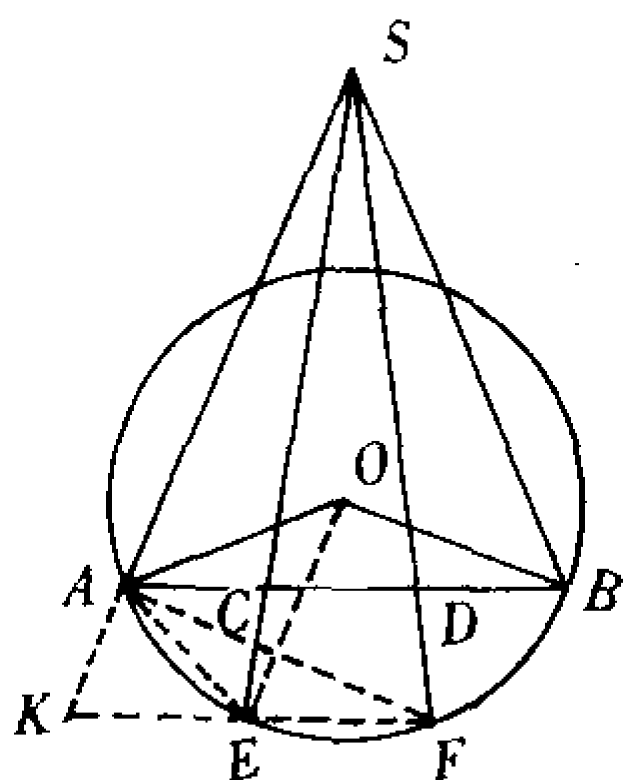
$\therefore$　$SA\perp AF$.

又$\because$　$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$，知　$OE\perp FA$，

从而 $OE/\!/SA$.

同理　$OF/\!/SB$.

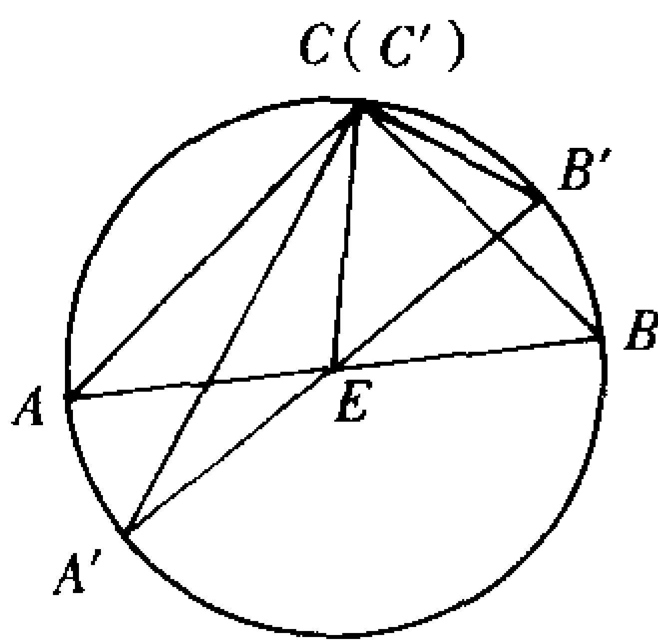
故　$\angle ASB=\angle EOF=\frac{1}{3}\angle AOB$.



2·42　在平面上有两个直角三角形，它们斜边上的中线互相平行. 求证：一个三角形的某条直角边与另外一个三角形的某条直角边之间的夹角等于它们斜边之间的夹角的二分之一.

（第 19 届全俄数学奥林匹克，1993 年）

［证］　设两个直角三角形的直角顶点为 C 和 C'.



将两个直角三角形之一用平移的方法使它们的直角顶点 C 和 C' 重合，再将同一个直角三角形用中心为点 C 的位似变换，使它们的中线 CE 重合(如图). 这时，两个三角形都是以 E 为圆心，CE 为半径的圆内接直角三角形.

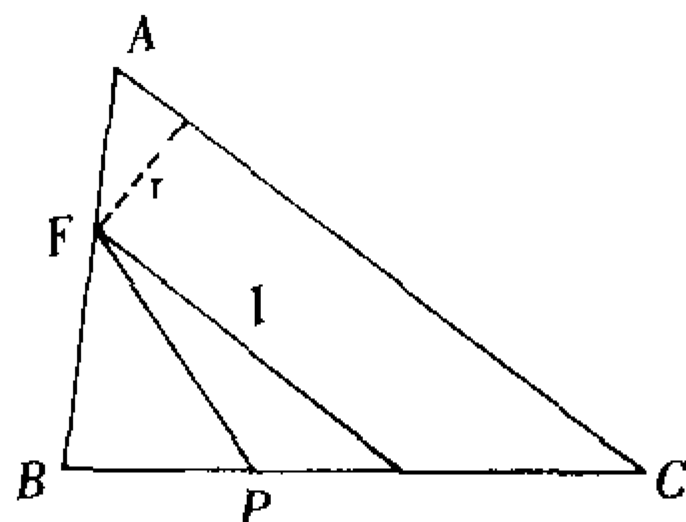
在上述变换中，所有直线间的夹角都不改变，因此题设中的两直角三角形的相应直角边的夹角为$\angle ACA'$，斜边之间的夹角为圆心角$\angle AEA'$，而$\angle AEA'=2\angle ACA'$.

2·43　在$\triangle ABC$ 中，已知$\angle A=60°$，过该三角形的内心 I 作直线平行于 AC 交 AB 于 F. 在 BC 边上取点 P 使得 $3BP=BC$. 求证：$\angle BFP$

$=\frac{1}{2}\angle B.$

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

［证］ 不妨设 $BC=3$，又设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r.



由正弦定理 $\frac{AB}{BC}=\frac{\sin C}{\sin A}$，

从而 $AB=3\frac{\sin C}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}\sin C$

$=2\sqrt{3}\sin(B+60^\circ).$

于是得 $AB=\sqrt{3}\sin B+3\cos B.$

设 R 为三角形外接圆半径，则由

$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

及 $R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{3}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{3}$，

有 $r=2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$=2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\left(\frac{B}{2}+30^\circ\right)$

$=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

故 $AF=\frac{r}{\sin A}=\sqrt{3}\sin B+\cos B-1.$

由此可知 $BF=AB-AF=2\cos B+1.$

在 $\triangle BFP$ 中，由正弦定理

$\frac{\sin(B+\angle BFP)}{\sin\angle BFP}=\frac{BF}{BP}=BP=2\cos B+1.$

即 $\frac{\sin B\cos\angle BFP+\cos B\sin\angle BFP}{\sin\angle BFP}=2\cos B+1,$

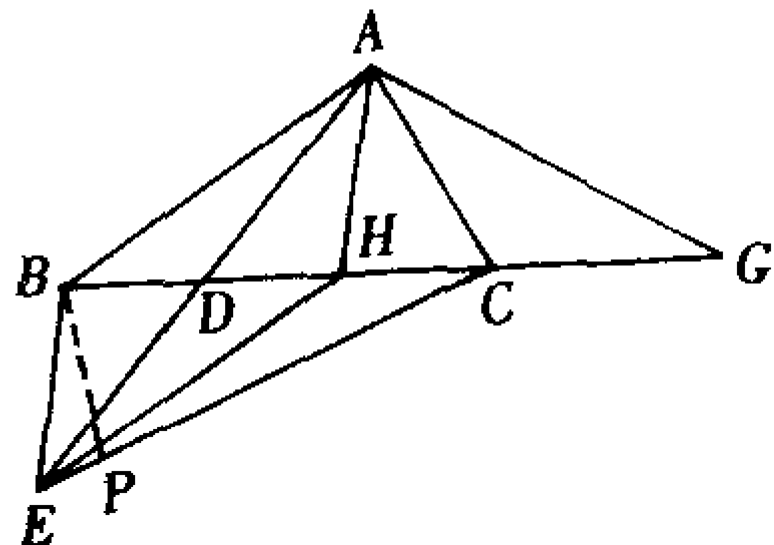
或 $\frac{\sin B\cdot\cos\angle BFP}{\sin\angle BFP}=\cos B+1,$

从而 $\sin(B-\angle BFP)=\sin\angle BFP.$

即 $\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B.$

2·44 已知:$\triangle ABC$ 满足$\angle ACB=2\angle ABC$.设 D 是 BC 边上一点,且 $CD=2BD$.延长线段 AD 至E,使 $AD=DE$.证明:$\angle ECB+180^\circ=2\angle EBC$.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)



[证 1] 设 CD 的中点为H,则 $ABEH$ 是平行四边形,延长 BC 至G,使 $CG=CA$.

设 $BD=DH=HC=\frac{a}{3}$, $CA=b$, $AB=c$, $BE=AH=x$, $AD=DE=y$, $CE=z$.

$$\because\quad 2\angle ABC=\angle ACB=\angle CGA+\angle CAG=2\angle CGA=2\angle CAG,$$

$\therefore\quad \triangle ABG\backsim\triangle CAG$.

于是有 $\frac{AB}{RG}=\frac{CA}{AG}$, 或 $c^2=b(a+b)$. ①

在$\triangle ACD$、$\triangle ABH$、$\triangle CDE$ 中分别应用中线公式,得

$$b^2+y^2=2x^2+\frac{2a^2}{9}, \quad ②$$

$$x^2+c^2=2y^2+\frac{2a^2}{9}, \quad ③$$

$$y^2+z^2=2c^2+\frac{2a^2}{9}, \quad ④$$

从式②、③中消去 y,有 $x^2+c^2+2b^2=4x^2+\frac{2a^2}{3}$.

将式①代入,得 $x^2=\left(b+\frac{2a}{3}\right)\left(b-\frac{a}{3}\right)$ ⑤

从式③、④中消去 y,有 $x^2+c^2+2z^2=4c^2+\frac{2a^2}{3}$.

将式①、⑤代入,可得 $z=b+\frac{2a}{3}$.从而,式⑤化为 $x^2=z(z-a)$,

或 $BE^2=CE(CE-BC)=CE\cdot EP$.

这里 P 是CE 上一点,且满足 $CP=BC$. 故 $\frac{BE}{CE}=\frac{EP}{BE}$.

$\because\quad \angle BEP=\angle CEB$, $\therefore\quad \triangle BEP\backsim\triangle CEB$.

从而　$\angle ECB=\angle EBP=\angle BEC-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ECB)$.

化简后即得　$\angle ECB+180^\circ=2\angle EBC$.

[证 2]　以 D 为原点,直线 BC 为 x 轴,BD 为单位长,建立直角坐标系.设 A 点坐标为 (a,b),则

$$\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{b}{1+a},\quad \operatorname{tg}\angle ACB=\frac{b}{2-a},$$

由已知 $\angle ACB=2\angle ABC$ 得

$$\frac{b}{2-a}=\frac{\frac{2b}{1+a}}{1-\left(\frac{b}{1+a}\right)^2}.$$

化简得　$b^2=3(a^2-1)$.　　　　(*)

又 $\operatorname{tg}\angle EBC=\frac{b}{1-a}$, 及　$\operatorname{tg}\angle ECB=\frac{b}{2+a}$.

从而　$\operatorname{tg}2\angle EBC=\frac{\frac{2b}{1-a}}{1-\left(\frac{b}{1-a}\right)^2}=\frac{2b(1-a)}{(1-a)^2-b^2}$,

$\because$　$\frac{2b(1-a)}{(1-a)^2-b^2}=\frac{b}{2+a}$ 成立等价于式(*),

$\therefore$　$\operatorname{tg}\angle ECB=\operatorname{tg}2\angle EBC$.

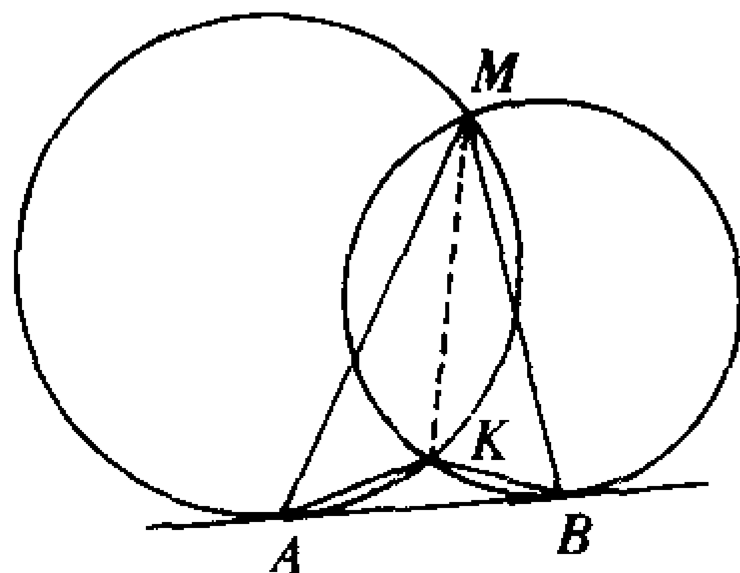
显然　$\angle EBC=\angle AFB>\angle ACB>\angle ABC=\angle BFE>\angle ECB$,

$\therefore$　$2\angle EBC=180^\circ+\angle ECB$.

2·45　设相交两圆的交点 M 和 K,现引出它们的一条公切线,A 和 B 为切点,求证:$\angle AMB+\angle AKB=180^\circ$.

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[证]　如图,连 MK.



由于 AB 是两圆的公切线,则

$\angle ABK=\angle BMK$,

$\angle KAB=\angle AMK$.

于是　$\angle ABK+\angle KAB=\angle BMK+\angle AMA=\angle AMB$.

由于 $\angle AKB+\angle ABK+\angle KAB=180^\circ$,

所以 $\angle AMB+\angle AKB=180^\circ$.

2·46 在平面上给出半径相同的3个圆周.证明:

(1)如果它们都相交于一点,如图1所示,那么用粗线标出的弧$\overset{\frown}{AK}$、$\overset{\frown}{CK}$、$\overset{\frown}{EK}$所含度数之和等于180°.

(2)如果它们的位置如图2所示,那么用粗线标出的弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$所含度数之和等于180°.

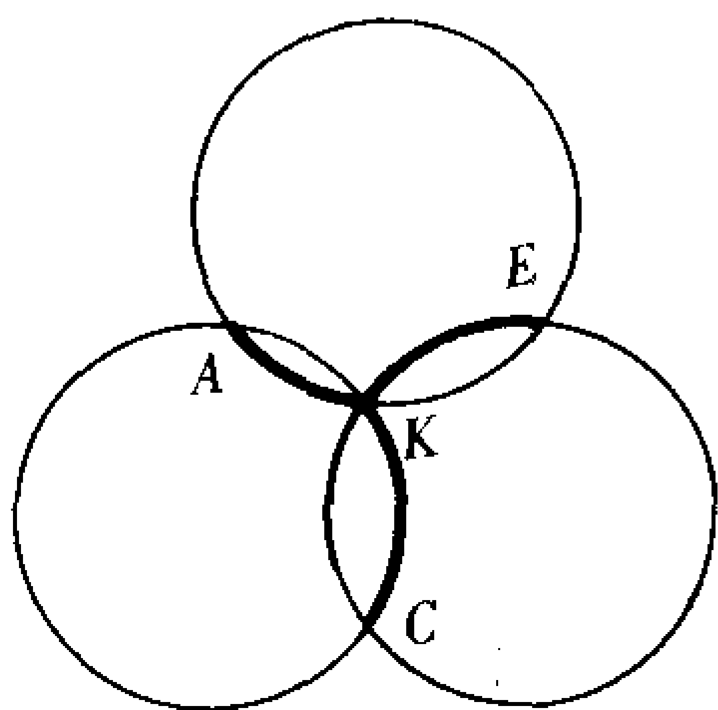


图1

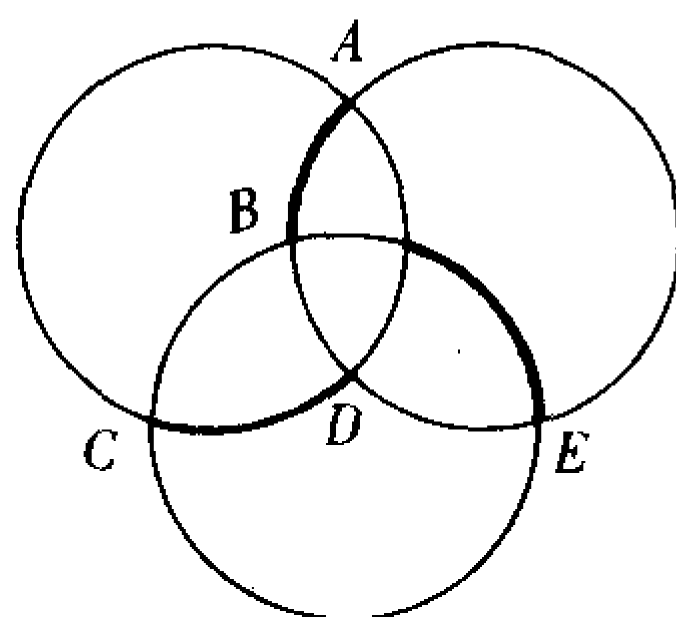
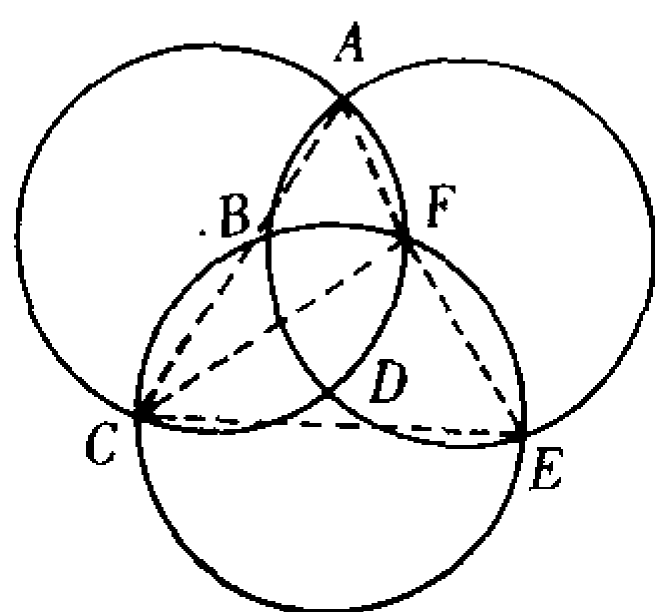


图2

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[解] (1)为(2)的特款,我们只需证(2).



两个等圆交得等弧,所以$\overset{\frown}{CF}$、$\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{BE}$的量数与在哪个圆中考察无关,因此.

$$\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EF}$$
$$=\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DF}-\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{BF}$$
$$=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{AF}.$$

又 $\angle ACE=\angle ACF+\angle FCE$

$$\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{EF}).$$

同理 $\angle CAE\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE})$, $\angle AEC\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$,

因为$\triangle ABC$三内角和为180°,

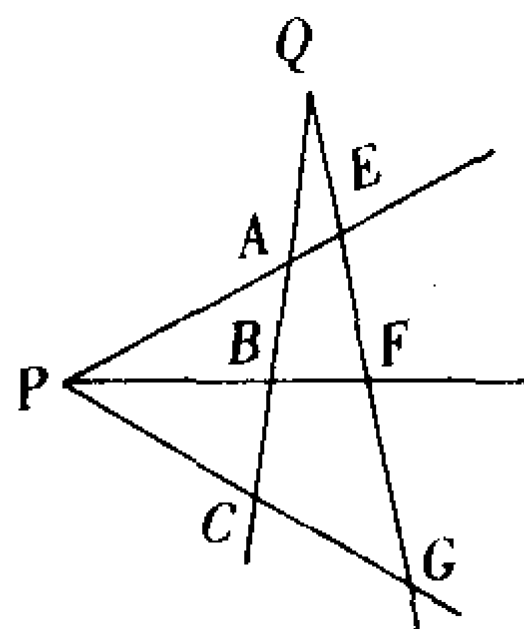
又$\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}\overset{m}{=}360^\circ$.

即 $\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{AB}\overset{m}{=}180^\circ$.

第三章　线段的比例式或乘积式

3·1　如图,平面上有 P、Q 两点,由 P 点引出三条射线,由 Q 点引出两条射线相交于 A、B、C、E、F、G 点.如果 $AB=BC$,求证:$\frac{EA}{EP}+\frac{GC}{GP}=\frac{2BF}{PF}$.

(汉江杯数学竞赛,1991 年)



[证]　对$\triangle PAB$,$\triangle PBC$ 分别应用梅尼劳斯定理,得

$$\frac{PE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BF}{FP}=1,$$

$$\frac{PF}{FB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GP}=1.$$

不妨设　$\frac{EA}{EP}=x$,$\frac{GC}{GP}=y$,$\frac{BF}{PF}=z$.

则　$\frac{QB}{AQ}=\frac{z}{x}$,$\frac{BQ}{QC}=\frac{z}{y}$,

即　$\frac{AQ+AB}{AQ}=\frac{z}{x}$,$\frac{AQ+AB}{AQ+2AB}=\frac{z}{y}$.

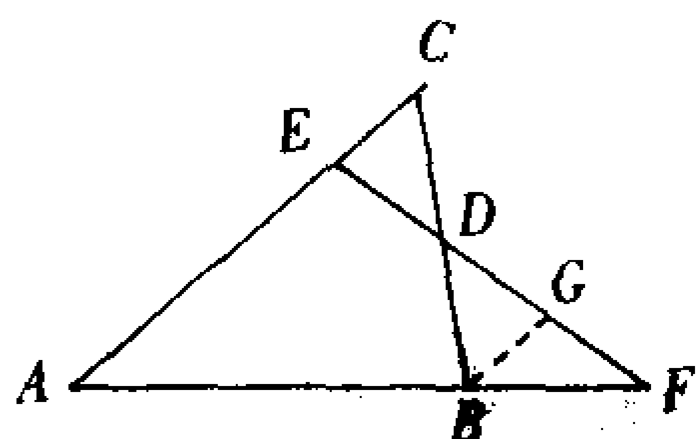
故　$\frac{AB}{AQ}=\frac{z-x}{x}=\frac{y-z}{2z-y}$.

则有　$x+y=2z$.

3·2　在$\triangle ABC$ 中,D 为 BC 的中点,过 D 作一直线分别交 AC 于 E,交 AB 的延长线于 F,求证:$AE:EC=AF:BF$.

(中国北京市数学竞赛,1978 年)

[证]　作 $BG/\!/AC$,交 EF 于 G,那么 $\angle C=\angle DBG$.



$\because$ $BD = CD$，$\angle CDE = \angle BDG$，

$\therefore$ $\triangle CDE \cong \triangle BDG$，有 $BG = EC$.

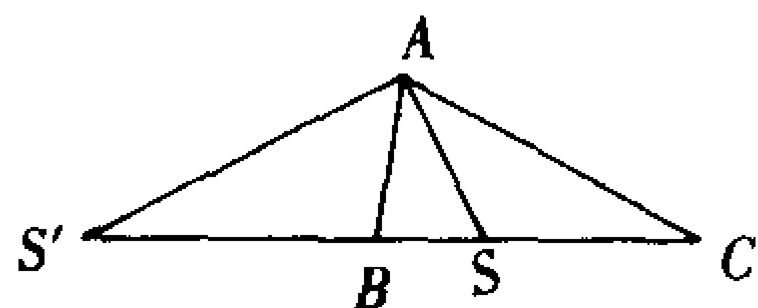
$\because$ $BG /\!/ AC$，$\therefore$ $\triangle FEA \backsim \triangle FGB$，

则 $AE : BG = AF : BF$. 但 $BG = EC$，

$\therefore$ $AE : EC = AF : BF$.

3·3 在$\triangle ABC$中，A、B、C的对边分别是a、b、c，且$a > b > c$，AS、AS'为$\angle A$的平分线与外角平分线，BT、BT'为$\angle B$的平分线与外角平分线，CU、CU'为$\angle C$的平分线与外角平分线，求证：$\dfrac{1}{SS'} + \dfrac{1}{UU'} = \dfrac{1}{TT'}$.

（中国上海市数学竞赛，1990）



［证］ 如图，由AS、AS'分别为$\angle A$的平分线与外角平分线，有

$$\frac{CS}{SB} = \frac{b}{c} = \frac{CS'}{S'B}.$$

于是 $\dfrac{CS}{BC} = \dfrac{b}{b+c}$，$\dfrac{CS'}{BC} = \dfrac{b}{b-c}$.

即 $CS = \dfrac{ab}{b+c}$，$CS' = \dfrac{ab}{b-c}$.

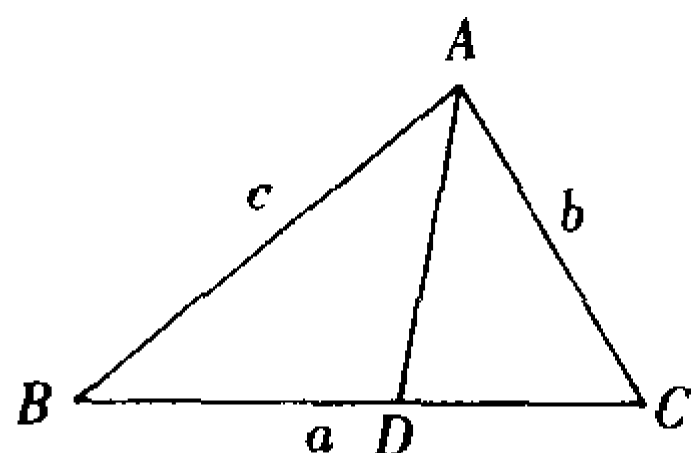
从而 $SS' = \dfrac{ab}{b-c} - \dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{2abc}{b^2 - c^2}$.

同理 $TT' = \dfrac{2abc}{a^2 - c^2}$，$UU' = \dfrac{2abc}{a^2 - b^2}$.

所以 $\dfrac{1}{SS'} + \dfrac{1}{UU'} = \dfrac{(b^2 - c^2) + (a^2 - b^2)}{2abc} = \dfrac{a^2 - c^2}{2abc} = \dfrac{1}{TT'}$.

3·4 设$\triangle ABC$的三边为a、b、c. 求证：(1)若$\angle A = 2\angle B$，则$a^2 = b(b+c)$；(2)若$\angle A = 3\angle B$，则$c^2 = \dfrac{1}{b}(a-b)(a^2 - b^2)$.

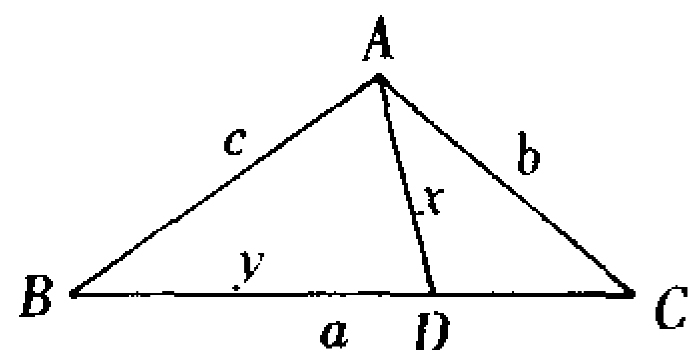
（中国湖北省黄冈地区数学竞赛，1991）



［证］ (1)如图，作$\angle A$的平分线交BC于D，易知$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$，故有 $\dfrac{c}{AD} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a - AD}$.

消去 AD,得 $a^2=b(b+c)$.

(2)如图,作$\angle BAD=2\angle B$,设 $AD=x$,$BD=y$.易知 $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$,



有 $$\frac{c}{x}=\frac{a}{b}=\frac{b}{a-y}.$$

由(1)知 $y^2=x(x+c)$.代入化简得

$$c^2=\frac{1}{b}(a-b)(a^2-b^2).$$

3·5 如果一个直角三角形的三边之长成等差数列,那么它们的比是 3:4:5,试证明之.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证] 设直角三角形三边长为 $a-d$、a、$a+d(a>d>0)$,则

$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2,$$

化简得 $a^2-4ad=0$.

$\because$ $a\neq0$, $\therefore$ $a-4d=0$.

因此 $a=4d$, $a-d=3d$, $a+d=5d$.

$\therefore$ 这个直角三角形的三边之比为 3:4:5.

3·6 在$\triangle ABC$ 中,$\angle A=4\angle C$,$\angle B=2\angle C$,试证:$(BC+CA)AB=BC\cdot CA$.

(新加坡数学奥林匹克,1985 年)

[证 1] 由$\angle A=4\angle C$, $\angle B=2\angle C$, 则得

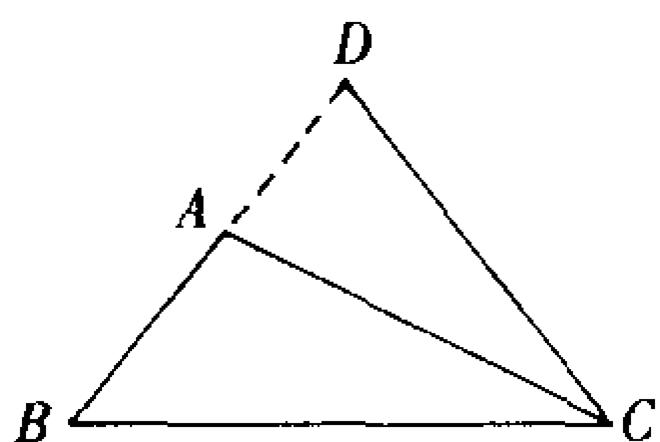
$$\angle C=\frac{\pi}{7},\ \angle B=\frac{2\pi}{7},\ \angle A=\frac{4\pi}{7}.$$

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为R,由正弦定理

$$AB=2R\sin\frac{\pi}{7},\ BC=2R\sin\frac{4\pi}{7},\ CA=2R\sin\frac{2\pi}{7}.$$

则
$$\begin{aligned}(BC+CA)AB&=4R^2\left(\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{7}\\&=4R^2\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}\right)\\&=4R^2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\\&=2R\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot2R\sin\frac{2\pi}{7}\end{aligned}$$

$= BC \cdot CA$.



[证 2] 延长 BA 到点 D，使得 $DC = AC$. 设 $\angle ACB = \alpha$，

于是 $\angle B = 2\alpha$，$\angle BAC = 4\alpha$，$\angle CAD = 3\alpha = \angle D$. $\angle ACD = \alpha = \angle ACB$，

即 AC 为 $\angle BCD$ 的平分线.

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{BD - AB} = \frac{AB}{AC - AB}.$$

$\therefore \quad BC \cdot (AC - AB) = AB \cdot AC$.

$\therefore \quad BC \cdot AC = AB \cdot AC + AB \cdot BC = AB \cdot (AC + BC)$.

[证 3] 作辅助线同证 2，于是 $\angle CAD = \angle D = 3\alpha$，$\angle ACD = \alpha = \angle ACB$，$\angle B = 2\alpha = \angle DCB$.

$\therefore \quad BD = DC = AC$.

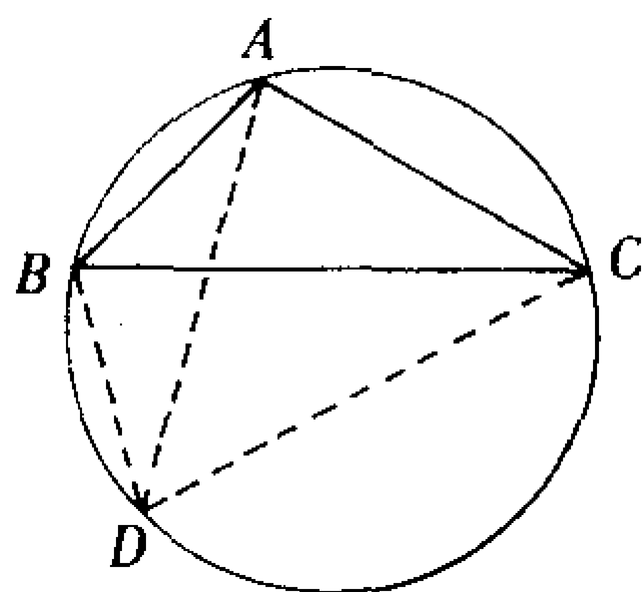
$$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 2\alpha,$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \sin 2\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin 2\alpha,$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC^2 \sin \alpha.$$

在 $\triangle ABC$ 中应用正弦定理有 $AC \sin \alpha = AB \sin 2\alpha$.

$$\therefore \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin 2\alpha.$$



$\because \quad S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC}$，

$$\therefore \quad AC \cdot BC = AC \cdot AB + AB \cdot BC = AB(AC + BC).$$

[证 4] 作 $\triangle ABC$ 的外接圆并在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上取点 D，使得 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BA}$，连结 DA、BD、DC.

于是 $BD = BA$，$AD = AC$，$CD = BC$.

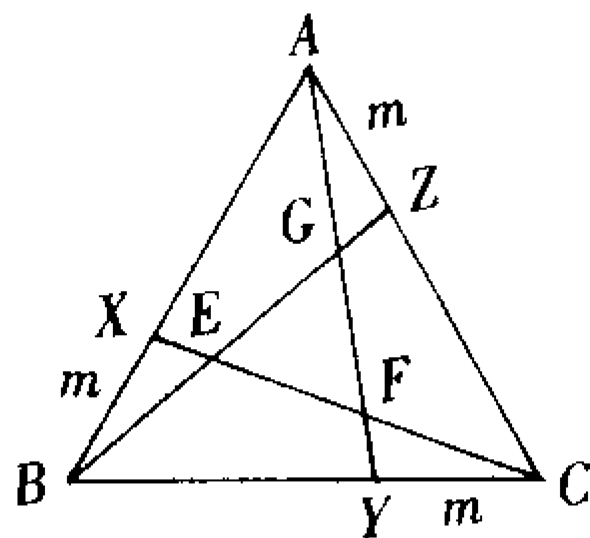
由托勒密定理便得

$$AC \cdot BC = AD \cdot BC = BD \cdot AC + AB \cdot CD = AB \cdot AC + AB \cdot BC = AB(AC + BC).$$

3·7 试在正$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA上分别找出点X、Y、Z，使得由直线CX、BZ、AY所围成的三角形的面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{4}$，并且满足条件$\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CZ}{ZA}$.

（莫斯科数学奥林匹克，1962年）

[解] 设$AB=BC=CA=1$，$BX=CY=AZ=m$，连接BF(如图).



有 $S_{\triangle ACX}=\frac{1-m}{m}S_{\triangle BCX}$,

$S_{\triangle AFX}=\frac{1-m}{m}S_{\triangle BFX}$,

$\therefore$ $S_{\triangle ACF}=\frac{1-m}{m}S_{\triangle BCF}$,

且 $S_{\triangle FYC}=mS_{\triangle BCF}=\frac{m^2}{1-m}S_{\triangle ACF}$.

两边各加上$S_{\triangle ACF}$，得

$$S_{\triangle AYC}=\frac{1-m+m^2}{1-m}S_{\triangle ACF}.$$

$\because$ $S_{\triangle AYC}=mS_{\triangle ABC}$,

$\therefore$ $S_{\triangle ACF}=\frac{m(1-m)}{1-m+m^2}S_{\triangle ABC}$,

故 $S_{\triangle EGF}=S_{\triangle ABC}-3S_{\triangle ACF}$

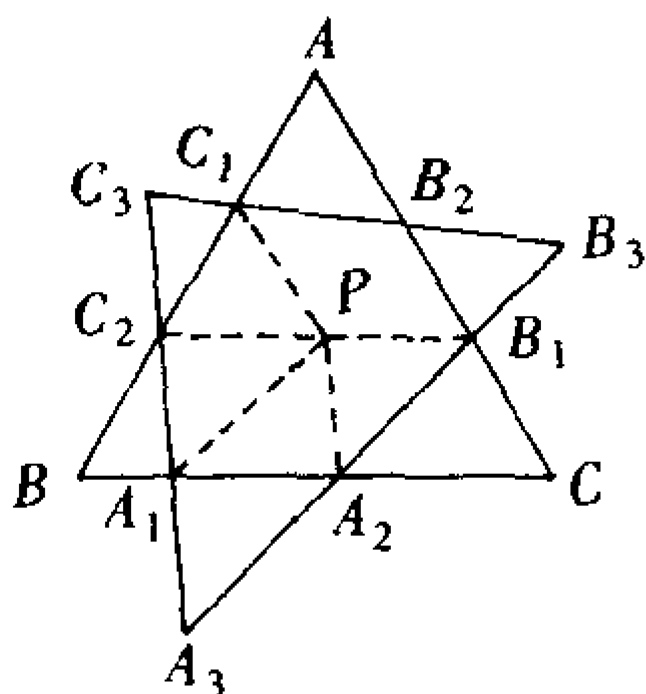
$$=\left[1-\frac{3m(1-m)}{1-m+m^2}\right]S_{\triangle ABC}=\frac{1-4m+4m^2}{1-m+m^2}S_{\triangle ABC},$$

$\therefore$ $\frac{1}{4}=\frac{1-4m+4m^2}{1-m+m^2}$，即 $5m^2-5m+1=0$.

从而 $m=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$.

3·8 设A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2为正$\triangle ABC$的边上的三条相等的线段，证明：在直线B_2C_1、C_2A_1、A_2B_1组成的三角形中，线段B_2C_1、C_2A_1、A_2B_1与含它们的边成比例.

（第26届国际数学奥林匹克候选题，1985年）



[证]　如图，设直线 B_2C_1、C_2A_1、A_2B_1 交成$\triangle A_3B_3C_3$.

在$\triangle A_3B_3C_3$ 内作一点 P，使 $A_1A_2PC_2$ 为平行四边形，则$\triangle PC_1C_2$ 为正三角形，从而有

$$PC_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} B_1B_2, PB_1 /\!/ C_1B_2.$$

又　$PA_2 = C_2A_1$，$\triangle A_2PB_1 \backsim \triangle A_3B_3C_3$，

于是有　$\dfrac{PA_2}{C_3A_3} = \dfrac{PB_1}{C_3B_3} = \dfrac{B_1A_2}{A_3B_3}$，

即　$$\frac{B_2C_1}{B_1B_3} = \frac{C_2A_1}{C_3A_3} = \frac{A_2B_1}{A_3B_3}.$$

3·9　过三角形内任意一点，引三条直线分别平行于它的边，它们把边分割成线段 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3（如图）．求证：$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3$.

（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

[证]　由 $A_1B_1 /\!/ AB$，$B_1C_2 /\!/ BC$，$C_1A_2 /\!/ CA$，

知　$\triangle B_2C_1P \backsim \triangle B_1PA_2 \backsim \triangle PC_2A_1$

可得　$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_3}{b_1}$　及　$\dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{c_2}{c_1}$

$\therefore$　$a_1b_1 = a_2b_3$，$c_1 = \dfrac{b_2c_2}{b_3}$

故　$$a_1b_1c_1 = (a_2b_3)\left(\frac{b_2b_2}{b_3}\right) = a_2b_2c_2 \qquad ①$$

同理　$\dfrac{a_3}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_3}$　及　$\dfrac{c_3}{c_2} = \dfrac{a_2}{a_1}$

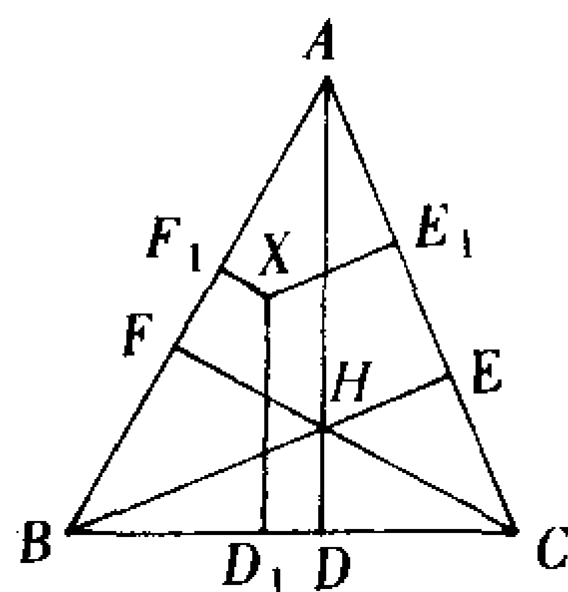
$\therefore$　$a_3b_3 = a_1b_2$，$c_3 = \dfrac{a_2c_2}{a_1}$

相乘得　$$a_3b_3c_3 = (a_1b_2)\left(\frac{a_2c_2}{a_1}\right) = a_2b_2c_2. \qquad ②$$

由①、②得　$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3$.

3·10　A、B、C 三点不共线，证明：平面 ABC 上存在一个惟一的点 X，满足 $XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2$.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）



[证] 设$\triangle ABC$的三条高为AD、BE、CF,垂心为H,则

$$HA^2-HC^2=AE^2-EC^2=AB^2-BC^2,$$

$$HB^2-HA^2=BF^2-AF^2=BC^2-CA^2.$$

在AB、AC上分别取点F_1、E_1,使$AF_1=BF$,$AE_1=CE$.过E_1、F_1分别作AB、AC的垂线,相交于X,则

$$\begin{aligned}XA^2-XB^2&=AF_1^2-BF_1^2=BF^2-AF^2\\&=BC^2-AC^2,\\XC^2-XA^2&=CE_1^2-AE_1^2=AE^2-EC^2\\&=AB^2-BC^2,\end{aligned}$$

即点X满足要求.

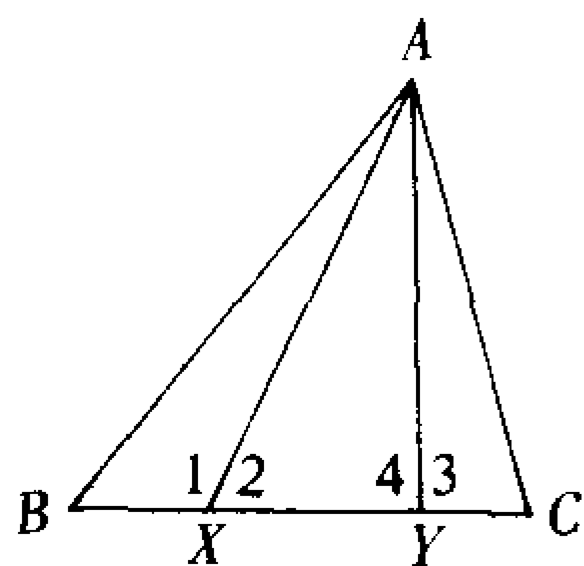
另一方面,满足要求的点X使

$$\begin{aligned}XA^2-XC^2&=BC^2-AB^2=CE^2-AE^2\\&=AE_1^2-CE_1^2,\end{aligned}$$

所以,X在AC的过点E_1的垂线上.同理X在AB的过点F_1的垂线上.所以,X是这两条垂线的交点,它是惟一的.

3·11 自$\triangle ABC$的顶点引两条射线交BC于X、Y,使$\angle BAX=\angle CAY$,求证:$\dfrac{BX\cdot BY}{CX\cdot CY}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

(中国上海市数学竞赛,1986年)



[证] 设$\angle XAB=\angle YAC=\alpha$,$\angle XAY=\beta$,则在$\triangle ABX$与$\triangle ABY$中用正弦定理,得

$$\frac{BX}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin\angle 1}=\frac{AB}{\sin\angle 2},\quad ①$$

$$\frac{BY}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB}{\sin\angle 4}.\quad ②$$

同理 $$\frac{CY}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle 4},\quad ③$$

$$\frac{CX}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AC}{\sin\angle 2}.\quad ④$$

①×②及③×④,得

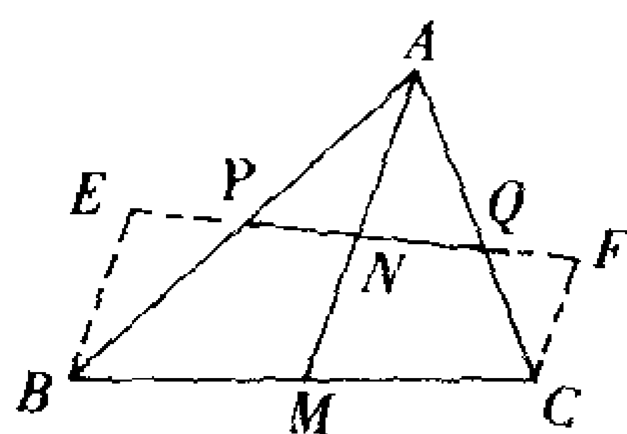
$$\frac{BX\cdot BY}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB^2}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4},\qquad ⑤$$

$$\frac{CX\cdot CY}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AC^2}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4},\qquad ⑥$$

⑤÷⑥即得所求.

3·12　设 AM 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线，任作一条直线分别交 AB、AC、AM 于 P、Q、N. 求证：$\frac{AB}{AP}$、$\frac{AM}{AN}$、$\frac{AC}{AQ}$ 成等差数列.

（中国辽宁省数学竞赛，1978 年）



［证 1］　过 B、C 分别作 MN 的平行线与 PQ 的延长线交于 E 和 F. 因为 $BCFE$ 为一梯形，MN 是此梯形的中位线，所以 $MN=\frac{1}{2}(BE+CF)$，两边同除以 AN，得

$$\frac{MN}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{BE}{AN}+\frac{CF}{AN}\right).\qquad (*)$$

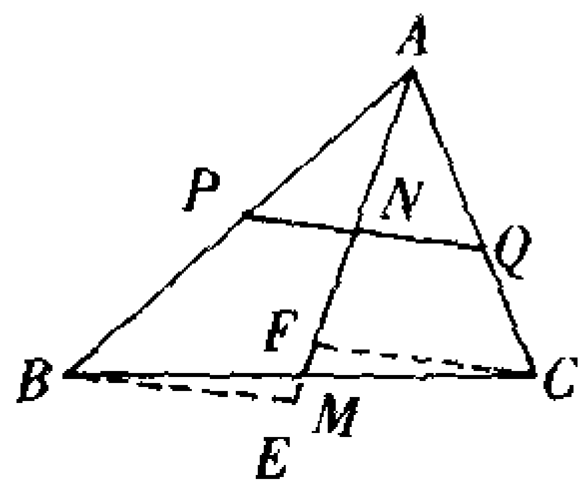
$\because$　$\triangle BEP\backsim\triangle ANP$，$\therefore$　$\frac{BE}{AN}=\frac{BP}{AP}$，

$\because$　$\triangle CFQ\backsim\triangle AQN$，$\therefore\frac{CF}{AN}=\frac{CQ}{AQ}$，代入(*)得

$$\frac{MN}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right),$$

据合比定理得　$\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$

所以　$\frac{AB}{AP}$、$\frac{AM}{AN}$、$\frac{AC}{AQ}$ 成等差数列.



［证 2］　过 B、C 分别作 PQ 的平行线，交 AM 和它的延长线于 E、F，在 $\triangle ABE$ 中，$PN/\!/BE$，

$$\therefore\quad\frac{AB}{AP}=\frac{AE}{AN}.\qquad ①$$

在 $\triangle ACF$ 中，$QN/\!/CF$，

$$\therefore\quad\frac{AC}{AQ}=\frac{AF}{AN}.\qquad ②$$

①+②，得

$$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=\frac{AE}{AN}+\frac{AF}{AN}=\frac{AE+AF}{AN},$$

又 $\because$ $\triangle BME\cong\triangle CMF$，$\therefore$ $EM=FM$.

$\therefore$ $AE+AF=(AM+ME)+(AM-FM)=2AM$，

有 $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=2\dfrac{AM}{AN}$，

即 $\dfrac{AB}{AP}$、$\dfrac{AM}{AN}$、$\dfrac{AC}{AQ}$ 成等差数列.

3·13 设 D 为锐角$\triangle ABC$ 内一点，且满足 $DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA$. 试确定 D 的几何位置，且证明你的结论.

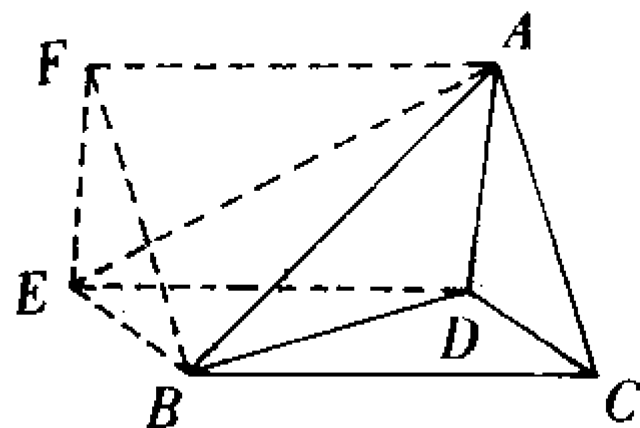
（中国中学生数学冬令营，1998 年）

[解] 我们改证比其更强的命题如下：

设 D 为锐角$\triangle ABC$ 内部一点. 求证：

$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA\geqslant AB\cdot BC\cdot CA, \quad (*)$$

并且等号当且仅当 D 为$\triangle ABC$ 的垂心时才成立.



[证 1] 如图，作 $ED \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，$FA \mathrel{\underline{\parallel}} ED$，则 $BCDE$ 和 $ADEF$ 均是平行四边形，连结 BF 和 AE，显然 $BCAF$ 也是平行四边形. 于是

$AF=ED=BC$，

$EF=AD$，$EB=CD$，$BF=AC$.

在四边形 $ABEF$ 和 $AEBD$ 中，由 Ptolemy 不等式得

$AB\cdot EF+AF\cdot BE\geqslant AE\cdot BF$.

$BD\cdot AE+AD\cdot BE\geqslant AB\cdot ED$.

即 $AB\cdot AD+BC\cdot CD\geqslant AE\cdot AC$. ①

$BD\cdot AE+AD\cdot CD\geqslant AB\cdot BC$. ②

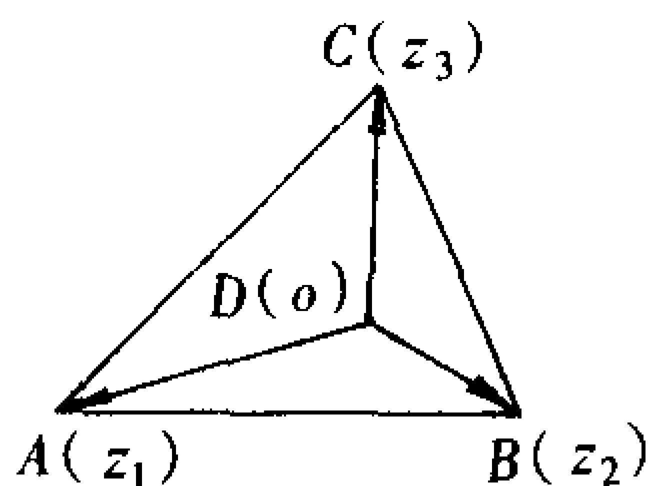
于是，由①和②可得

$$\begin{aligned}&DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA\\=&DB(AB\cdot AD+BC\cdot CD)+DC\cdot DA\cdot CA\\\geqslant&DB\cdot AE\cdot AC+DC\cdot DA\cdot AC\\=&AC(DB\cdot AE+DC\cdot AD)\end{aligned}$$

$\geqslant AC \cdot BC \cdot AB$.

故㊉式得证,且等号成立的充分必要条件是①和②的等号同时都成立,即等号当且仅当 $ABEF$ 及 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立,亦即 $AFEBD$ 恰是圆内接五边形时等号成立.

由于 $AFED$ 为平行四边形,所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$)且 $\angle ABE = \angle ADE = 90°$,亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$,所以㊉式等式成立的充分必要条件是 D 为$\triangle ABC$ 的垂心.



[证2] 如图,取 D 为原点,建立复平面,记 A、B、C 三顶点所对应的复数分别为 z_1、z_2、z_3. 则㊉式等价于不等式

$$|z_1z_2(z_1-z_2)|+|z_2z_3(z_2-z_3)|+|z_3z_1(z_3-z_1)| \geqslant |(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|, \quad ①$$

即

$$\left|\frac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}\right|+\left|\frac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}\right| + \left|\frac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_3-z_1)}\right| \geqslant 1. \quad ②$$

由②,我们容易想到并验证下列的恒等式:

$$\frac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)} + \frac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_3-z_1)}=1. \quad ③$$

记 $a_1=\dfrac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}$, $a_2=\dfrac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_1-z_2)}$,

$a_3=\dfrac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}$.

显然 $a_i \neq 0 (i=1,2,3)$.

由 $a_1+a_2+a_3=1$, 两边取模得

$1=|a_1+a_2+a_3| \leqslant |a_1|+|a_2|+|a_3|$,

这正是㊉式的等价形式,故㊉式得证,并且㊉式的等号成立的充分必要条件是"a_1、a_2、a_3 的辐角相同". 又因为 $a_1+a_2+a_3=1$,故这等价于"a_1、a_2、a_3 均为正数".

另外,容易验证下列等式:

$$-\frac{a_1a_2}{a_3}=\left(\frac{z_3}{z_1-z_2}\right)^2,\quad -\frac{a_2a_3}{a_1}=\left(\frac{z_1}{z_2-z_3}\right)^2,$$

$$-\frac{a_3a_1}{a_2}=\left(\frac{z_2}{z_3-z_1}\right)^2. \qquad ④$$

(1)若 a_1、a_2、a_3 均为正数,则由④知 $\frac{z_3}{z_1-z_2}$ 和 $\frac{z_1}{z_2-z_3}$ 均为纯虚数.故 $CD\perp AB$,且 $AD\perp BC$,即 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

(2)若 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则 $\frac{z_3}{z_1-z_2}$,$\frac{z_1}{z_2-z_3}$,$\frac{z_2}{z_3-z_1}$ 均为纯虚数.

由④知 $\frac{a_1a_2}{a_3}$,$\frac{a_2a_3}{a_1}$,$\frac{a_3a_1}{a_2}$ 均为正数.

由此可知 a_1、a_2、a_3 至少有一个是正数,不妨设 $a_1>0$,

则 $\frac{a_2}{a_3}>0$, $a_2a_3>0$, 即 $a_2>0$, $a_3>0$,

亦即 a_1、a_2、a_3 均为正数.

综合①和②,即知㊉式中等号成立的充分必要条件是 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

3·14 一直角三角形的两直角边为 a 和 b,且 a 边所对的角为 $\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$,求证:$a$、$b$ 必满足下面的等式 $\lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

(中国天津市数学竞赛,1957 年)

[证] $\because$ $\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$, 又 $\sin A=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\therefore$ $a^2+b^2=4ab$, $(a+b)^2=6ab$,

$\therefore$ $\frac{a+b}{\sqrt{6}}=\sqrt{ab}$.

两边取对数,即得 $\lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

3·15 设 A、B、C 为三角形的三个内角,a、b、c 分别为角 A、B、C

的对边，试证：$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=0$.

（中国上海市数学竞赛，1978 年）

[证] 据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\
&=2R\Big[(\sin A-\sin B)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(\sin B-\sin C)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\
&\quad+(\sin C-\sin A)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\Big]\\
&=2R\Big[2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\\
&\quad\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+2\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{C+A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\Big]\\
&=2R\Big[2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\
&\quad+2\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\Big]\\
&=2R\Big[2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}+2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\\
&\quad+2\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}\Big]\\
&=2R[\cos B-\cos A+\cos C-\cos B+\cos A-\cos C]\\
&=0.
\end{aligned}$$

3·16 设△ABC 的边长为 a、b、c. ∠C 的平分线交 AB 于 D. 求证：$CD=\dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

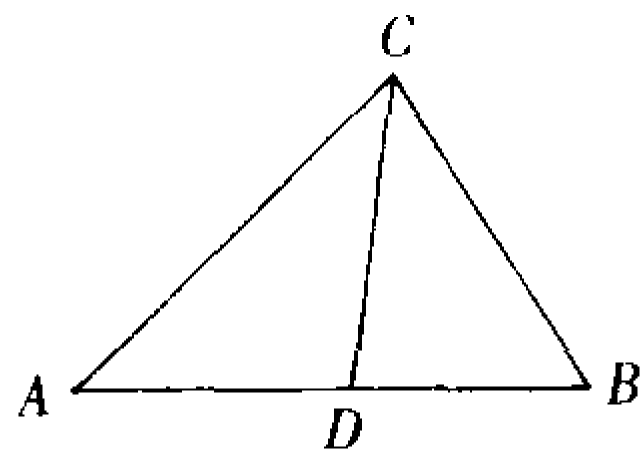
（加拿大数学奥林匹克，1969 年）

[证 1] 设 $CD=x$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$，

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}$.

于是由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$



得 $ab\sin C=ax\sin\frac{C}{2}+bx\sin\frac{C}{2}$,

有 $x=\dfrac{ab\sin C}{(a+b)\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)\sin\frac{C}{2}}$

$=\dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

[证 2] 由正弦定理得 $AD=\dfrac{CD\sin\frac{C}{2}}{\sin A}$, $BD=\dfrac{CD\sin\frac{C}{2}}{\sin B}$

两式相加得

$$C=\frac{CD\sin\frac{C}{2}}{\sin A}+\frac{CD\sin\frac{C}{2}}{\sin B}$$

$$=\frac{CD}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)$$

$$=\frac{CD}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=\frac{c\cdot CD\cdot(a+b)}{2ab\cos\frac{C}{2}}$$

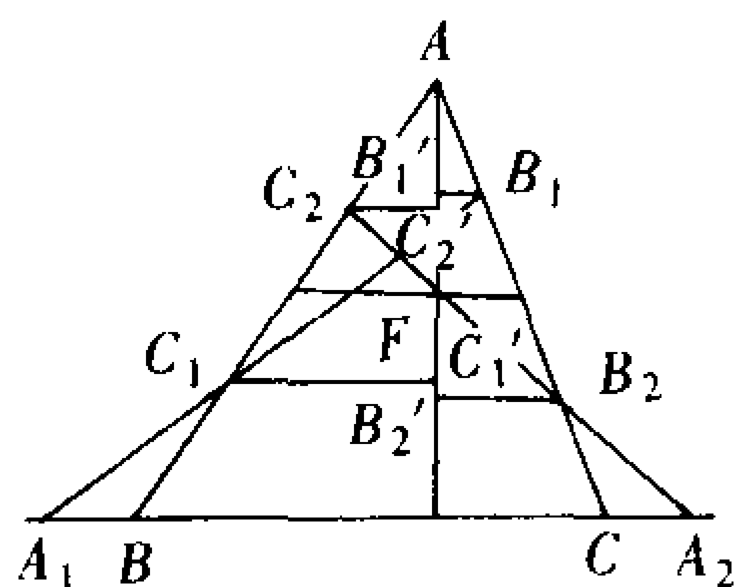
$$\therefore\quad CD=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

3.17 一条直线和$\triangle ABC$的边AB交于点C_1,和边AC交于点B_1,和边BC所在直线交于点A_1,假设C_2是点C_1关于AB的中点的对称点,B_2是点B_1关于AC的中点的对称点,A_2是直线B_2C_2和BC的交点. 求证:$\dfrac{\sin\angle B_1A_1C}{\sin\angle C_2A_2B}=\dfrac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

(匈牙利数学奥林匹克,1971年)

[证] 过顶点A作$\triangle ABC$的高,由点B_1、B_2、C_1、C_2向这条高作垂线,设垂足为B_1'、B_2'、C_1'、C_2'. AB与AC的中点连线与高交于F'.

由对称性,线段$B_1'C_1'$与$B_2'C_2'$关于点F'对称,且$B_1'C_1'=$



$B_2'C_2'$.

由于 $\angle B_1'B_1C_1=\angle B_1A_1C$,

$\angle C_2'C_2B_2=\angle C_2A_2B$,

则 $\sin\angle B_1A_1C=\sin\angle B_1'B_1C_1$

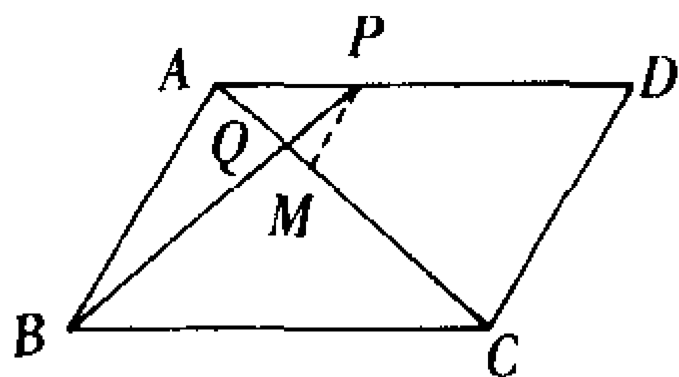
$=\dfrac{B_1'C_1'}{B_1C_1}$,

且 $\sin\angle C_2A_2B=\sin\angle C_2'C_2B_2=\dfrac{C_2'B_2'}{B_2C_2}$,

$\because\ B_1'C_1'=C_2'B_2'$, $\therefore\ \dfrac{\sin\angle B_1A_1C}{\sin\angle C_2A_2B}=\dfrac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

3.18 将▱$ABCD$的边AD分为n等分,并将它的第一分点P与顶点B连结起来,设BP交对角线AC于点Q,求证:$AC=(n+1)AQ$.

(莫斯科数学奥林匹克,1945年)



[证] 如图,作$PM/\!/AB$交AC于M,则

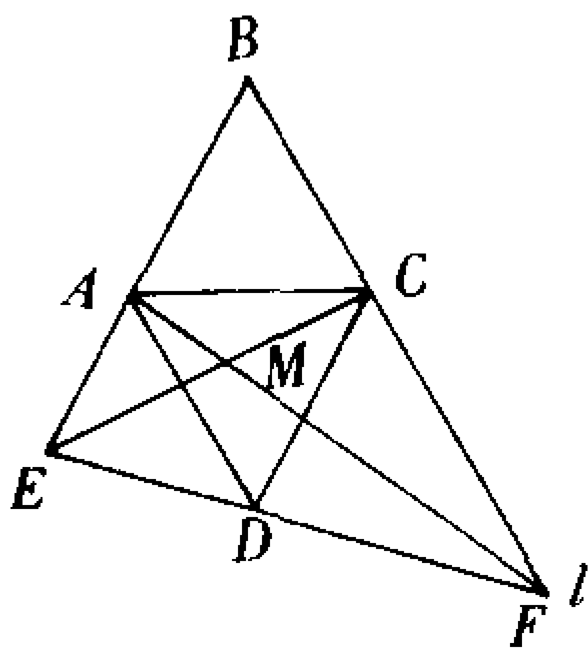
$$\frac{AQ}{QM}=\frac{AB}{PM}=\frac{CD}{PM}=\frac{AD}{AP}=n=\frac{AC}{AM}.$$

$\therefore\ AQ=nQM$.

又 $AC=nAM=n(AQ+QM)$

$=nAQ+nQM=nAQ+AQ$

$=(n+1)AQ$.



3.19 如图,四边形$ABCD$的各边相等,且$\angle ABC=60°$,直线l过D点,但与四边形$ABCD$不相交(D点除外),l与BA、BC的延长线分别交于E、F.点M是CE与AF的交点.求证:$CA^2=CM\cdot CE$.

(亚太地区数学奥林匹克,1993年)

[证] 因为四边形$ABCD$的各边相等,所以四边形$ABCD$是菱形.

又$\because\ \angle ABC=60°$, $\therefore\ \angle DAB=\angle DCB=120°$.

$\therefore\ AD/\!/BC$, 有 $\angle EDA=\angle EFB$

因此 $\triangle ADE \backsim \triangle CFD$，有 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{CD}{CF}$.

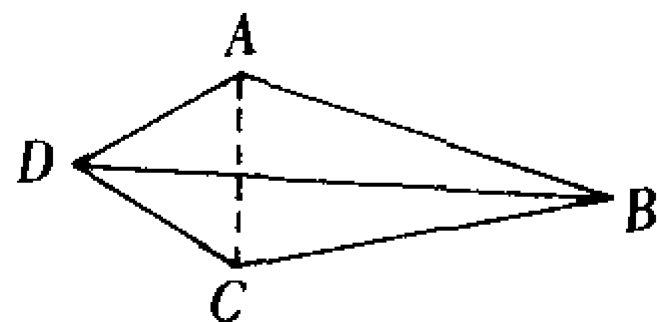
又 $AD=AC$，$CD=AC$. ∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AC}{CF}$，

又∵ $\angle EAC=\angle ACF=120°$，∴ $\triangle ACE \backsim \triangle CFA$.

有 $\angle FAC=\angle CEA$，和 $\angle ACE=\angle MCA$.

∴ $\triangle CAM \backsim \triangle CEA$.

则 $\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CA}{CM}$，即 $CA^2=CM\cdot CE$.



3·20 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=60°$，又 $AD=DC$. 求证：$BD^2=AB^2+BC^2$

（中国北京市数学竞赛，1996 年）

[证] 连 AC.

∵ $AD=DC$，$\angle ADC=60°$，

∴ $\triangle ADC$ 是正三角形，

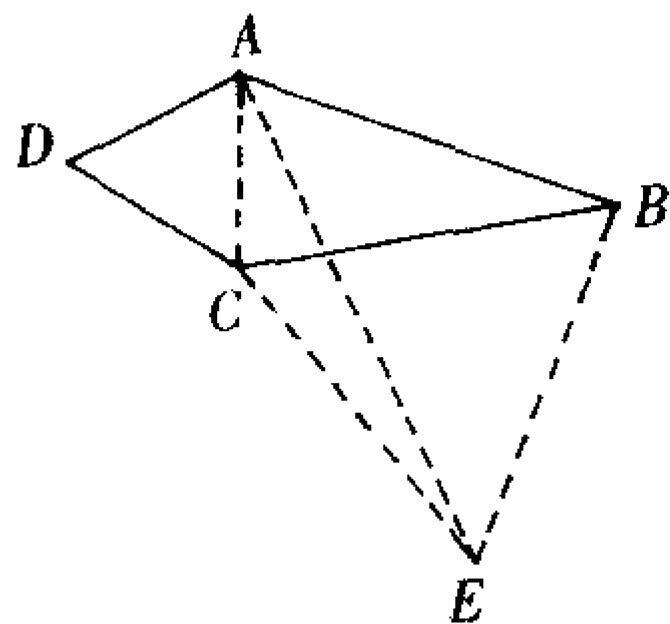
有 $DC=CA=AD$.

以 BC 为边向形外作等边 $\triangle BCE$，

即 $BC=BE=CE$，

则 $\angle BCE=\angle EBC=60°$，

$\angle ABE=\angle ABC+\angle EBC=90°$.



连 AE，在 Rt$\triangle ABE$ 中，由勾股定理，可得

$AE^2=AB^2+BE^2=AB^2+BC^2$.

易证 $\triangle ACE \cong \triangle DCB$，有 $AE=BD$.

因此 $BD^2=AB^2+BC^2$.

3·21 假设 AC 是平行四边形 $ABCD$ 的较长的对角线，从顶点 C 向 AB 边和 AD 边所在的直线引垂线 CE 和 CF，分别交 AB 与 AD 的延长线于 E、F，求证：$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$.

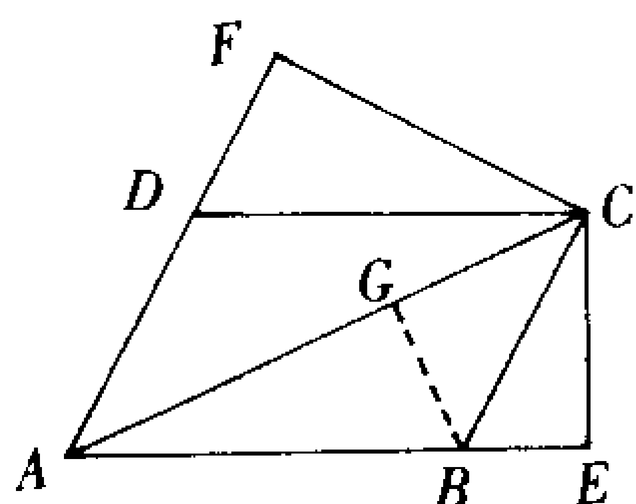
（匈牙利数学奥林匹克，1918 年）

[证] 过 B 作 $BG\perp AC$ 于 G. 又因为 $CE\perp AB$ 于 E，

则 $\angle BGC+\angle BEC=180°$，

∴ B、E、C、G 四点共圆，

由割线定理可得 $AB\cdot AE=AG\cdot AC$. ①



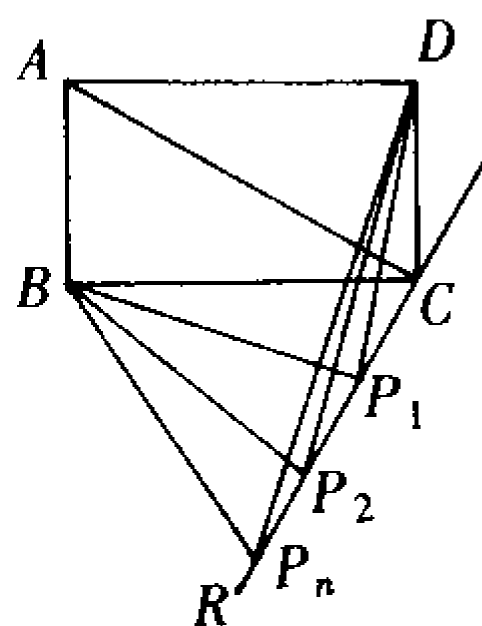
又因为 $BC /\!/ AD$，则 $\angle BCA = \angle CAF$.

由 $CF \perp AD$ 于 F，则 $\angle CFA = \angle BGC$，

于是 $\triangle CAF \backsim \triangle BCG$，有 $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{GC}{AF}$，

$\therefore \quad BC \cdot AF = AC \cdot GC$，

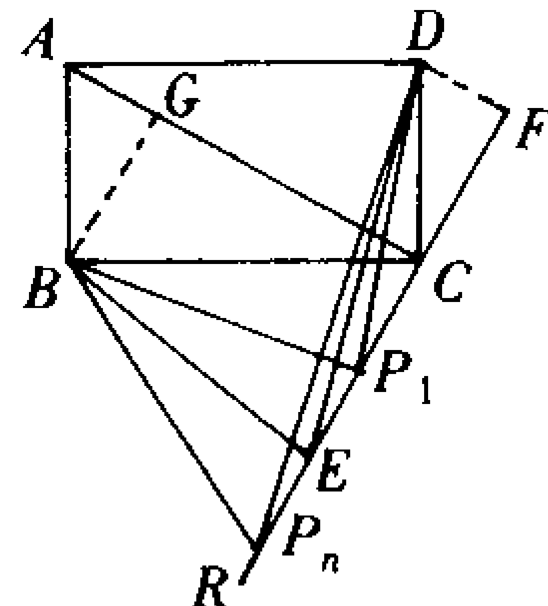
即 $AD \cdot AF = AC \cdot GC$. ②



①+②可得 $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC \cdot AG + AC \cdot GC = AC^2$.

3·22 如图,矩形 $ABCD$ 中,$AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$BC = \dfrac{3}{2}$,射线 CR 垂直于对角线AC,在 CR 上任取几个点 P_1,$P_2, \cdots, P_n$,满足 $CP_1 + CP_2 + \cdots + CP_n = \dfrac{n}{2}$. 连接 $P_kD, P_kB (k = 1, 2, \cdots, n)$,求证: $P_1B^2 + P_2B^2 + \cdots + P_nB^2 = P_1D^2 + P_2D^2 + \cdots + P_nD^2$.

(中国浙江省数学竞赛,1992 年)



[证 1] 作辅助线 $BE \perp RC$, $BG \perp AC$, $DF \perp RC$.

由已知条件易得

$$CE = CF = BG = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{3}{4},$$

及 $BC^2 - DC^2 = \dfrac{3}{2}$.

由勾股定理,得

$$\begin{aligned}
PB^2 - PD^2 &= EB^2 + PE^2 - (PF^2 + FD^2) \\
&= BC^2 - CE^2 + PE^2 - (PF^2 + DC^2 - CF^2) \\
&= BC^2 - DC^2 + PE^2 - PF^2 \\
&= \frac{3}{2} + (PE + PF)(PE - PF) \\
&= \frac{3}{2} + [(PC - CE) + (PC + CF)] \cdot [(PC - CE) \\
&\quad - (PC - CF)]
\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{2}-2EF\cdot PC=\frac{3}{2}-2\cdot\frac{3}{2}\cdot PC$$
$$=\frac{3}{2}(1-2PC).$$

上式对 CR 上任一点 P 均成立.从而有

$$(P_1B^2+P_2B^2+\cdots+P_nB^2)-(P_1D^2+P_2D^2+\cdots+P_nD^2)$$
$$=(P_1B^2-P_1D^2)+(P_2B^2-P_2D^2)+\cdots+(P_nB^2-P_nD^2)$$
$$=\frac{3}{2}(1-2P_1C)+\frac{3}{2}(1-2P_2C)+\cdots+\frac{3}{2}(1-2P_nC)$$
$$=\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}\cdot 2(P_1C+P_2C+\cdots+P_nC)$$
$$=\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}n=0.$$

故 $P_1B^2+P_2B^2+\cdots+P_nB^2=P_1D^2+P_2D^2+\cdots+P_nD^2$.

[证 2] 由余弦定理,得

$BP_i^2=BC^2+CP_i^2-2BC\cdot CP_i\cos 60°=BC^2+CP_i^2-BC\cdot CP_i$,

$DP_i^2=DC^2+CP_i^2-2DC\cdot CP_i\cos 150°=DC^2+CP_i^2+\sqrt{3}DC\cdot CD_i$,

以上 BP_i^2, DP_i^2 对 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立.

$\therefore$ $P_1B^2+P_2B^2+\cdots+P_nB^2$

$$=n\cdot BC^2+(CP_1^2+CP_2^2+\cdots+CP_n^2)-BC(CP_1+CP_2+\cdots+CP_n)$$
$$=\frac{3}{2}n+(CP_1^2+CP_2^2+\cdots+CP_n^2).$$

且 $P_1D^2+P_2D^2+\cdots+P_nD^2$

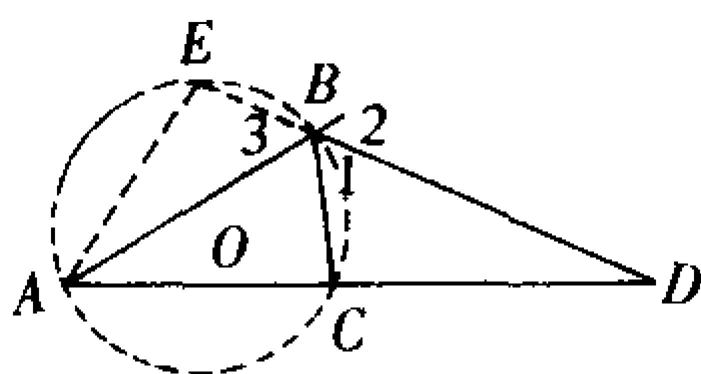
$$=n\cdot DC^2+(CP_1^2+CP_2^2+\cdots+CP_n^2)+\sqrt{3}DC(CP_1+CP_2+\cdots+CP_n)$$
$$=\frac{3}{2}n+(CP_1^2+CP_2^2+\cdots+CP_n^2).$$

从而 $P_1B^2+P_2B^2+\cdots+P_nB^2=P_1D^2+P_2D^2+\cdots+P_nD^2$.

3·23 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的外角平分线交 AC 的延长线于 D.求证: $AB\cdot BC-CD^2=AC\cdot CD-BD^2$.

(中国江苏省数学竞赛,1978 年)

[证] 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O,延长 DB 交 $\odot O$ 于 E,连 AE.



在$\triangle ABE$和$\triangle DBC$中，

$\because$ 四边形$ACBE$内接于圆，

$\therefore$ $\angle E=\angle BCD$，

又$\because$ $\angle 1=\angle 2, \angle 2=\angle 3$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$.

$\therefore$ $\triangle ABE \backsim \triangle DBC$， 有 $AB:BD=BE:BC$.

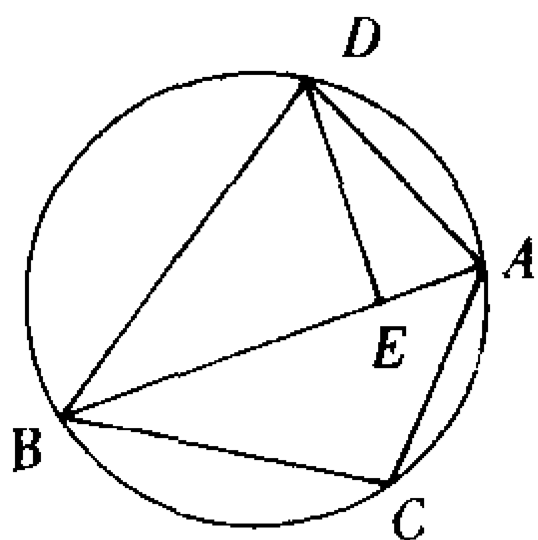
则 $AB\cdot BC=BD\cdot BE=BD(ED-BD)=BD\cdot ED-BD^2$.

$\because$ $BD\cdot ED=AD\cdot CD=(AC+CD)CD=AC\cdot CD+CD^2$

代入上式有

$AB\cdot BC=AC\cdot CD+CD^2-BD^2$

即 $AB\cdot BC-CD^2=AC\cdot CD-BD^2$.



3·24 如图，已知：圆内接$\triangle ABC$中，$AB>AC$，又D为$\overset{\frown}{BAC}$的中点，$DE\perp AB$于E. 求证：$BD^2-AD^2=AB\cdot AC$.

（中国天津市数学竞赛，1997年）

[证] 连CD.

$\because$ $BD^2=BE^2+DE^2$， $AD^2=AE^2+DE^2$，

$\therefore$ $BD^2-AD^2=BE^2-AE^2$

$=(BE+AE)(BE-AE)$

$=AB(BE-AE)$，

在BA上截取$BF=AC$，连DF.

$\because$ $BD=DC$， $\angle DBA=\angle DCA$，

$BF=AC$，

$\therefore$ $\triangle DBF\cong\triangle DCA$，得 $DF=DA$，

$\because$ $DE\perp AB$， $\therefore$ $AE=EF$.

从而 $BD^2-AD^2=AB(BE-AE)$

$=AB(BE-EF)=AB\cdot BF=AB\cdot AC$.

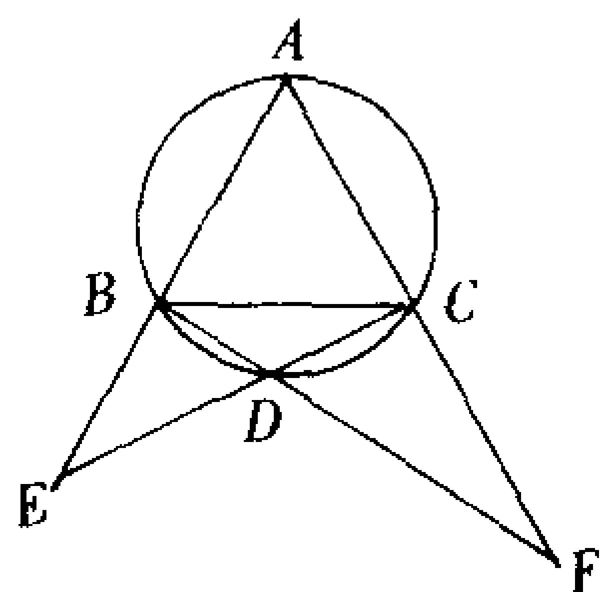
3·25 D为正$\triangle ABC$外接圆圆弧$\overset{\frown}{BC}$上的一点，AB和CD的延长线交于E点，AC和BD的延长线交于F点. 求证：线段BC为线段BE和CF的比例中项.

（中国北京市数学竞赛，1963年）

[证] $\because$ $\triangle ABC$为等边三角形， $\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，

且 $\angle E$ 的度数 $=\dfrac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC}}{2}$ 的度数 $=\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ 的度数，

及 $\angle FBC$ 的度数 $=\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ 的度数，



$\therefore\quad \angle E=\angle FBC$.

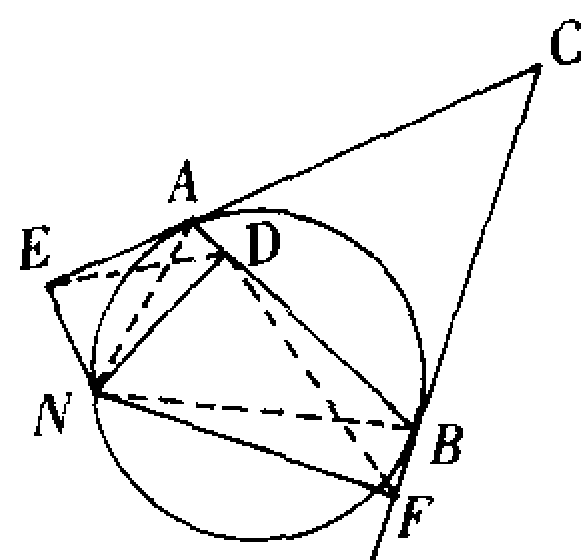
同理 $\angle F=\angle ECB$.

$\therefore\quad \triangle ECB\backsim\triangle BFC$,

有 $\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{BC}{FC}$.

即线段 BC 为线段 BE 和 CF 的比例中项.

3·26 由点 C 引圆 O 的切线 CA 和 CB，由圆周上任意一点 N 分别向直线 AB、CA 和 CB 作垂线 ND、NE 和 NF，垂足分别为 D、E、F，求证：ND 是 NE 和 NF 的比例中项.



（莫斯科数学奥林匹克，1952 年）

［证］ 连 AN、DE、BN 和 DF，如图.

由四点共圆的判定及圆周角性质，有

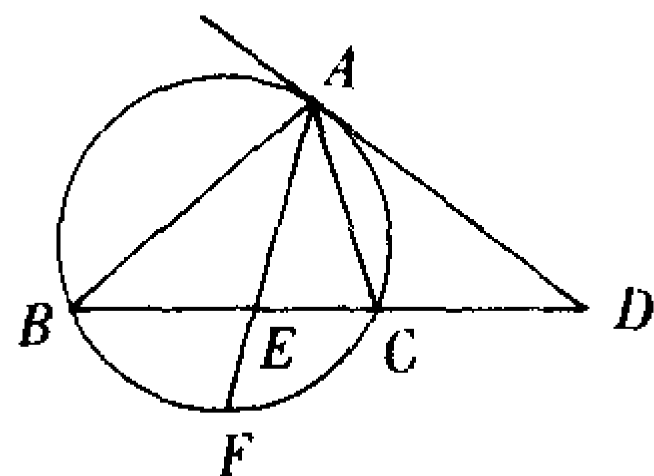
$\angle EDN=\angle EAN=\angle ABN=\angle DFN$,

及 $\angle DEN=\angle DAN=\angle NBF=\angle NDF$.

$\therefore\quad \triangle NDE\backsim\triangle NFD$,

$\therefore\quad \dfrac{ND}{NF}=\dfrac{NE}{ND}$， 故 $ND^2=NE\cdot NF$.

3·27 如图，过点 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线与 BC 的延长线交于 D，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 E，交圆于 F，若 $AC=CD$ 且 $EC\cdot BD=BE\cdot BC$，求证：$AE^2=AF\cdot EF$.



（中国安徽省合肥市数学竞赛，1990 年）

［证］ 连结 BF，则 $\triangle ABF\backsim\triangle BEF$，由此可得 $BF^2=AF\cdot EF$.

由 $AC=CD$，$\angle CAD=\angle ABC$，

可得 $AB=AD$.

由 $EC\cdot BD=BE\cdot BC$， 得 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BD}{BC}$.

由 $AD^2=BD\cdot CD$，得

$$BD=\frac{AD^2}{CD}=\frac{AB^2}{AC}.$$

从而有 $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB}{BC}.$

再由三角形内角平分线性质可得 $AB=BC$.

$\therefore\ AE=BE=BF$，故 $AE^2=AF\cdot EF$.

3·28 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=45°$,D为AC上一点且$\angle ADB=60°$,AB切$\triangle BCD$的外接圆于B,求证:$AD:DC=2:1$.

（中国黑龙江省齐齐哈尔市数学竞赛,1992年）

[证] 连OB、OC、OD,且OD与BC交于E.

由$\angle 4=2\angle DCB=90°$,又$AB\perp OB$,

则 $OD /\!/ AB$.

$\because\ \angle ABD=\angle ACB=45°$,

$\angle ABC=\angle ADB=60°$,

$\therefore\ \angle 3=2\angle DBC=30°$.

在等腰$\triangle OBC$中,$\angle BOC=120°$,

$\angle 1=\angle 2=30°$,

故 $EO=EC$.

在$Rt\triangle EOB$中，$\angle 1=30°$，因而 $BE=2OE$，于是 $BE:CE=2:1$.

$\therefore\ AD:DC=2:1$.

3·29 如图,已知:Q是圆内接四边形$ABCD$的对角线交点;PB、PD是圆的切线,P在直线AC上,求证:

(1)$\frac{QA}{QC}=\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$;(2)$\frac{QA}{QC}=\frac{PA}{PC}$.

（中国安徽省合肥市数学竞赛,1993年）

[证] 由题设可有

$$\frac{QA}{QC}=\frac{QA^2}{QC\cdot QA}=\frac{QA^2}{QB\cdot QD}=\frac{QA}{QB}\cdot\frac{QA}{QD}$$

$$=\frac{DA}{CB}\cdot\frac{BA}{CD}=\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$$

(2) $\because$ $\triangle PCD\backsim\triangle PDA$，$\therefore$ $\frac{PD^2}{PA^2}=\frac{DC^2}{DA^2}$，

则 $\frac{PC\cdot PA}{PA^2}=\frac{DC^2}{DA^2}$，即 $\frac{PC}{PA}=\frac{CD^2}{AD^2}$

同理 $\frac{PC}{PA}=\frac{CB^2}{AB^2}$.

故 $\left(\frac{PC}{PA}\right)^2=\frac{CD^2\cdot CB^2}{AD^2\cdot AB^2}$

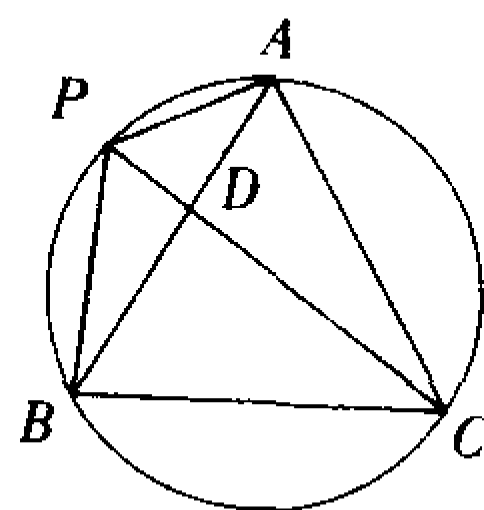
$\therefore$ $\frac{PA}{PC}=\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$，

$\therefore$ $\frac{QA}{QC}=\frac{PA}{PC}$.

3·30 已知：P 为正$\triangle ABC$ 外接圆的$\overset{\frown}{AB}$上一点，连结 PC 交 AB 于D，求证：$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PD}$.

（中国山西省数学竞赛，1990 年）

[证 1] 设$\angle APC=\angle\alpha$，$\angle BPC=\angle\beta$，有 $\angle\alpha=\angle\beta=60°$.



$\because$ $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}AP\cdot DP\cdot\sin\alpha$，

及 $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}BP\cdot DP\cdot\sin\alpha$，

和 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AP\cdot BP\cdot\sin(\alpha+\beta)$

$=\frac{1}{2}AP\cdot BP\cdot\sin\alpha$.

$\therefore$ $AP\cdot DP+BP\cdot DP=AP\cdot BP$.

则 $\frac{DP}{BP}+\frac{DP}{AP}=1$，即 $\frac{1}{AP}+\frac{1}{BP}=\frac{1}{DP}$.

[证 2] 由托勒密定理有（见图）

$PC\cdot AB=PA\cdot BC+AC\cdot PB$，

又 $AB=AC=BC$，上式两边同除 AB 有

$PC=PA+PB$. ㊟

$\because\quad \angle APC=\angle BPC,\ \angle ABP=\angle ACP.$

$\therefore\quad \triangle BDP\backsim\triangle CAP$，有 $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PD}{PB}$，

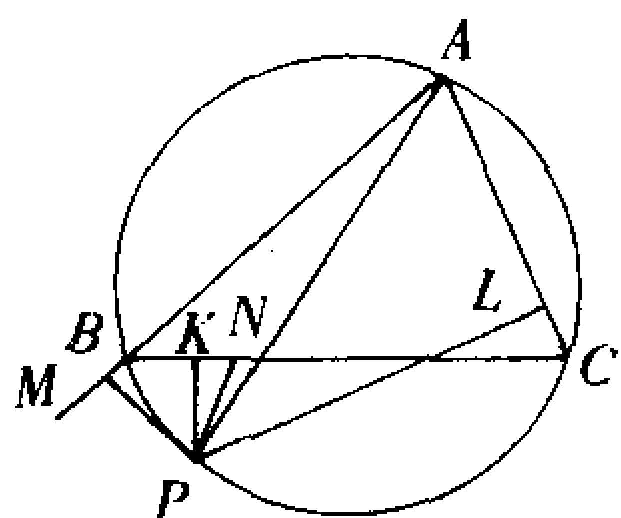
即 $PD\cdot PC=PA\cdot PB$，用它除㊉式两边有

$\dfrac{1}{PD}=\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PA}$，即 $\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}=\dfrac{1}{PD}.$

3·31 由$\triangle ABC$外接圆的弧$\overset{\frown}{BC}$上一点P分别向边BC、AC与AB作垂线PK、PL与PM. 求证：$\dfrac{BC}{PK}=\dfrac{AC}{PL}+\dfrac{AB}{PM}.$

（第21届国际数学奥林匹克候选题，1979年）

［证］ $\because \angle PCB<\angle PCA=180^\circ-\angle PBA<180^\circ-\angle PBC.$



$\therefore$在线段BC上存在一点N，使得$\angle PNB=\angle PCA$.

于是由 $\angle PBC=\angle PAC,\ \angle PCB=\angle PAB,$

又$\because \angle PNC=180^\circ-\angle PNB=\angle PBA.$

$\therefore\quad \triangle BPN\backsim\triangle APC,\ \triangle CPN\backsim\triangle APB.$

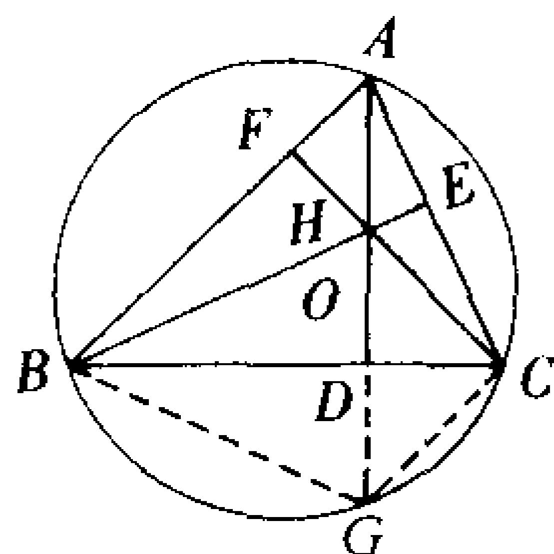
由相似三角形对应高的比等于相似比得

$$\frac{AC}{PL}=\frac{BN}{PK},\ \frac{AB}{PM}=\frac{CN}{PK},$$

将以上两式相加得

$$\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}=\frac{BN+CN}{PK}=\frac{BC}{PK}.$$

3·32 如图，$\triangle ABC$的三条高为AD、BE、CF，垂心为H，a、b、c分别为三内角A、B、C的对边. 求证：(1) $\triangle ABC$的外接圆半径与$\triangle HBC$的外接圆半径相等；(2) $AD\cdot AH+BE\cdot BH+CF\cdot CH=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.$



（中国重庆市数学竞赛，1978年）

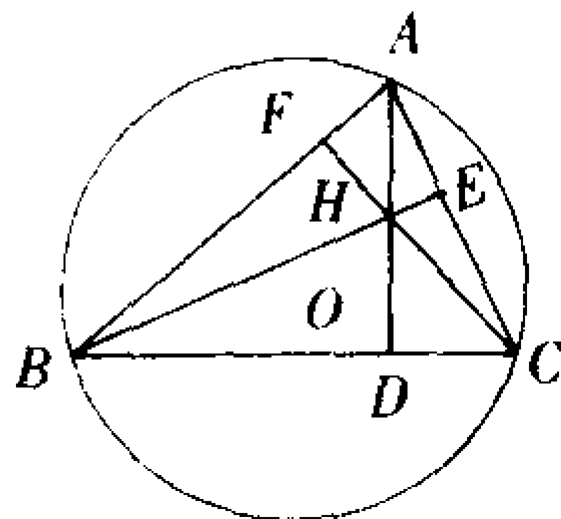
［证］ (1)作$\triangle ABC$的外接圆，设圆心为O，延长AD交$\odot O$于G，连BG、CG.

$\because\quad \angle BCG=\angle BAG,\ \angle BAD=\angle BCF,$

$\therefore\quad \angle BCG=\angle BCF$.

同理 $\angle CBG=\angle CBE$.

又 $BC=BC$，$\therefore\quad \triangle BHC\cong\triangle BGC$.



则 $\triangle BHC$ 的外接圆半径与$\triangle BGC$ 的外接圆半径相等.

而 A、B、G、C 四点在同一个圆上，所以，$\triangle ABC$ 的外接圆半径与$\triangle BGC$ 的外接圆半径相等.

故 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与$\triangle HBC$ 的外接圆半径相等.

(2) $\because H$、D、C、E 四点共圆，

$\therefore\quad AD\cdot AH=AC\cdot AE$. $\because\quad H$、D、B、F 四点共圆，

$\therefore\quad AD\cdot AH=AB\cdot AF$.

$\therefore\quad AD\cdot AH=AC\cdot AE=AB\cdot AF$,

$$\therefore\quad AD\cdot AH=\frac{1}{2}(AC\cdot AE+AB\cdot AF). \quad ①$$

同理 $$BE\cdot BH=\frac{1}{2}(BA\cdot BF+BC\cdot BD), \quad ②$$

且 $$CF\cdot CH=\frac{1}{2}(CB\cdot CD+CA\cdot CE), \quad ③$$

①+②+③,得

$$\begin{aligned}
&AD\cdot AH+BE\cdot BH+CF\cdot CH\\
=&\frac{1}{2}(AC\cdot AE+AB\cdot AF+BA\cdot BF+BC\cdot BD+CB\cdot CD+CA\cdot CE)\\
=&\frac{1}{2}[AC(AE+EC)+AB(AF+FB)+BC(BD+DC)]\\
=&\frac{1}{2}(AC\cdot AC+AB\cdot AB+BC\cdot BC)\\
=&\frac{1}{2}(AC^2+AB^2+BC^2).
\end{aligned}$$

而 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，

故 $$AD\cdot AH+BE\cdot BH+CF\cdot CH=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

3·33 三角形的"类似中线"是指这样的直线,它经过三角形的一个顶点且与这顶点的中线关于过这个顶点的角的平分线对称. 在$\triangle ABC$ 中,中线 m_a 交 BC 于A',又交外接圆于 A_1,类似中线 S_a 交 BC

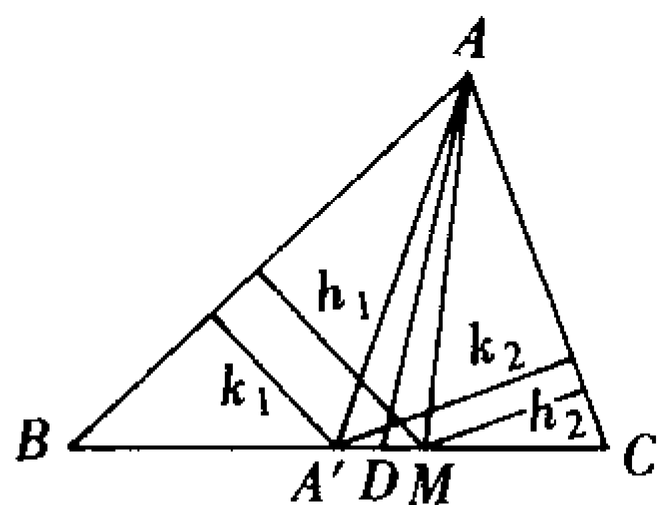
于 M,又交外接圆于 A_2,O 为外心,若 A_1、O_1、A_2 共线,求证:(1)$\frac{AA'}{AM}=\frac{b^2+c^2}{2bc}$;(2)$(b^2+c^2)^2+4b^2c^2=a^2(b^2+c^2)$,这里 a、b、c 分别表示 BC、CA、AB 边的长.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[证] (1)首先证明关于"类似中线"的这样一个结果:

若 AM 为 BC 边的类似中线,且 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$,

则 $\frac{MC}{BM}=\frac{b^2}{c^2}$.



设 AA' 是 BC 边的中线,AD 为角 A 的平分线,$\angle BAA'=\angle CAM=\alpha$,$\angle A'AM=\beta$,

A' 到 AB、AC 的距离为 k_1、k_2,

M 到 AB、AC 的距离为 h_1、k_2,则

$$\frac{h_1}{k_2}=\frac{AM\sin(\alpha+\beta)}{AA'\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AM}{AA'},$$

$$\frac{h_2}{k_1}=\frac{AM\sin\alpha}{AA'\sin\alpha}=\frac{AM}{AA'}.$$

$$\therefore \quad \frac{h_1}{k_2}=\frac{h_2}{k_1},\ \text{且}\quad \frac{h_1}{h_2}=\frac{k_2}{k_1}=\frac{c}{b}.$$

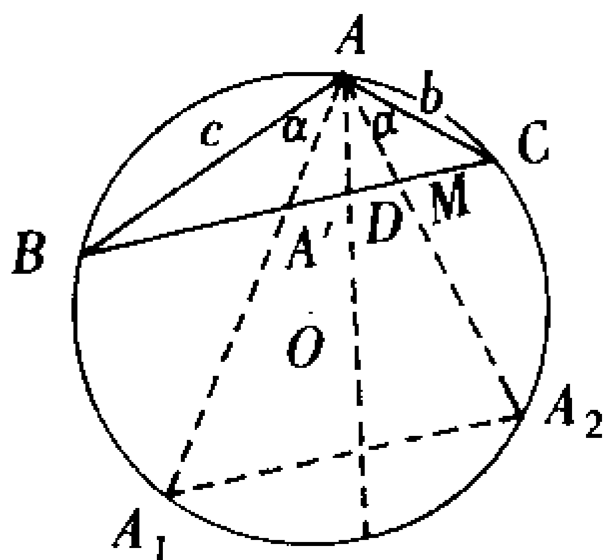
$$\text{故}\quad \frac{MC}{BM}=\frac{h_2\sin\beta}{h_1\sin c}=\frac{b^2}{c^2}.$$

下面证明本题.

由上面的结论 $MC=\frac{ab^2}{b^2+c^2}$.

又由三角形内角平分线定理

$$DC=\frac{ab}{b+c},\quad BD=\frac{ac}{b+c}.$$



$$\therefore \quad DM=DC-MC=\frac{ab}{b+c}-\frac{ab^2}{b^2+c^2}$$

$$=\frac{abc(c-b)}{(b+c)(b^2+c^2)}.$$

$$A'D = BD - BA' = \frac{ac}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{a(c-b)}{2(b+c)}.$$

因为 AD 也是$\angle A'AM$ 的平分线，

所以 $$\frac{AA'}{AM} = \frac{A'D}{DM} = \frac{b^2+c^2}{2bc}. \quad ①$$

(2)由于 A_1、O、A_2 共线，所以 A_1A_2 为直径，$\angle A_1AA_2 = 90°$.

有 $$A'M^2 = A'A^2 + AM^2. \quad ②$$

又 $$A'M = A'C - MC = \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{b^2+c^2} = \frac{a(c^2-b^2)}{2(c^2+b^2)}. \quad ③$$

由①及中线公式

$$\begin{aligned} A'A^2 + AM^2 &= A'A^2\left[1 + \left(\frac{AM}{A'A}\right)^2\right] \\ &= \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\left[1 + \left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{(2b^2+2c^2-a^2)[(b^2+c^2)^2+4b^2c^2]}{4(b^2+c^2)^2} \end{aligned} \quad ④$$

由②、③、④得

$a^2(c^2-b^2)^2 = (2b^2+2c^2-a^2)[(b^2+c^2)^2+4b^2c^2]$.

$\therefore \quad 2a^2(b^2+c^2)^2 = 2(b^2+c^2)[(b^2+c^2)^2+4b^2c^2]$.

即 $a^2(b^2+c^2) = (b^2+c^2)^2 + 4b^2c^2$.

3·34 过锐角$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的三个高分别交其对边于点 D、E、F. 过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC、AB 于点 Q 和 R，EF 交 BC 于点 P. 证明：$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

[证] 点 P 的存在意味着 $AB \neq AC$. 由对称性，可设 $AB > AC$，则 P、D 在射线 MC 上，点 B、C、E、F 共圆，因此，$PB \cdot PC = PE \cdot PF$. 垂足$\triangle DEF$ 的外接圆也即$\triangle ABC$ 的欧拉圆（九点圆）必过 BC 的中点 M.

因此 $PE \cdot PF = PD \cdot PM$.

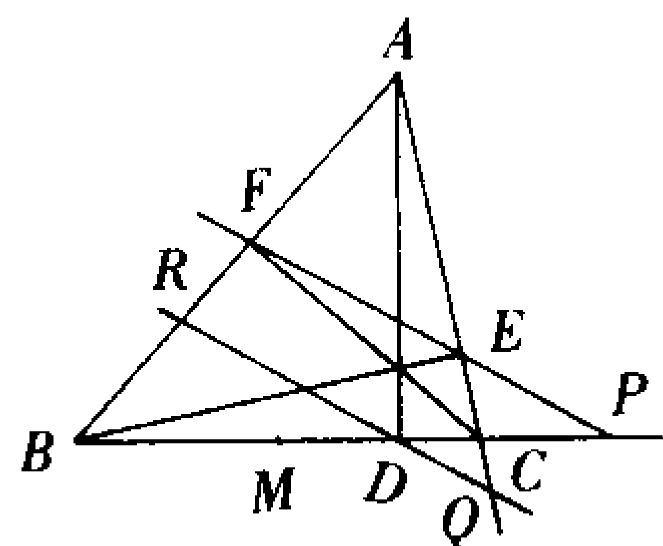
所以 $$PB \cdot PC = PD \cdot PM. \quad ①$$

$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，因此 $\angle ABC = \angle AEF$.

$\because \quad QD /\!/ EF$，

$\therefore \quad \angle AEF = \angle CQD$，$\angle ABC = \angle RBD$.

因而 $\angle RBD = \angle CQD$.



显然　$\angle BDR=\angle QDC$,

故　$\triangle BDR \backsim \triangle QDC$.

$\therefore$　$DQ \cdot DR = DB \cdot DC$.

如能证明　$DB \cdot DC = DP \cdot DM$,　②

则等式　$DQ \cdot DR = DP \cdot DM$ 成立,也就证明了 Q、R、M、P 共圆.

由此,证明本题就简化为由①化为②.

令　$MB=MC=a$, $MD=d$, $MP=p$,

则有　$PB=p+a$, $DB=a+d$, $PC=p-a$, $DC=a-d$, $DP=p-d$.

由①得　$(p+a)(p-a)=(p-d)p$, 即　$a^2=dp$.

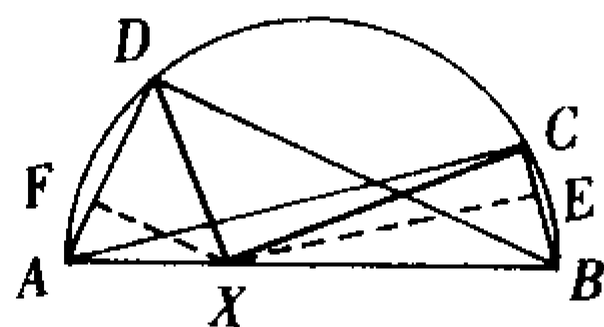
由②　$(a+d)(a-d)=(p-d)d$, 也得　$a^2=dp$. $\therefore$　②成立.

注　可考虑本题的另一种表述:

设$\triangle ABC$是$\angle A \neq 90°$的三角形.过 A、B、C 的三条高线分别交对边于点 D、E、F.过 D 且平行于EF的直线分别交AC、AB于点Q和R,EF交BC于P,M是BC的中点.证明点P、Q、R、M共圆.

3·35　D、C 为以AB为直径的半圆上的两点,X为AB上任意一点,试证:$\operatorname{tg}\angle ACX \cdot \operatorname{tg}\angle BDX = \operatorname{tg}\angle BAC \cdot \operatorname{tg}\angle ABD$.

(中国上海市数学竞赛,1957年)



[证]　作 BC、AD.并过 X 作$XE/\!/AC$与BC相交于E,$XF/\!/BD$与AD相交于F.则

$\angle ACX=\angle CXE$, $\angle BDX=\angle DXF$,

$\angle BAC=\angle BXE$, $\angle ABD=\angle FXA$.因而

$$\operatorname{tg}\angle ACX \cdot \operatorname{tg}\angle BDX = \operatorname{tg}\angle CXE \cdot \operatorname{tg}\angle DXF = \frac{EC}{XE}\cdot\frac{FD}{FX}. \quad ①$$

$$\operatorname{tg}\angle BAC \cdot \operatorname{tg}\angle ABD = \operatorname{tg}\angle BXE \cdot \operatorname{tg}\angle FXA = \frac{BE}{XE}\cdot\frac{AF}{FX}. \quad ②$$

又　$\dfrac{EC}{BE}=\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{AF}{FD}$.

即　$EC \cdot FD = BE \cdot AF$.　③

所以①、②的右端相等,

$\therefore$　$\operatorname{tg}\angle ACX \cdot \operatorname{tg}\angle BDX = \operatorname{tg}\angle BAC \cdot \operatorname{tg}\angle ABD$.

3·36　设 r 与 h_a 分别表示$\triangle ABC$的内切圆半径和BC上的高，r_a表示与BC边相切且与AB、AC延长线相切的旁切圆半径，求证：$h_a=\frac{2r_ar}{r_a-r}$.

（中国湖北省武汉市数学竞赛，1957年）

[证]　设$\triangle ABC$的面积为$\triangle$，半周长为s.

则　$r=\frac{\triangle}{s}$，$r_a=\frac{\triangle}{s-a}$.

$$\therefore\quad \frac{2r_ar}{r_a-r}=\frac{2\cdot\frac{\triangle}{s}\cdot\frac{\triangle}{s-a}}{\frac{\triangle}{s-a}-\frac{\triangle}{s}}=\frac{2\triangle}{s-(s-a)}=\frac{2\triangle}{s}=h_a.$$

3·37　$\triangle ABC$中，a、b、c是三角A、B、C的对边. R、r分别是三角形的外接圆、内切圆半径，s是半周长. 求证：$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=4R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}$.

（中国福建省福州市数学竞赛，1963年）

[证1]　$\because\quad \triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=sr=\frac{abc}{4R}$,

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-a}+\frac{r}{s-b}+\frac{r}{s-c}$$

$$=\frac{r(ab+bc+ca-s^2)}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}}-\frac{s^2}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{\frac{abc}{4R}}-\frac{s^2}{sr}$$

$$=4R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}.$$

[证2]　$4R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}$

$$=\frac{4R}{a}+\frac{4R}{b}+\frac{4R}{c}-\left(\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r}\right)$$

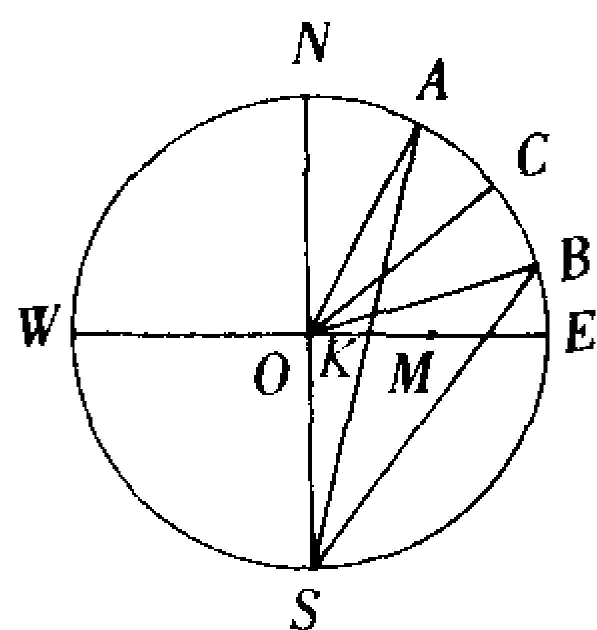
$$=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}+\frac{2}{\sin C}-\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}+\frac{2}{\sin C}-\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$=\frac{2\left(1-\cos^2\frac{A}{2}\right)}{\sin A}+\frac{2\left(1-\cos^2\frac{B}{2}\right)}{\sin B}+\frac{2\left(1-\cos^2\frac{C}{2}\right)}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$



3·38　如图，WE 和 SN 是圆 O 的互相垂直的直径，二弦 SA、SB 各与 WE 交于 K、L，设⊙O 的半径为 R，$KM=ML=r$，$OM=d$，$\angle EOC=\alpha$，$\angle BOC=\angle COA=\beta$. 求证：$r=\dfrac{r\sin\beta}{\sin\alpha+\cos\beta}$；$d=\dfrac{R\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

（中国四川省数学竞赛，1978 年）

[证]　$\because$　$OA=OB=OS=R$，在等腰△OBS 和等腰△OAS 中，设底角　$\theta=\angle OAS=\angle OSA$，$\varphi=\angle OBS=\angle OSB$，

则　$\theta=45°-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$\varphi=45°-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

令　$\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\phi_1$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\phi_2$，则　$\phi_1+\phi_2=\alpha$，$\phi_2-\phi_1=\beta$.

于是　$d=\dfrac{1}{2}(OL+OK)=\dfrac{R}{2}(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\theta)$

$$=\frac{R}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)$$

$$=R\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\phi_1\operatorname{tg}\phi_2}{(1+\operatorname{tg}\phi_1)(1+\operatorname{tg}\phi_2)}$$

$$=R\cdot\frac{\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2}{\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2+\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2}$$

$$=R\cdot\frac{\cos(\phi_1+\phi_2)}{\cos(\phi_2-\phi_1)+\sin(\phi_1+\phi_2)}$$

$$=\frac{R\cos\alpha}{\cos\beta+\sin\alpha}.$$

类似地有 $r=\frac{1}{2}(OL-OK)=\frac{R}{2}(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta)$

$$=\frac{R}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}\phi_1}{1+\operatorname{tg}\phi_1}-\frac{1-\operatorname{tg}\phi_2}{1+\operatorname{tg}\phi_2}\right)$$

$$=R\,\frac{\cos\phi_1\sin\phi_2-\sin\phi_1\cos\phi_2}{\cos\beta+\sin\alpha}$$

$$=\frac{R\sin\beta}{\cos\beta+\sin\alpha}.$$

3·39 设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一内点，r_1、r_2、r 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径，q_1、q_2、q 分别是这些三角形的在 $\angle ACM$、$\angle BCM$、$\angle ACB$ 内的旁切圆半径，试证：$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

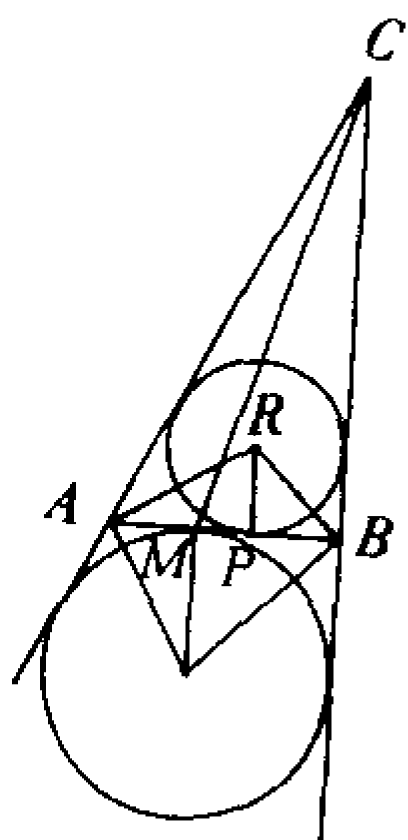
（第 12 届国际数学奥林匹克，1970 年）

［证］ 设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，$\angle AMC=\delta$. 又设 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心为 R，且与 AB 边切于 P.

于是 $\angle APR=\angle BPR=\frac{\pi}{2}$，

从而有 $AB=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

$$=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right). \qquad ①$$



由于三角形的内、外角的平分线互相垂直,故有

$$AB=q\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right). \qquad ②$$

由①和②可得

$$\frac{r}{q}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad ③$$

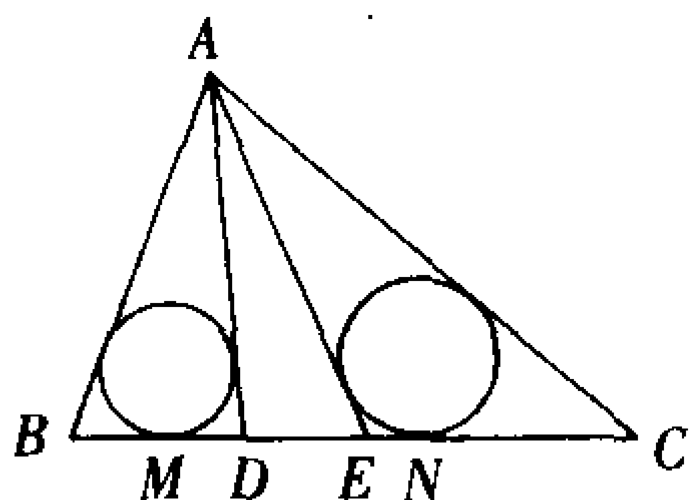
类似的结论对于$\triangle AMC$和$\triangle BMC$也成立,故有

$$\frac{r_1}{q_1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \qquad ④$$

$$\frac{r_2}{q_2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \qquad ⑤$$

将④、⑤相乘并利用③得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}.$$



3·40 设点D和E是$\triangle ABC$的边BC上的两点,使得$\angle BAD=\angle CAE$,又设M和N分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACE$的内切圆与BC的切点,求证:$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}$.

(第34届国际数学奥林匹克预选题,1993年)

[证] 证 $AB=c,AC=b,\angle BAD=\angle CAE=\alpha$.

∵ M、N分别为$\triangle ABD$和$\triangle AEC$的内切圆与BC的切点,

∴ $MD=\frac{1}{2}(AD+BD-c)$, $MB=\frac{1}{2}(c+BD-AD)$, ①

$NC=\frac{1}{2}(b+CE-AE)$, $NE=\frac{1}{2}(AE+CE-b)$. ②

为证题目结论,只需证明

$$BD\cdot NE\cdot NC=CE\cdot MB\cdot MD.$$

将①、②代入上式,得到

$$BD(AE+CE-b)(b+CE-AE)$$

$= CE(c + BD - AD)(AD + BD - c)$,

$BD(CE^2 - b^2 - AE^2 + 2bAE)$

$= CE(BD^2 - c^2 - AD^2 + 2c \cdot AD)$. ③

在△ABD、△ACE 中分别应用正弦定理有

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin B}, \quad \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin C}.$$

$\therefore \quad BD \cdot AE \cdot \sin B = CE \cdot AD \cdot \sin C$.

$\therefore \quad b \cdot BD \cdot AE = c \cdot CE \cdot AD$. ④

将④代入③,便知只需证明

$BD(CE^2 - b^2 - AE^2) = CE(BD^2 - c^2 - AD^2)$. ⑤

在△ABD 和△ACE 中分别应用余弦定理有

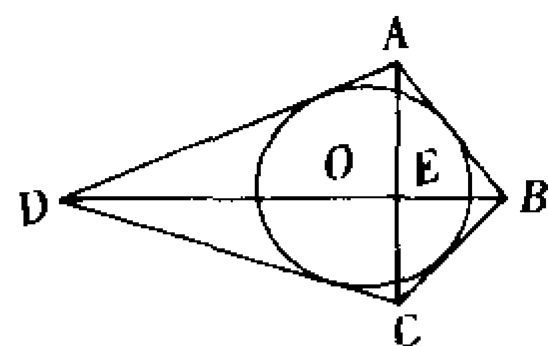
$BD^2 - c^2 - AD^2 = -2c \cdot AD \cdot \cos\alpha$,

$CE^2 - b^2 - AE^2 = -2b \cdot AE \cdot \cos\alpha$.

$$\therefore \quad \frac{CE^2 - b^2 - AE^2}{b \cdot AE} = \frac{BD^2 - c^2 - AD^2}{c \cdot AD}. \quad ⑥$$

将④与⑥两端分别相乘即得⑤式.

3·41 已知:四边形 ABCD 外切于圆 O,且对角线 AC 和 BD 互相垂直,求证:$AB \cdot CD = BC \cdot AD$.



(中国部分省市初中数学竞赛,1985 年)

[证] $\because$ ABCD 为圆外切四边形,

$\therefore \quad AB + CD = BC + DA$.

上式两边平方,得

$AB^2 + 2AB \cdot CD + CD^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot DA + DA^2$. ①

设 AC 与 BD 交点为 E.

$\because \quad AC \perp BD$,

$\therefore \quad AB^2 = AE^2 + BE^2, \quad BC^2 = BE^2 + CE^2$,

及 $CD^2 = CE^2 + DE^2, \quad AD^2 = DE^2 + AE^2$.

$\therefore \quad AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. ②

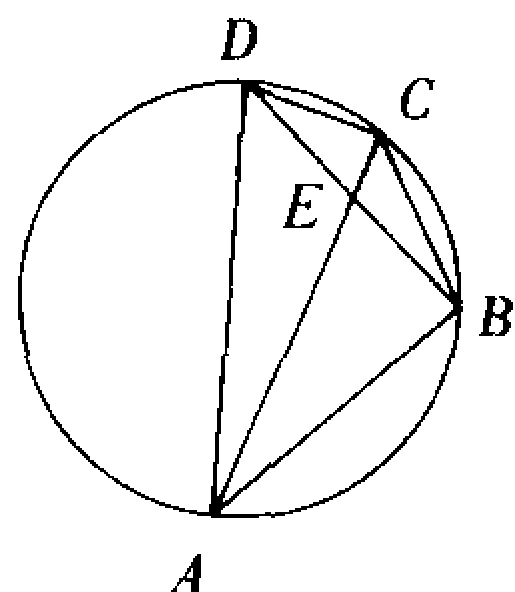
① - ②得 $2AB \cdot CD = 2BC \cdot DA$.

$\therefore \quad AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

3·42 设 ABCD 为圆内接四边形,对角线 AC 平分 BD 于 E,试

证：$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$.

（中国北京市数学竞赛，1957年）



［证1］ 由 $ABCD$ 为圆内接四边形易得

$\triangle AEB \backsim \triangle DEC$，$\triangle AED \backsim \triangle BEC$，

$\therefore \quad AB:DC=BE:CE$，$AD:BC=DE:CE$.

由于 $\quad BE=DE$，$\therefore \quad AB:DC=AD:BC$，

即 $\quad AB\cdot BC=AD\cdot DC$.

（由 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$ 也易证得此等式）

又由余弦定理

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC,$$

$$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC,$$

而 $\quad \cos\angle ABC=-\cos\angle ADC$，

故得 $\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$.

［证2］ 由三角形的边与中线的关系得

$$AB^2+AD^2=2BE^2+2AE^2,$$

$$BC^2+CD^2=2CE^2+2BE^2.$$

上两式两边相加，得

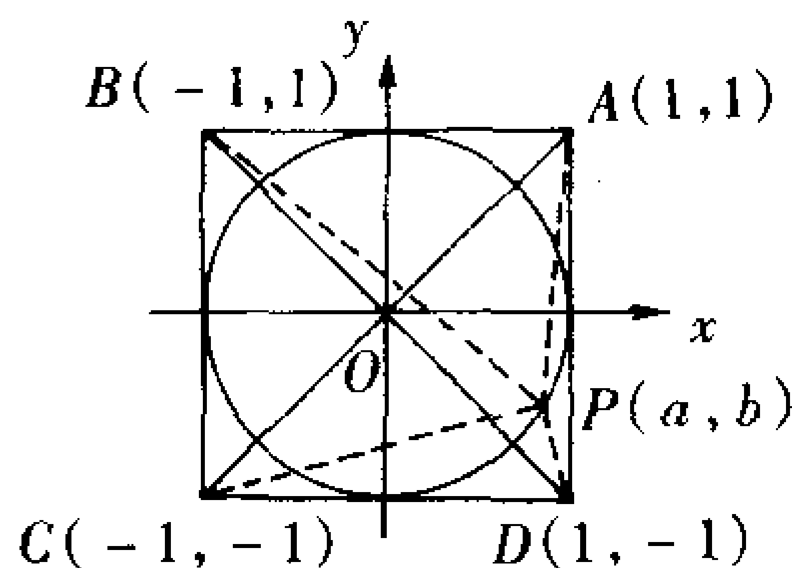
$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CD^2+AD^2&=2(AE^2+2BE^2+CE^2)\\&=2(AE^2+2AE\cdot CE+CE^2)\\&=2(AE+CE)^2=2AC^2.\end{aligned}$$

3·43 设正方形的内切圆上任一点对两条对角线的视角为 α、β，求证：$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=8$.

（中国福建省福州市数学竞赛，1963年）

［证1］ 如图建立直角坐标系，并设正方形边长等于2，其内切圆上任一点 P 的坐标为 (a,b)，则

$$a^2+b^2=1.$$



令 $\quad \angle APC=\alpha$，$\angle BPD=\beta$.

$\because \quad$ 直线 PA、PB、PC、PD 的斜率分别为：

$$k_1=\frac{b-1}{a-1},\quad k_2=\frac{b-1}{a+1},$$

$$k_3=\frac{b+1}{a+1},\quad k_4=\frac{b+1}{a-1}.$$

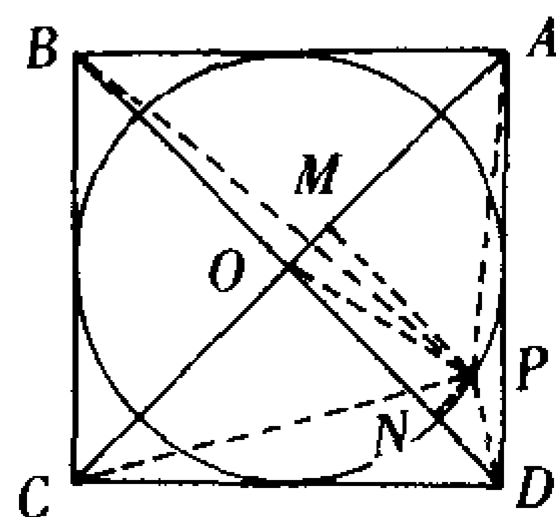
$$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\alpha=\left(\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}\right)^2=\left(\frac{\frac{b-1}{a-1}-\frac{b+1}{a+1}}{1+\frac{b-1}{a-1}\cdot\frac{b+1}{a+1}}\right)^2=4(a-b)^2.$$

同理可求得　$\mathrm{tg}^2\beta=4(a+b)^2$.

$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=4(a-b)^2+4(a+b)^2=8(a^2+b^2)=8.$

[证 2]
$$\cos\alpha=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{2(AO^2+PO^2)-AC^2}{2PA\cdot PC}=-\frac{1}{PA\cdot PC}.$$

作 $PM\perp AC$, $PN\perp BD$,垂足分别为 M、N.



又
$$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot PC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot PM,$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}PM}{PA\cdot PC},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}PM.$$

同理　$\mathrm{tg}\beta=-\sqrt{2}PN$.

$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=8(PM^2+PN^2)=8.$

3·44　在圆周上选取 5 个点 A_1、A_2、A_3、A_4 和 H. 将点 H 到直线 A_iA_j 的距离记作 h_{ij}. 证明:$h_{12}\cdot h_{34}=h_{14}\cdot h_{23}$.

(莫斯科数学奥林匹克,1983 年)

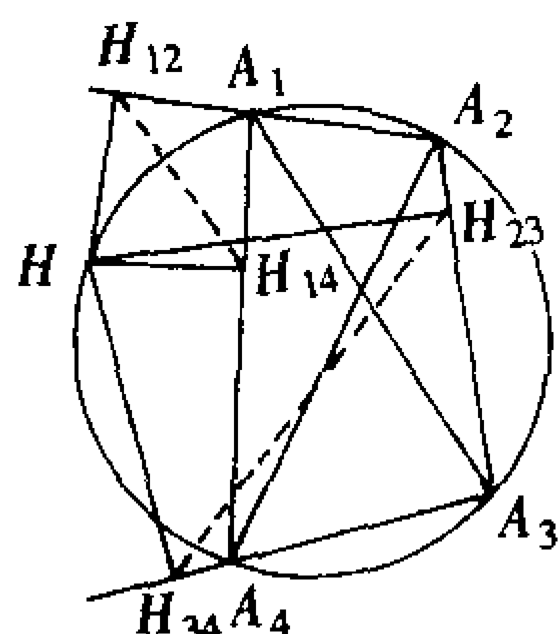
[证]　今作辅助线如图所示. 由四点共圆条件知

$\because\quad H$、H_{34}、A_3、H_{23}四点共圆,

$\therefore\quad \angle HH_{34}H_{23}=\angle HA_3H_{23}=\angle HA_4A_2=\angle HA_1H_{12}.$

又　H、H_{12}、A_1、H_{14}四点共圆,

$\therefore\quad \angle HH_{12}H_{14}=\angle HA_1H_{14}=\angle HA_2A_4=\angle HA_3A_4=\angle HH_{23}H_{34}$(注意到 H、H_{23}、A_3、H_{34}四点共圆).

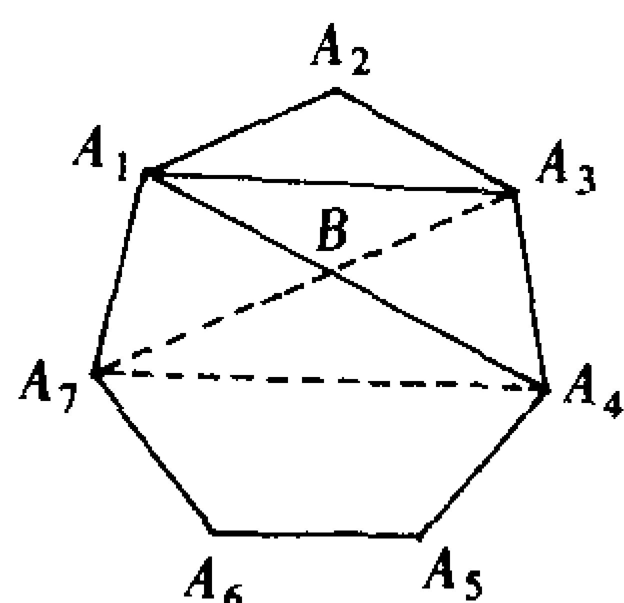


$\therefore\quad \triangle HH_{12}H_{14} \backsim \triangle HH_{23}H_{34}$,

有 $\dfrac{h_{12}}{h_{23}}=\dfrac{h_{14}}{h_{34}}$， 故 $h_{12}h_{34}=h_{14}h_{23}$.

3·45 给定正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. 求证：$\dfrac{1}{A_1A_2}=\dfrac{1}{A_1A_3}+\dfrac{1}{A_1A_4}$.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）



［**证**］ 如图，连结 A_4A_7、A_3A_7 与 A_1A_4 交于点 B. 易知 $A_1A_2A_3B$ 是平行四边形.

又 $A_1A_2=A_2A_3$，所以 $A_1A_2A_3B$ 是菱形.

又 $A_1A_4=A_4A_7$，$A_1A_3 /\!/ A_7A_4$.

有 $\triangle A_1BA_3 \backsim \triangle A_4BA_7$,

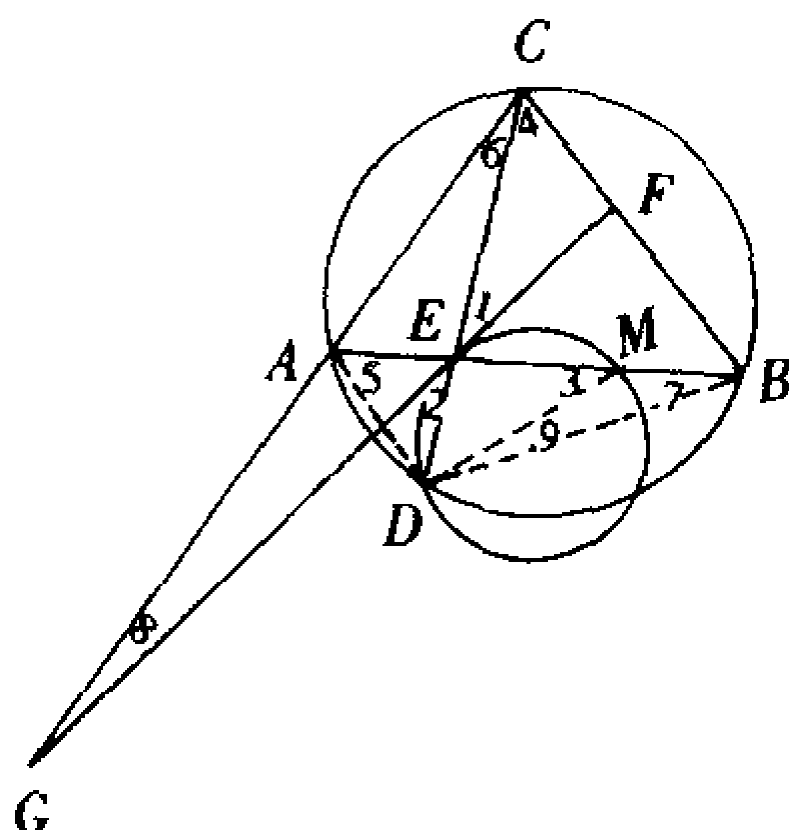
$\therefore\quad \dfrac{A_1B}{A_1A_3}=\dfrac{A_4B}{A_4A_7}$

即 $\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3}=\dfrac{A_1A_4-A_1A_2}{A_1A_4}$ 或 $\dfrac{1}{A_1A_3}=\dfrac{1}{A_1A_2}-\dfrac{1}{A_1A_4}$,

因而 $\dfrac{1}{A_1A_2}=\dfrac{1}{A_1A_3}+\dfrac{1}{A_1A_4}$.

3·46 设圆内两弦 AB、CD 交于圆内一点 E，在直线段 EB 的内部取一点 M，然后过 D、E、M 作圆，再过 E 作此圆的切线分别交直线 BC、AC 于点 F，G，若 $\dfrac{AM}{AB}=t$，试用 t 表示 $\dfrac{EG}{EF}$.

（第 31 届国际数学奥林匹克，1990 年）



［**解 1**］ 如图，连 DA、DM、DB.

因为 GE 切小圆于 E，则

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$,

$\because\quad \angle 4=\angle 5$,

$\therefore\quad \triangle CEF \backsim \triangle AMD$,

得 $\dfrac{MD}{EF}=\dfrac{AM}{CE}$,

即有 $CE\cdot MD=AM\cdot EF$. ①

$\because\quad \angle 6=\angle 7$， $\angle 9=\angle 3-\angle 7$,

$\angle 8=\angle 2-\angle 6$,

$\therefore\quad \angle 8=\angle 9$.

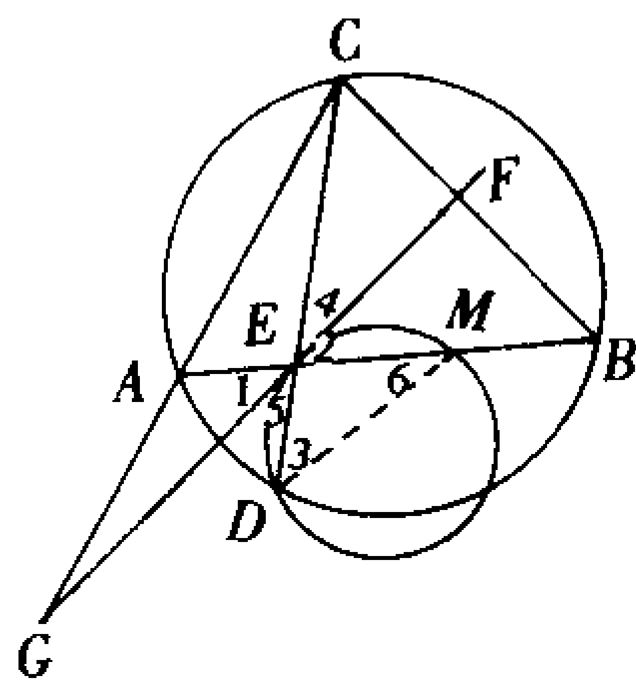
由 $\triangle CGE \backsim \triangle BDM$，有 $\dfrac{GE}{DM}=\dfrac{CE}{BM}$,

即 $CE \cdot DM=EG \cdot BM$. ②

由①、②得 $EG \cdot BM=AM \cdot EF$. 即 $\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{AM}{BM}$

$\because\quad \dfrac{AM}{AB}=t$, $\therefore\quad \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{t}{1-t}$.

故 $\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{t}{1-t}$.



[解 2] 如图,由 GE 为切线所得

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，及 $\angle 4=\angle 5=\angle 6$.

于是有 $\dfrac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle EFC}}=1+\dfrac{S_{\triangle EFB}}{S_{\triangle EFC}}$

$$=1+\frac{S_{\triangle EFB}}{S_{\triangle EFC}} \cdot \frac{S_{\triangle DME}}{S_{\triangle DME}}$$

$$=1+\frac{EF \cdot BE \cdot \sin\angle 2}{DE \cdot MD \cdot \sin\angle 3} \cdot \frac{MD \cdot ME \cdot \sin\angle 6}{FE \cdot CE \cdot \sin\angle 4}$$

$$=1+\frac{BE \cdot ME}{DE \cdot CE}=1+\frac{BE \cdot ME}{AE \cdot EB}$$

$$=1+\frac{ME}{AE}=\frac{AE+ME}{AE}=\frac{AM}{AE}\ .$$

又 $\dfrac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle GEC}}=1-\dfrac{S_{\triangle GEA}}{S_{\triangle GEC}} \cdot \dfrac{S_{\triangle DME}}{S_{\triangle DME}}$

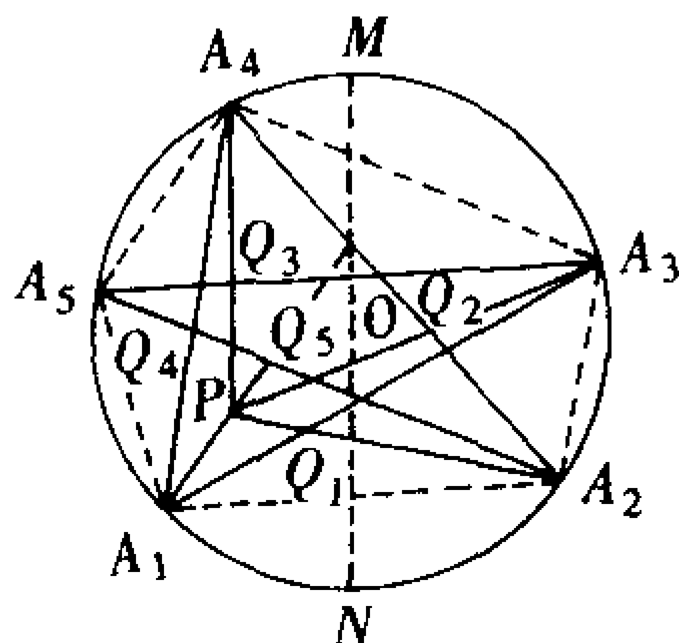
$$=1-\frac{GE \cdot AE}{DE \cdot MD} \cdot \frac{MD \cdot ME}{GE \cdot CE}$$

$$=1-\frac{AE \cdot ME}{DE \cdot CE}=1-\frac{AE \cdot ME}{AE \cdot BE}=\frac{BM}{BE}\ ,$$

$$\therefore\quad \frac{EG}{EF}=\frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle FEC}}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}} \cdot \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle AEC}} \cdot \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle EFC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}} \cdot \frac{BE}{BM} \cdot \frac{AM}{AE}$$

$$=\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BE}{BM} \cdot \frac{AM}{AE}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}\ .$$



3·47 在圆心为 O 的单位圆上顺次取 5 点 $A_1,\cdots,A_5$，P 为该圆内一点. 记线段 A_iA_{i+2} 与直线 PA_{i+1} 的交点为 Q_i，$i=1,\cdots,5$，其中 $A_6=A_1$，$A_7=A_2$. $OQ_i=d_i$，$i=1,\cdots,5$. 试求乘积 $A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5$.

（中国国家集训队选拔考试，1991 年）

［解］ 连结 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5、A_5A_1，并作过 Q_1 的直径 MN，于是由相交弦定理有

$$A_1Q_1\cdot Q_1A_3=MQ_1\cdot Q_1N=1-d_1^2.$$

同理有 $A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2}=1-d_i^2,\ i=2,3,4,5.$

从而有 $$\prod_{i=1}^{5}(A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2})=\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2),\qquad ①$$

又∵ $A_iQ_i:Q_iA_{i+2}=S_{\triangle PA_iA_{i+1}}:S_{\triangle PA_{i+1}A_{i+2}},\ i=1,\cdots,5,$

∴ $$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5=Q_1A_3\cdot Q_2A_4\cdot\cdots\cdot Q_5A_2.\qquad ②$$

由①和②得 $$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5=\left\{\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3·48 给出七个圆，6 个圆在一个定圆内，每一个与定圆相切，并且与两个相邻的小圆相切，若 6 个小圆与大圆的切点顺次为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6，求证：$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1$.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］ 设定圆圆心为 O，另 6 个小圆的半径依次为 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6.

又设 $\angle A_1OA_2=\alpha$. 定圆 O 的半径为 1，则 $AA_2=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

又由余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{(1-r_1)^2+(1-r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(1-r_1)(1-r_2)}$$
$$=\frac{1-r_1-r_2-r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

∴ $$A_1A_2^2=4\sin^2\frac{\alpha}{2}=2(1-\cos\alpha)$$

$$=2\left[1-\frac{1-r_1-r_2-r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}\right]$$

$$=\frac{4r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

对于 A_3A_4、A_5A_6、A_2A_3、A_4A_5、A_6A_1 亦有类似的表达式，因此有

$$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6$$

$$=8\sqrt{\frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(1-r_4)(1-r_5)(1-r_6)}}$$

$$=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1.$$

3·49 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=80^\circ$. 求证：$AC^2-AB^2=AB\cdot AC$.

（中国青海省数学竞赛，1979 年）

[证] 延长 AB 到 D，使 $BD=BC$，连接 CD. 则

$\angle D=\angle DCB=40^\circ=\angle ACB$,

且 $\angle ACD=80^\circ=\angle ABC$,

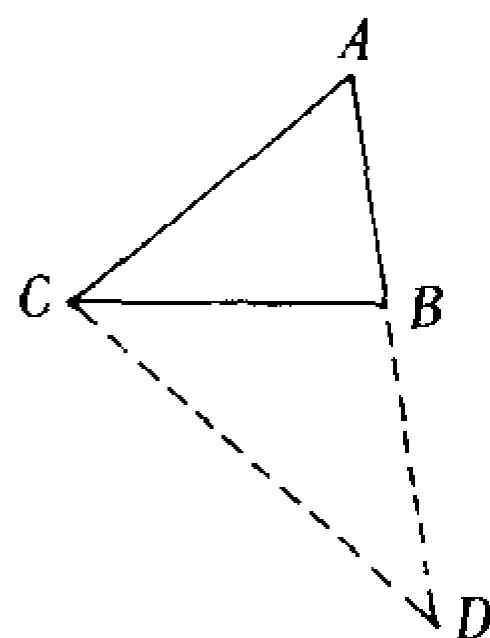
∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$,

有 $AC:AD=AB:AC$,

即 $AC^2=AB\cdot AC=AB(AB+BD)$

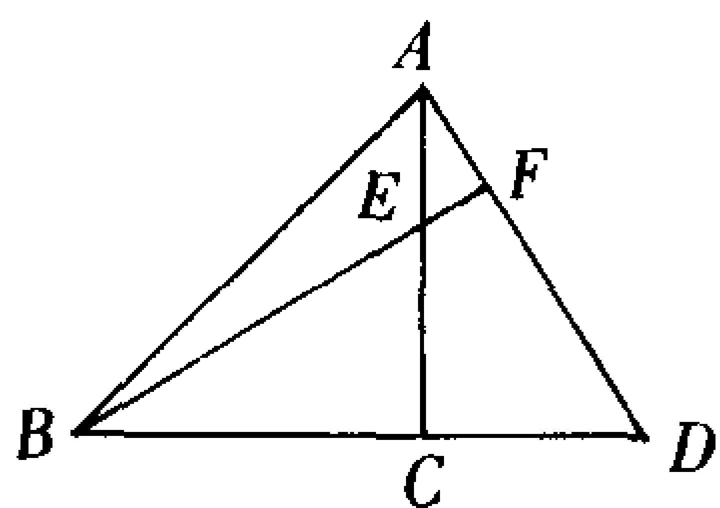
$=AB(AB+BC)$,

∴ $AC^2-AB^2=AB\cdot BC$.



第四章　直线垂直或平行问题

(一)垂直问题



4·1　已知：$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle C=90°$，D 为 BC 延长线上一点，$CD=CE$，E 在 AC 上，BE 的延长线交 AD 于 F，求证：$BF\perp AD$.

（中国四川省成都市数学竞赛，1986 年）

［证］　在 $Rt\triangle BCE$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中，

$\because\quad BC=AC,\ CE=CD.$

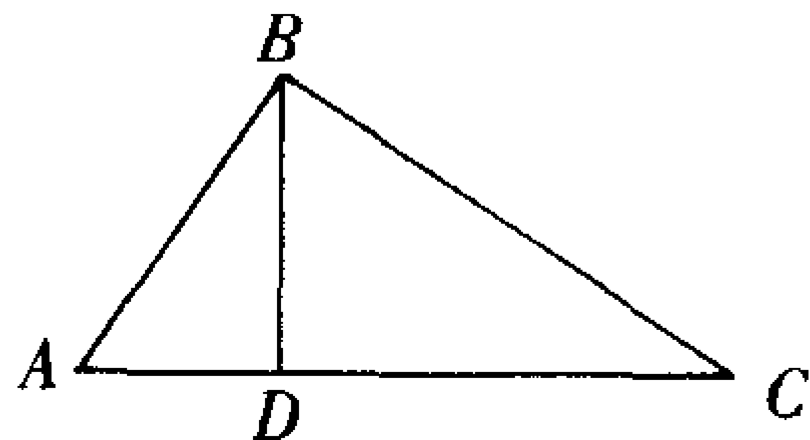
$\therefore\quad Rt\triangle BCE\cong Rt\triangle ACD.$　从而　$\angle CBE=\angle CAD.$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle AFE$ 中，　$\because\quad \angle CBE=\angle EAF, \angle BEC=\angle AEF$

$\therefore\quad \angle AFE=\angle ECB=90°$　即　$AD\perp BF.$

4·2　从三角形的一个顶点引出的直线把三角形分成两个都与原三角形相似的三角形.求证：原三角形是直角三角形，并且所作的直线经过直角顶点且垂直于斜边.

（基辅数学奥林匹克，1963 年）



［证］　设线段 BD 将 $\triangle ABC$ 分成两个三角形，$\triangle ABD\backsim\triangle BDC\backsim\triangle ABC$（如图）.

$\because\quad \triangle ABD\backsim\triangle ABC,$

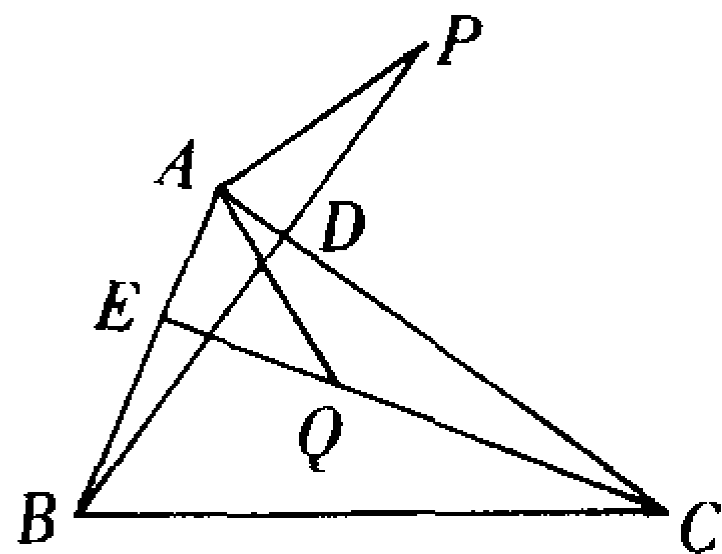
$\angle BAD=\angle CBA$

而　$\angle ADB>\angle C$

$\therefore \quad \angle ADB=\angle ABC$

同理 $\angle BDC=\angle ABC$

故 $\angle ADB=\angle BDC=\angle ABC=90^\circ$



4·3 已知:BD、CE 是$\triangle ABC$ 的高,点 P 在BD 的延长线上,$BP=AC$,点 Q 在 CE 上,$CQ=AB$.求证:(1)$AP=AQ$;(2)$AP\perp AQ$.

(中国河南省数学竞赛,1996 年)

[证] (1)$\because \quad BD\perp CA, CE\perp AB$,

$\therefore \quad \angle BEF=\angle CDF=90^\circ$.

而 $\angle BFE=\angle CFD$, 故 $\angle ABP=\angle QCA$.

又$\because \quad AB=QC, \quad BP=CA$,

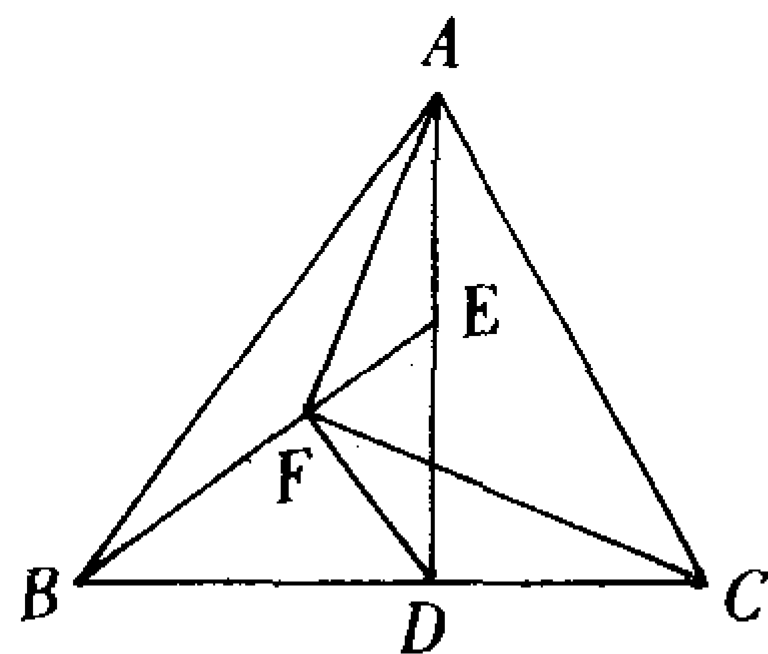
$\therefore \quad \triangle ABP\cong\triangle QCA$, 有 $AP=QA$.

(2)$\because \quad \angle AQC=\angle PAB$, ①

$\angle AQC=\angle QEA+\angle QAE=90^\circ+\angle QAE$, ②

$\angle PAB=\angle PAQ+\angle QAE$. ③

由①、②、③得 $\angle PAQ=90^\circ$. 即 $AP\perp AQ$.



4·4 如图,AD 是锐角$\triangle ABC$ 边 BC 上的高,E 是 AD 上的一点且满足 $AE:ED=CD:DB$,过 D 作 $DF\perp BE$ 于 F.求证:$\angle AFC=90^\circ$.

(中国上海市数学班选拔赛,1999 年)

[证] 由设 DF 是 Rt$\triangle BDE$ 斜边上的高, 故 $\angle EDF=\angle EBD$,

$\therefore \quad \triangle EFD\backsim\triangle EDB$, 有 $\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{DB}{FD}$.

$\therefore \quad \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{AE}{ED}\cdot\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{AE}{ED}\cdot\dfrac{BD}{FD}$.

由设 $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CD}{DB}$, $\quad\therefore \quad \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{CD}{DB}\cdot\dfrac{DB}{FD}$,

即 $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{CD}{FD}$ ①

又 $\angle AEF=90^\circ+\angle EDF=\angle CDF$,

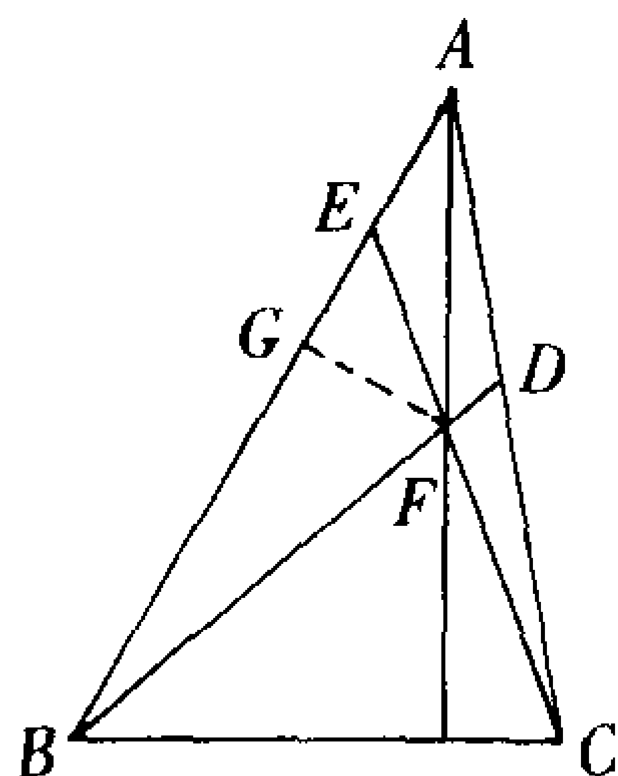
即 $\angle AEF=\angle CDF$ ②

由①、②知 $\triangle AEF \backsim \triangle CDF$， 有 $\angle AFE=\angle CFD$，

$\therefore \quad \angle AFC=\angle DFE=90^\circ$.

4·5 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，若 D 和 E 分别是边AC和AB上的点且使$\angle CBD=40^\circ$，$\angle BCE=70^\circ$，又 F 是BD和CE的交点. 求证：$AF\perp BC$.

（加拿大数学奥林匹克，1998 年）



［证］ 首先注意到

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ &= 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\\ &= 2\sin 40^\circ\cos(60^\circ-20^\circ)\\ &= 2\sin 40^\circ(\cos 60^\circ\cos 20^\circ+\sin 60^\circ\sin 20^\circ)\\ &= \sin 40^\circ(\cos 20^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ),\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin 80^\circ-\sin 40^\circ\cos 20^\circ}{\sin 40^\circ\sin 20^\circ}=\sqrt{3}.$$

如图设$\triangle ABC$外接圆半径为$\frac{1}{2}$，则

$BC=\sin 40^\circ$，$AB=\sin 80^\circ$.

又 $\angle BFC=70^\circ=\angle BCF$， 故 $BF=BC=\sin 40^\circ$.

作 $GF\perp AB$ 于G，则

$BG=\sin 40^\circ\cos 20^\circ$， $GF=\sin 40^\circ\sin 20^\circ$，

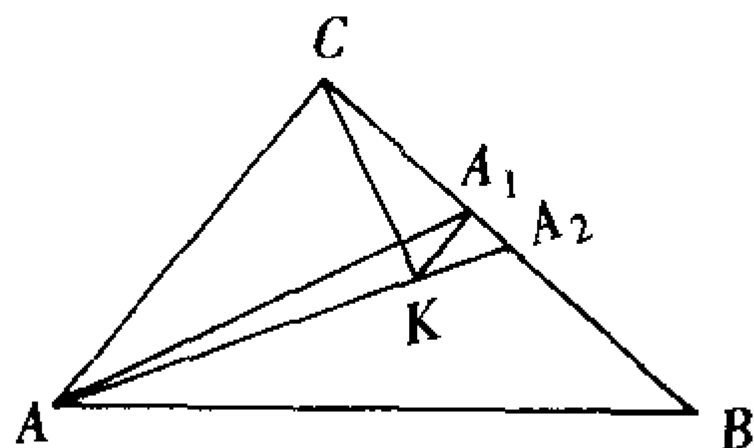
即 $\dfrac{AG}{GF}=\dfrac{AB-BG}{GF}=\sqrt{3}$.

$\therefore \quad \angle BAF=30^\circ$， 故 $AF\perp BC$.

4·6 在$\triangle ABC$中，AA_1为中线，AA_2为角平分线，K为AA_1上一点使$KA_1 /\!/ AC$. 试证：$AA_2\perp KC$.

（莫斯科数学奥林匹克，1996 年）

［证］ 记$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{C}$，则



$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{AA_2}=\frac{\vec{b}\cdot|\vec{c}|+\vec{c}\cdot|\vec{b}|}{2(|\vec{b}|+|\vec{c}|)},$$

又 $\dfrac{AK}{AA_1}=\dfrac{A_2C}{A_1C}=\dfrac{2|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$，

$\because \quad A_2K /\!/ CA$， $\therefore \quad \overrightarrow{AK}=\dfrac{|\vec{c}|\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$.

从而 $\quad \overrightarrow{CK}=\dfrac{\vec{b}\cdot|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}-\dfrac{\vec{c}\cdot|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}=\dfrac{\vec{b}\cdot|\vec{c}|-\vec{c}\cdot|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$.

因而 $\quad \overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{AA_2}=0$， $\therefore \quad \overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{AA_2}$.

4·7 在$\angle AOB$的内部取一点C，过C作OA边的垂线CD，作OB边的垂线CE. 再过D作OB边的垂线DN，过E作OA边的垂线EM. 求证：$OC\perp MN$.

（莫斯科数学奥林匹克，1958年）

［证］ 设CD与OB交于P，CE与OA交于Q，连PQ、DE（如图）.

今欲证$OC\perp MN$，由于C是$\triangle OPQ$的垂心，故只要证$MN /\!/ PQ$即可.

$\because \quad P、Q、D、E$四点共圆，

$\therefore \quad \angle EQP=\angle EDP$.

$\because \quad D、E、N、M$四点共圆，

$\therefore \quad \angle DEM=\angle DNM$.

$\because \quad PD /\!/ EM$，

$\therefore \quad \angle EDP=\angle DEM$.

故 $\quad \angle EQP=\angle DNM$，因而 $\quad PQ /\!/ MN$.

4·8 设P为等腰直角$\triangle ACB$斜边AB上任意一点，PE垂直AC于点E，PF垂直BC于点F，PG垂直EF于点G，延长GP并在其延长线上取一点D，使得$PD=PC$. 试证：$BC\perp BD$，且$BC=BD$.

（中国初中数学联赛，1997年）

［证］ 由题设易证

$\angle EPG=\angle EFP=\angle CPF$，

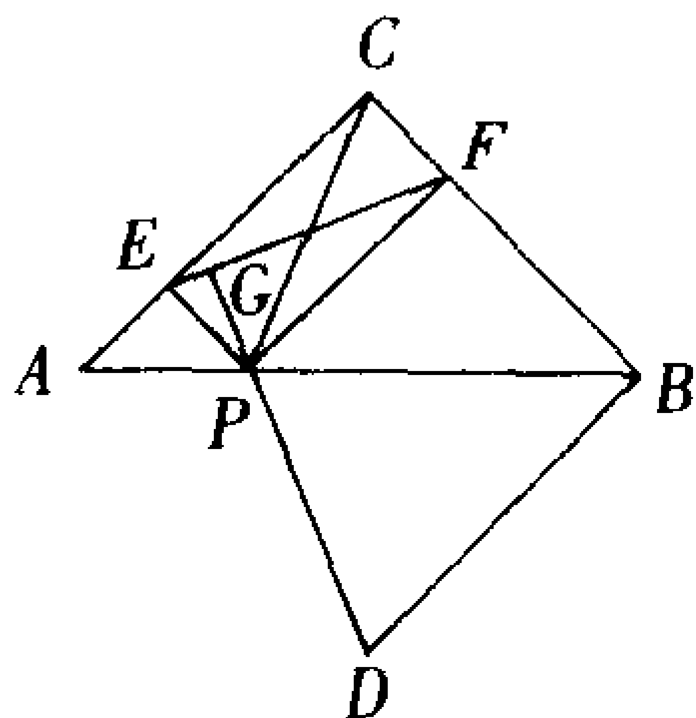
$\therefore \quad \angle DPB=\angle APG=45^\circ+\angle EPG$

$\qquad\qquad =45^\circ+\angle CPF$

$\qquad\qquad =\angle BPF+\angle CPF=\angle BPC$.

又$\because \quad PC=PD$，且PB公用，

$\therefore \quad \triangle PDB\cong\triangle PCB$，有$BC=BD$.



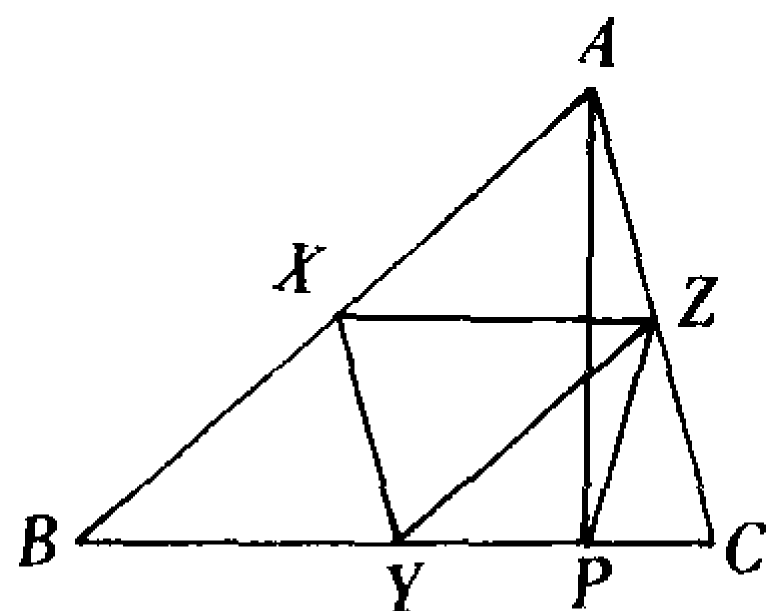
又 $\angle PBD=\angle CBP=45^\circ$，则 $\angle CBD=90^\circ$，

故 $BC\perp BD$.

4·9 在$\triangle ABC$中，X、Y、Z分别为AB、BC、CA的中点，P在BC上，并且$\angle CPZ=\angle YXZ$. 求证：$AP\perp BC$.

（澳大利亚数学奥林匹克，1991年）

[证] 因为X、Y、Z是$\triangle ABC$各边的中点，所以



$XZ\parallel BC$，$XY\parallel AC$，

知四边形$XYCZ$为平行四边形.

$\therefore$ $\angle YXZ=\angle C$.

由已知 $\angle CPZ=\angle YXZ$，

$\therefore$ $\angle CPZ=\angle C$.

于是 $PZ=ZC=ZA$.

$\triangle APC$为直角三角形. $\therefore$ $AP\perp BC$.

4·10 $\triangle ABC$的外心为O，$AB=AC$，D是AB的中点，E是$\triangle ACD$的垂心. 求证：$OE\perp CD$.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991年）

[证] 设F为AC的中点.

由于E是$\triangle ACD$的重心，则E在DF上，且

$$\frac{DE}{DF}=\frac{2}{3}.$$

设G为BC的中点，AG交CD于H，则H为$\triangle ABC$的重心.

连FG交CD于I，则I是CD的中点.

$$\therefore\quad \frac{DH}{DI}=\frac{2}{3}=\frac{DE}{DF}.$$

从而有 $EH\parallel FI\parallel AB$. $\therefore$ $DO\perp EH$.

又$\because$ $OH\perp DF$，$\therefore$ O为$\triangle DEH$的垂心. 故 $OE\perp CD$.

4·11 在$\triangle ABC$中，$\angle A$是直角，D在BC上，并且$AD\perp BC$. 求证：$\angle BAC$的平分线垂直于$\triangle ACD$与$\triangle ABD$的内心的连线.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991年）

[证] 设$\triangle ACD$和$\triangle ABD$的内心依次为N、M.

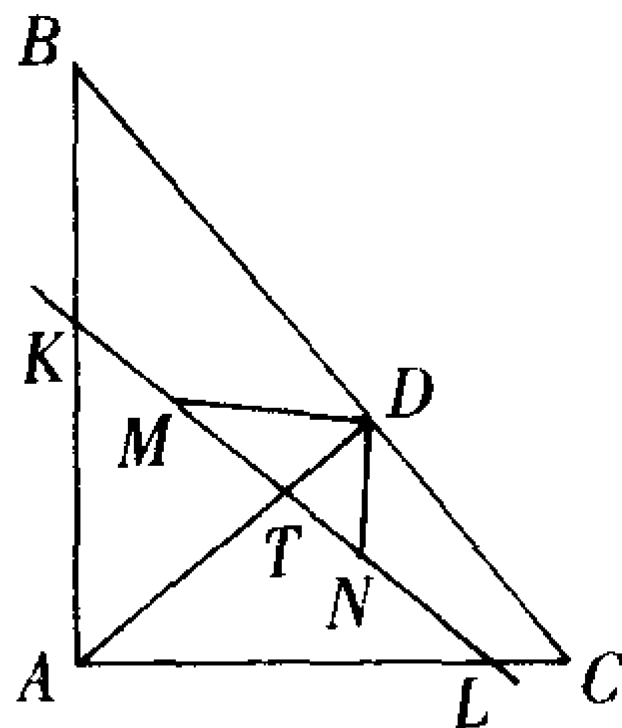
$\because \quad \triangle ADB \backsim \triangle CDA$，

$\therefore \quad \dfrac{DM}{DN}=\dfrac{BD}{AD}$.

又$\because \quad \angle MDN=\angle ADB=90°$，

$\therefore \quad \triangle NMD \backsim \triangle ABD$，

有 $\angle BAD=\angle MND$



又设 AD 交 KL 于 T，则 $\angle DTN=\angle KTA$，

于是 $\angle AKT=\angle TDN=45°$，

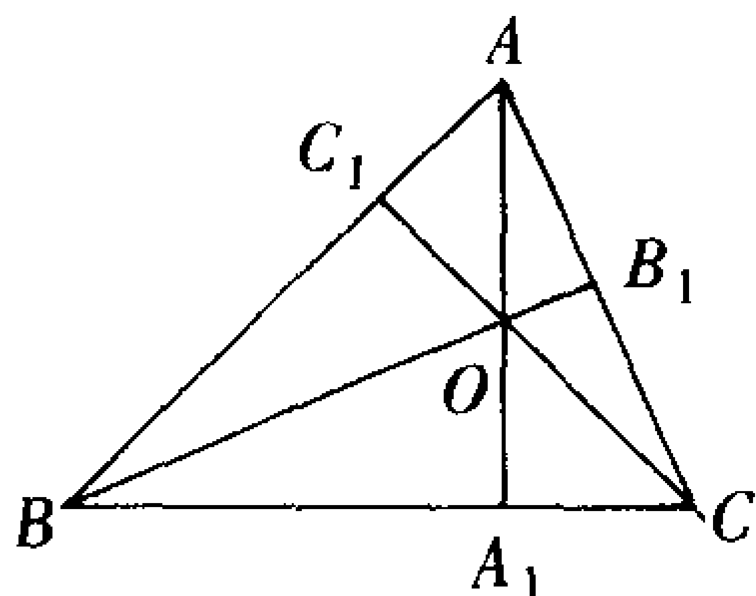
从而$\triangle AKL$ 是等腰直角三角形.

因此$\angle BAC$ 的平分线垂直于MN.

4·12 在锐角$\triangle ABC$ 的三边BC、CA、AB 上分别取点A_1、B_1、C_1，使得三条线段 AA_1、BB_1、CC_1 交于一点 O，并使得$\angle AA_1C=\angle BB_1A=\angle CC_1B$. 求证：线段 AA_1、BB_1、CC_1 恰为$\triangle ABC$ 的三条高.

（前苏联教委推荐试题，1990 年）

［证］ 由题设知 $\angle AA_1C=\angle BB_1A=\angle CC_1B$，



$\therefore \quad C_1$、B、A_1、O 和 O、A_1、C、B_1 均四点共圆.

$\therefore \quad AC_1 \cdot AB=AO \cdot AA_1=AB_1 \cdot AC$.

$\therefore \quad C_1$、B、C、B_1 四点共圆.

$\therefore \quad \angle BB_1C=\angle CC_1B=\angle BB_1A$.

$\therefore \quad \angle BB_1C=\angle BB_1A=90°$，即 $BB_1 \perp AC$.

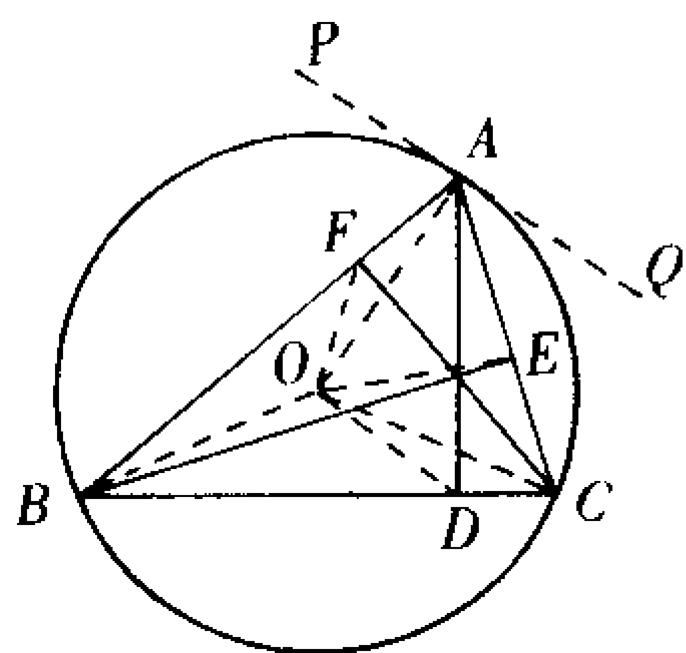
同理 $AA_1 \perp BC$，$CC_1 \perp AB$.

$\therefore \quad AA_1$、BB_1、CC_1 恰为$\triangle ABC$ 的三条高.

4·13 已知：锐角$\triangle ABC$ 的外接圆半径是R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上. 求证：AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 三条高的充要条件是 $S=\dfrac{R}{2}(EF+FD+DE)$，式中 S 是$\triangle ABC$ 的面积.

（中国高中数学联赛，1986 年）

［证 1］ 设$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为O，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，连接 OA、OB、OC、OD、OE、OF.



$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore$ 点 O 在$\triangle ABC$ 内.

于是 $S=S_{\text{四边形}OFBD}+S_{\text{四边形}ODCE}+S_{\text{四边形}OEAF}$.

过点 A 作$\odot O$ 的切线 PQ，则 $OA\perp PQ$，$\angle PAB=\angle ACB$.

又 B、C、E、F 四点共圆，

$\therefore \angle ACB=\angle AFE$，$\therefore \angle PAB=\angle AFE$，

$\therefore PQ /\!/ EF$ $\therefore OA\perp FE$.

$\therefore S_{\text{四边形}OEAF}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot EF$.

同理 $S_{\text{四边形}OFBD}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot FD$，$S_{\text{四边形}ODCE}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot DE$.

从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(OA\cdot EF+OB\cdot FD+OC\cdot DE)$

$=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

再证充分性. 设 $S_{\triangle ABC}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$. 先证 $OA\perp EF$.

用反证法. 若 OA 与 EF 不垂直，则 $S_{\text{四边形}OEAF}<\frac{1}{2}\cdot OA\cdot EF$，

又 $S_{\text{四边形}OFBD}\leqslant\frac{1}{2}\cdot OB\cdot FD$，$S_{\text{四边形}ODCF}\leqslant\frac{1}{2}\cdot OC\cdot DE$.

$\therefore S_{\triangle ABC}<\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

这和已知的条件矛盾. 故 $OA\perp EF$.

同理 $OB\perp FD$，$OC\perp DE$.

过点 A 作$\odot O$ 的切线 PQ，则 $OA\perp PQ$.

$\because OA\perp EF$，$\therefore PQ /\!/ EF$.

$\therefore \angle AFE=\angle PAF=\angle ACB$.

$\therefore B$、C、E、F 四点共圆.

同理 A、B、D、E 四点共圆，C、A、F、D 四点共圆.

$\therefore \angle ADB=\angle AEB$（$A$、$B$、$D$、$E$ 四点共圆），

且 $\angle ADC=\angle AFC$（A、C、D、F 四点共圆），

于是 $\angle AEB+\angle AFC=180°$.

又 B、C、E、F 四点共圆，有 $\angle AEB=\angle AFC$，

$\therefore$ $\angle AEB=\angle AFC=90°$，$\angle ADC=\angle AFC=90°$，

即 $AD\perp BC$，$BE\perp CA$，$CF\perp AB$.

[证 2] $\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故点 O 在$\triangle ABC$ 内.

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}$$

$$=\frac{R^2}{2}(\sin2A+\sin2B+\sin2C)$$

$$=R(R\sin A\cos A+R\sin B\cos B+R\sin C\cos C)$$

$$=\frac{R}{2}(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

$\because$ B、C、E、F 四点共圆，故$\angle AFE=\angle ACB$.

$\therefore$ $\triangle AFE\backsim\triangle ACB$，$\therefore$ $\dfrac{FE}{BC}=\dfrac{AF}{AC}=\cos A$.

即 $EF=a\cos A$.

同理 $FD=b\cos B$，$DE=c\cos C$.

从而 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

设 AD'、BE'、CF'是$\triangle ABC$ 的三条高，由证法 1 的证明中知

$OA\perp F'E'$，$OB\perp D'F'$，$OC\perp D'E'$.

又设点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，

使 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

由证法 1 知 $OA\perp FE$，$OB\perp DF$，$OC\perp DE$.

$\therefore$ $FE/\!/F'E'$，$DF/\!/D'F'$，$DE/\!/D'E'$，

若点 F'与 F 不重合，不妨设 $AF'<AF$，

则 $AE'<AE$，有 $CE'>CE$，亦有 $CD'>CD$，

又 $AF'<AF$，有 $BF'>BF$，亦有 $BD'>BD$，

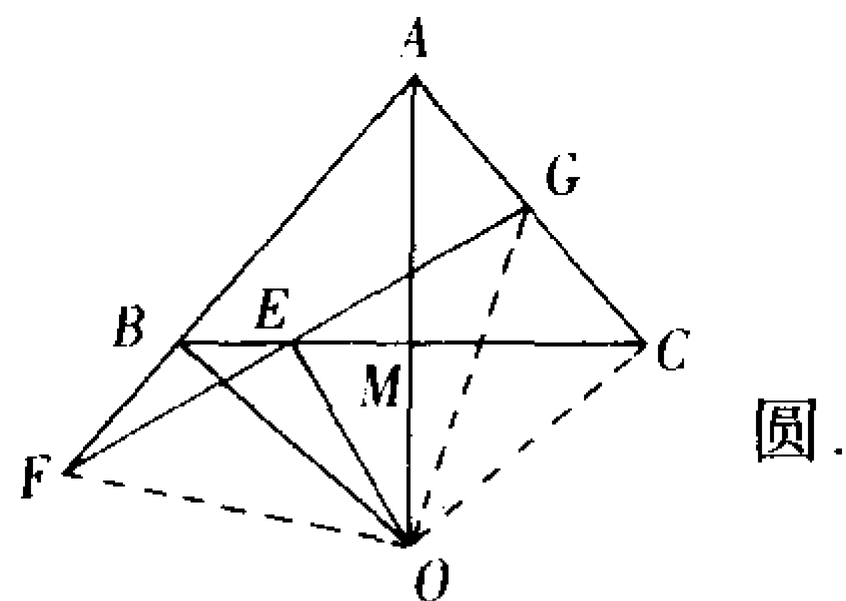
从而 $BC>BC$，矛盾. 于是点 F 与 F'重合.

同理 点 E 与 E'重合，点 D 与 D'重合. 故 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条高.

4·14 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，过 B 作 $BO\perp AB$ 交中线 AM 的延长线于点 O，过 BC 上一点 E 作直线 FG，分别交直线 AB、AC 于点 F、

G,求证:$OE\perp FG$ 当且仅当 $FE=EG$.

(第 35 届国际数学奥林匹克,1994 年)



[证 1] 连结 OC、OF、OG.

(必要性) $\because$ $OE\perp FG$,

$\angle OCG=\angle OBA=90^\circ=\angle OBF$,

$\therefore$ B、F、O、E 和 E、O、C、G 都四点共圆.

$\because$ $OB=OC$, $\therefore$ $\angle OBC=\angle OCB$.

$\therefore$ $\angle OFE=\angle OBE=\angle OCE=\angle OGE$.

$\therefore$ $\triangle OGF$ 为等腰三角形.

$\because$ $OE\perp FG$, $\therefore$ $FE=EG$.

(充分性) 直线 BEC 与 $\triangle FGA$ 相截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FE}{EG}\cdot\frac{GC}{CA}=1.$$

$\because$ $AB=AC$, $FE=EG$, $\therefore$ $BF=CG$.

又 $\because$ $OB=OC$, $\angle OCG=\angle OBA=90^\circ=\angle OBF$,

$\therefore$ $\triangle OCG\cong\triangle OBF$.

$\therefore$ $OG=OF$, 即 $\triangle OGF$ 为等腰三角形.

$\because$ $FE=EG$, $\therefore$ $OE\perp FG$.

[证 2] 取以 M 为原点,BC 为 x 轴,OA 为 y 轴,$MC=1$ 的直角坐标系.于是 B 和 C 的坐标分别为 $(-1,0)$,$(1,0)$.设点 A 的坐标为 $(0,a)$.因为 $\angle ABO=90^\circ$,由射影定理知点 O 的坐标为 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$.设点 E 的坐标为 $(x_0,0)$,于是直线 OE 的斜率为

$$k_{OE}=\frac{0-\left(1-\dfrac{1}{a}\right)}{x_0-0}=\frac{1}{ax_0}.$$

直线 AB、AC、FG 的方程分别为

$$y=a(x+1),\quad y=-a(x-1),\quad y=k_{FG}(x-x_0).$$

以下简记 $k_{FG}=k$.考察立方程组

$$\begin{cases}y=a(x+1),\\ y=k(x-x_0),\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-a(x-1),\\ y=k(x-x_0).\end{cases}$$

分别解得

$$x_F=-\frac{kx_0+a}{a-k},\quad x_G=\frac{kx_0+a}{a+k}.$$

$FE=EG$ 当且仅当 $x_E-x_F=x_G-x_E$,亦即

$$x_0+\frac{kx_0+a}{a-k}=\frac{kx_0+a}{a+k}-x_0.$$

即

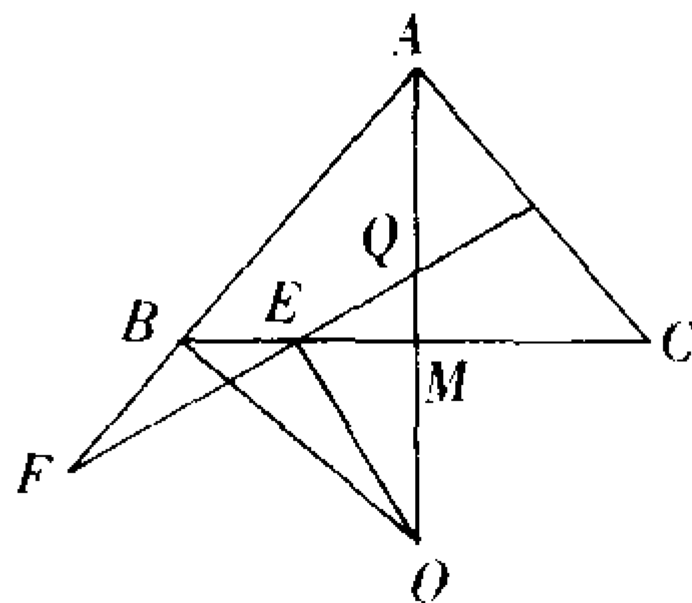
$$\begin{aligned}0&=2x_0+(kx_0+a)\left(\frac{1}{a-k}-\frac{1}{a+k}\right)\\&=2x_0\ \frac{2k(kx_0+a)}{a^2-k^2}\\&=\frac{2a^2x_0-2k^2x_0+2k^2x_0+2ka}{a^2-k^2}\\&=\frac{2a(ax_0+k)}{a^2-k^2}.\end{aligned}$$

由此可见,$FE=EG$ 当且仅当

$$k=-ax_0=-\frac{1}{k_{OE}},$$

即当且仅当 $OE\perp FG$.

[证 3] 只证明必要性.设 $BC=2,\angle C=\alpha$,$\angle FQC=\beta$,则 $AM=\text{tg}\alpha$.



而在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中,$BM^2=AM\cdot OM$,

故 $OM=\text{ctg}\alpha$.

$\because$ $GE=EF$,在 $\triangle EGC$ 和 $\triangle EFB$ 中,由正弦定理知

$$\frac{EG}{\sin\alpha}=\frac{1+EM}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{EF}{\sin\alpha}=\frac{1-EM}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$\therefore\quad EM=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=OM\cdot\frac{QM}{EM}.$$

$\therefore$ $EM^2=OM\cdot QM$,

故 $\angle OEQ=90^\circ$,即 $OE\perp FG$.

注 本命题原来形式为:

N 为 $\angle BAC$ 的角平分线上一点,点 P 及点 O 分别在直线 AB 和 AN 上,其中 $\angle ANP=90^\circ=\angle APO$.在 NP 中任取一点 Q,过点 Q 任作直线交 AB 和 AC 分别于点 E 和 F.试证 $\angle OQE=90^\circ$ 当且仅当 $QE=QF$.

下面给出它的一个复数证法,当然就其实质上讲与证法 2 无异.

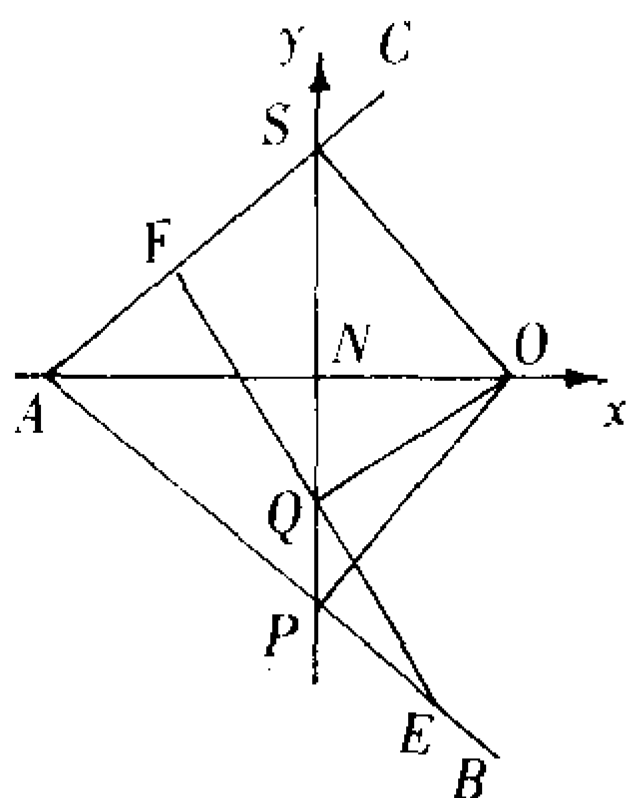


图 1

取 N 为坐标原点，AN 为 x 轴. 设 AC 与 NP 所在直线即 y 轴交于 S 点. 由已知条件可设各点的复数表示为(如图 1 所示)

P: $Z_P = \mathrm{i}y_P$, S: $z_s = -\mathrm{i}y_p$, O: $z_o = x_o$,

E: $z_E = x_E + \mathrm{i}y_E$, F: $z_F = x_F + \mathrm{i}y_F$,

Q: $z_Q = \mathrm{i}y_Q$.

由条件 $\overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{PE}$，可知 $\arg \dfrac{z_O - z_P}{z_E - z_P} = \dfrac{\pi}{2}$,

即 $(z_O - z_P)\overline{(z_E - z_P)} + \overline{(z_O - z_P)}(z_E - z_P) = 0$

或 $\mathrm{Re}\{\overline{z}_P z_E - \overline{z}_O z_E + \overline{z}_O z_P\} = |z_P|^2$

或 $$-x_O x_E + y_P y_E = y_P^2 \tag{①}$$

由已知有 $\overrightarrow{SO} \perp \overrightarrow{SF}$，注意 S 与 P 的对称关系，由①可得

$$-x_O x_F - y_P y_F = y_P^2 \tag{②}$$

首先假设$\angle OQE = 90°$，从而由 $\overrightarrow{QO} \perp \overrightarrow{QE}$ 可得

$$-x_O x_E + y_E y_Q = y_Q^2 \tag{③}$$

由 $\overrightarrow{QO} \perp \overrightarrow{QF}$，可得

$$-x_O x_F + y_F y_Q = y_Q^2 \tag{④}$$

由①、③得 $x_E = \dfrac{y_P y_Q}{x_O}$, $y_E = y_P + y_Q$,

由②、④得 $x_F = -\dfrac{y_P y_Q}{x_O}$, $y_F = y_Q - y_P$,

于是有

$$|\overrightarrow{QE}| = |z_E - z_Q| = \sqrt{\frac{y_P^2 y_Q^2}{x_O^2} + y_P^2}$$

$$= |z_F - z_Q| = |\overrightarrow{QF}|.$$

其次，注意$\angle OQE = 90°$等价于$\arg \dfrac{z_O - z_Q}{z_E - z_Q} = \dfrac{\pi}{2}$，同时也等价于 $\arg \dfrac{z_O - z_Q}{z_E - z_F} = \dfrac{\pi}{2}$，同①式的推导可得其等价于

$$\frac{x_E - x_F}{y_E - y_F} = \frac{y_Q}{x_O}. \tag{⑤}$$

于是只需证明由 $|\overrightarrow{QE}| = |\overrightarrow{QF}|$ 可导出⑤式即可.

事实上,由$|\overrightarrow{QE}|=|\overrightarrow{QF}|$,有 $z_Q=\frac{z_E+z_F}{2}$,即

$x_E+x_F=0$, ⑥

$y_E+y_F=2y_Q$, ⑦

由①、②、⑥、⑦即得⑤式.

4·15 在$\triangle ABC$中,若A或B为直角,证明$\sin C=\cos A+\cos B$,反之,若$\sin C=\cos A+\cos B$,证明:A、B中必有一个是直角.

(中国天津市数学竞赛,1978年)

[证] (1)设$A=90°$,则 $C=90°-B$,

$\therefore$ $\cos A=\cos 90°=0$,且 $\sin C=\sin(90°-B)=\cos B$,

$\therefore$ $\sin C=\cos A+\cos B$.

当$B=90°$,同理可证此结论.

(2)$\because$ $\sin C=\cos A+\cos B$.

又 $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

且 $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,

$\therefore$ $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,

$\because$ $A+B=180°-C$,即 $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$,

$\therefore$ $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$.

就是 $\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$.

$\because$ $C\neq 0$,$\therefore$ $\sin\frac{C}{2}\neq 0$,$\therefore$ $\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$,

则 $\frac{C}{2}=\frac{A-B}{2}$,或 $\frac{C}{2}=\frac{B-A}{2}$,

就是 $A=B+C$,或 $B=C+A$,

$\because$ $A+B+C=180°$,

$\therefore$ $2A=180°$,或 $2B=180°$,即 $A=90°$,或 $B=90°$.

故A、B中必有一个是直角.

4·16 $\triangle ABC$中,如果$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$,则此三角形必为直角

三角形.

（中国重庆市数学竞赛,1978 年）

[证 1] ∵ $A+B+C=180°$,

∴ 式右 $=\dfrac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$.

又 式左 $=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$,

∴ $2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$.

∵ $\sin\dfrac{C}{2}$、$\cos\dfrac{C}{2}$均不为 0, ∴ $2\sin^2\dfrac{C}{2}=1$, 即 $\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$.

∵ $\dfrac{C}{2}$是锐角 ,∴ $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{C}{2}=45°$, $C=90°$.

∴ $\triangle ABC$ 必为直角三角形.

[证 2] ∵ A、B、C 为三角形的内角.

$$\begin{aligned}\therefore\quad c&=2R\sin C=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{\cos A+\cos B}\\&=\frac{a+b}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}\\&=\frac{2abc(a+b)}{a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)}\\&=\frac{2abc(a+b)}{ab(a+b)+c^2(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)}\\&=\frac{2abc(a+b)}{(a+b)[ab+c^2-(a^2-ab+b^2)]},\end{aligned}$$

∴ $1=\dfrac{2ab}{2ab+c^2-a^2-b^2}$,

即 $2ab+c^2-a^2-b^2=2ab$.

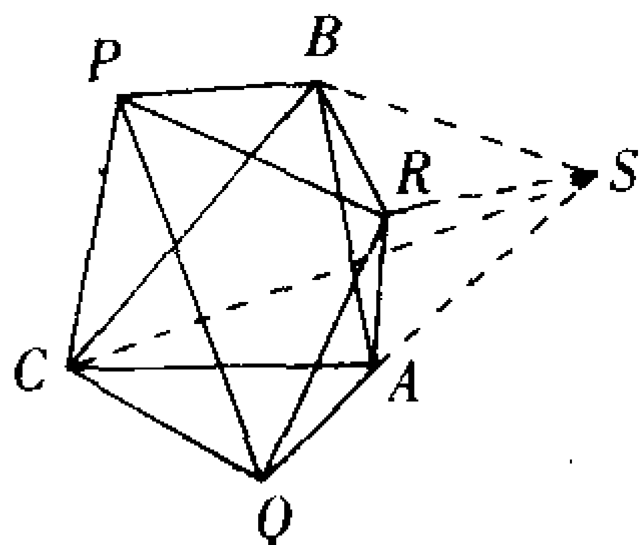
∴ $c^2=a^2+b^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 必为直角三角形.

4·17 在 $\triangle ABC$ 外作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$，使 $\angle PBC=\angle CAQ=45°$，$\angle BCP=\angle QCA=30°$，$\angle ABR=\angle BAR=15°$. 求证：$\triangle PQR$ 是等腰直角三角形.

（中国四川省数学联赛，1991 年）

［证］ 以 AB 为边在 $\triangle ABC$ 外作正 $\triangle ABS$，连接 RS、CS，则



$\triangle SRB \cong \triangle SRA$，$\angle ASR=30°$.

又 $\angle SAR=60°-15°=45°$，

故 $\triangle CQA \backsim \triangle SRA$. $\therefore$ $\dfrac{SA}{CA}=\dfrac{RA}{QA}$.

由于 $\angle SAC=60°+\angle CAB=\angle RAQ$，

于是 $\triangle CAS \backsim \triangle QAR$.

所以 $\angle CSA=\angle QRA$，$\dfrac{AR}{QR}=\dfrac{AS}{CS}$. ①

同理 $\angle CSB=\angle PRB$. $\dfrac{BR}{PR}=\dfrac{BS}{CS}$. ②

又$\because$ $AS=BS$，$AR=BR$，由①和②有 $QR=PR$.

但 $\angle ARB=180°-15°-15°=150°$，

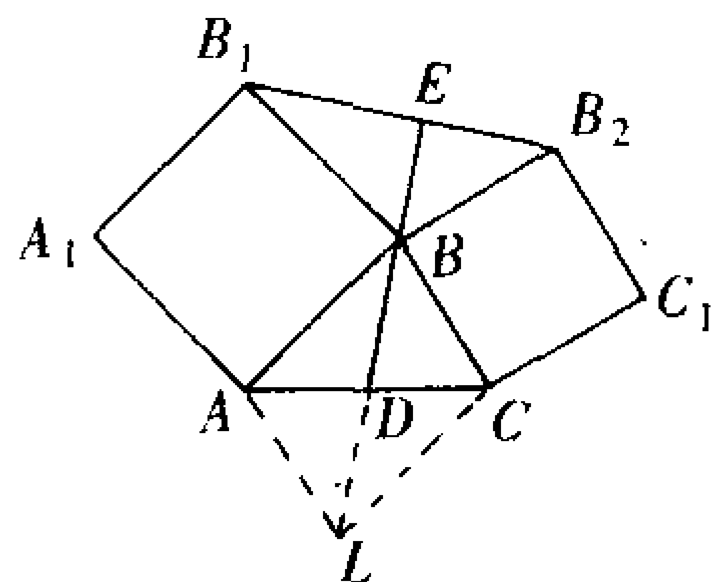
$$\begin{aligned}\therefore\ \angle QRP &=150°-(\angle QRA+\angle PRB)\\ &=150°-(\angle CSA+\angle CSB)\\ &=150°-\angle ASB=90°.\end{aligned}$$

故 $QR\perp PQ$. 则$\triangle PQR$ 是等腰直角三角形.

4·18 以$\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 为边，在形外作正方形 ABB_1A_1 和 BCC_1B_2. 证明：$\triangle ABC$ 的中线 BD 的延长线是$\triangle B_1BB_2$ 的高.

（基辅数学奥林匹克，1964 年）

［证］ 设 DB 的延长线与 B_1B_2 交于 E，延长 BD 到 L，使 $DL=BD$. 如图.



由 $\triangle B_1B_2B \cong \triangle BLC$，

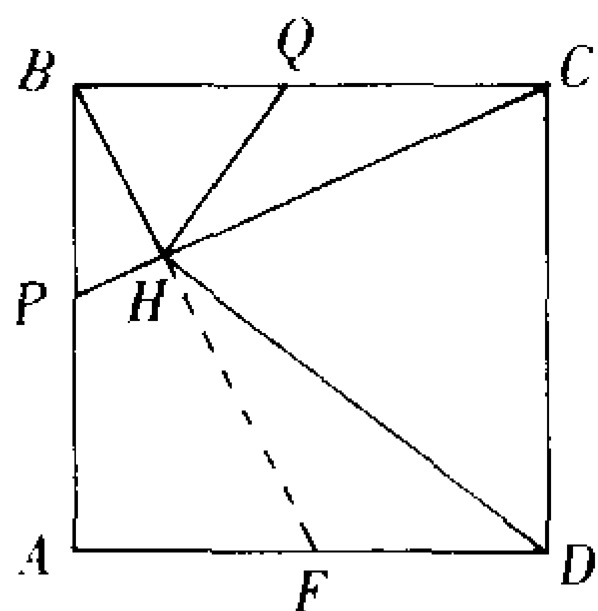
$\therefore$ $\angle B_1=\angle BLC=\angle ABL$.

且 $\angle B_1+\angle B_1BE=\angle ABL+\angle B_1BE$
$=90°$

故 $BE \perp B_1B_2$.

4·19 给定正方形 $ABCD$,点 P、Q 分别在 AB、BC 上,且满足 $BP = BQ$,设 H 是从点 B 向线段 PC 所引垂线的垂足.求证:$\angle DHQ$ 是直角.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)



[证 1] 如图,设 F 是直线 BH 延长线和 AD 的交点.易证$\triangle ABF \cong \triangle BPC$,有 $AF = BP = BQ$,且 $FD = CQ$.

因此 $QCDF$ 为矩形.作 $QCDF$ 的外接圆其直径为 FC,但$\angle CHF = 90°$,所以 H 在 $QCDF$ 的外接圆上.

又 DQ 也是该外接圆的直径.

$\therefore \quad \angle DHQ = 90°$.

[证 2] 由设 BH 是 Rt$\triangle PBC$ 斜边上的高,则有 $\dfrac{BC}{BP} = \dfrac{CH}{BH}$.

又$\because \quad BC = DC,\ BP = BQ$,

$\therefore \quad \dfrac{CD}{BQ} = \dfrac{CH}{BH}$,

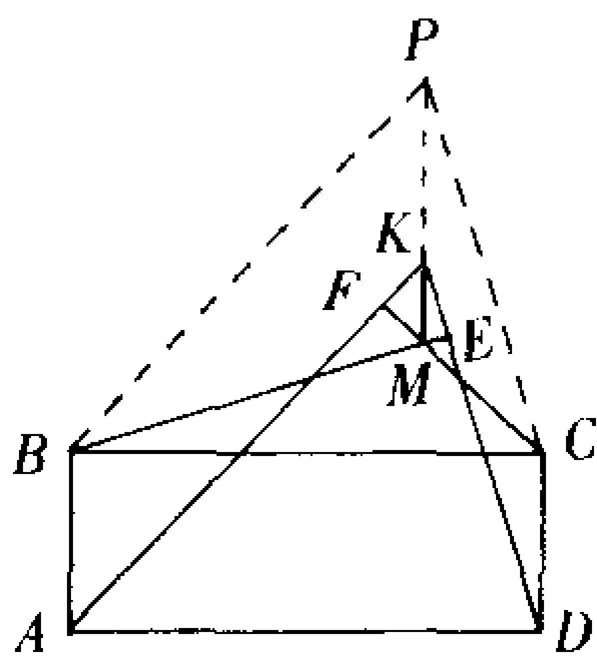
又 $\angle PBC = \angle BCD = 90°$,有 $\angle PBH = \angle BCP$,

且 $\angle HBQ = \angle HCD$,有 $\triangle HBQ \backsim \triangle HCD$.

则 $\angle DHC = \angle QHB$,$\angle DHQ = \angle CHB = 90°$.

4·20 设 $ABCD$ 是矩形,K 为矩形所在平面上一点,连线 KA 与 KD 均与边 BC 相交.由点 B 向直线 DK 引垂线,由点 C 向直线 AK 引垂线,二垂线相交于点 M.求证:$MK \perp AD$.

(第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年)



[证] 设 BE 和 CF 分别是由点 B 和 C 向 DK 和 AK 所作的垂线,E 和 F 为垂足.

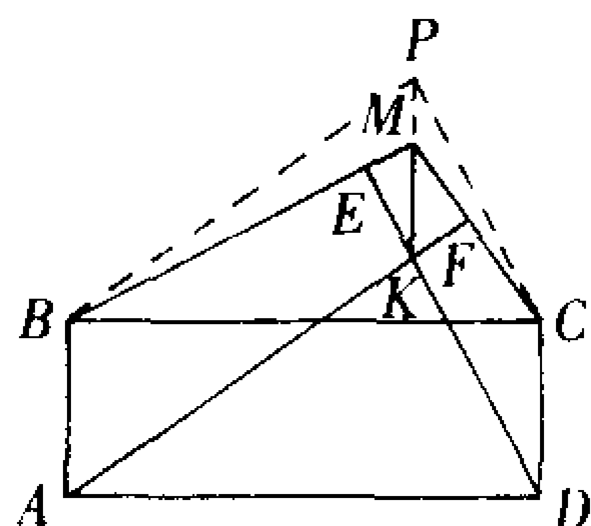
分别平行移动 AK 和 DK,使 A 点移至 B 点,D 点移至 C 点,此时 K 点位移到 P 点,从而有

$PK \parallel AB \parallel CD$,$PA = BA = CD$,$PK \perp BC$.

由于 $DK \parallel CP$,$BE \perp DK$,所以 $BE \perp CP$.

又由于 $AK /\!/ BP$，$CF \perp AK$，所以 $CF \perp BP$.

于是线段 BE 和 CF 分别位于$\triangle BPC$ 的两条高线之上，从而点 M 是$\triangle BPC$ 的垂心，因而 $PM \perp BC$.

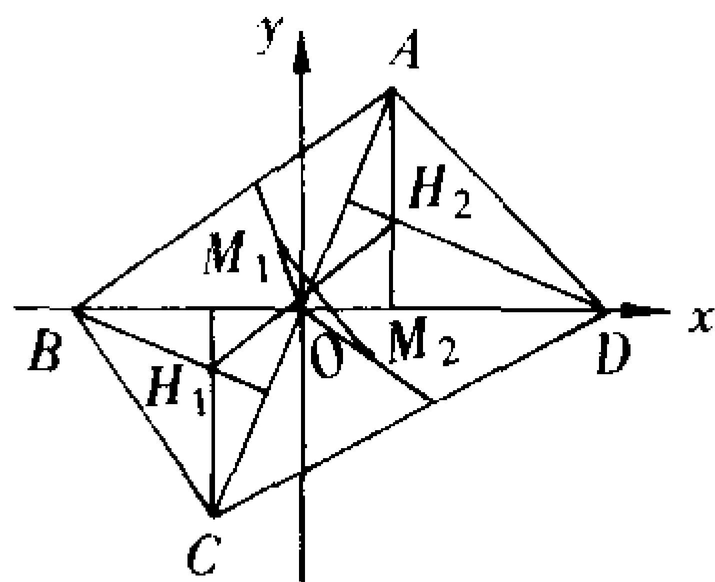


又因为 $PK \perp BC$，所以 PM、PK 都在从 P 点向 BC 所作的垂线上，因此 PM 与 PK 所在直线重合，故有 $MK \perp BC$，$MK \perp AD$.

4·21 凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O，$\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的重心分别为 M_1、M_2，$\triangle BOC$ 和 $\triangle AOD$ 的垂心分别为 H_1、H_2，求证：直线 $M_1M_2 \perp H_1H_2$.

（第 6 届全苏数学奥林匹克，1972 年）

[证]取以点 O 为原点，以对角线 BD 为 x 轴的直角坐标系，并设点 A、B、D 的坐标分别为(a_1,a_2)，$(b,0)$，$(d,0)$. 因 A、O、C 三点共线，故可设点 C 的坐标为$(\lambda a_1,\lambda a_2)$. 于是垂心 M_1 和 M_2 的坐标分别为



$$\left(\frac{a_1+b}{3},\ \frac{a_2}{3}\right),\quad \left(\frac{\lambda a_1+d}{3},\frac{\lambda a_2}{3}\right).$$

所以直线 M_1M_2 的斜率为

$$k_{M_1M_2}=\frac{a_2-\lambda a_2}{(a_1+b)-(\lambda a_1+d)}=\frac{(1-\lambda)a_2}{(1-\lambda)a_1+b-d}.$$

另一方面，显然有 $X_{H_1}=\lambda a_1$，$X_{H_2}=a_1$.

$$\because\quad k_{OA}=\frac{a_2}{a_1},\quad \therefore\quad k_{DH_2}=-\frac{a_1}{a_2}.$$

$\therefore$ 直线 DH_2 的方程为 $y=\dfrac{a_1}{a_2}(d-x)$.

$$\therefore\quad y_{H_2}=\frac{a_1}{a_2}(d-a_1).$$

$\therefore$ H_2 的坐标为$\left(a_1,\ \dfrac{a_1}{a_2}(d-a_1)\right)$.

同理 H_1 的坐标为$\left(\lambda a_1,\ \dfrac{a_1}{a_2}(b-\lambda a_1)\right)$.

$\therefore$ 直线 H_1H_2 的斜率为

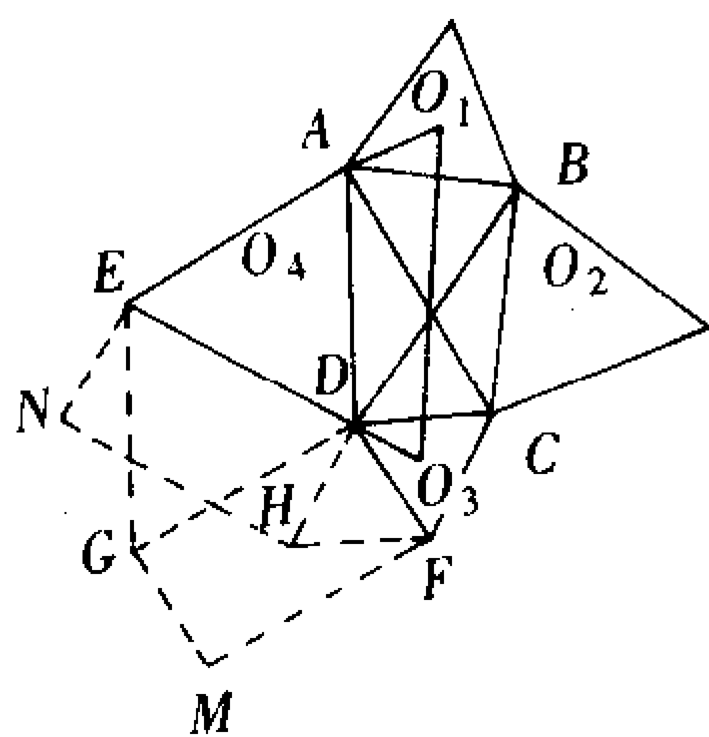
$$k_{H_1H_2}=\frac{\frac{a_1}{a_2}(b-\lambda a_1-d+a_1)}{\lambda a_1-a_1}=\frac{(1-\lambda)a_1+b-d}{(\lambda-1)a_2}=-\frac{1}{k_{M_1M_2}}.$$

$\therefore$ $M_1M_2\perp H_1H_2$.

当两条对角线的夹角为直角时，H_1 与 H_2 重合于点 O，本题无意义.

4·22 设 $ABCD$ 为凸四边形，$AC=BD$. 在它的边 AB、BC、CD、DA 上分别作中心为 O_1、O_2、O_3、O_4 的等边三角形. 求证：$O_1O_3\perp O_2O_4$.

（第 33 届国际数学奥林匹克候选题，1992 年）



［证 1］ 设在边 AD 和 DC 上所作的等边三角形分别为 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$.

再分别在 DE 和 DF 上各作一个等边三角形 $\triangle GDE$ 和 $\triangle HDF$.

如果将四边形 O_1ADO_3 绕中心 A 旋转 30°，并将各边拉长到 $\sqrt{3}$ 倍，则可得到一个四边形 $BAGM$.

因此有 $GM=\sqrt{3}DO_3=DF$.

$\therefore$ $GM /\!/ DF$.

因而，四边形 $GDFM$ 为平行四边形.

类似地，可将四边形 O_2CDO_4 绕中心 C 旋转 30°，再将各边拉长到 $\sqrt{3}$ 倍，即可得到四边形 $BCHN$，且 $HDEN$ 为平行四边形.

易知，如果将▱$GDFM$ 以 D 为中心旋转 60°，可得到▱$EDHN$. 因而有

$DN=DM$，$\angle MDN=60^\circ$.

并且还有 $\angle DGM=180^\circ-\angle GDF=\angle ADC$，

且 $GD=AD$，$GM=DC$.

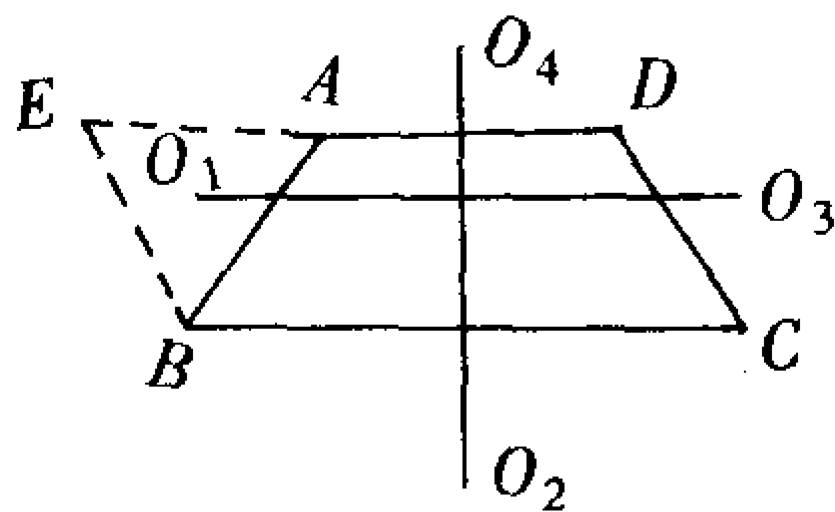
$\therefore$ $\triangle DGM\cong\triangle ADC$，$DM=AC$.

故 $DM=DN=DB$.

因此，以 D 为圆心，DM 为半径作圆，则点 M、N、B 都在圆上. 此

时$\overset{\frown}{MN}$所对圆心角为$\angle MDN$,因而$\angle NBM=30°$.

由于线段 BM、BN 分别是由线段 O_1O_3、O_2O_4 朝相反方向旋转30°得到的,因而原先二线段相互垂直.即 $O_1O_3\perp O_2O_4$,



[证 2] 置图形于复平面,设 $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则$\overline{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,是 -1 的虚立方根,有性质

$\omega\overline{\omega}=1$, $\omega^2=-\overline{\omega}$, $\omega+\overline{\omega}=1$.

故 $z_E=\overrightarrow{BE}+z_B=\overrightarrow{BA}\omega+z_B$

$=(z_A-z_B)\omega+z_B=\omega z_A+\overline{\omega}z_B$.

$\therefore\quad 3z_{O_1}=z_A+z_B+z_E=(1+\omega)z_A+(1+\overline{\omega})z_B$.

同理 $3z_{O_3}=(1+\omega)z_C+(1+\overline{\omega})z_D$.

$\therefore\quad 3\overrightarrow{O_1O_3}=(1+\omega)(z_C-z_A)+(1+\overline{\omega})(z_D-z_B)$.

同理 $3\overrightarrow{O_2O_4}=(1+\omega)(z_D-z_B)+(1+\overline{\omega})(z_A-z_C)$.

$$\therefore\quad \frac{\overrightarrow{O_1O_3}}{\overrightarrow{O_2O_4}}=\frac{(z_C-z_A)+(1-\omega)(z_D-z_B)}{(z_D-z_B)+(1-\omega)(z_A-z_C)}$$

$$=\frac{(z_C-z_A)+\overline{\omega}(z_D-z_B)}{(z_D-z_B)+\overline{\omega}(z_A-z_C)}.$$

$\because\quad |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$

$\therefore$ 分子与分母共轭的积 $=(z_C-z_A)\overline{(z_D-z_B)}+(z_D-z_B)\cdot\overline{(z_A-z_C)}+\omega(z_C-z_A)\overline{(z_A-z_C)}+\overline{\omega}(z_D-z_B)\overline{(z_D-z_B)}$

$=z_{AC}\overline{z_{BD}}-z_{BD}\overline{z_{AC}}+(\omega+\overline{\omega})|\overrightarrow{AC}|^2$,

显然为纯虚数.

故 $O_1O_3\perp O_2O_4$.

4·23 设凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O. 已知:$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2)$, 求证:或者两条对角线互相垂直,或者至少有一条对角线被点 O 平分.

(前苏联教委推荐试题,1988 年)

[证] 记对角线的夹角$\angle AOB=\alpha\leqslant 90°$. 由余弦定理有

$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos\alpha$,

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cdot \cos\alpha,$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot DO \cdot \cos\alpha,$$
$$DA^2 = DO^2 + AO^2 + 2DO \cdot AO \cdot \cos\alpha.$$

四式相加，得到

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2) - 2\cos\alpha(AO \cdot BO - BO \cdot CO + CO \cdot DO - DO \cdot AO).$$

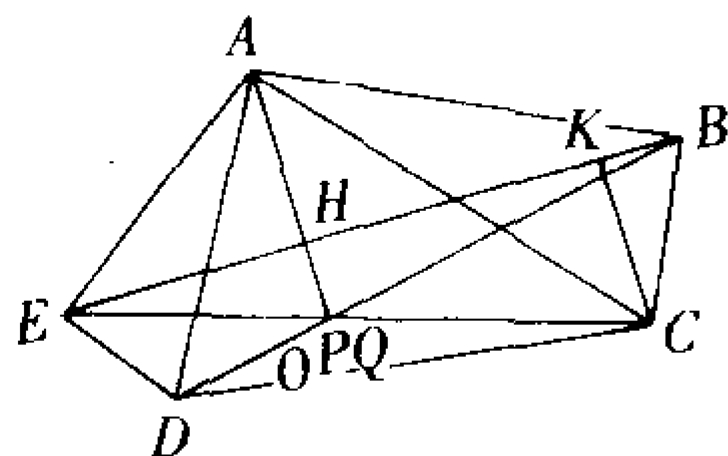
由此及已知条件得到

$$\cos\alpha(AO - CO)(BO - DO) = 0.$$

这表明或者有 $\cos\alpha = 0$，即 $AC \perp BD$，或者 $AO = OC$ 与 $BO = OD$ 至少一个成立，即两条对角线中至少有一条被点 O 平分.

4·24 在凸五边形 $ABCDE$ 中，顶点为 B、E 的角是直角，又 $\angle BAC = \angle EAD$. 求证：如果对角线 BD 和 CE 交于点 O，则直线 AO 与 BE 垂直.

（第 23 届国际数学奥林匹克候选题，1982 年）



［证］ 过 A 点作 $AH \perp BE$，交 BE 于 H，交 CE 于 P，$BD = Q$.

如果我们能证明 P、Q 与 O 点重合，则本题得证.

为此只需证明 $HP = HQ$. 过 C 作 BE 的垂线 CK 交 BE 于 K.

由 $AB \perp BC$，$CK \perp BH$ 可得 $\text{Rt}\triangle CKB \backsim \text{Rt}\triangle BHA$.

$$\therefore \quad \frac{CK}{BH} = \frac{BK}{AH} = \frac{BC}{AB} = \text{tg}\angle BAC.$$

又 $\because$ $\text{Rt}\triangle EHP \backsim \text{Rt}\triangle EKC$

有
$$HP = \frac{EH \cdot CK}{EK} = \frac{EH \cdot BH \cdot \text{tg}\angle BAC}{EB - BK}$$
$$= \frac{EH \cdot BH \cdot \text{tg}\angle BAC}{EB - AH \cdot \text{tg}\angle BAC}.$$

同理可证
$$HQ = \frac{EH \cdot BH \cdot \text{tg}\angle EAD}{EB - AH \cdot \text{tg}\angle EAD}$$

由已知 $\angle BAC = \angle EAD$. $\therefore$ $HP = HQ$.

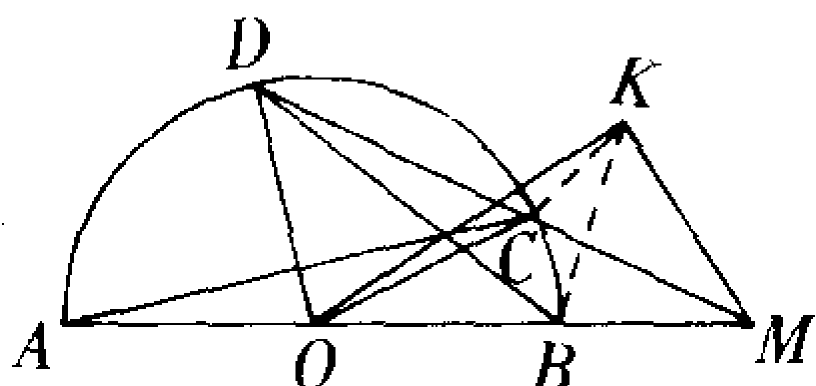
从而 P、Q、O 三点重合，于是 $AO \perp BE$.

4·25 半圆圆心为 O，直径为 AB，一直线交半圆周于 C、D，交

AB 于 $M(MB<MA, MC<MD)$.设 K 是 $\triangle AOC$ 与 $\triangle DOB$ 的外接圆除点 O 外之另一交点.求证:$\angle MKO$ 为直角.

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

[证 1] 连结 KB、KC.由 A、O、C、K 四点共圆,知



$\angle OAC=\angle OKC$.

由 B、O、D、K 四点共圆,

知 $\angle BDO=\angle BKO$.

从而 $\angle AMD=\angle ABD-\angle BDC=\angle BDO-\angle OAC$

$=\angle BKO-\angle CKO=\angle BKC$,

故 B、C、K、M 四点共圆.

再由 $\angle ABC+\angle BAC=90°$ 及 $\angle BAC=\angle OKC$ 知,

$\angle MKO=\angle CKO+\angle CKM=90°$, 即 $\angle MKO$ 为直角.

注 本题题设中 $MC<MD$ 改为 $MD<MC$,证明过程同.

[证 2] 我们用 $\odot AOC$ 和 $\odot DOB$ 来表示 $\triangle AOC$ 和 $\triangle DOB$ 的外接圆.注意到 K 是 O 点关于两圆的连心线的对称点,我们有

$\angle MKO$ 为直角 $\Longleftrightarrow M$、O 在 $\odot AOC$ 中的对径点 R、O 在 $\odot DOB$ 中的对径点 S 三点共线,我们用解析法来建立后一结论.

设 O 点坐标为 $(0,0)$,B 点的坐标为 $(1,0)$,A 点的坐标为 $(-1,0)$,M 点的坐标为 $(a,0)(a>1)$,C 点坐标为 $(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$D$ 点的坐标为 $(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,则 M、C、D 三点共线即可表达为

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

即 $a(\sin\theta_1-\sin\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_2)=0$ ①

由上式及恒等式

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)=(\sin\theta_1+\sin\theta_2)(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$$

知 $a\sin(\theta_1+\theta_2)-(\sin\theta_1+\sin\theta_2)=0$ ②

另一方面,由 $\angle RAO=\angle RCO=\frac{\pi}{2}$ 知 R 为单位圆 O 在 A 点的切线与在 C 点的切线的交点.亦即 $x=-1$ 与 $\cos\theta_1\cdot x+\sin\theta_1\cdot y=1$ 的交

点，于是 R 点的坐标为$\left(-1,\frac{1+\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\right)$.

同理 S 点的坐标为$\left(1,-\frac{1-\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\right)$.这样

$$M、R、S\text{ 共线}\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}x_M & y_M & 1\\ x_R & y_R & 1\\ x_S & y_S & 1\end{vmatrix}=0.$$

$$\text{即}\quad\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ -1 & \frac{1+\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & 1\\ 1 & \frac{1-\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & 1\end{vmatrix}=0.$$

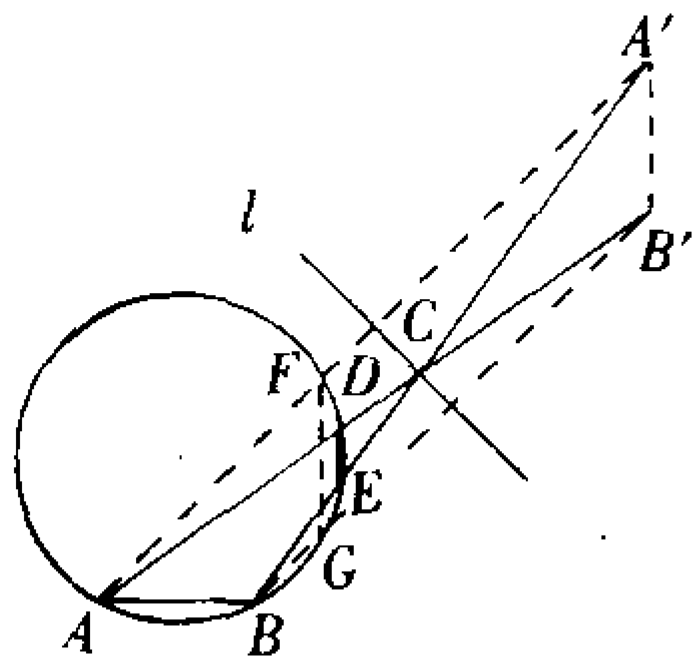
或 $-\frac{1}{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}\cdot[a(\sin\theta_1-\sin\theta_2)-a\sin(\theta_1+\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_2)+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)]=0$ ③

显然①式与②式相加即得③式，从而命题成立.

4·26 给定一个半径为 1 的圆及其一条长度小于$\sqrt{2}$的弦 AB. 直线 l 与圆相离且与直线 AB 成 45°角，而且给定圆的圆心在此角之内. 试用圆规和直尺在直线 l 上确定一点 C，使得线段 AC、BC 与圆周的交点 D 和 E 所在的直线与 AB 垂直.

（前苏联教委推荐试题，1990 年）

[解] 设 A'、B'分别是点 A、B 关于直线 l 的对称点，于是 $A'ABB'$ 是等腰梯形，其对角线的交点 C 当然在对称轴 l 上. 以下证明点 C 即为所求.



将线段 AB'、BA'、AA'、BB'与圆的交点分别记为 D、E、F、G. 因 $AB<\sqrt{2}$，所以线段 AB 与 FG 不交，于是四边形 $FABG$ 为等腰梯形.

∵ 直线 AB 与 l 的夹角为 45°，

∴ $\angle BAF=\angle AFG=45°$.

∴ $FG\perp AB$.

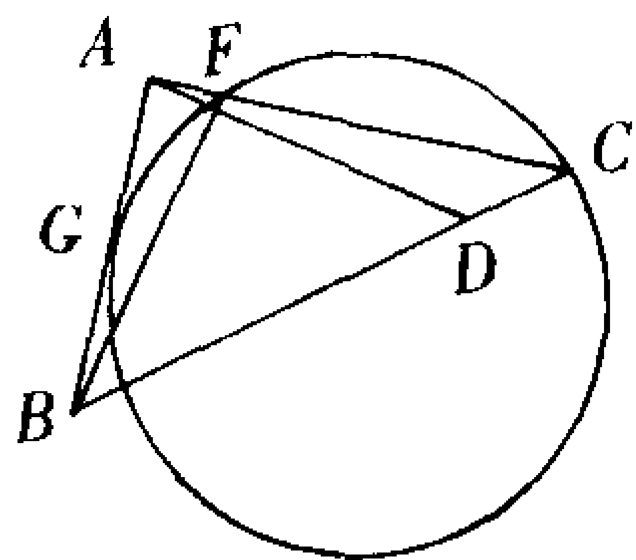
$\because \quad \angle FAD=\angle AA'B=\angle EBG,$

$\therefore \quad \overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{EG}. \quad \therefore \quad DE /\!/ FG. \quad \therefore \quad DE\perp AB.$

这表明点 C 满足题中要求.

事实上,这样的点 C 还是惟一的.设有点 $C'\in l$ 满足题中要求,即有 $DE\perp AB$,则有 $\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{EG}$.从而 $\angle FAC'=\angle C'BG$.所以点 A、B,直线 AC' 与 BG 的交点以及直线 BC' 与 AF 的交点恰为等腰梯形的 4 个顶点且 l 为此梯形的对称轴.这表明点 C' 与 C 重合.

4·27 如图,设△ABC 是直角三角形,点 D 在斜边 BC 上,$BD=4DC$.已知:圆过点 C 且与 AC 相交于 F,与 AB 相切于 AB 的中点 G.求证:$AD\perp BF$.



(中国初中数学联赛,1999 年)

[证] 作 $DE\perp AC$ 于 E,

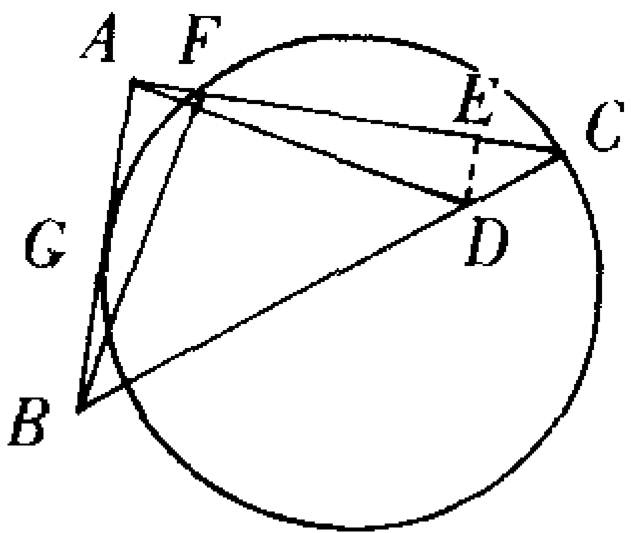
则 $AC=\dfrac{5}{4}AE$,且 $AG=\dfrac{5}{2}ED$.

由切割线定理

$$AG^2=AF\cdot AC=AF\cdot\frac{5}{4}AE.$$

故 $\dfrac{25}{4}ED^2=AF\cdot\dfrac{5}{4}AE$, 即 $5ED^2=AF\cdot AE$.

$\therefore \quad AB\cdot ED=AF\cdot AE$. 故 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AF}{ED}$.



$\therefore \quad \triangle BAF\backsim\triangle ADE.$

$\therefore \quad \triangle BAF\backsim\triangle AED.$

$\therefore \quad \angle ABF=\angle EAD$. 而 $\angle EAD+\angle DAB=90^\circ$,

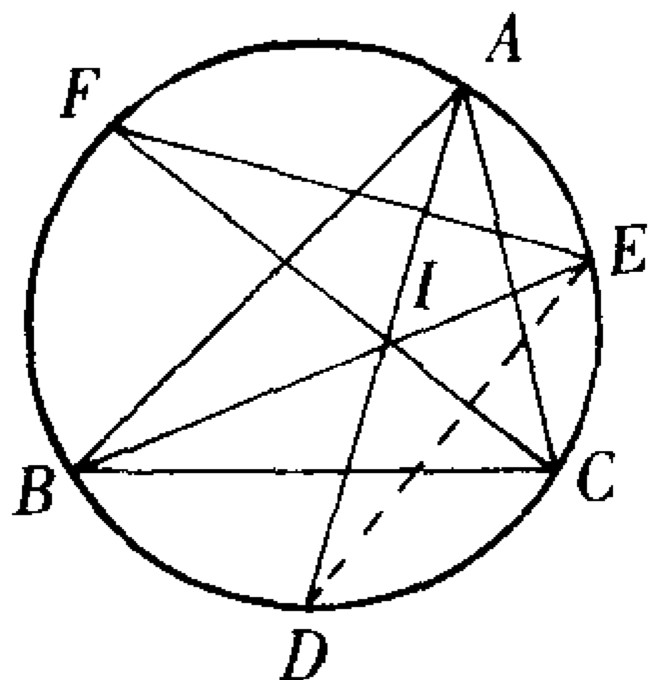
$\therefore \quad \angle ABF+\angle DAB=90^\circ,$

$\therefore \quad AD\perp BF.$

4·28 I 是△ABC 的内心,AI、BI、CI 的延长线分别交△ABC 的外接圆于 D、E、F. 求证:$EF\perp AD$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991 年)

[证] 如图,连 DE.



$\because \quad \angle ADE = \angle ABE = \dfrac{\angle B}{2}$,

又 $\quad \angle DEF = \angle BAD + \angle BCF$

$$= \frac{\angle A + \angle C}{2}.$$

$\therefore \quad \angle ADE + \angle DEF$

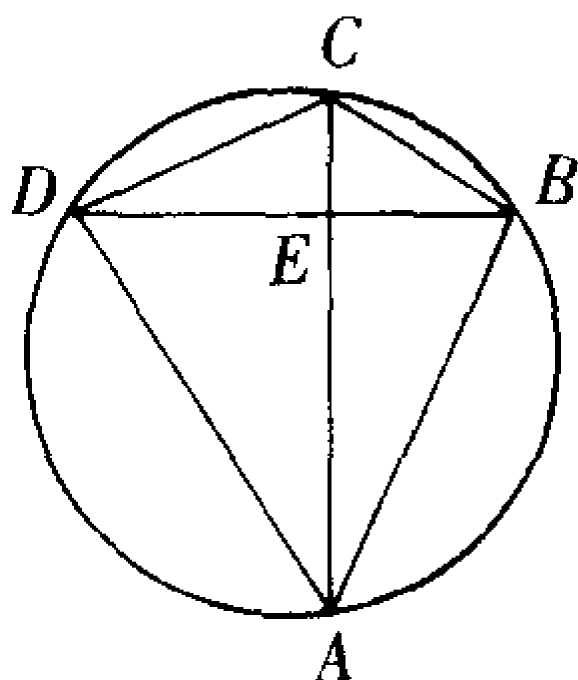
$$= \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

则 $\quad \angle DMF = \angle ADE + \angle DEF = \dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \quad EF \perp AD$.

4·29 四边形 $ABCD$ 内接于半径为 r 的圆,对角线 AC、BD 相交于 E. 若 $AC \perp BD$,则 $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2$. 又若上式成立,是否必有 $AC \perp BD$,说明你的理由.

(英国数学奥林匹克,1991 年)



[证] (1)因为 $AC \perp BD$, 所以

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$$
$$= AD^2 + BC^2$$
$$= (2r\sin\angle ABD)^2 + (2r\sin\angle BAC)^2$$
$$= 4r^2(\sin^2\angle ABD + \sin^2\angle BAC)$$
$$= 4r^2(\sin^2\angle ABD + \cos^2\angle ABD)$$
$$= 4r^2.$$

(2)若题设式子成立,则不一定必有 $AC \perp BD$,例如当 AC 和 BD 为圆的直径时,虽然 AC 不与 BD 垂直,但题设式仍成立.

4·30 设 D 是锐角$\triangle ABC$ 内部的一个点,使得$\angle ADB = \angle ACB + 90°$,并有 $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. (1)计算比值 $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$. (2)求证:$\triangle ACD$ 的外接圆和$\triangle BCD$ 的外接圆在 C 点的切线互相垂直.

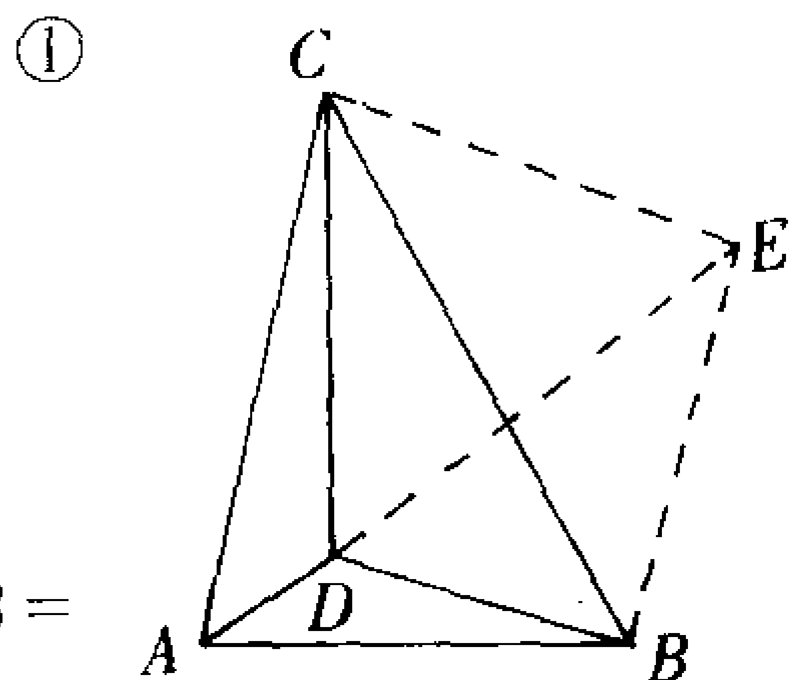
(第 34 届国际数学奥林匹克,1993 年)

[解] (1)如图,分别作$\angle CBE = \angle CAD$,$\angle ACD = \angle BCE$.

设边 BE、CE 相交于 E.

于是$\triangle ACD \backsim \triangle BCE$.

从而 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{CD}{CE}$, ①



由已知 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$,

即 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$.

从而由①式得 $BD=BE$.

又 $\angle ADB=\angle CBD+\angle CAD+\angle ACB=90^\circ+\angle ACB$,

$\therefore$ $\angle CAD+\angle CBD=90^\circ$. ②

即 $\angle CBE+\angle CBD=90^\circ$, $\angle DBE=90^\circ$.

因此$\triangle DBE$是等腰直角三角形.

由①知 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CD}{CE}$,

又$\because$ $\angle ACD=\angle BCE$, 且 $\angle ACB=\angle DCE$.

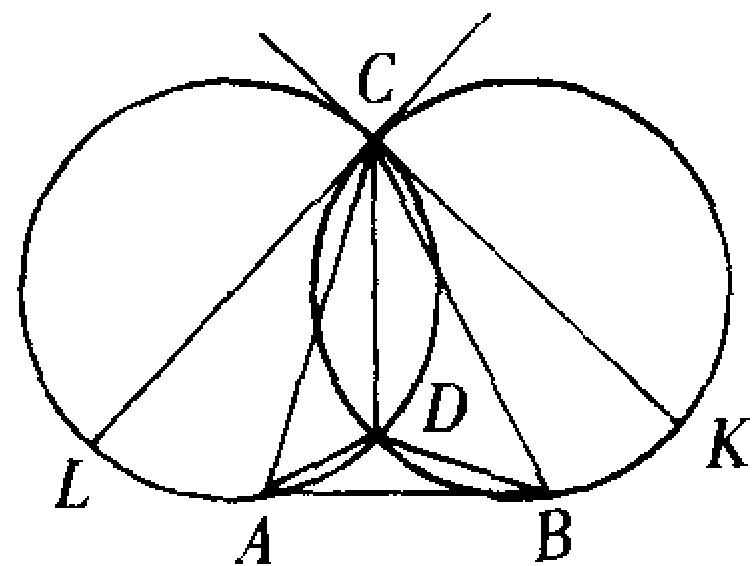
$\therefore$ $\triangle ACB\backsim\triangle CDE$.

从而 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CD}{CA}$,

故 $DE=\dfrac{AB\cdot CD}{CA}$.

因此 $\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{AB\cdot CD}{CA\cdot BD}=\sqrt{2}$.

(2)如图,设 CK、CL 分别是$\triangle ACD$和$\triangle BCD$的外接圆的切线.



$\because$ $\angle LCD=\angle CBD$, $\angle KCD=\angle CAD$,

$\therefore$ 由②有$\angle LCD+\angle KCD=\angle CBD+\angle CAD=90^\circ$.

即 $CL\perp CK$.

4·31 I为$\triangle ABC$的内心,内切圆分别切 BC、CA 于点 D、E. 如果 BI 交 DE 于点 G,求证:$AG\perp BG$.

(印度数学奥林匹克,1994年)

[证] 连 ID、IC、IE 和 AI,易知

$\angle AIB=\angle BDG=90°+\frac{1}{2}\angle ACB$,

又 $\angle ABI=\angle GBD=\frac{1}{2}\angle ABC$,

则 $\triangle ABI \backsim \triangle GBD$,

$\therefore \frac{AB}{BI}=\frac{BG}{BD}$.

$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle IBD$.

而 $ID \perp BD$, 故 $AG \perp BG$.

4·32 MN 是圆的直径,AB 是垂直于 MN 的弦,位于弦 AB 和 $\overset{\frown}{ANB}$所围区域内的线段绕 A 旋转,使得 B 转到 B',N 转到 N',证明:$MP \perp N'P$,这里 P 是 BB'的中点.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[证] 设 MN 交 AB 于 X,则 X 是 AB 的中点.设 AB'的中点为 X'.又 P 是 $B'B$ 的中点,从而由 $AB=AB'$ 及中位线性质可得

$AX=XB=PX=X'P=AX'$.

由 $XN=X'N'$ 及相交弦定理可得

$MX \cdot X'N'=MX \cdot XN=AX \cdot XB$

$=PX \cdot X'P$.

$\therefore \frac{MX}{X'N'}=\frac{PX}{XP}$

$\because \angle N'X'P=90° \pm \angle B'X'P=90° \pm \angle PXB=\angle PXM$.

$\therefore \triangle N'X'P \backsim \triangle PXM$. 有 $\angle MPX=\angle PN'X'$.

故 $\angle MPN'=\angle MPX+\angle X'PN' \pm \angle XPX'$

$=\angle PN'X'+\angle X'PN' \pm \angle PX'B'$

$=(180°-\angle PX'N') \pm \angle PX'B'$

$=90°$.

$\therefore MP \perp N'P$.

4·33 $\triangle ABC$ 的外接圆为$\odot O$,$\angle C=60°$,N 是 $\overset{\frown}{AB}$的中点,H 是垂心.求证:$CN \perp OH$.

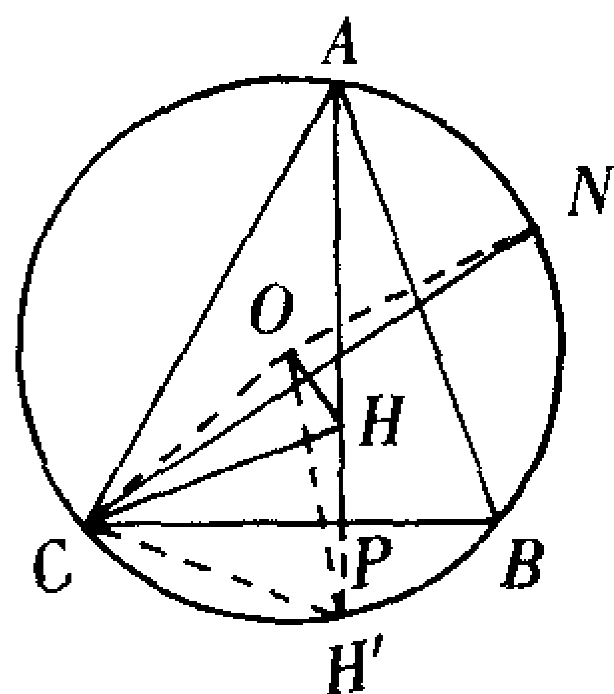
(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[证] 如图,连 OC、ON、OH'、CH'、BH'.

由 $\angle ACB=60^\circ$，知 $\angle CAH'=30^\circ$.

故$\triangle OCH'$是等边三角形.

由 垂心 H,易得 $CH=CH'$;



由 N 是 $\overset{\frown}{AB}$中点,知 $ON\perp AB$.

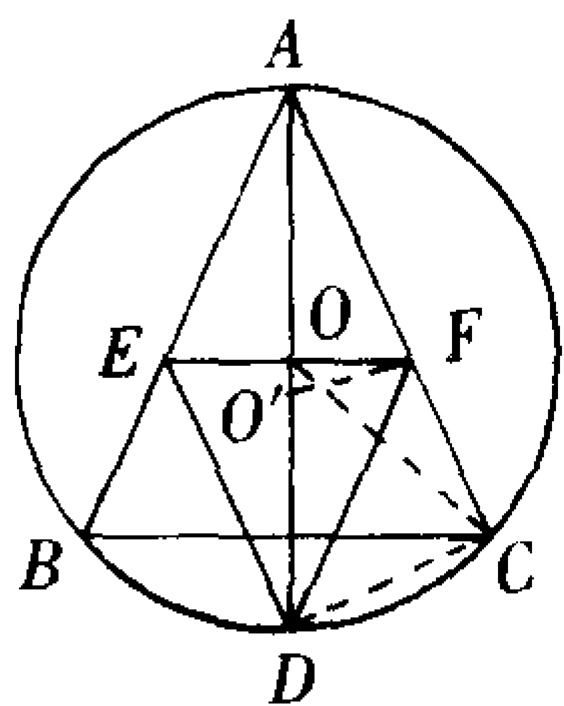
而 $CH\perp AB$，有 $ON \mathrel{\underline{\parallel}} CH$,

故 $OCHN$ 是平行四边形.

又 $OC=CH$，知 $OCHN$ 是菱形.

从而 $OH\perp CN$.

4·34 如图,已知在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,O为$\triangle ABC$的内心,连接AO并延长与$\triangle ABC$的外接圆交于点D,过点O作BC边的平行线,分别交AB、AC于E、F.求证:AB、AC均与$\triangle EFD$的外接圆相切.



（中国黑龙江省哈尔滨市数学竞赛,1993年）

[证] 设$\triangle EFD$的外接圆为$\odot O'$,连OC、DC、FO'.

$\because$ $AB=AC$,

$\therefore$ AD是外接圆的直径,且$\triangle ABC$的内心及$\triangle EFD$的外心均在AD上.

图形为以AD为轴的对称图形,因而只需证$\odot C'$与AC相切.

$\because$ O为$\triangle ABC$的内心,

$\therefore$ $\angle FCO=\angle OCB$.

又$\because$ $EF\parallel BC$， $\therefore$ $\angle FOC=\angle OCB$.

$\therefore$ $\angle FCO=\angle FOC$，$FO=FC$.

又$\because$ $\angle FOD=\angle DCF=90^\circ$， $\therefore$ D、C、F、O四点共圆,

$\angle FDC=\angle FOC=\angle FCO=\angle FDO$.

而 $\angle O'FD=\angle O'DF$,

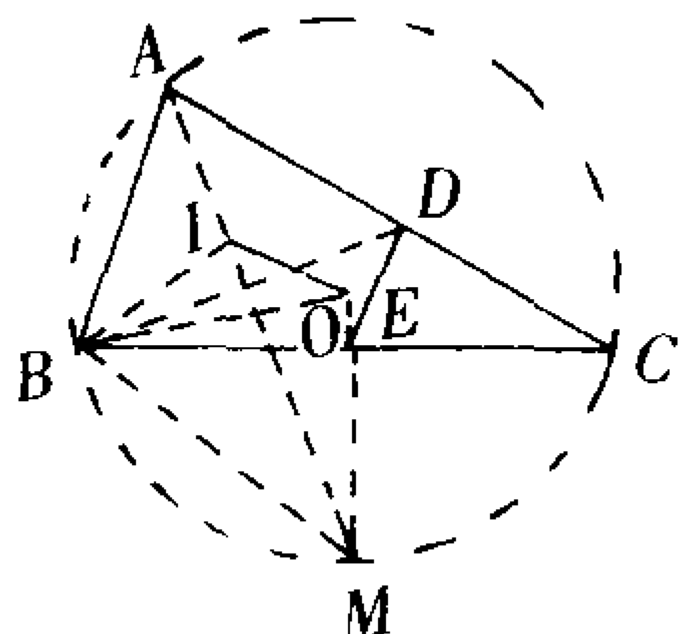
$\therefore$ $\angle O'FD=\angle FDC$，$O'F\parallel BC$，$O'F\perp AC$,

即 AC与$\odot O'$相切.

4·35 在$\triangle ABC$中,$\angle C=30^\circ$,点O和I分别是外心、内心,在边AC和BC上分别有点D和E,使得$AD=BE=AB$.求证:$OI\perp DE$且

$OI=DE$.

（中国国家集训队选拔考试，1988 年）



［证 1］ 延长 AI 交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 M，连结 BD、OM、OB、BM.

$\because$ I 为$\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore$ 点 M 平分$\overset{\frown}{BMC}$.

$\therefore$ $OM\perp BC$ 且$\angle MOB=\angle BAC$.

$\because$ $AB=2R\sin C=R=OB=OM$,

$\therefore$ $AD=BE=AB=OB=OM$.

$\therefore$ $\triangle DAB\cong\triangle MOB$. $\therefore$ $MB=BD$.

又$\because$ I 是内心，$\angle C=30^\circ$,

$$\therefore \angle MBI=\angle MBC+\angle CBI=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)=75^\circ.$$

$\because$ $\angle BMI=\angle BMA=\angle C=30^\circ$,

$\therefore$ $\angle MIB=75^\circ$.

$\therefore$ $\angle MIB=\angle MBI$. $\therefore$ $MB=MI$.

$\because$ $AD=AB$，AI 平分$\angle DAB$,

$\therefore$ $AI\perp DB$，即 $IM\perp BD$.

又$\because$ $OM\perp BE$ 且 $OM=BE$,

$\therefore$ $\angle OMI$ 和$\angle EBD$ 的两对边分别垂直且相等.

又$\because$ 二者都是锐角，

$\therefore$ $\triangle OMI\cong\triangle EBD$，且通过旋转 90° 和平移可使两个三角形重合.

$\therefore$ $OI\perp DE$ 且 $OI=DE$.

［证 2］ 连结 IA、IB、ID、IE、OA、OB. 由正弦定理可得

$$AB=2R\sin C=2R\sin 30^\circ$$
$$=R=OA=OB.$$

$\therefore$ $\triangle OAB$ 为等边三角形.

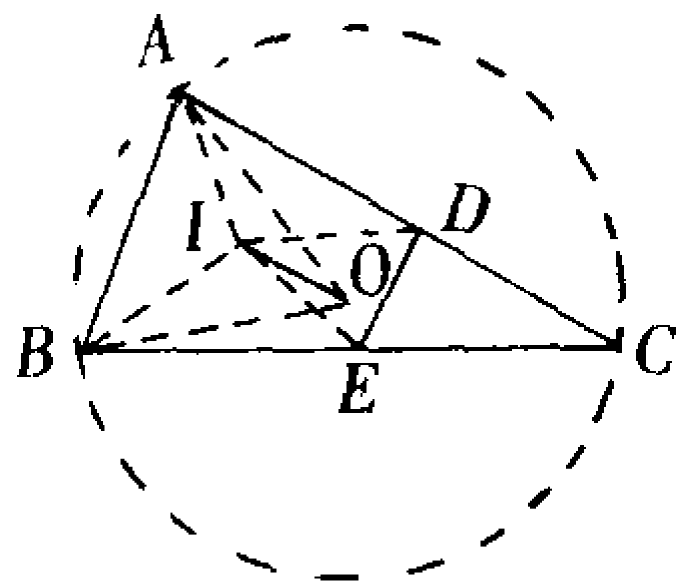
$\because$ I 为内心且 $AD=AB=BE$,

$\therefore$ $\triangle DAI\cong\triangle BAI\cong\triangle BEI$.

$\therefore\quad \angle EIB=\angle AID=\angle AIB$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ+\angle C)=105^\circ,$$

$ID=IB,\ IE=IA.$



将$\triangle ABC$所在的平面视为复平面，内心I为原点. 点A和B所对应的复数分别为z_1、z_2. 设A、B、C三点按逆时针方向排列(如图). 于是$\overrightarrow{ID}$是由$\overrightarrow{IB}$按顺时针方向旋转210°得到的，$\overrightarrow{IE}$是由$\overrightarrow{IA}$按逆时针方向旋转210°而得到的.

$$\therefore\quad \overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}=z_2\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}.$$

$$\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}=z_1\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{DE}=z_1\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}.$$

$\because\quad \overrightarrow{BO}$是由$\overrightarrow{BA}$按顺时针方向旋转60°得到，

$$\therefore\quad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}=(z_1-z_2)e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

$$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BO}=z_2+(z_1-z_2)e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$=z_1e^{-i\frac{\pi}{3}}+z_2(1-e^{-i\frac{\pi}{3}})..$$

$$\therefore\quad -i\cdot\overrightarrow{IO}=z_1\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}+z_2(1-e^{-i\frac{\pi}{3}})e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$=z_1\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}=\overrightarrow{DE}.$$

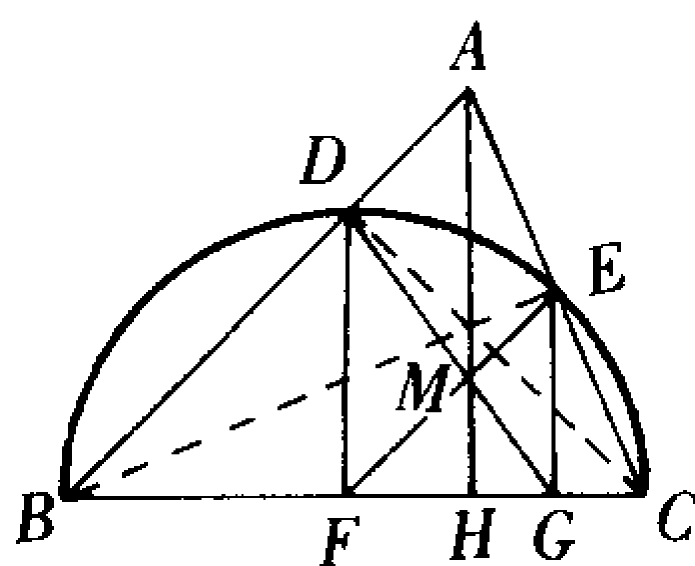
$\therefore\quad DE\perp OI$　且　$DE=OI$.

4·36　以$\triangle ABC$的底边BC为直径作半圆，分别交AB、AC于点D和E，过点D和E分别作BC的垂线，垂足分别为F、G，线段DG和EF交于点M. 求证：$AM\perp BC$.

(中国国家集训队选拔考试，1996年)

[证 1]　作高AH并连结BE、CD，于是

$BE\perp AC,\ CD\perp AB.$



$\because$ $DF\perp BC$, $EG\perp BC$,

$\therefore$ $DF /\!/ EG$.

$\therefore$ $\dfrac{DM}{MG}=\dfrac{DF}{EG}=\dfrac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\dfrac{BD\cdot CD}{BE\cdot CE}$

$=\dfrac{BD\cdot CD}{CE\cdot BE}$. ①

$\because$ $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,

$\therefore$ $\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AE}$. ②

$\because$ $DF /\!/ AH /\!/ EG$, $\therefore$ $\dfrac{AD}{FH}=\dfrac{BD}{BF}$, $\dfrac{AE}{HG}=\dfrac{CE}{CG}$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD\cdot FH\cdot CG}{BF\cdot HG\cdot CE}$. ③

由①～③,得到

$\dfrac{DM}{MG}=\dfrac{BD^2\cdot FH\cdot CG}{CE^2\cdot HG\cdot BF}=\dfrac{BC\cdot BF\cdot FH\cdot CG}{CG\cdot BC\cdot HG\cdot BF}=\dfrac{FH}{HG}$.

$\therefore$ $MH /\!/ DF$.

$\because$ $DF\perp BC$, $\therefore$ $MH\perp BC$.

又$\because$ $AH\perp BC$, $\therefore$ 直线 MH 与 AH 重合.

$\therefore$ $AM\perp BC$.

[证 2] 作辅助线同证 1.

$\because$ $DF\perp BC$, $EG\perp BC$,

$\therefore$ $DF=BD\sin B=BC\cdot\cos B\cdot\sin B$, $EG=BC\cdot\cos C\cdot\sin C$.

$\therefore$ $\dfrac{DM}{MG}=\dfrac{DF}{EG}=\dfrac{\cos B\cdot\sin B}{\cos C\cdot\sin C}=\dfrac{AC\cdot\cos B}{AB\cdot\cos C}$.

$\because$ $\triangle ACD\backsim\triangle ABE$, $\therefore$ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AE}$.

$\therefore$ $\dfrac{DM}{MG}=\dfrac{AD\cdot\cos B}{AE\cdot\cos C}=\dfrac{FH}{HG}$. $\therefore$ $MH /\!/ DF$.

$\because$ $DF\perp BC$, $\therefore$ $MH\perp BC$.

又$\because$ $AH\perp BC$, $\therefore$ 直线 MH 与 AH 重合.

$\therefore$ $AM\perp BC$.

[证 3] 作辅助线同证 1,于是 $BE\perp AC$,$CD\perp AB$,记$\triangle ABC$ 的垂心为K.

$\because \quad DF\perp BC, EG\perp BC, AH\perp BC,$

$\therefore \quad DF /\!/ AH /\!/ EG.$

$\therefore \quad \dfrac{FH}{FC}=\dfrac{DK}{DC},\ \dfrac{HG}{BG}=\dfrac{KE}{BE}.$

$\therefore \quad \dfrac{FH}{HG}=\dfrac{FC\cdot DK}{DC}\cdot\dfrac{BE}{BG\cdot KE}=\dfrac{BE}{CD}\cdot\dfrac{CF}{BG}\cdot\dfrac{DK}{KE}.$

$\because \quad \triangle BKD\backsim\triangle CKE, \therefore \quad \dfrac{KD}{KE}=\dfrac{BD}{CE}.$

又$\because \quad CD^2=CF\cdot CB,\ BE^2=BG\cdot BC,$

$$\therefore \quad \frac{FH}{HG}=\frac{BE}{CD}\cdot\frac{CF\cdot CB}{BG\cdot BC}\cdot\frac{KD}{KE}=\frac{BE}{CD}\cdot\frac{CD^2}{BE^2}\cdot\frac{BD}{CE}$$

$$=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG}.$$

$\therefore \quad MH /\!/ DF.\ \because \quad DF\perp BC,\ \therefore \quad MH\perp BC.$

又$\because \quad AH\perp BC,\ \therefore$ 直线 AH 与 MH 重合.

$\therefore \quad AM\perp BC.$

[证 4] 作辅助线同证 1,于是 AH、BE、CD 交于一点,即垂心.由塞瓦定理有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1. \qquad ①$$

$\because \quad EG\perp BC,\ DF\perp BC,\ \therefore \quad EG /\!/ DF.$

$$\therefore \quad \frac{GM}{MD}=\frac{EG}{DF}=\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}. \qquad ②$$

$$\because \quad AH /\!/ EG,\ \therefore \quad \frac{HG}{AE}=\frac{CH}{CA}.\ \therefore \quad HG=\frac{AE\cdot CH}{AC}. \qquad ③$$

$$\text{又}\because \quad AB\cdot CD=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BE. \qquad ④$$

由①~④得到

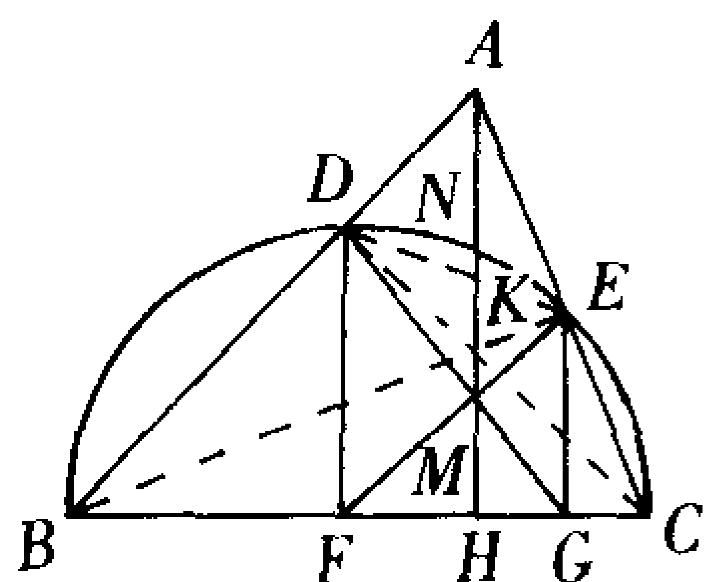
$$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH\cdot AC}{AE\cdot CH}\cdot\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$$

$$=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A、M、H 三点共线.

$\therefore \quad AM\perp BC.$

[证 5] 作高 AH,连结 BE、CD,于是 $BE\perp AC$,$CD\perp AB$,AH、



BE、CD 交于垂心 K，连结 DE 交 AH 于点 N. 直线 ANK 与 $\triangle DBE$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{DA}{BA}\cdot\frac{BK}{KE}\cdot\frac{EN}{DN}=1.$$

$\because\quad \triangle BHK \backsim \triangle BEC \backsim \triangle AEK$,

$\therefore\quad BK=\dfrac{BC\cdot KH}{CE},\ KE=\dfrac{KH\cdot AE}{BH}.$

$\therefore\quad \dfrac{DN}{NE}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{BK}{KE}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{BH}{AE}=\dfrac{AD}{AE}\cdot\dfrac{BH}{AB}\cdot\dfrac{BC}{CE}.$

$\because\quad \triangle ACD \backsim \triangle ABE$, $\therefore\quad \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{CD}{BE}.$

$\because\quad DF /\!/ AH$, $\therefore\quad \dfrac{BH}{AB}=\dfrac{BF}{BD}.$

又$\because\quad BD^2=BF\cdot BC$,

$$\therefore\quad \frac{DN}{NE}=\frac{CD}{BE}\cdot\frac{BF}{BD}\cdot\frac{BC}{CE}=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}$$
$$=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG}.$$

$\therefore\quad NM /\!/ EG$. $\because\quad EG\perp BC$, $\therefore\quad NM\perp BC$.

$\because\quad NH\perp BC$, $\therefore$ 直线 NM 与 NH 重合.

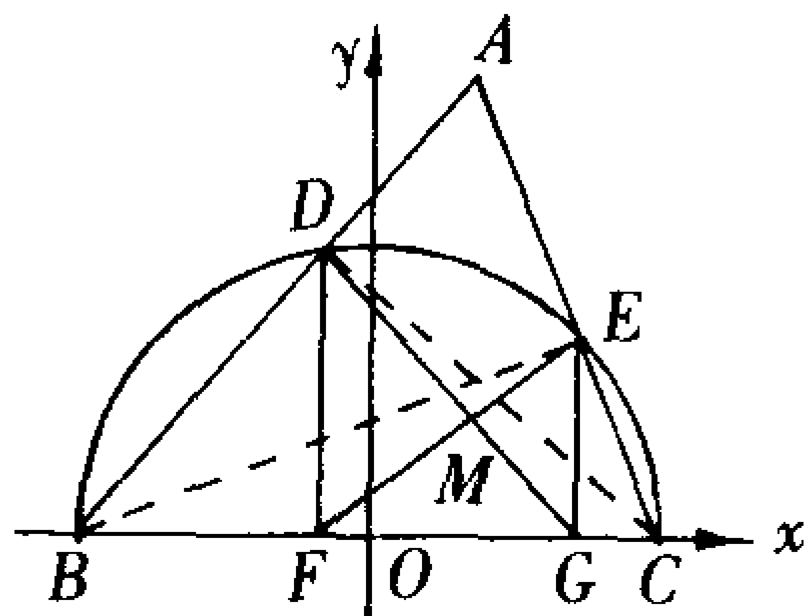
$\therefore$ 点 M 在 AH 上. $\therefore\quad AM\perp BC$.

［证 6］ 以圆心为原点，如图建立坐标系. 不妨设 $BC=2$，$\angle EBC=\alpha$，$\angle DCB=\beta$. 则

BD 的直线方程：$y=\operatorname{ctg}\beta\cdot(x+1)$，

CE 的直线方程：$y=-\operatorname{ctg}\alpha\cdot(x-1)$.

故交点 A 的横坐标



$$x_A=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

而 $E(\cos2\alpha,\sin2\alpha)$，$D(-\cos2\beta,\sin2\beta)$，

$$G(\cos2\alpha,0),\ F(-\cos2\beta,0).$$

$\therefore$ DG 的直线方程：$y=\dfrac{\sin2\beta}{-(\cos2\alpha+\cos2\beta)}\cdot(x-\cos2\alpha)$，

EF 的直线方程：$y=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha+\cos2\beta}\cdot(x+\cos2\beta)$，

∴ M 点的横坐标 $x_M=\dfrac{\sin2\alpha\cos2\beta-\cos2\alpha\sin2\beta}{\sin2\alpha+\sin2\beta}$

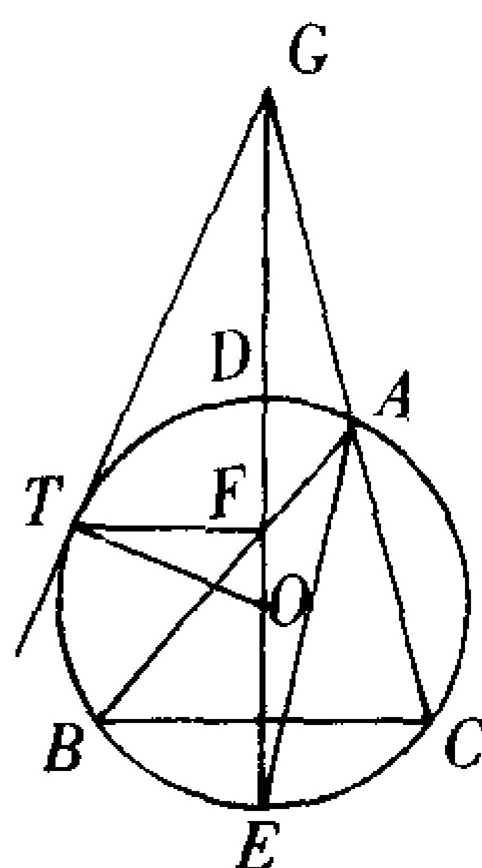
$=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=x_A$ （A 点的横坐标）.

故 $AM\perp BC$.

4·37 设 AB、AC 为圆 O 的两条弦，垂直于 BC 的直径分别交 AB 于 F、AC 于 G（F 在圆内），过 G 作切线，T 为切点. 求证：F 是 T 在 OG 上的正射影.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

［证］ 设垂直于 BC 的直径为 DE，⊙O 的半径为 R.



∵ $OE\perp BC$ 知 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$，

∴ $\angle BAE=\angle EAC$.

∴ AE 是 $\angle FAG$ 的外角平分线.

又因为 $AD\perp AE$，则 AD 是 $\triangle FAG$ 的内角平分线，从而有

$$\frac{GD}{DF}=\frac{GA}{AF}=\frac{EG}{EF},$$

得 $GD\cdot EF=DF\cdot EG$，

即 $(OG-R)(R+OF)=(R-OF)(R+OG)$.

化简得 $OG\cdot OF=R^2=OT^2$.

于是 $\triangle OTF\backsim\triangle OGT$，从而 $\angle OFT=\angle OTG=90°$.

即 $TF\perp OG$，F 为 T 在 OG 上的正射影.

4·38 考虑 $\triangle ABC$ 的三个旁切圆，每一对圆恰有一条与 $\triangle ABC$ 的边不同的公切线，这三条公切线组成一个三角形 T，O 是 $\triangle ABC$ 的外心. 求证：OA 与三角形 T 的一条边垂直.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年）

［证］ 设旁切圆的圆心为 I_A、I_B、I_C，则 I_B、I_C 均在 $\angle BAC$ 的外角平分线上.

设⊙I_C 切直线 BC 于 D，则

$\alpha=\angle AI_CD$

$$= 360° - \angle CAI_C - \angle C - 90°$$

$$= 180° - \angle C - (\angle CAI_C - 90°)$$

$$= 180° - \angle C - \frac{1}{2}\angle BAC.$$

设 EF 为$\odot B$、$\odot C$ 的另一条公切线，E、F 为切点，

则 $\angle I_B I_C F = \alpha$.

$\because$ $\angle OAI_C = \angle OAB + \angle BAI_C$

$$= \frac{1}{2}(180° - \angle BOA) + \frac{1}{2}(180° - \angle BAC)$$

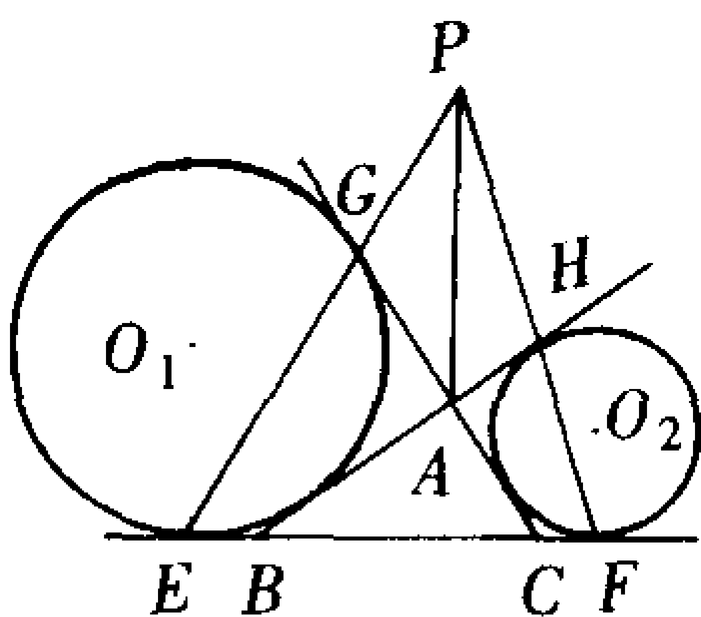
$$= 180° - \frac{1}{2}\angle BOA - \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$= 180° - \angle C - \frac{1}{2}\angle BAC = \alpha.$$

$\therefore$ $\angle OAI_C = \angle I_B I_C F$， 则 $OA /\!/ I_C F$.

$\because$ $I_C F \perp EF$， $\therefore$ $OA \perp EF$.

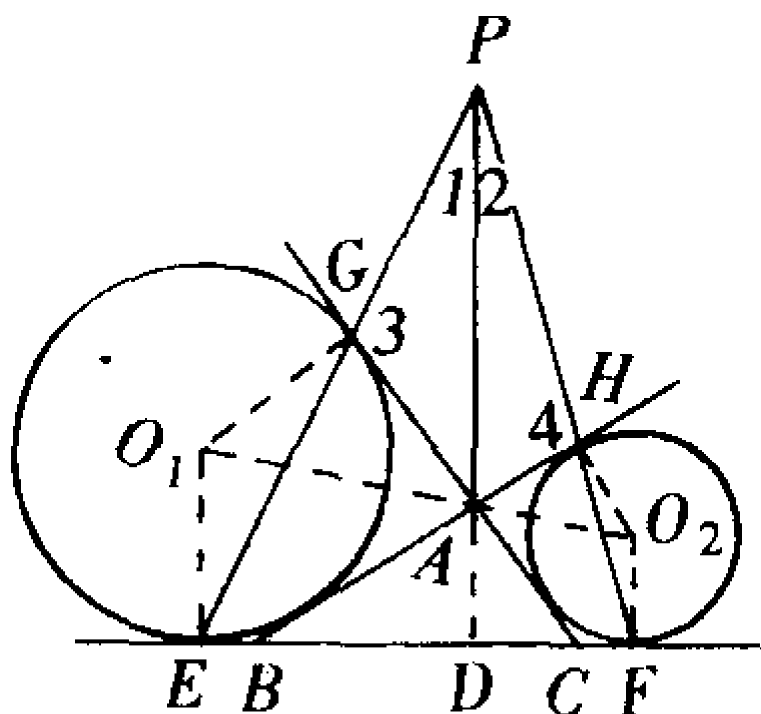
即 OA 与三角形 T 的一条边垂直.



4·39 如图，圆 O_1 和圆 O_2 与$\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切，E、F、G、H 为切点，并且 EG、FH 的延长线交于P 点. 求证：直线 PA 与 BC 垂直.

（中国高中数学联赛，1996 年）

［证 1］ 延长 PA 交 BC 于 D，连结 O_1A、O_1E、O_1G、O_2A、O_2F、O_2H. 则（见图）



$$\frac{ED}{DF} = \frac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PDF}} = \frac{\frac{1}{2}PE \cdot PD \cdot \sin\angle 1}{\frac{1}{2}PE \cdot PD \cdot \sin\angle 2}$$

$$= \frac{PE}{PF} \cdot \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}.$$

在$\triangle PEF$ 中，由正弦定理，

$$\frac{PE}{PF} = \frac{\sin\angle PFE}{\sin\angle PEF}.$$

$\because$ FE、CE 是圆 O_1 的切线，

$\therefore$ $\angle PEF=\angle CGE=180^\circ-\angle 3$，

$\sin\angle PEF=\sin\angle 3$.

同理 $\sin\angle PFE=\sin\angle 4$.

故 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{\sin\angle 4}{\sin\angle 3}\cdot\dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\dfrac{\sin\angle 4}{\sin\angle 2}\cdot\dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$.

在$\triangle PHA$ 及$\triangle PGA$ 中，由正弦定理，

$$\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 2}=\frac{PA}{AH},\ \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}=\frac{AG}{PA}.$$

有 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{PA}{AH}\cdot\dfrac{AG}{PA}=\dfrac{AG}{AH}$.

易知 $\mathrm{Rt}\triangle AGO_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle AHO_2$，

于是 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{AO_1}{AO_2}$.

易知 O_1EFO_2 是直角梯形，由 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AO_1}{AO_2}$，有 $AD/\!/OE$.

故 $AD\perp BC$， 即 $PA\perp BC$.

[证 2] 延长 PA 交 BC 于点 D. 直线 PHF 与$\triangle ABD$ 的三边延长线都相交. 直线 PGE 与$\triangle ADC$ 的三边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP}{AP}=1=\frac{DP}{AP}\cdot\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}.$$

$\therefore$ $\dfrac{AH}{BH}\cdot\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{AG}{CG}\cdot\dfrac{CE}{DE}$.

$\because$ CG、CE 为$\odot O_1$ 的两条切线，BF、BH 为$\odot O_2$ 的两条切线.

$\therefore$ $CG=CE$，$BF=BH$， $\therefore$ $\dfrac{AH}{DF}=\dfrac{AG}{DE}$.

连结 O_1G、O_1E、O_1A、O_2A、O_2F、O_2H，于是 O_1AO_2 为一条直线，且 $O_1G\perp GC$，$O_2H\perp BH$.

$\because$ $\triangle O_1AG\backsim O_2AH$， $\therefore$ $\dfrac{O_1A}{O_2A}=\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{DE}{DF}$.

$\because$ $O_1E\perp EF$，$O_2F\perp EF$， $\therefore$ $O_1E/\!/O_2F$.

$\therefore$ $O_1E/\!/AD/\!/O_2F$ $\therefore$ $AD\perp EF$ $\therefore$ $PA\perp BC$.

[证 3] 过 A 作 $AD\perp BC$，延长 DA 交直线 HF 于点 P'. 直线 P'

HF 与$\triangle ABD$ 的三边延长线都相交.由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=1.$$

$\because\quad BH=BF,\quad\therefore\quad \dfrac{AH}{DF}\cdot\dfrac{DP'}{AP'}=1.\qquad$ ①

连结 O_1A、O_1E、O_1G、O_2A、O_2F、O_2H.于是 O_1AO_2 为一条直线且

$O_1E\perp EF$, $O_1G\perp CG$, $O_2F\perp EF$, $O_2H\perp BH$.

$\therefore\quad O_1E/\!/AD/\!/O_2F$. 又 $\because\quad \triangle AGO_1\backsim\triangle AHO_2$,

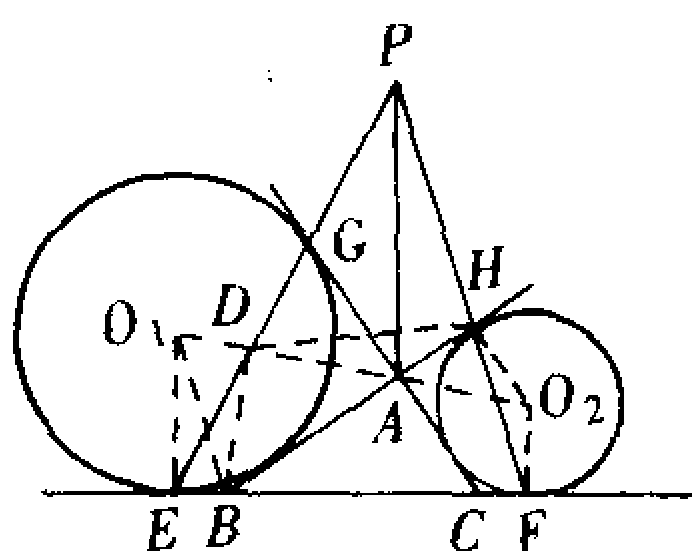
$\therefore\quad \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{AO_1}{AO_2}=\dfrac{AG}{AH}.\quad\therefore\quad \dfrac{AH}{DF}=\dfrac{AG}{DE}.\qquad$ ②

由①和②得到

$$1=\frac{AH}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=\frac{AG}{DE}\cdot\frac{DP'}{AP'}=\frac{DP'}{AP'}\cdot\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 P'、G、E 三点共线,即 P'为 EG 与 FH 的交点.

$\therefore$ 点 P'与P 重合. $\therefore\quad AP\perp BC$.



[证 4] 因为$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 是$\triangle ABC$ 的两个旁切圆,故连心线 O_1O_2 必过点 A.记 O_1O_2 与 EG 的交点为 D,连结 O_1E、O_1B、BD、DH、O_2H、O_2F,于是 $O_1E\perp EF$, $O_2F\perp EF$, $O_2H\perp BH$.

$\because\quad \odot O_1$ 和$\odot O_2$ 都是$\triangle ABC$ 的旁切圆.

$\therefore\quad CG=CE$, $BF=BH$.

$\therefore\quad \angle CEG=\angle CGE=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle ACB$,

$\angle BFH=\angle BHF=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle ABC$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle O_1DE&=180^\circ-\angle ADE\\&=180^\circ-(360^\circ-\angle DAB-\angle ABE-\angle BED)\\&=-180^\circ+\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC\right)+(180^\circ-\angle ABC)\\&\quad+\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB\right)\end{aligned}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = \angle O_1BE.$$

$\therefore$ O_1、E、B、D 四点共圆.

$\therefore$ $\angle O_1DB = 180^\circ - \angle O_1EB = 90^\circ$.

$\therefore$ $\angle PDA = \angle O_1DE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = \angle BHF$.

$\therefore$ D、A、H、P 四点共圆. $\therefore$ $\angle APH = \angle ADH$.

$\because$ $\angle O_2HB = 90^\circ = \angle O_2DB = \angle O_2FB$,

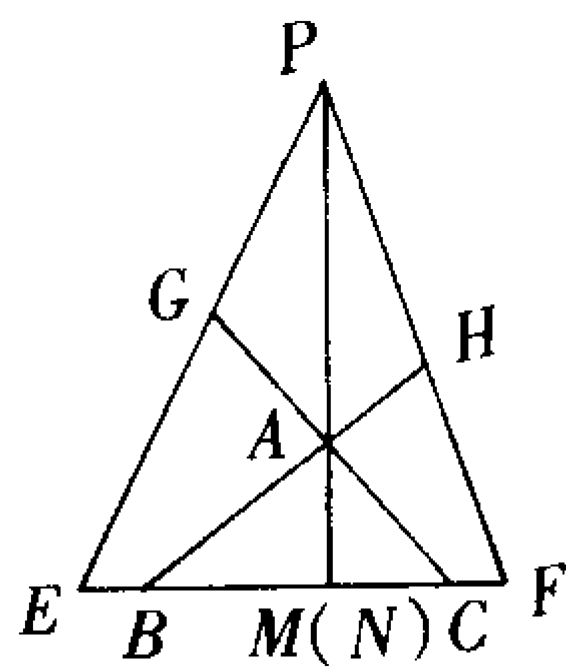
$\therefore$ B、F、O_2、H、D 五点共圆.

$\therefore$ $\angle O_2FH = \angle O_2DH = \angle ADH = \angle APH$. $\therefore$ $AP \parallel FO_2$.

$\because$ $O_2F \perp BC$, $\therefore$ $AP \perp BC$.

[证 5] 作 $PM \perp BC$, $AN \perp BC$, M、N 分别为垂足,则原命题等价于:M、N 两点重合,记$\triangle ABC$ 的三个内角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,三边长分别为 a、b、c.

$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的旁切圆,故



$$CE = CG = \frac{a+b+c}{2}, \quad \angle E = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}.$$

同理 $BF = BH = \frac{a+b+c}{2}$,

$$\angle F = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

$\triangle PEF$ 中, $\angle EPF = 180^\circ - \angle E - \angle F = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, 且

$$EF = EC + BF - BC = b + c.$$

由正弦定理得

$$\frac{PE}{\sin F} = \frac{EF}{\sin\angle EPC}.$$

故 $$EM = PE\cos E = (b+c)\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

设 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径,则

$BM = EM - EB$

$$= EM - (EC - BC)$$

$$= 2R(\sin B + \sin C) \cdot \frac{\sin\frac{C+B}{2} + \sin\frac{C-B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} - \frac{b+c-a}{2}$$

$$= 2R \cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \cdot \frac{\sin\frac{C+B}{2} + \sin\frac{C-B}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}} - \frac{b+c-a}{2}$$

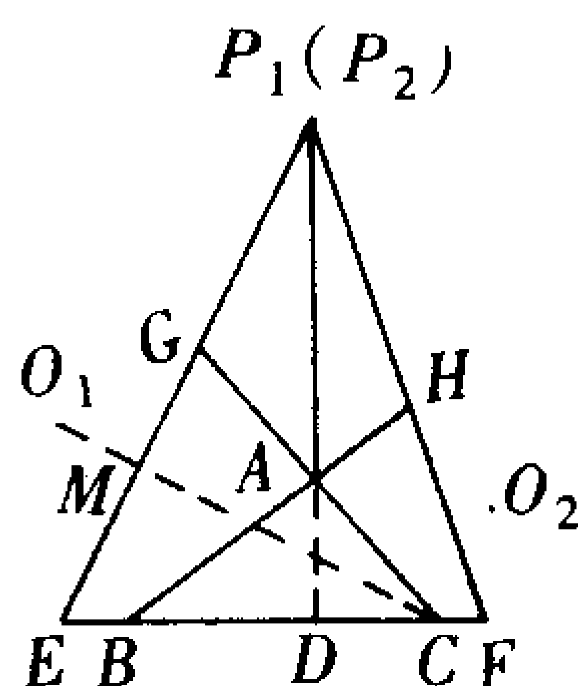
$$= R[\sin B + \sin C + \sin(C-B)] - \frac{b+c-a}{2}$$

$$= R[\sin(C-B) - \sin(C+B)]$$

$$= 2R\sin C\cos B$$

$$= c\cos B = BN.$$

故　M、N 两点重合，$PA \perp BC$.



［证 6］　作 $AD \perp BC$，设直线 DA 分别与 EG、FH 交于点 P_1、P_2，连 O_1C、O_1C 与 EG 交于点 M，则我们只需证明 P_1、P_2 两点重合，即 $DP_1 = DP_2$.

CE、CG 是 $\odot O_1$ 的两条切线，$\angle CMG = 90^\circ = \angle CDP_1$，

故　C、D、M、P_1 四点共圆，

$$\angle DP_1E = \angle DCO_1 = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

另一方面，设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，$\odot O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，故　$CE = \frac{a+b+c}{2} = s$.

$$DE = CE - CD = s - b\cos C$$

$$= s - b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(s-b)(b+c)}{a}.$$

因此

$$DP_1 = \frac{DE}{\operatorname{tg}\angle DP_1E} = \frac{\frac{(s-b)(b+c)}{a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle ACB}{2}}$$

$$=\frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

同理可得

$$DP_2=\frac{DF}{\operatorname{tg}\angle DP_2F}=\frac{\frac{(s-c)(b+c)}{a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle ABC}{2}}$$

$$=\frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{a}}.$$

故 $DP_1=DP_2$，P_1、P_2 两点重合，有 $PA\perp BC$.

[证 7] 用解析法证明. 注意到下面事实：

1. 设$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c，且顶点坐标分别为(x_A,y_A)、(x_B,y_B)、(x_C,y_C). 则$\angle A$ 内旁切圆的圆心坐标为

$$\left(\frac{-ax_A+bx_B+cx_C}{-a+b+c},\frac{-ay_A+by_B+cy_C}{-a+b+c}\right).$$

2. 设$\odot O$ 的方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

则过圆外一点 $P(x_1,y_1)$向圆所引两切线之切点的连线方程为

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=R^2.$$

取 BC 为 x 轴，BC 上的高 DA 为 y 轴，建立平面直角坐标系.

设 $A(0,y_A)$，$B(x_B,0)$，$C(x_C,0)$，且$\triangle ABC$ 的三边长为a、b、c，面积为 S，$p=\frac{a+b+c}{2}$，则

$$x_C-x_B=a,\quad {y_A}^2=c^2-{x_B}^2=b^2-{x_C}^2.$$

由
$$\begin{cases}x_C-x_B=a,\\ {x_C}^2-{x_B}^2=b^2-c^2\end{cases}$$

可得 $x_B=\frac{b^2-c^2-a^2}{2a}$， $x_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

对于$\odot O_1$，其圆心坐标为$\left(\frac{bx_B-cx_C}{a+b-c},\frac{ay_A}{a+b-c}\right)$，半径为$\frac{S}{p-c}$，故 EG 的直线方程为

$$\frac{ax_C+bx_C-bx_B}{a+b-c}\left(x-\frac{bx_B-cx_C}{a+b-c}\right)-\frac{ay_A}{a+b-c}\left(y-\frac{ay_A}{a+b-c}\right)$$
$$=\frac{S^2}{(p-c)^2},$$

$$(ax_C+bx_C-bx_B)\left(x-\frac{bx_B-cx_C}{a+b-c}\right)-ay_A\left(y-\frac{ay_A}{a+b-c}\right)$$
$$=2p(p-a)(p-b).$$

对于圆 O_2,其圆心坐标为$\left(\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c},\frac{ay_A}{a-b+c}\right)$,半径为$\frac{S}{p-b}$,故 FH 的直线方程为

$$\frac{ax_B+cx_B-cx_C}{a-b+c}\left(x-\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c}\right)-\frac{ay_A}{a-b+c}\left(y-\frac{ay_A}{a-b+c}\right)$$
$$=\frac{S^2}{(p-b)^2},$$
$$(ax_B+cx_B-cx_C)\left(x-\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c}\right)-ay_A\left(y-\frac{ay_A}{a-b+c}\right)$$
$$=2p(p-a)(p-c).$$

EG、FH 的两直线方程相减,得

$$(a+b+c)(x_C-x_B)x-(bx_B-cx_C)\left(\frac{ax_C+ab}{a+b-c}+\frac{ax_B-ac}{a-b+c}\right)$$
$$+a^2y_A^2\left(\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{a-b+c}\right)=2p(p-a)(c-b). \quad ⊛$$

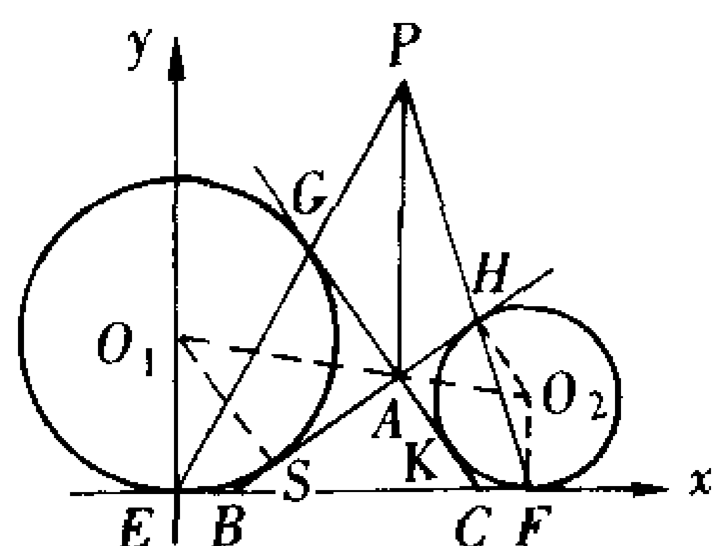
注意到

$$\frac{x_C+b}{a+b-c}+\frac{x_B-c}{a-b+c}$$
$$=\frac{a(x_B+x_C)-b(x_C-x_B)+c(x_C-x_B)+ab-b^2-ac+c^2}{(a+b-c)(a-b+c)}$$
$$=\frac{b^2-c^2-ab+ac+ab-b^2-ac+c^2}{(a+b-c)(a-b+c)}$$
$$=0,$$
$$a^2y_A^2\left(\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{a-b+c}\right)$$
$$=4S^2\left[\frac{1}{2(p-c)}-\frac{1}{2(p-b)}\right]$$
$$=2p(p-a)[(p-b)-(p-c)]$$
$$=2p(p-a)(c-b).$$

故由⊛可得 $x=0$,即 P 点横坐标为 0,$PA\perp BC$.

[证 8] 以 E 为原点、EF 所在直线为 x 轴,建立直角坐标系(如

图).



由题意可得

$BC+CF=BS+SH$,

$BC+EB=CK+KG$.

$\because \quad SH=KG$,

$\therefore \quad$ 两式相减得 $EB-CF=CK-BS$.

又 $\because \quad BE=BS$, $CK=CF$,

$\therefore \quad EB=CF$.

设$\odot O_1$的半径为r_1,$\odot O_2$的半径为r_2.

设B的坐标为$(b,0)$,C的坐标为$(c,0)$.

则F的坐标为$(b+c,0)$,O_1的坐标为$(0,r_1)$,O_2的坐标为$(b+c,r_2)$.于是,$\odot O_1$的方程为

$x^2+(y-r_1)^2=r_1^2$,

即 $\quad x^2+y^2-2r_1y=0$. ①

$\odot O_2$的方程为 $\quad [x-(b+c)]^2+(y-r_2)^2=r_2^2$,

则 $\quad x^2+y^2-2(b+c)x-2r_2y+(b+c)^2=0$. ②

EG是$\odot O_1$关于点C的切点弦,其方程为

$$cx+0\cdot y-2r_1\cdot\frac{y+0}{2}=0,$$

即 $\quad cx-r_1y=0$. ③

FH是$\odot O_2$关于点B的切点弦,其方程为

$$bx+0\cdot y-2(b+c)\cdot\frac{x+b}{2}-2r_2\cdot\frac{y+0}{2}+(b+c)^2=0,$$

即 $\quad cx+r_2y-c(b+c)=0$. ④

由③、④得交点P的横坐标为

$$x_P=\frac{r_1(b+c)}{r_1+r_2}.$$

连O_1O_2必过A点,连O_1S、O_2H.则有 $\quad \triangle AO_1S\backsim\triangle AO_2H$.

故 $\quad \dfrac{O_1A}{AO_2}=\dfrac{O_1S}{O_2H}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

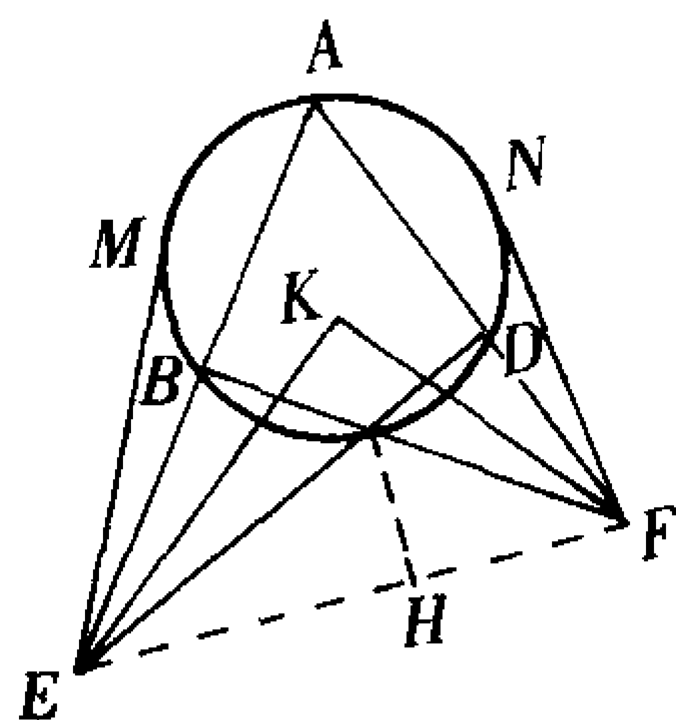
由定比分点坐标公式得A点的横坐标为

$$x_A=\frac{0+\frac{r_1}{r_2}(b+c)}{1+\frac{r_1}{r_2}}=\frac{r_1(b+c)}{r_1+r_2}.$$

由 $x_P=x_A$ 知 PA 垂直于 x 轴，即 PA 与 BC 垂直.

4·40 圆内接四边形 $ABCD$ 中，延长 AB、DC 交于 E，延长 AD、BC 交于 F，又 EM、FN 为圆的切线，分别以 E、F 为圆心，EM、FN 为半径作弧，两弧交于 K. 求证：$EK\perp FK$.

（中国山西省太原市数学竞赛，1997 年）



［证］ 连 EF，过 B、C、E 三点作圆交 EF 于 H，连 CH. 由切割线定理知，

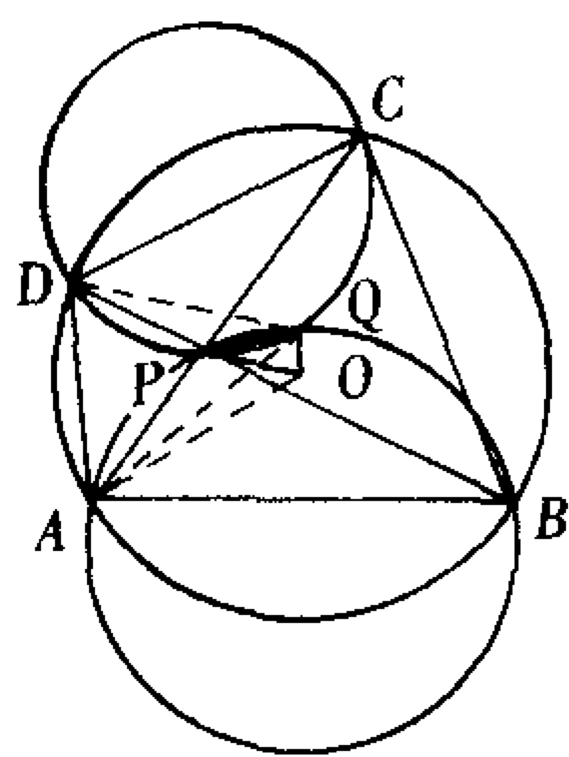
$EK^2=EM^2=EC\cdot ED=EH\cdot EF$.

又 $FK^2=FN^2=FC\cdot FB=FH\cdot FE$.

故 $EK^2+FK^2=EF^2$，即 $EK\perp FK$.

4·41 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P. $\triangle ABP$、$\triangle CDP$ 的外接圆相交于 P 和另一点 Q，且 O、P、Q 三点两两不重合. 试证：$\angle OQP=90^\circ$.

（第 7 届中国中学生数学冬令营，1992 年）



［解］ 连结 AO、AQ、DO、DQ（见左图）.

$$\because\quad \angle AQD=\angle AQP+\angle PQD=\angle ABD+\angle ACD=2\angle ABD=\angle AOD,$$

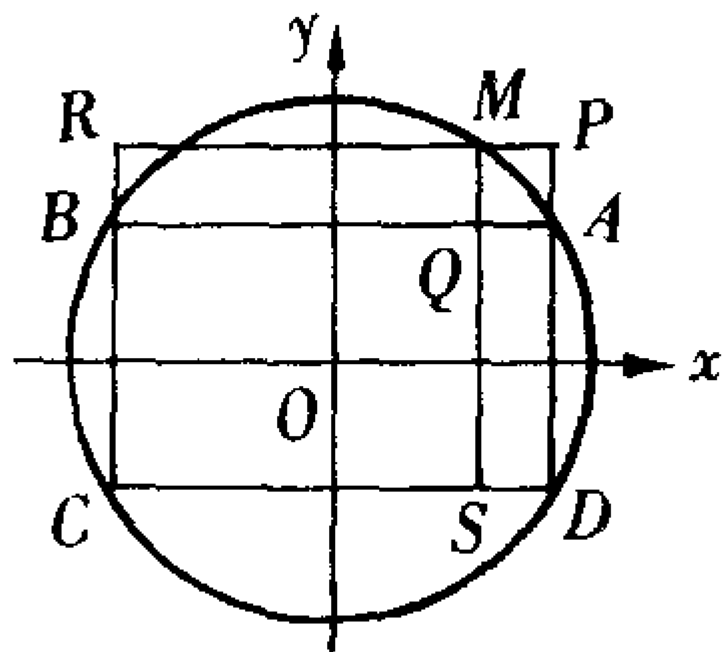
$\therefore$ A、O、Q、D 四点共圆. 从而有

$$\angle OQP=\angle OQA+\angle AQP=\angle ODA+\angle ABD=\angle ODA+\frac{1}{2}\angle AOD=90^\circ.$$

4·42 在矩形 $ABCD$ 外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$ 上取一个不同于顶点 A、B 的点 M. 点 P、Q、R、S 是 M 分别在直线 AD、AB、BC 与 CD 上的投影. 证明：直线 PQ 与 RS 互相垂直.

（前南斯拉夫数学竞赛，1983 年）

[证] 如图,建立坐标系.



设单位圆 $O: x^2+y^2=1$. 及 $A(\cos\theta, \sin\theta)$, $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $(\theta<\alpha<\pi-\theta)$. 由对称性易知 $Q(\cos\alpha, -\sin\theta)$, $S(\cos\alpha, -\sin\theta)$, $P(\cos\theta, \sin\alpha)$, $R(-\cos\theta, \sin\alpha)$.

由 $k_{PQ}=\dfrac{\sin\alpha-\sin\theta}{\cos\theta-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\theta}{2}$,

$k_{RS}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\theta}{-\cos\theta-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\theta}{2}$.

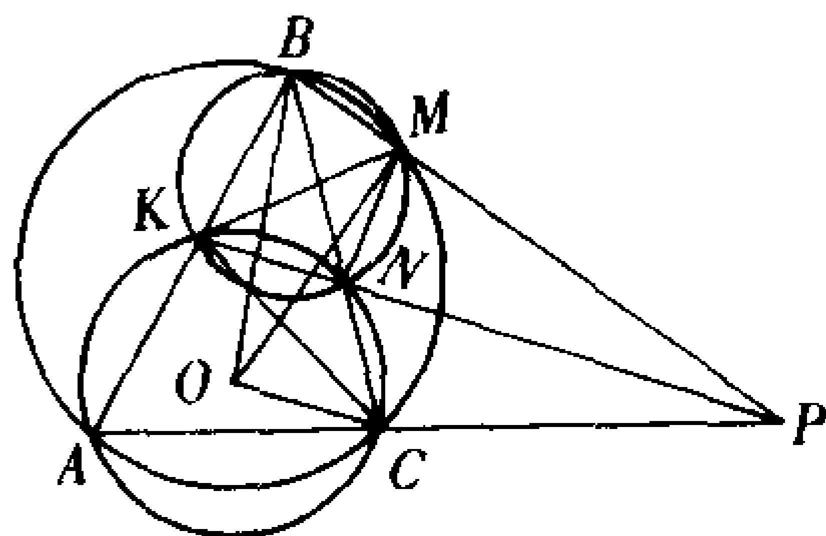
∴ $k_{PQ}k_{RS}=-1$.

故 $PQ\perp RS$.

4·43 设以 O 为圆心的圆经过△ABC 的两个顶点 A 和 C,且与边 AB、BC 分别交于 K 和 N,点 K 与 N 不同,又设△ABC 和△KBN 的外接圆交于 B 和另一点 M.求证:$\angle OMB=90°$.

(第 26 届国际数学奥林匹克,1985 年)

[证] 延长 BM、KN,设交于 P,



∴ $PM\cdot PB=PN\cdot PK$.

连 PA 交圆 O 于 C',

∴ $PN\cdot PK=PC'\cdot PA$.

又设 PA 交△ABC 外接圆于 C'',

∴ $PM\cdot PB=PC''\cdot PA$.

于是 $PC'\cdot PA=PC''\cdot PA$, 得 $PC'=PC''$.

即 C' 与 C'' 重合且为圆 O 与圆 ABC 的交点 C.

因而 AC、KN、BM 的延长线交于一点 P.

连结 MK、KO、OC、MC、KC 和 MN.

∵ $\angle BMN=\angle AKN=\angle NCP$,

∴ M、N、C、P 四点共圆.

又∵ $\angle KMC=\angle KMN+\angle NMC=\angle KBN+\angle NPC$

$$=\frac{1}{2}(\overparen{KAC}-\overparen{KNC})\text{的度数},$$

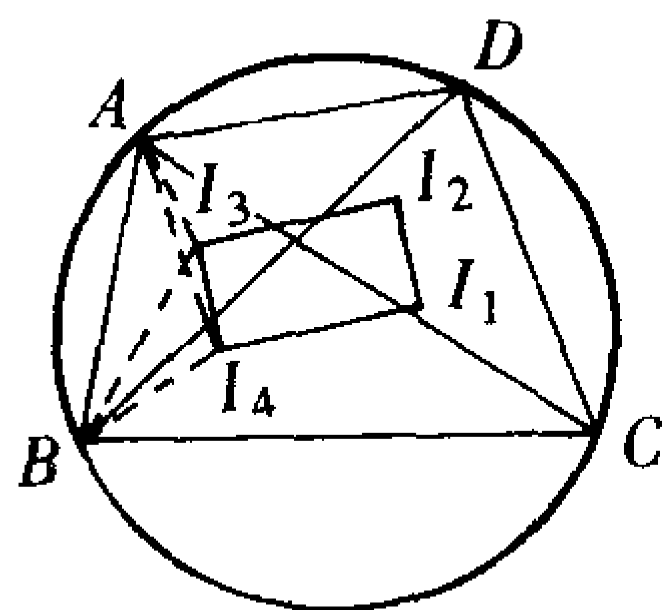
及 $\angle KOC=\overparen{KNC}$ 的度数, ∴ $\angle KMC+\angle KOC=180°$.

故 K、O、C、M 四点共圆,从而有

$$\angle BMO=\angle BMK+\angle KMO=\angle BNK+\angle KCO$$
$$=\angle A+\angle KCO=90^\circ$$

4·44 四边形 $ABCD$ 内接于圆，$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$、$\triangle ABC$ 的内心分别记为 I_1、I_2、I_3、I_4，求证：四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 是矩形.

（中国国家集训队选拔考试，1986 年）



［证］ 连结 AI_3、AI_4、BI_3、BI_4（如图）.

∵ 四边形 $ABCD$ 内接于圆，

∴ $\angle ADB=\angle ACB$.

∴ $\angle ABC+\angle BAC=\angle ABD+\angle BAD$.

∴ $\angle ABC-\angle ABD=\angle BAD-\angle BAC$.

∴ $\angle I_3BI_4=\angle ABI_4-\angle ABI_3$

$$=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle ABD)$$
$$=\frac{1}{2}(\angle BAD-\angle BAC)$$
$$=\angle BAI_3-\angle BAI_4$$
$$=\angle I_3AI_4.$$

∴ A、B、I_4、I_3 四点共圆.

∴ $\angle I_3I_4B=\pi-\angle BAI_3=\pi-\frac{1}{2}\angle BAD$.

同理 $\angle I_1I_4B=\pi-\frac{1}{2}\angle BCD$.

∵ $\angle I_3I_4B+\angle I_1I_4B=2\pi-\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle BCD)=\frac{3\pi}{2}$,

∴ $\angle I_3I_4I_1=\frac{\pi}{2}$ 即 90°.

同理 $\angle I_4I_1I_2=\angle I_1I_2I_3=\angle I_2I_3I_4=90^\circ$.

∴ 四边形$\angle I_1I_2I_3I_4$ 为矩形.

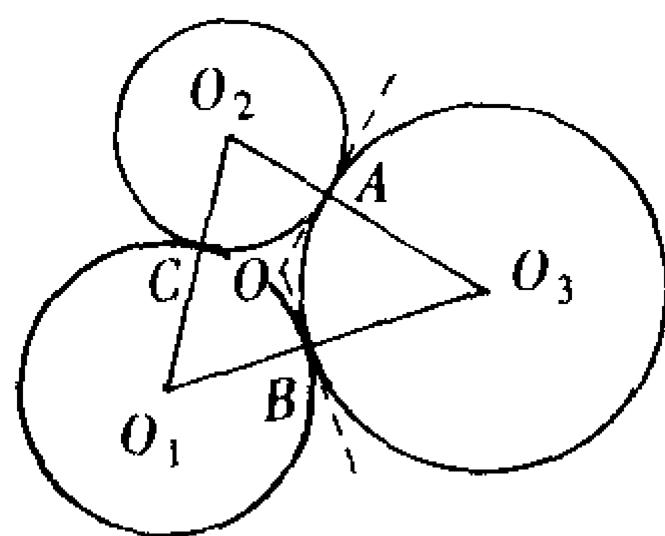
4·45 三个圆两两相切，过三个切点再作一圆. 求证：这个圆与原来的三个圆都垂直（过两个圆的交点所引的两圆的切线之间的夹角，叫做这两个圆的夹角）.

（莫斯科数学奥林匹克，1953 年）

［证］ 设$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$、$\odot O_3(r_3)$两两相切于 A、B、C，则

O_1、C、O_2 共线；O_2、A、O_3 共线；O_3、B、O_1 共线.

过 A 作 O_2O_3 的垂线，即⊙O_2、⊙O_3 的公切线、过 B 作 O_1O_3 的垂线，即⊙O_1、⊙O_3 的公切线、设两公切线交于 O 点(如图).



∵ $\angle O_3AO=\angle O_3BO=90°$,

$O_3A=O_3B$, $OO_3=OO_3$

∴ $\triangle OAO_3\cong\triangle OBO_3$, 有 $OA=OB$

又 $OO_3^2-OO_2^2=r_3^2-r_2^2$, $OO_3^2-OO_1^2=r_3^2-r_1^2$

∴ $OO_1^2-OO_2^2=r_1^2-r_2^2$

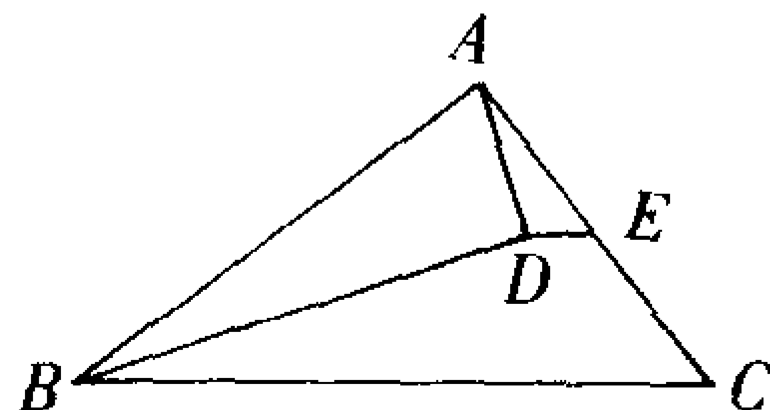
故 $OC\perp O_1O_2$ 且 $OA=OB=OC$.

即 O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 都是⊙$O(OA)$的切线.

故⊙O 与⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 都垂直.

(二)平行问题

4·46 如图，BD 平分 $\angle ABC$，$AD\perp BD$，$AE=EC$. 求证：$DE\parallel BC$.



(中国浙江省宁波市数学竞赛，1984 年)

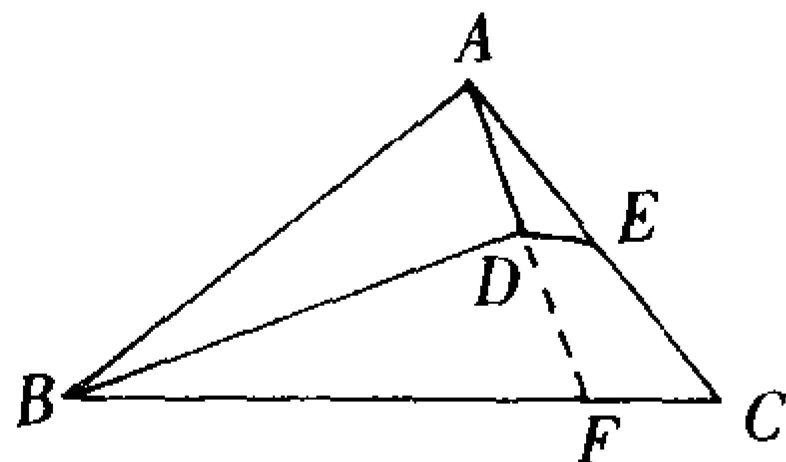
[证] 延长 AD 交于BC 于F.

∵ BD 平分$\angle ABC$,

且 $AD\perp BD$ 即 $BD\perp AF$,

∴ $AD=DF$.

又∵ $AE=EC$, ∴ $DE\parallel BC$.

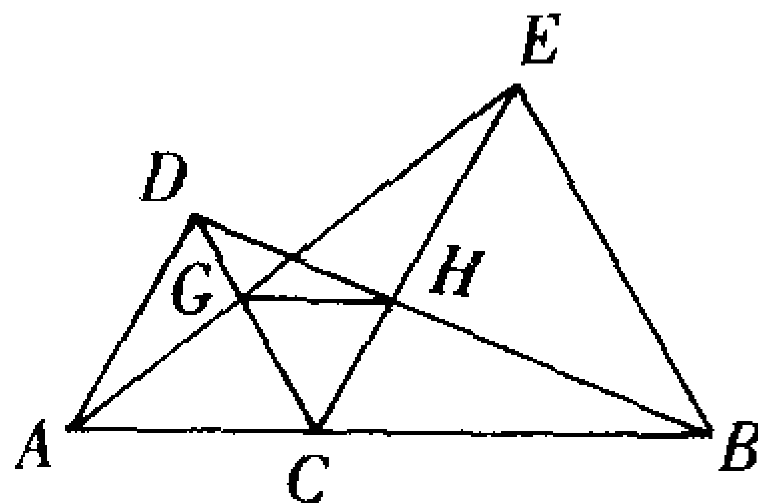


4·47 如图，已知：C 是线段 AB 上一点，$\triangle ACD$ 和$\triangle BCE$ 是两个等边三角形，点 D、E 在 AB 同旁，AE 交 CD 于G，BD 交 CE 于 H. 求证：$GH\parallel AB$.

(中国河南省郑州市数学竞赛，1992 年)

[证] 据题意，有$\angle BCE=\angle ECD=\angle ACD=60°$. 且 $AC=DC$, $CE=CB$,

∴ $\triangle ACE\cong\triangle DCB$. 故 $\angle AEC=\angle ABD$.



在 $\triangle GCE$ 和 $\triangle HCB$ 中，$\angle AEC=$

$\angle ABD$，$\angle BCE=\angle ECD$，且 $CE=CB$.

$\therefore\quad \triangle GCE\cong\triangle HCB$. 有 $CG=CH$.

从而$\triangle GCH$为等边三角形，有 $\angle GHC=\angle HCB=60^\circ$，

$\therefore\quad GH/\!/AB$.

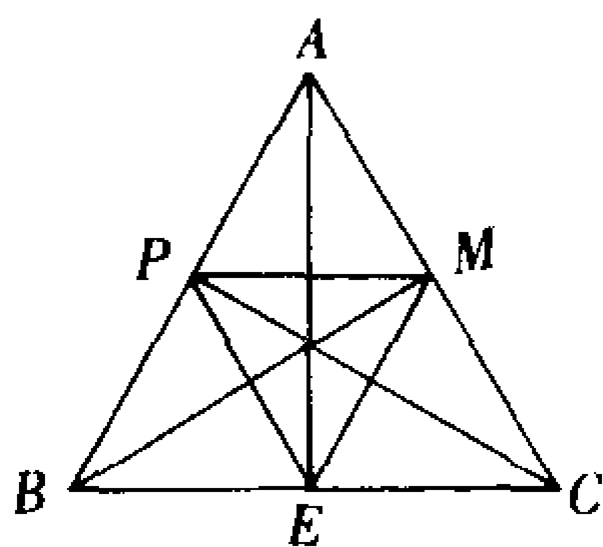
[证 2] $\because\quad \angle ACD=60^\circ=\angle CBE$，$\therefore\quad CD/\!/BE$.

$\therefore\quad \dfrac{EG}{GA}=\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{EH}{HC}$.

$\therefore\quad GH/\!/AB$.

4·48 在$\triangle ABC$中，引出高线 AE、BM 和 CP，已知：$EM/\!/AB$、$EP/\!/AC$，求证：$MP/\!/BC$.

（莫斯科数学奥林匹克，1967 年）



[证] 由题设知$\angle APC=\angle AEC=90^\circ$，

$\therefore\quad A$、P、E、C 四点共圆.

从而 $\angle PEB=\angle BAC$.

又 $PE/\!/AC$，$\therefore\quad \angle PEB=\angle ACB$，

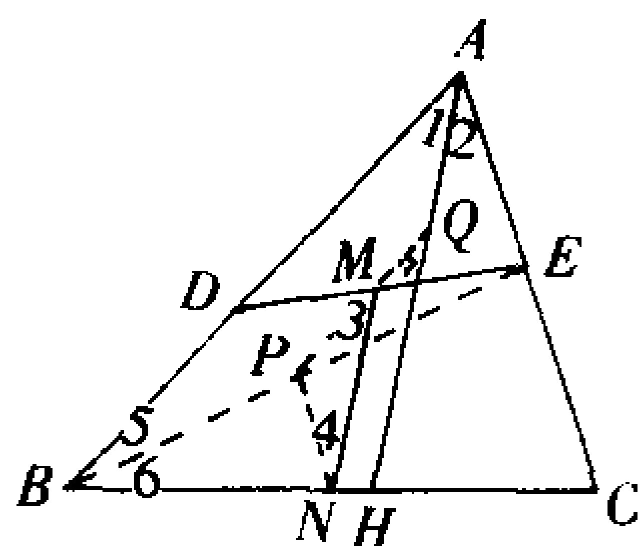
故 $\angle BAC=\angle ACB$.

同理可证 $\angle BAC=\angle ABC$.

$\therefore\quad \triangle ABC$为等边三角形. 故有 $PM/\!/BC$.

4·49 如图，已知：AH 是$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线，在 AB、AC 边上截取 $BD=CE$，M 是 DE 的中点，N 是 BC 的中点，求证：$MN/\!/AH$.

（中国黑龙江省齐齐哈尔市数学竞赛，1992 年）



[证] 连 BE，取 BE 中点 P，连 PM、PN，则 PM、PN 分别是$\triangle EDB$和$\triangle BCE$的中位线，则$\triangle PMN$为等腰三角形. 故 $\angle 3=\angle 4$.

又 $\angle MPN=\angle 5+\angle 6+\angle C=\angle B+\angle C$，

从而 $\angle 3+\angle 4=\angle A$，又 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore\quad \angle 1=\angle 3$.

延长 PM 交 AH 于 Q，由 $\angle 1=\angle 7$，$\angle 1=\angle 3$，

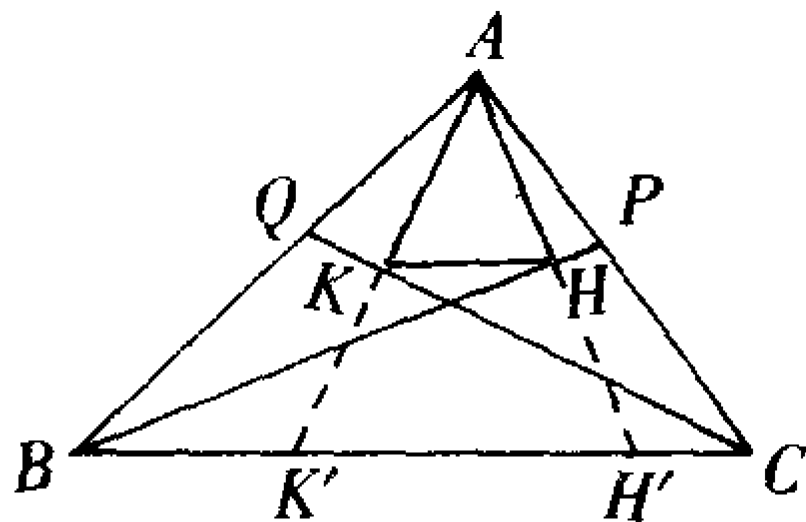
得 $\angle 3=\angle 7$.

$\therefore\quad MN/\!/AN$.

4·50　设 BP、CQ 是△ABC 的内角平分线，AH、AK 分别为 A 到 BP、CQ 的垂线，求证：$KH /\!/ BC$.

（澳大利亚数学奥林匹克，1989 年）

［证］　延长 AH 交 BC 于 H'.



在△ABH'中，因为 BH 平分∠ABH'，

∴　$BH \perp AH'$.

故△ABH'是等腰三角形，所以 $AH=HH'$.

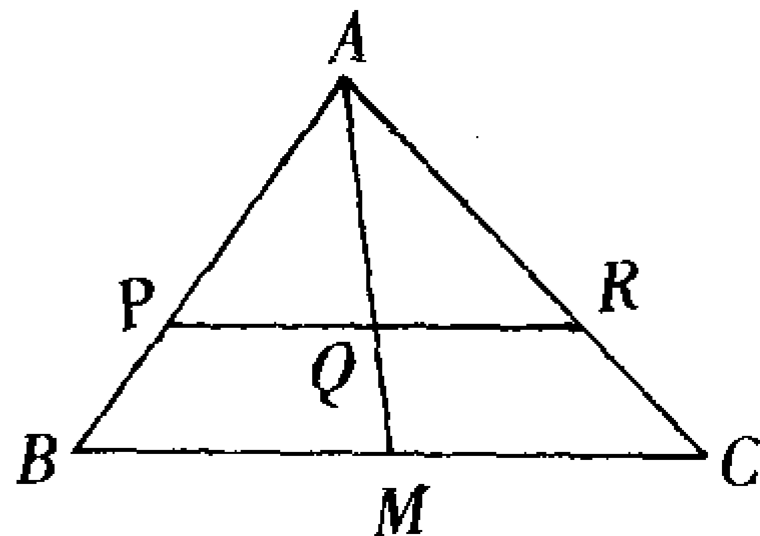
同样，延长 AK 交 BC 于 K'，可证 $AK=KK'$.

因此 KH 是△$AK'H'$的中位线，故　$KH /\!/ BC$.

4·51　在△ABC 中，M 为 BC 的中点，P、R 分别在 AB、AC 上，Q 为 AM 与 PR 的交点且 Q 为 PR 的中点．求证：$PR /\!/ BC$.

（澳大利亚数学奥林匹克，1991 年）

［证］　由 Q 为 PR 的中点及 M 为 BC 的中点可得



$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AQR}}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}=1,$$

∴　$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABM}}=\frac{S_{\triangle AQR}}{S_{\triangle ACM}},$$

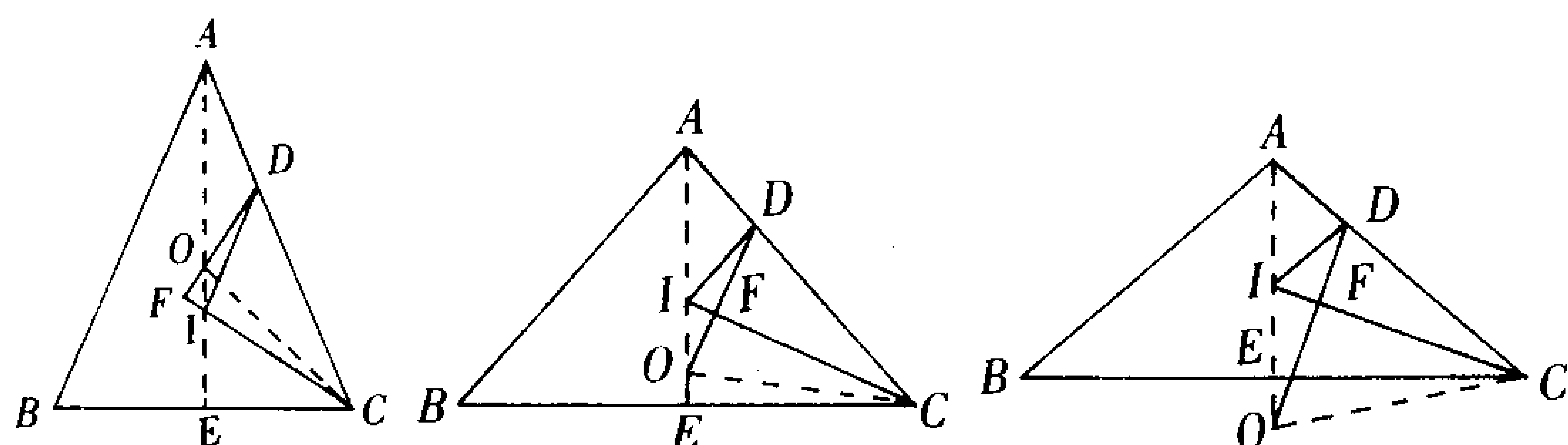
则　$$\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AM}=\frac{AQ\cdot AR}{AM\cdot AC},$$

即　$$\frac{AP}{AB}=\frac{AR}{AC}.\quad \therefore\quad PR /\!/ BC.$$

4·52　在△ABC 中，$AB=AC$，点 O 和 I 分别为△ABC 的外心和内心，点 D 在边 AC 上且使得 $OD \perp CI$，求证：$ID /\!/ AB$.

（全俄数学奥林匹克，1996 年）

［证］　当 O 与 I 重合时，结论显然成立．故只需就 O 与 I 不重合的情形来证明．这时，由于等腰三角形的形状不同．O 与 I 的位置关系也有下列三种可能情形：



三种情形的证明是完全类似的,故以下只就第一种情形给出证明.

作 BC 上的高 AE,则点 O 和 I 都在 AE 上.连结 OC.

$\because\quad \angle F=90^\circ=\angle OEC$,

$\therefore\quad O$、F、E、C 四点共圆.

又$\because\quad I$ 为内心,$\therefore\quad \angle DCF=\angle ECF=\angle EOF$.

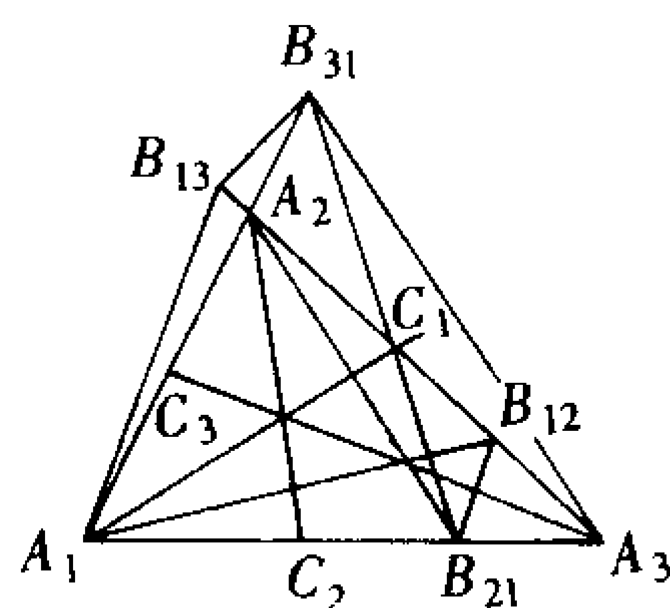
$\therefore\quad O$、I、C、D 四点共圆.

$\therefore\quad \angle IDC=\angle IOC=\angle OAC+\angle OCA=2\angle OAC=\angle CAB$.

$\therefore\quad ID/\!/BA$.

4·53 在给定的不等边三角形 $A_1A_2A_3$ 中,用 B_{ij} 表示顶点 A_i 关于由顶点 A_j 引出的角平分线的对称点,其中 $i,j\in\{1,2,3\}$.求证:直线 $B_{12}B_{21}$、$B_{13}B_{31}$ 与 $B_{23}B_{32}$ 相互平行.

(保加利亚数学奥林匹克,1982 年)



[证] 设 A_1C_1、A_2C_2、A_3C_3 是$\triangle A_1A_2A_3$ 的三条角平分线,因为线段 A_2A_3 关于直线 A_1C_1 的对称线段是 $B_{21}B_{31}$,所以直线 A_2A_3 与 $B_{21}B_{31}$ 交于点 C_1.

由三角形内角平分线的性质可得

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{C_1A_2}{C_1A_3}.$$

$$\therefore\quad \frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1}=\frac{B_{12}A_2-C_1A_2}{B_{13}A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2-C_1A_2}{A_1A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}.$$

同理 $\dfrac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1}=\dfrac{A_1A_2}{A_3A_3}$, $\therefore\quad \dfrac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1}=\dfrac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1}$.

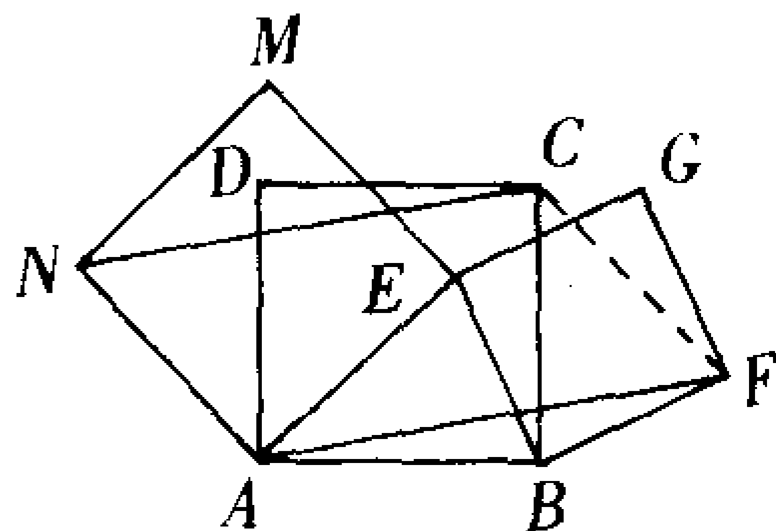
又 $\angle B_{12}C_1B_{21}=\angle B_{31}C_1B_{13}$,

$\therefore\quad \triangle B_{12}C_1B_{21}\backsim\triangle B_{13}C_1B_{31}$，有 $\quad B_{12}B_{21}/\!/B_{13}B_{31}$.

同理可证 $\quad B_{23}B_{32}/\!/B_{13}B_{31}$.

故 $\quad B_{12}B_{21}/\!/B_{13}B_{31}/\!/B_{23}B_{32}$.

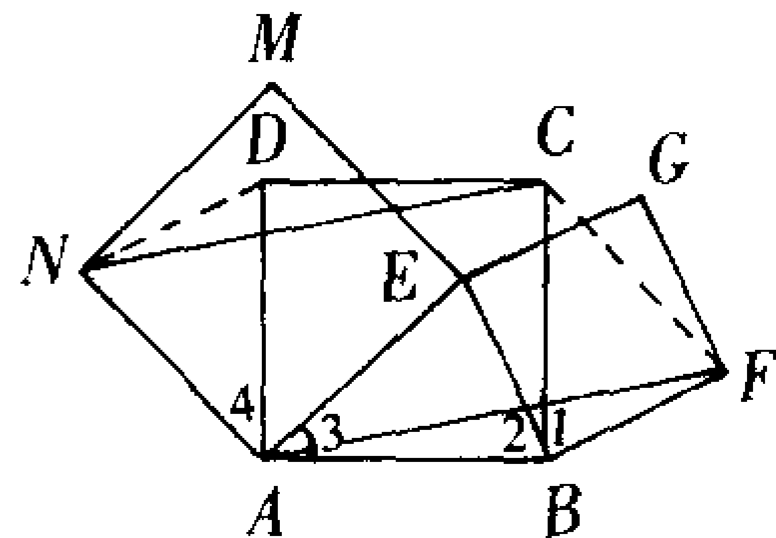
4·54 在正方形 $ABCD$ 内任取一点 E，连 AE、BE，在$\triangle ABE$ 外分别以 AE、BE 为边作正方形 $AEMN$ 和 $EBFG$，连 NC、AF. 求证：$NC/\!/AF$.



（中国湖北省武汉市数学竞赛，1984 年）

［证］ 连 ND、CF.

$\because\quad ABCD$、$AEMN$、$EBFG$ 均为正方形.



$\therefore\quad \angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$.

且 $\quad BF=BE,\ BC=BA=DA,$

$\quad AE=AN$.

$\therefore\quad \triangle BFC\cong\triangle BEA\cong\triangle DNA$.

$\therefore\quad FC=EA=NA,\ \angle 1=\angle 2=\angle NDA,\ BF=BE=ND$.

在$\triangle NDC$ 与$\triangle FBA$ 中，

$\because\quad BF=ND,\ DC=AB,$

$\angle NDC=\angle NDA+90^\circ=\angle 1+90^\circ=\angle ABF$.

$\therefore\quad \triangle NDC\cong\triangle FBA\quad \therefore\quad AF=CN$.

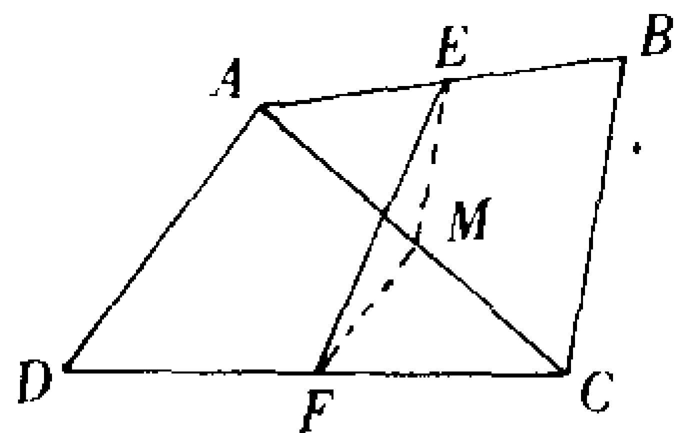
由 $\quad AF=CN, FC=NA$ 知四边形 $AFCD$ 是平行四边形.

$\therefore\quad NC/\!/AF$.

4·55 证明：如果凸四边形一组对边的中点连线，等于另一组对边长度之和的一半，则它的这组对边互相平行.

（莫斯科数学奥林匹克，1948 年）

［证］ 在凸四边形 $ABCD$ 中，若 $AE=EB$，$DF=FC$，且 $EF=\dfrac{1}{2}(AD+BC)$.



取对角线 AC 的中点 M，连 EM、FM（如图），

则 $\quad EM\ \underline{\underline{/\!/}}\ \dfrac{1}{2}BC,\ FM\ \underline{\underline{/\!/}}\ \dfrac{1}{2}AD$.

又已知 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$,

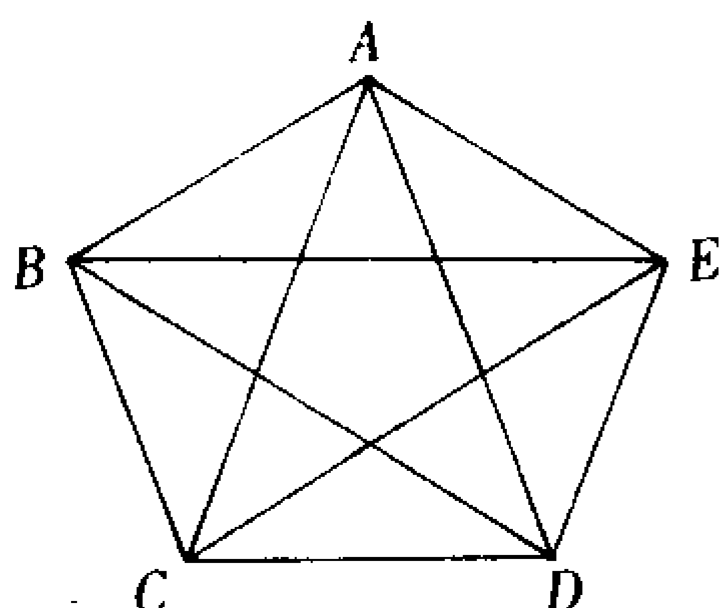
$\therefore \quad EF=EM+FM$.

即 E、F、M 三点在同一直线上,

故 $BC /\!/ AD /\!/ EF$.

4·56 求证:若一个凸五边形的四条边平行于所对的对角线,则第五条边也平行于所对的对角线.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)



[证] 设凸五边形 $ABCDE$,且

$AB /\!/ CE$, $BC /\!/ AD$,

$BE /\!/ CD$, $DE /\!/ AC$.

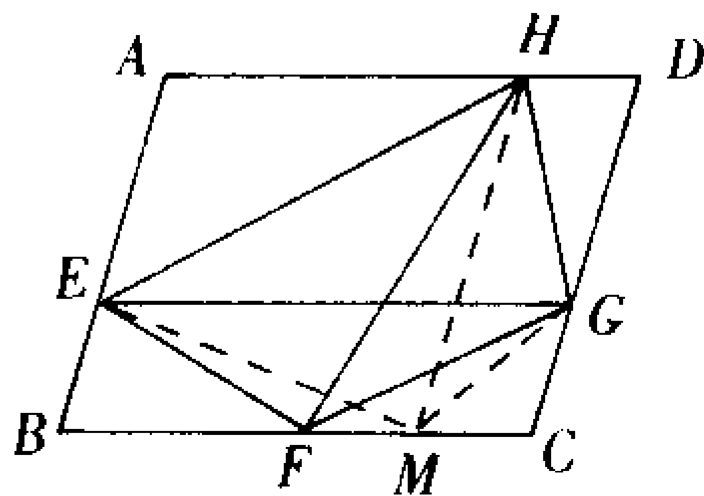
则由同底等高三角形的面积相等可得

$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}=S_{\triangle DEC}=S_{\triangle DEA}.$$

$\therefore \quad AE /\!/ BD$.

4·57 在平行四边形的每条边上各取一点,使得以这四点为顶点的四边形的面积等于平行四边形面积的一半.求证:该四边形至少有一条对角线平行于平行四边形的边.

(莫斯科数学奥林匹克,1973 年)



[证] 若 $HF /\!/ AB$,则结论自然成立,以下设 $HF \not\parallel AB$.

过点 H 作 $HM /\!/ AB$ 交 BC 于点 M,连结 ME、MG,于是四边形 $ABMH$ 和 $HMCD$ 都是平行四边形.所以有

$$S_{EMGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{EFGH}.$$

$\therefore \quad S_{\triangle EMG}=S_{\triangle EFG}$.

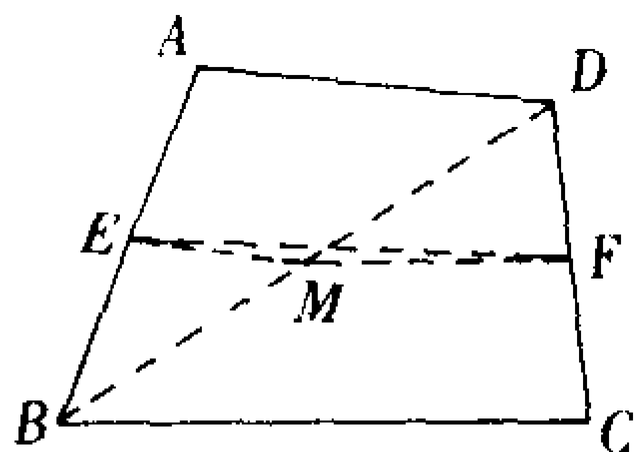
$\therefore \quad FM /\!/ EG$, 即 $EG /\!/ BC$.

4·58 连接凸四边形一组对边中点的线段等于另一组对边和的一半,问这个凸四边形是什么四边形?证明你的结论.

(中国浙江省绍兴市数学竞赛,1990 年)

[解] 这个凸四边形是梯形或平行四边形,证明如下:

设凸四边形 $ABCD$ 如图，E、F 是边 AB、CD 的中点，连接 BD，取 BD 中点 M，连接 ME、MF，则 $EM=\frac{1}{2}AD$，$MF=\frac{1}{2}BC$.



由已知 $EF=\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC=ME+MF$，

所以 M 在 EF 上.

又由于 $EM /\!/ AD$，$MF /\!/ BC$，

故 $BC /\!/ EF$，$AD /\!/ EF$.

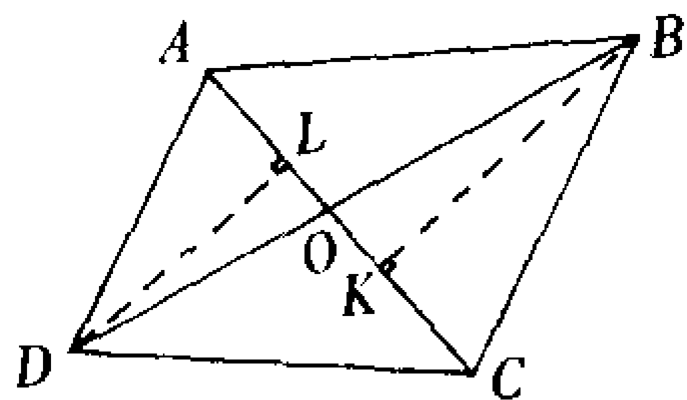
从而 $AD /\!/ BC$.

因此，$ABCD$ 是梯形或平行四边形.

4·59 凸四边形的每一条对角线都平分四边形的面积.求证：这个四边形是平行四边形.

（基辅数学奥林匹克，1965 年）

［证］ 设 O 是四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，作 $BK\perp AC$ 于 K，$DL\perp AC$ 于 L（如图）.



$\because$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$，

$\therefore$ $BK=DL$.

$\therefore$ $\triangle BOK\cong\triangle DOL$，$BO=DO$.

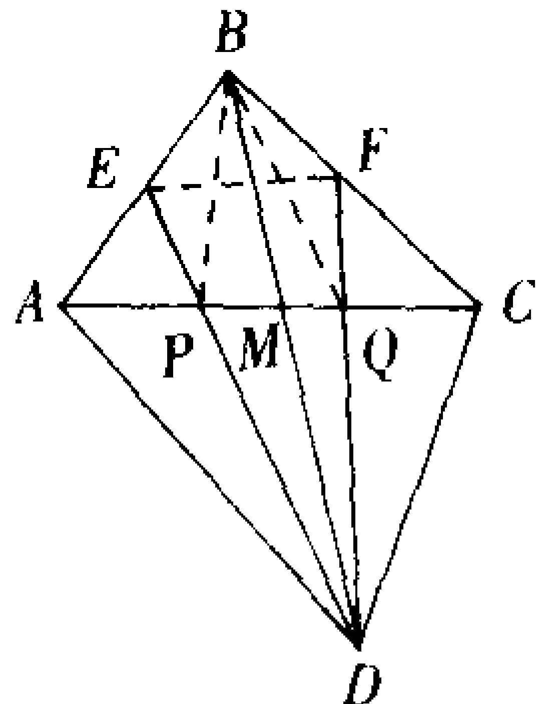
同理可证 $AO=CO$.

故 $ABCD$ 是平行四边形.

4·60 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 上，取点 E 和 F，使线段 DE 和 DF 把对角线 AC 三等分，已知：$\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 的面积都等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$.求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

［证］ 先证 E 和 F 分别为 AB 和 BC 的中点.



设 DE、DF 交 AC 于 P、Q.

由 $AP=QC$ 可知 $S_{\triangle APD}=S_{\triangle CQD}$.

又由已知 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$，

$\therefore$ $S_{\triangle APE}=S_{\triangle CQF}$.

因此，E 和 F 到 AC 的距离相等.

所以 $EF /\!/ AC$，并有

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle CDF}}=\frac{BF}{FC}=\frac{BE}{EA}=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{ADE}}=k.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{ABCD}&=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ADE}\\&=(k+1)(S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ADE})\\&=\frac{1}{2}(k+1)S_{ABCD}.\end{aligned}$$

于是　$1=\frac{1}{2}(k+1)$，得　$k=1$.

从而　$BE=EA$，$BF=FC$.

又 FQ 为$\triangle BPC$ 的中位线,所以　$BP\parallel FD$.

类似地有　$BQ\parallel ED$.

所以四边形 $BQDP$ 为平行四边形.

从而它的两条对角线在交点 M 处互相平分即有

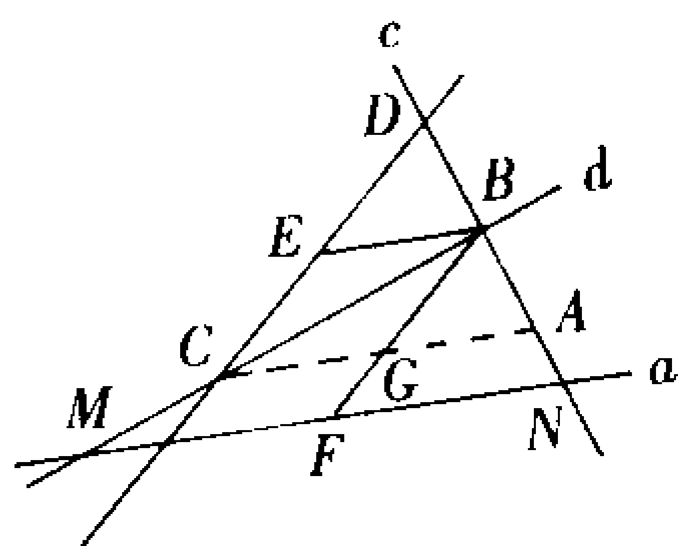
$$BM=MD,\ PM=MQ,$$

又由 $AP=QC$　得　$AM=MC$.

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

4·61　在平面上引出直线 a、b、c、d,其中任何两条都不平行,任何三条都不相交于同一点.已知直线 a 平行于由直线 b、c、d 所围成的三角形的一条中线.求证:直线 b 平行于由直线 a、c、d 所围成的三角形的某条中线.

(莫斯科数学奥林匹克,1972 年)



[证]　设$\triangle BCD$ 是由 b,c,d 所围成的三角形,BE 是$\triangle BCD$ 的一条中线.

设$\triangle BMN$ 是由 a,c,d 所围成的三角形,BF 是$\triangle BMN$ 的一条中线.

过点 C 作 $CA\parallel a$ 与 BF 交于 G,与 c 交于 A(如图).

$$\because\quad \frac{CG}{MF}=\frac{BG}{BF}=\frac{GA}{FN},$$

$\therefore$　$CG=GA$. $\because$　B 为 AD 中点,

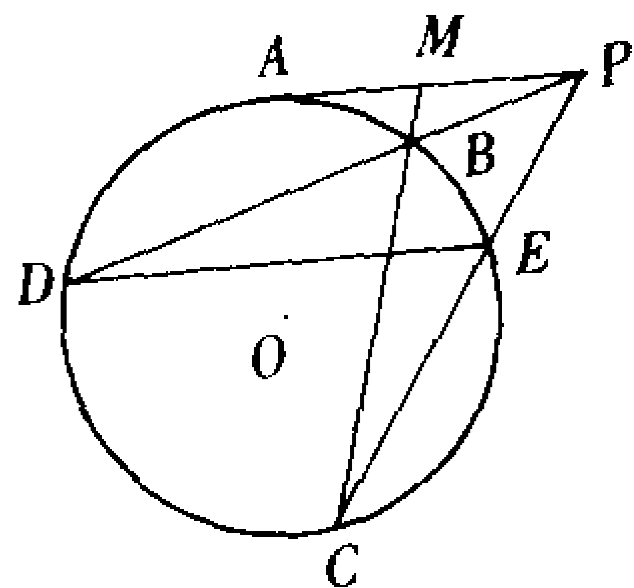
$\therefore$　$BG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$.

$\therefore$　由 a、c、d 所围成的$\triangle BMN$ 的一条中线 $BF\parallel b$.

4·62　自圆 O 外一点 P 向圆 O 作切线 PA，切点为 A，再由 PA 的中点 M 作圆 O 的割线和圆 O 交于 B、C 两点，PB，PC 分别交圆 O 于 D 点和 E 点，求证：$DE /\!/ PA$.

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

[证]　由圆幂定理，得



$MA^2 = MB \cdot MC$,

而　$MA = MP$,

$\therefore$　$MP^2 = MB \cdot MC$,

即　$\dfrac{MB}{MP} = \dfrac{MP}{MC}$.

又　$\angle PMB = \angle CMP$,

$\therefore$　$\triangle PMB \backsim \triangle CMP$，$\angle MPB = \angle MCP$.

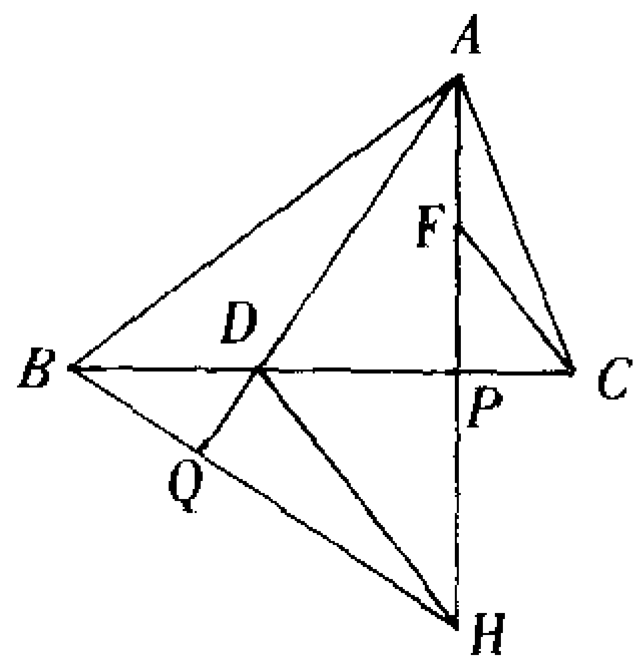
但　$\angle MCP = \angle PDE$，$\therefore$　$\angle MPB = \angle PDE$,

故　$DE /\!/ PA$.

4·63　在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C > \angle B$，点 D 是边 BC 上一点，使 $\angle ADB$ 是钝角，H 是 $\triangle ABD$ 的重心，点 F 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆周上.求证：点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充要条件是：$HD /\!/ CF$ 且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆周上.

（中国中学生数学冬令营，1999 年）

[证 1]　（必要性）设 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心（如图），记 AH 交 BC 于点 P，且 BH 交 AD 延长线于 Q.



一方面由于 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心，易知

$\angle AFB = 180^\circ - \angle ACB$,

又因为 F 在 $\triangle ABD$ 外接圆上，知

$\angle AFB = \angle ADB$.

再由 H 为 $\triangle ABD$ 的垂心，知　$\angle ADB = 180^\circ - \angle AHB$,

$\therefore$　$\angle AHB = \angle ACB$，故 H 在 $\triangle ABC$ 外接圆上，

另一方面，由 H、P、D、Q 四点共圆，有　$\angle HDP = \angle HQP$;

又由 A、B、Q、P 四点共圆，有　$\angle HQP = \angle PAB$,

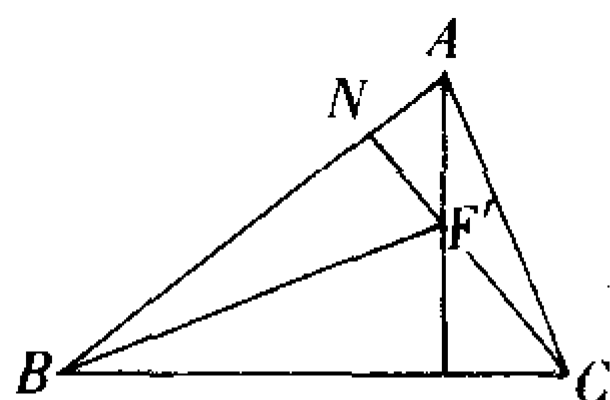
又　$\angle PAB = 90^\circ - \angle ABC = \angle FCB$,

$\therefore$　$\angle HDP = \angle FCB$，故　$HD /\!/ CF$.

(充分性)由 $HD // CF$;有$\angle HDP=\angle FCB$.

仿上有 $\angle PDH=\angle PQH=\angle BAP$，故 $\angle BAP=\angle BCF$,

$\therefore$ $CF\perp AB$,知 F 在AB 边上的高CN 上.



$\because$ H 在$\triangle ABC$ 外接圆上,

$\therefore$ $\angle ACB=\angle AHB$.

又 H 为$\triangle ABD$ 的垂心,

$\therefore$ $\angle ADB=180°-\angle AHB$,

故$\angle AFB+\angle ACB=180°$.

设$\triangle ABC$ 的垂心为F'，则 $\angle AF'B=180°-\angle ACB$.

若点 F 在线段$F'N$ 内，则 $\angle AFB>\angle AF'B$;

若点 F 在线段$F'C$ 内，则 $\angle AFB<\angle AF'B$.均矛盾.

$\therefore$ F 与F'重合,即 F 为$\triangle ABC$ 的垂心.

[证 2] 首先注意到下面的事实:

设$\triangle UVW$ 中,$\angle UVW$ 和$\angle VWU$ 均为锐角,则点 P 是$\triangle UVW$ 垂心的充要条件是:$UP\perp VW$，且 $\angle VPW=180°-\angle VUW$.

(1)若 $HD // CF$,且 H 在$\triangle ABC$ 外接圆上,则 $CF\perp AB$,且

$\angle AFB=\angle ADB=180°-\angle AHB=180°-\angle ACB$,

故 点 F 是$\triangle ABC$ 的垂心.

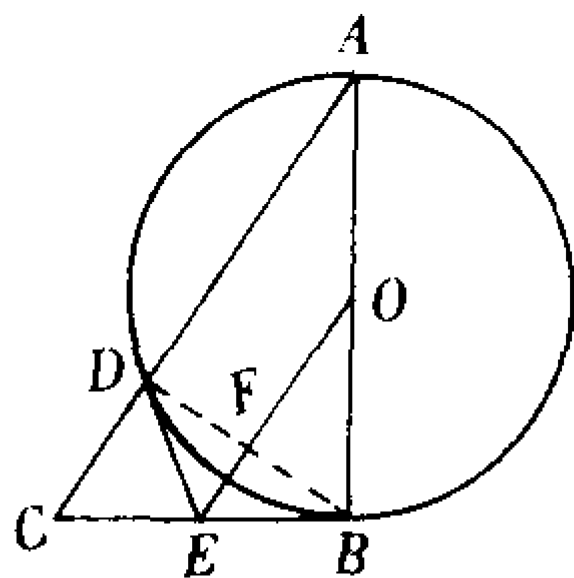
(2)若点 F 是$\triangle ABC$ 的垂心,有 $HD // CF$,且

$\angle ACB=180°-\angle AFB=180°-\angle ADB=\angle AHB$,

$\therefore$ A、B、C、H 四点共圆.

4.64 以直角三角形的直角边 AB 为直径作圆交斜边于D,过 D 作圆的切线交另一直角边于E,则 E 与圆心的连线必平行于斜边,试加证明.

(中国重庆市数学竞赛,1978 年)



[证 1] 若$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle ABC=90°$,AB 是圆O 的直径,ED 切圆于D,E 在BC 上.连 BD,

$\because AB$ 是圆O 的直径,

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CDB=90°$.

$\because$ $\angle ABC=90°$,

$\therefore$ EB 切圆O 于B.

∵ ED 切圆 O 于 D，

∴ $EB=ED$，$\angle EDB=\angle EBD$.

∴ $\angle ECD=\angle EDC$，$CE=ED=EB$.

又 $AO=BO$，∴ $OE /\!/ AC$.

[证 2] 连 BD，∵ D 在以 AB 为直径的圆 O 上，

∴ $\angle ADB=90^\circ$.

∵ $\angle ABC=90^\circ$，

∴ $EB=ED$，$\angle DEF=\angle BEF$.

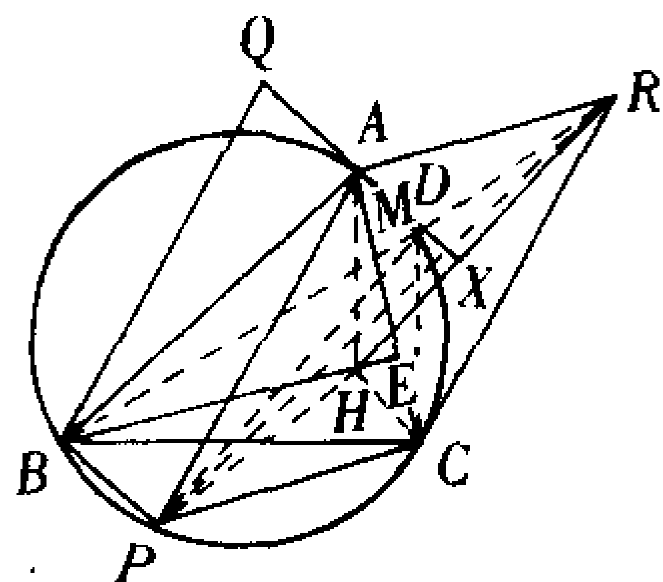
∴ $EO\perp BD$，即 $\angle EFD=90^\circ$.

∴ $EO /\!/ AC$.

4.65 设 H 为△ABC 的垂心，P 为该三角形外接圆上的一点，E 是高 BH 的垂足，并设 $PAQB$ 与 $PARC$ 都是平行四边形，AQ 与 HR 交于 X. 证明：$EX /\!/ AP$.

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）

[证] 连 PR 交 AC 于 M，则 M 为 AC 中点，也为 PR 中点，作△ABC 外接圆的直径 BD，连 DA、DC、HA、HC.



∵ $DA\perp AB$，$HC\perp AB$，∴ $DA /\!/ HC$.

同理 $DC /\!/ HA$.

故四边形 $AHCD$ 为平行四边形，M 为 DH 的中点. 连 PH、DR、DP，于是四边形 $HRDP$ 为平行四边形. 故 $HR /\!/ DP$.

∵ $QX /\!/ BP$，$BP\perp DP$，∴ $HR\perp QX$，$\angle AXH=90^\circ$.

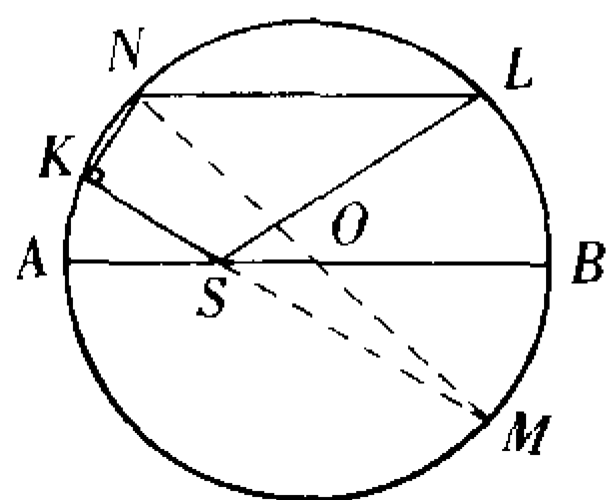
又∵ $\angle AEH=90^\circ$，故 A、H、E、X 四点共圆.

4.66 给定一个半圆 Γ，其圆心为 O，直径为 AB. 在半径 OA 上取一点 S，使 S 异于点 O 和 A，由点 S 引两条射线，使它们与 AB 交成等角，且分别交 Γ 于点 K 和 L. 由点 K 作射线 SK 的垂线交 Γ 于另一点 N，且 N 异于点 L，求证：$NL /\!/ AB$.

（前苏联教委推荐试题，1991 年）

[证] 将半圆 Γ 扩充为圆，延长 KS 交⊙O 于点 M. 因为 $\angle NKM$ 为直角，所以连结 NM 必过圆心 O.

∵ $\angle KSA=\angle LSB$，



$\therefore \quad \angle MSB = \angle LSB.$

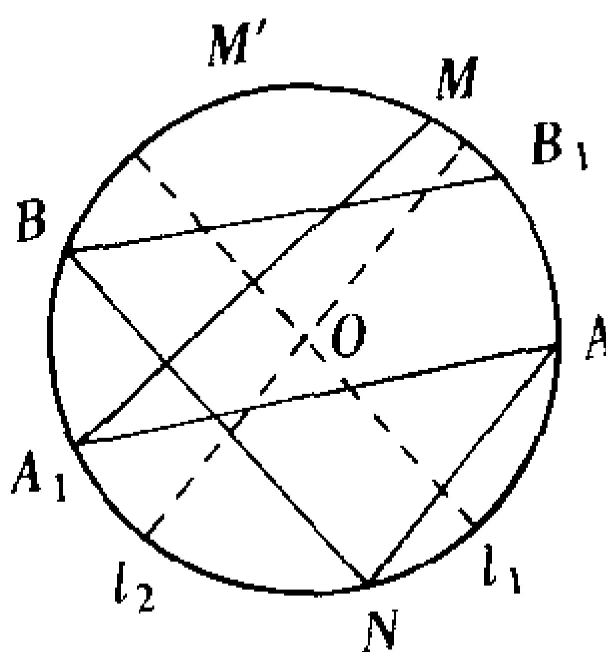
$\therefore \quad \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{LB}.$

又$\because \quad \angle AON = \angle BOM,$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AKN} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{LB}. \quad \therefore \quad NL /\!/ AB.$

4.67 在圆周上给定点 A、B、M 和 N，从点 M 分别引垂直于 NB 和 NA 的弦 MA_1 和 MB_1，求证：直线 AA_1 和 BB_1 平行(如果 $A = A_1$ 或 $B = B_1$，那么直线 AA_1 和 BB_1 是在点 A 和 B 的圆的切线).

(第 15 届全苏数学奥林匹克，1981 年)



[证] 在确定点 A、B、N 的情况下，不仅给定点 M 便确定了点 A_1 和 B_1，而且给定了点 A_1 便确定了点 M，进而也就确定了点 B_1，于是，在确定的 A、B、N 的情况下，我们得到圆到它自身的变换 $\varphi: A_1 \to B_1$.

变换 φ 是关于经过圆心 O 的直线 $l_1 /\!/ NB$ 和 $l_2 /\!/ NA$ 的两个轴对称的合成，结果是一个旋转变换.旋转中心是 l_1 与 l_2 的交点 O，为了确定旋转角，我们确定点 B 的对应点 $\varphi(B)$.

设 B 关于 l_1 的对称点为 M'，由于 $\angle M'BN = 90°$，所以 M' 是过点 N 的直径的另一端点，类似地 M' 关于 l_2 的对称点是 A，因此 $\varphi(B) = A$.

如果把从点 A 到点 B 的弧和角的方向当作正的，那么 φ 是以$\overset{\frown}{AB}$所对圆心角的共轭角(即 $360° - \angle AOB$ 为旋转角的旋转变换，所以总有

$$\overset{\frown}{A_1B_1} = 2\pi - \overset{\frown}{AB}.$$

也就是$\overset{\frown}{A_1B_1}$与$\overset{\frown}{AB}$大小相等且方向相反，从而 $AA_1 /\!/ BB_1$.

4.68 已知：在凸四边形 $ABCD$ 中，直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切.求证：当且仅当 $BC /\!/ AD$ 时，直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

(第 25 届国际数学奥林匹克，1984 年)

[证](1)如果 $BC /\!/ AD$.

设 AB 的中点为 E，CD 的中点为 F，则

$$EF /\!/ AD /\!/ BC.$$

又设以 AB 为直径的圆切 CD 于 G. 过 F 作 $FH\perp AB$ 于 H.

所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$,

即 $\frac{1}{2}DF\cdot EG=\frac{1}{2}AE\cdot FH$,

$\because$ $AE=EG$, $\therefore$ $DF=FH$,

同理 $CF=FH$.

因此, H 在以 CD 为直径的圆上,

又$\because$ $FH\perp AB$.

$\therefore$ AB 与以 CD 为直径的圆相切.

(2)如果 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

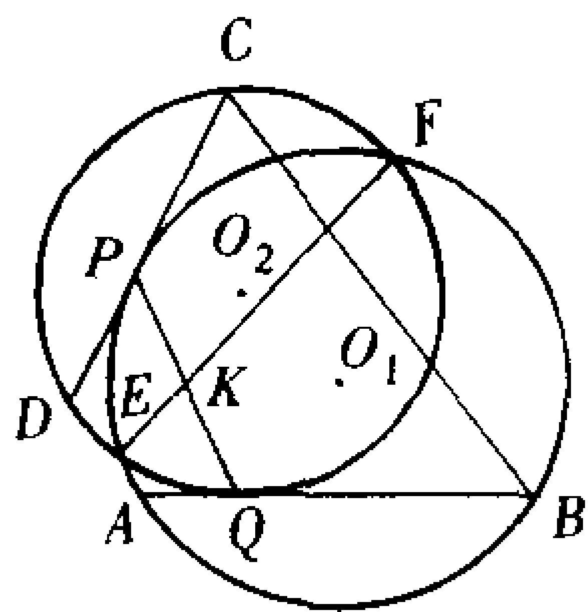
设切点为 H,则 $FH=DF$, 又 $AE=EG$.

$\therefore$ $\frac{1}{2}DFEG=\frac{1}{2}AE\cdot FH$.

即 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$. $\therefore$ $AD\parallel EF$.

同理 $BC\parallel EF$. 故 $BC\parallel AD$.

4·69 如图,在凸四边形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行,圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P,圆 O_2 过 CD 且与边 AB 相切于 Q,圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E、F. 求证: EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC\parallel AD$.



(第 5 届中国中学生数学冬令营,1990 年)

[证] 依题意,找一个中间量既是 $AD\parallel BC$ 的充要条件,又是 EF 平分线段 PQ 的充要条件.

(i)首先证明: $AD\parallel BC$ 的充要条件是 $PD\cdot PC=QA\cdot QB$.

如图,延长 CD 和 BA,设它们的交点为 S.

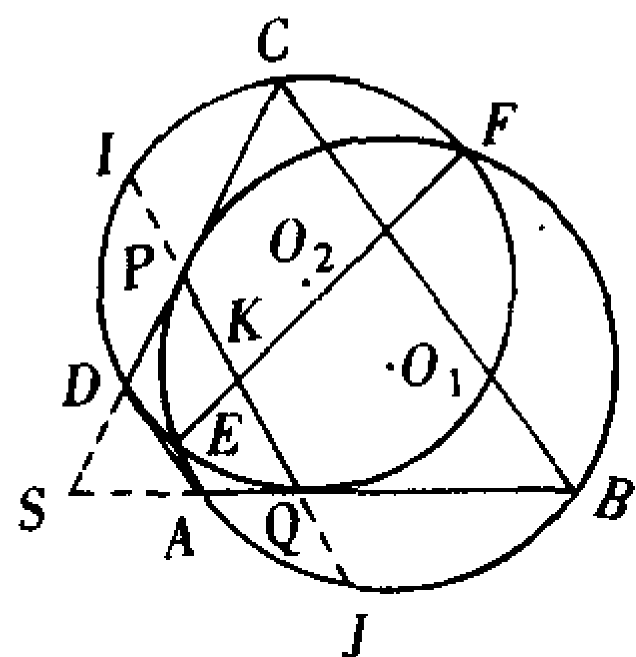
设 $SD=d$, $SP=p$, $SC=c$, $SA=a$, $SQ=q$, $SB=b$.

由 $AD\parallel BC$ 可得,它的充要条件是 $\frac{SD}{SC}=\frac{SA}{SB}$

即 $\frac{d}{c}=\frac{a}{b}$, $ac=bd$ ①

$\because$ SP 是圆 O_1 的切线,由切割线定理得

$SP^2=SA\cdot SB$.



即 $p^2 = ab$.

同样由 SQ 是圆 O_2 的切线,有

$$SQ^2 = SD \cdot SC,$$

即 $q^2 = cd$.

于是 $p = \sqrt{ab}$, $q = \sqrt{cd}$.

且 $PD \cdot PC = (p-d)(c-p) = p(c+d) - cd - p^2$

$$= \sqrt{ab}(c+d) - cd - ab \quad ②$$

又 $QA \cdot QB = (q-a)(b-q) = qb - ab - q^2 + qa$

$$= q(a+b) - ab - q^2$$

$$= \sqrt{cd}(a+b) - ab - cd \quad ③$$

下面比较 $\sqrt{ab}(c+d)$ 和 $\sqrt{cd}(a+b)$.

$$[\sqrt{ab}(c+d)]^2 = abc^2 + abd^2 + 2abcd \quad ④$$

$$[\sqrt{cd}(a+b)]^2 = a^2cd + b^2cd + 2abcd \quad ⑤$$

由 $ac = bd$,有 $\sqrt{ab}(c+d) = \sqrt{cd}(a+b)$, ⑥

由②、③和⑥得 $PD \cdot PC = QA \cdot QB$ ⑦

反之,由⑦及②、③和⑥也可得 $ac = bd$.

即 $BC /\!/ AD$.

于是证明了 $BC /\!/ AD$ 的充要条件是 $PD \cdot PC = QA \cdot QB$.

(ii)下面证明:EF 平分线段 PQ 的充要条件也是

$PD \cdot PC = QA \cdot QB$.

记 PQ 与 EF 交于 K. 延长 PQ 与 QP 分别交两圆于 J、I. 于是由相交弦定理得

$$PD \cdot PC = PI \cdot PQ \quad ⑧$$

$$QA \cdot QB = QJ \cdot PQ \quad ⑨$$

又由于 $KJ \cdot KP = KQ \cdot KI$

$\because$ $KP = KQ$, $\therefore$ $KJ = KI$,

即 $KJ - KQ = KI - KP$ 或 $QJ = PI$. ⑩

由⑧、⑨和⑩得 $PD \cdot PC = QA \cdot QB$. ⑪

反之,由⑪得 $PI \cdot PQ = QJ \cdot PQ$,

从而可得 $PI = QJ$. 于是 $KP = KQ$.

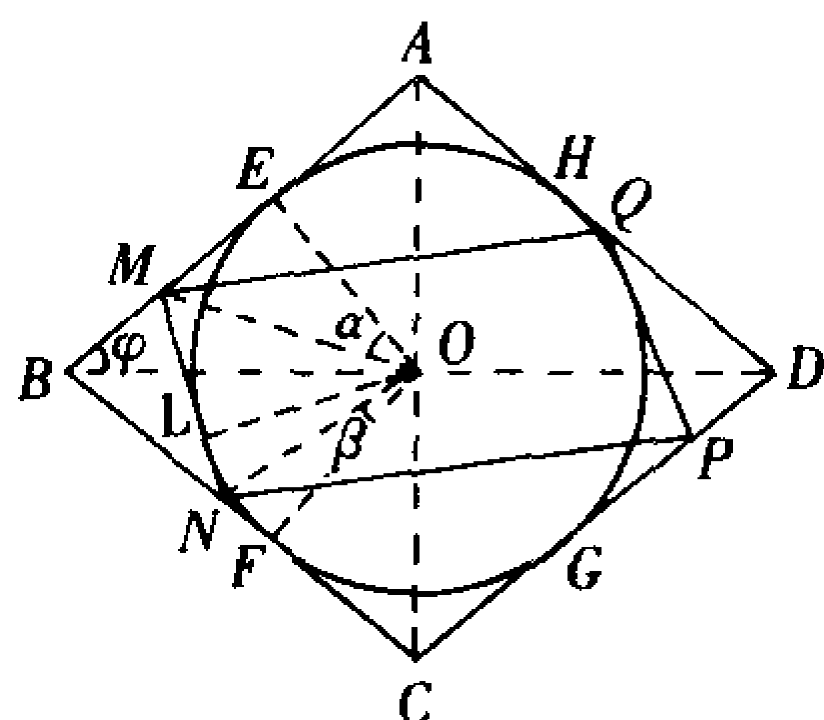
因此　EF 平分线段 PQ（即 $KP=KQ$）的充要条件是 $PD\cdot PC=QA\cdot QB$.

综合(i),(ii)可证：EF 平分线段 PQ 的充要条件是 $BC/\!/AD$.

4·70　菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边的切点依次为 E、F、G、H，在 $\overset{\frown}{EF}$ 和 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作 $\odot O$ 的切线交 AB 于点 M，交 BC 于点 N，交 CD 于点 P，交 DA 于点 Q，求证：$MQ/\!/NP$.

（中国高中数学联赛，1995 年）

［证 1］　连结 AC、BD 交于内切圆的圆心 O，记 MN 与 $\odot O$ 的切点为 L，连结 OE、OF、OM、ON、OL，于是有



$OE\perp AB$，$OF\perp BC$，$OL\perp MN$.

记　$\angle MOE=\alpha$，$\angle NOF=\beta$，$\angle ABO=\varphi$，于是

$2\varphi+2\alpha+2\beta=180°$，$\varphi+\alpha+\beta=90°$.

$\therefore$　$\angle AOM=\varphi+\alpha=\angle CNO$，

$\angle CON=\varphi+\beta=\angle AMO$.

$\therefore$　$\triangle AMO\backsim\triangle CON$.　$\therefore$　$AM\cdot CN=AO\cdot OC$.

同理　$AO\cdot OC=AQ\cdot CP$.　$\therefore$　$AM\cdot CN=AQ\cdot CP$.

$\therefore$　$\triangle AMQ\backsim\triangle CPN$.

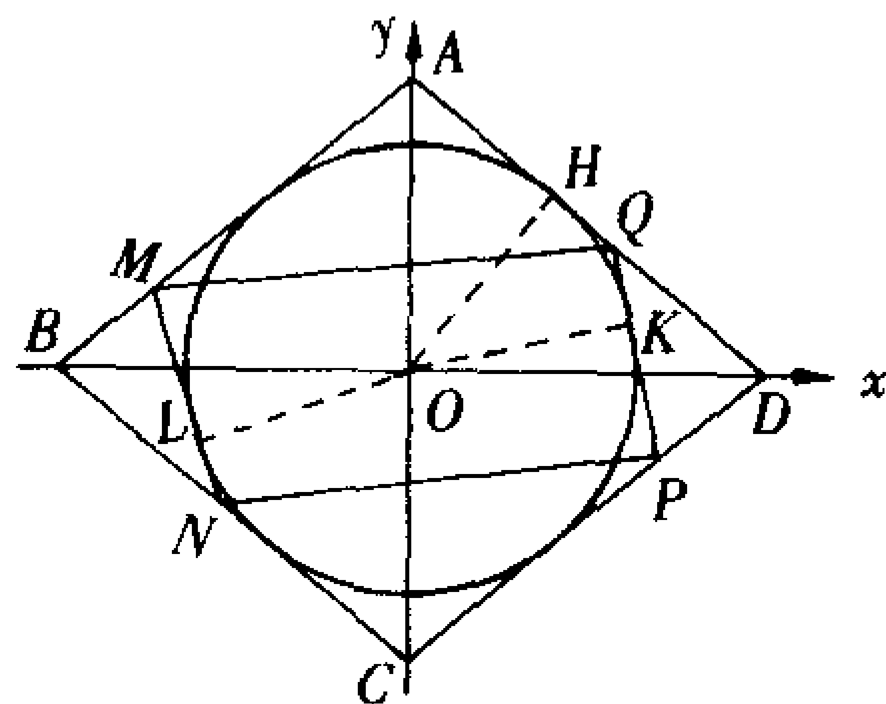
$\therefore$　$\angle CNP=\angle AQM$.

$\therefore$　$\angle AMQ+\angle CNP=\angle AMQ+\angle AQM=180°-\angle A=2\varphi$.

$\therefore$　$\angle QMN+\angle MNP=180°$.

$\therefore$　$MQ/\!/NP$.

［证 2］　取以点 O 为原点，以对角线 AC、BD 分别为 y 轴和 x 轴，以 $\odot O$ 半径为 1 的直角坐标系. 设点 H 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$. 于是点 A 和 D 的坐标分别为 $\left(0,\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},0\right)$，直线 AD 的方程为



$$x\cos\theta+y\sin\theta=1.\qquad ①$$

由对称性知菱形的另外三边所在直线的方程分别为

AB: $-x\cos\theta+y\sin\theta=1$, ②

BC: $-x\cos\theta-y\sin\theta=1$, ③

CD: $x\cos\theta-y\sin\theta=1$. ④

设 PQ 与⊙O 切点K 的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$, MN 与⊙O 切点L 的坐标为$(\cos\beta,\sin\beta)$. 于是直线 PQ 的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1. \quad ⑤$$

将④与⑤联立并解出点 P 的坐标:

$$\begin{cases} x\cos\theta-y\sin\theta=1, \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=1. \end{cases}$$

$$x_P=\frac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}},\quad y_P=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}. \quad ⑥$$

完全平行地可以求得

$$x_Q=\frac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}},\quad y_Q=\frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}. \quad ⑦$$

$$x_M=\frac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}},\quad y_M=\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}. \quad ⑧$$

$$x_N=\frac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}},\quad y_N=\frac{-\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}. \quad ⑨$$

由⑥～⑨即可求得直线 MQ、NP 的斜率为

$$k_{MQ}=\frac{\dfrac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}},$$

$$k_{NP}=\frac{\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}-\frac{\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}{\frac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}+\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}.$$

$\therefore\quad K_{MQ}=K_{NP}.\quad\therefore\quad MQ\parallel NP.$

［证 3］ 作辅助线同证 1，于是有 $\varphi+\alpha+\beta=90^\circ$，记⊙$O$ 半径为 R.

$\because\quad\angle AOB=90^\circ=\angle AEO,\ \therefore\angle AOE=\varphi.$

同理 $\angle COF=\varphi.$

$\therefore\quad AM=AE+EM=R\operatorname{tg}\varphi+R\operatorname{tg}\alpha=R(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\alpha),$

$CN=CF+FN=R(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\beta).$

$$\therefore\quad AM\cdot CN=R^2(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\beta)$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin\varphi\cos\alpha+\cos\varphi\sin\alpha}{\cos\varphi\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\beta+\cos\varphi\sin\beta}{\cos\varphi\cos\beta}$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi+\beta)}{\cos^2\varphi\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=R^2\cdot\frac{\cos\beta\cos\alpha}{\cos^2\varphi\cos\alpha\cos\beta}=\frac{R^2}{\cos^2\varphi}.$$

同理 $AQ\cdot CP=\frac{R^2}{\cos^2\varphi}.\quad\therefore\quad AQ\cdot CP=AM\cdot CN.$

$\therefore\quad\triangle AMQ\backsim\triangle CPN.\quad\therefore\quad\angle AQM=\angle CNP.$

$\therefore\quad\angle AMQ+\angle CNP$

$=\angle AMQ+\angle AQM=180^\circ-\angle A$

$=2\varphi.$

$\therefore\quad \angle QMN+\angle MNP$

$=360^\circ-(\angle AMQ-\angle BMN-\angle BNM-\angle CNP)=180^\circ.$

$\therefore\quad MQ /\!/ NP.$

4·71　四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，把它绕着外接圆的圆心旋转小于 180° 的某个角度得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$. 求证：彼此对应的直线 AB 和 A_1B_1、BC 和 B_1C_1、CD 和 C_1D_1、DA 和 D_1A_1 的四个交点是平行四边形的顶点.

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）

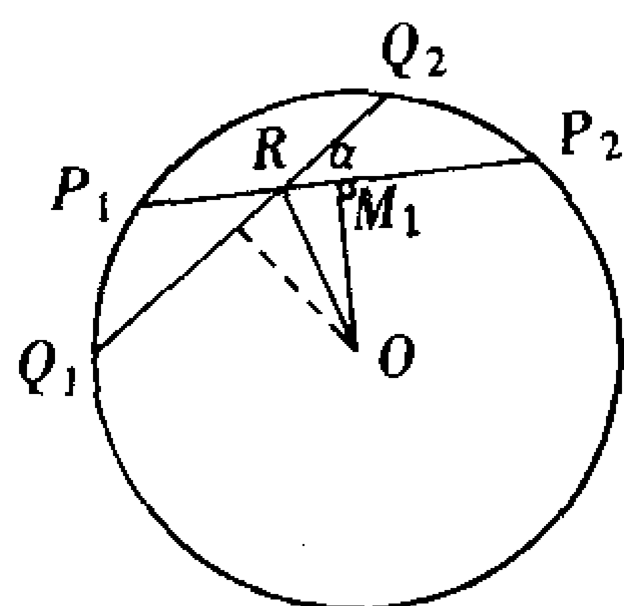


图 1

［证］　如图 1，弦 P_1P_2 绕点 O 旋转 α 角到弦 Q_1Q_2，其交点设为 R.

若 P_1P_2 中点为 M_1，则　$\angle M_1OR=\dfrac{\alpha}{2}$.

而　$OR:OM_1=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\sec\dfrac{\alpha}{2}$,

$\therefore$　P_1P_2 与 Q_1Q_2 的交点 R，可由 P_1P_2 的中点 M_1 经旋转位似变换而得到

$\left(\text{先旋转}\dfrac{\alpha}{2}\text{角，再伸长}\sec\dfrac{\alpha}{2}\text{倍}\right)$.

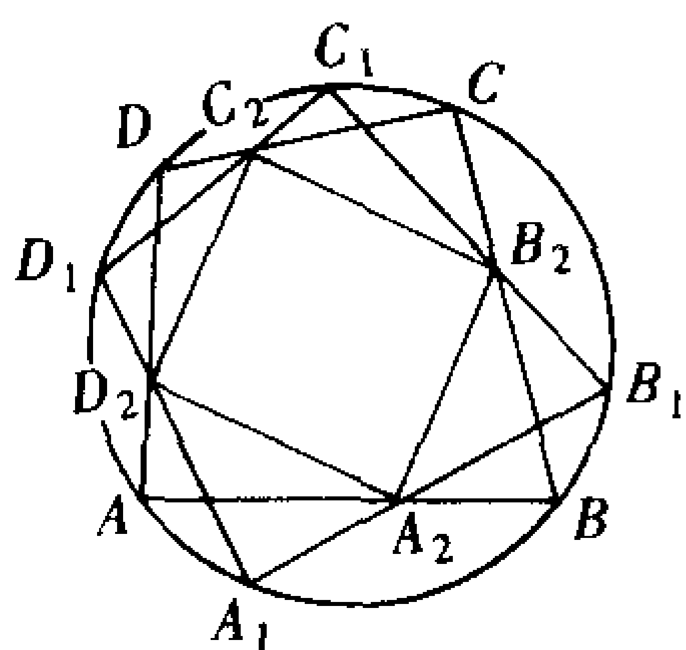


图 2

本题四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 α 角得四边形 $A_1B_1C_1D_1$，对应交点得四边形 $A_2B_2C_2D_2$.

$A_2B_2C_2D_2$ 应由 $ABCD$ 四边中点经位似旋转而得，而 $ABCD$ 四边中点组成平行四边形，所以 $A_2B_2C_2D_2$ 仍是平行四边形.

4·72　在圆上取六个点 A、B、C、D、E、F，使弦 AB 与弦 DE 平行，弦 DC 与弦 AF 平行. 求证：弦 BC 平行于弦 EF.

（波兰数学奥林匹克，1959 年）

［证］　为使下面的证明与点在圆上的位置无关，我们将不依赖图形进行论证.

关于已知图的平行弦 AB 和 DE 的公共对称轴作对称变换，那么图形 $\Phi_1=\{A,B,C,D,E,F\}$ 变换为图形 $\Phi_2=\{B,A,C',E,D,F'\}$. 括号中的字母表示图形 Φ_1 的点 A、B、C、D、E、F 的象.

在这个变换下，平行弦 DC 和 AF 变换为平行弦 EC' 和 BF'.

再进行关于弦 EC' 和 BF' 的公共对称轴作对称变换，这时图形 Φ_2 变换为图形 $\Phi_3=\{F',A',E,C',D',B\}$.

最后，关于弦 BE 的对称轴作对称变换，图形 Φ_3 变换为图形 $\Phi_4=\{F'',A'',B,C'',D'',E\}$.

图形 Φ_4 是由图形 Φ_1 依次实施三次对称变换得到的，这三次对称变换的对称轴是同一平面上经过同一点(即已知圆的圆心 O)的三条直线，由于这些对称变换的乘积也是关于某条经过 O 点的直线的对称变换，因此，图形 Φ_1 与 Φ_4 关于某条直线对称，在这个将 Φ_1 变为 Φ_4 的对称变换中，点 C 变为点 B，而点 F 变为点 E，直线 BC 和 EF 分别包含一组对称点，，因而它们垂直于对称轴，它以 BC 平行于 EF.

4·73　凸四边形 $ABCD$ 由它的对角线分成四个三角形，若已知这四个三角形的内切圆的半径彼此相等，求证：四边形 $ABCD$ 是一个菱形.

(第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年)

[证]　设凸四边形 $ABCD$ 对角线 AC、BD 交于 O 点. $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$，$\triangle DOA$ 的内切圆半径都等于 r.

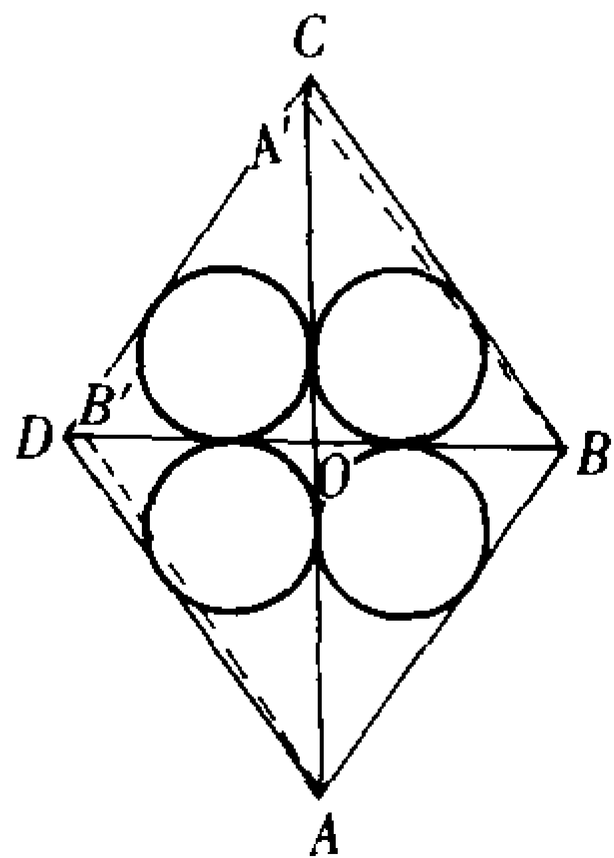
假设 AC 不垂直 BD. 不妨设 $\angle AOB<90°$.

作 A 关于 O 的对称点 A'，B 关于 O 的对称点 B'.

在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle BOA'$ 中，$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOA'}$，但 $BA'>BA$，

$\therefore$　$\triangle AOB$ 周长 $<\triangle BOA'$ 周长.

$\therefore$　$\triangle BOA'$ 内切圆半径 $<r$($\triangle AOB$ 内切圆半径).



因此，可以判定 A' 在 OC 上.

同理，可证 $\triangle AOB'$ 内切圆半径小于 r.

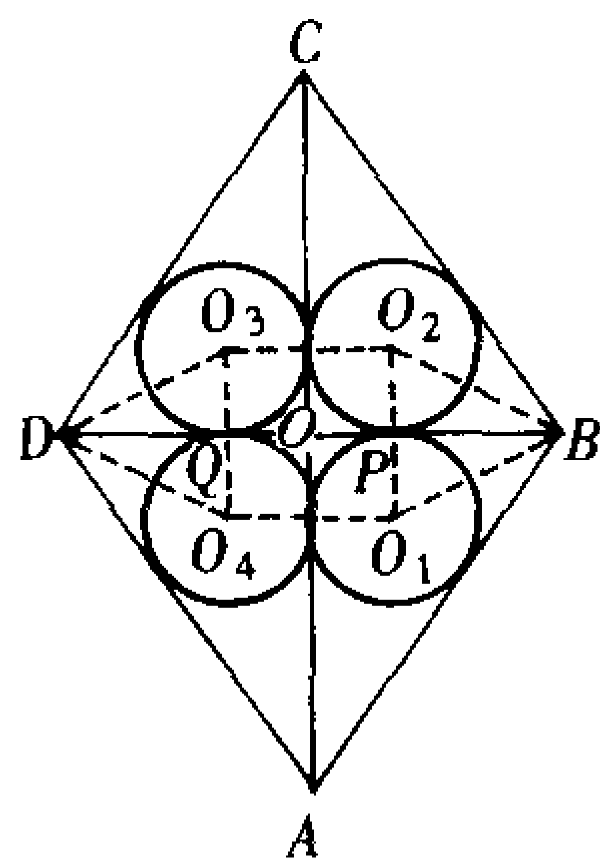
因此，B' 在 OD 上，连 $A'B'$，则　$\triangle A'OB'\cong\triangle AOB$.

所以 $\triangle A'OB'$ 内切圆半径与 $\triangle AOB$ 内切圆半径相等，都等于 r. 但已知 $\triangle DOC$ 内切圆半径为

r.这显然矛盾.所以 $AC\perp BD$ 成立.

由 $AC\perp BD$ 于 O.

$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$、$\triangle DOA$ 内切圆半径相等,都等于 r.



$O_1O_2O_3O_4$ 为正方形.

$\odot O_1$、$\odot O_2$ 与 OB 切于 P,

$\odot O_3$、$\odot O_4$ 与 OD 切于 Q.

则 $\angle O_2BP=\angle O_1BP$.

进而 $\angle OBC=\angle OBA$.

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle COB$.

$\therefore$ $AO=OC$.

同理可证 $BO=DO$.

因此,四边形 $ABCD$ 为菱形.

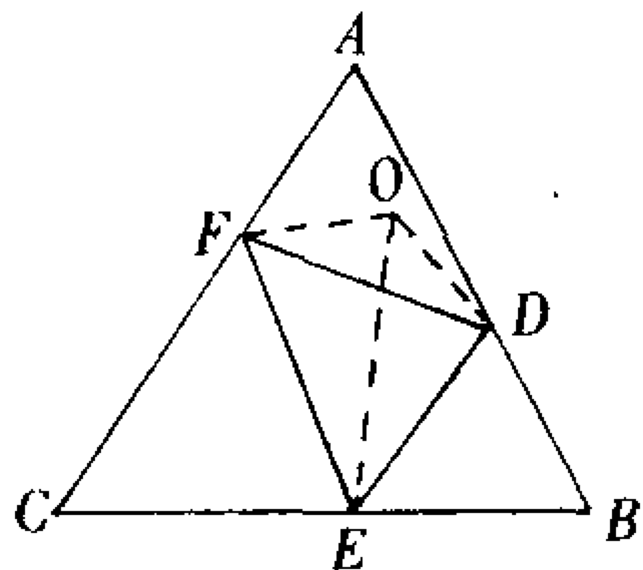
第五章　点共线与线共点

(一)点共线、点在直线上

5·1　在$\triangle ABC$的边AB、BC、CA上分别取点D、E、F,使得$DE=BE$,$FE=CE$,试证:$\triangle ADF$的外心在$\angle DEF$的平分线上.

（第23届全苏数学奥林匹克,1989年）

[证]　如图,设O为$\triangle ABC$外心,连OD、OE、OF.



$$\because\quad \angle DEF=180^\circ-(180^\circ-2\angle B)-(180^\circ-2\angle C)=180^\circ-2\angle A.$$

知$\angle A$是锐角,从而$\triangle ADF$的外心O与顶点A在DF的同侧.

$$\therefore\quad \angle DOF=2\angle A=180^\circ-\angle DEF.$$

因此,D、E、F、O四点共圆.于是

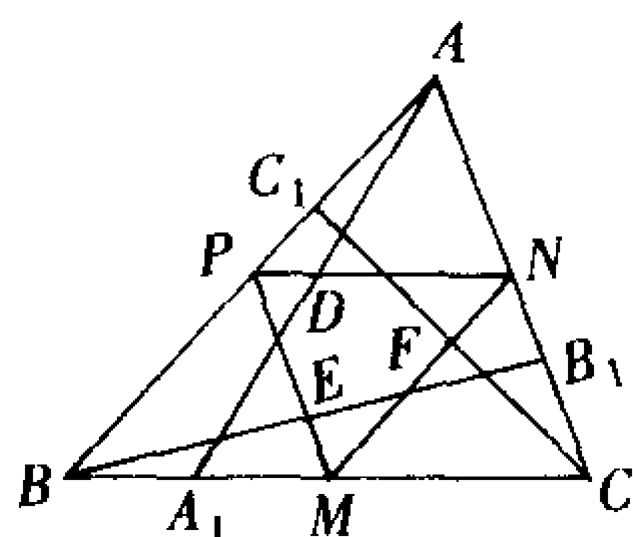
$\angle DEO=\angle DFO=\angle FDO=\angle FEO$,

即EO是$\angle DEF$的平分线.

5·2　将$\triangle ABC$的三个顶点A、B、C分别与对边上的点A_1、B_1、C_1连结起来,证明:线段AA_1、BB_1、CC_1的中点不位于同一直线上.

（莫斯科数学奥林匹克,1945年）

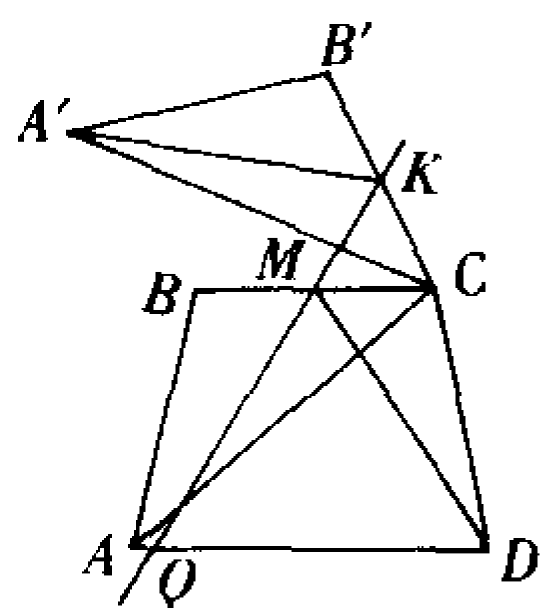
[证]　设D、E、F分别为AA_1、BB_1、CC_1的中点;M、N、P分别为BC、CA、AB的中点.



但$\triangle MNP$是一个由$\triangle ABC$三边中点连成的三角形，今D在PN上、E在PM上、F在MN上. 故D、E、F不共线.

5·3　在梯形$ABCD$中，腰$AB=CD$. 将$\triangle ABC$绕C点转过一个角度，而得到$\triangle A'B'C$. 求证：线段$A'D$、BC和$B'C$的中点共线.

（第23届全苏数学奥林匹克，1989年）



［证］　为确定起见，设$\triangle A'B'C$的位置如图中所示，其余情况可类似地考虑.

设K、M分别是$B'C$、BC的中点，由$B'K=\frac{1}{2}BC=CM$，$B'A'=BA=CD$，$\angle B'=\angle B=\angle DCM$，

得　$\triangle CMD\cong\triangle B'KA'$

$\therefore$　$A'K=DM$，$\angle CMD=\angle B'KA'$.

在等腰$\triangle CKM$中，$\angle MKC=\angle KMC$，

从而　$\angle A'KM=\angle DMQ$.

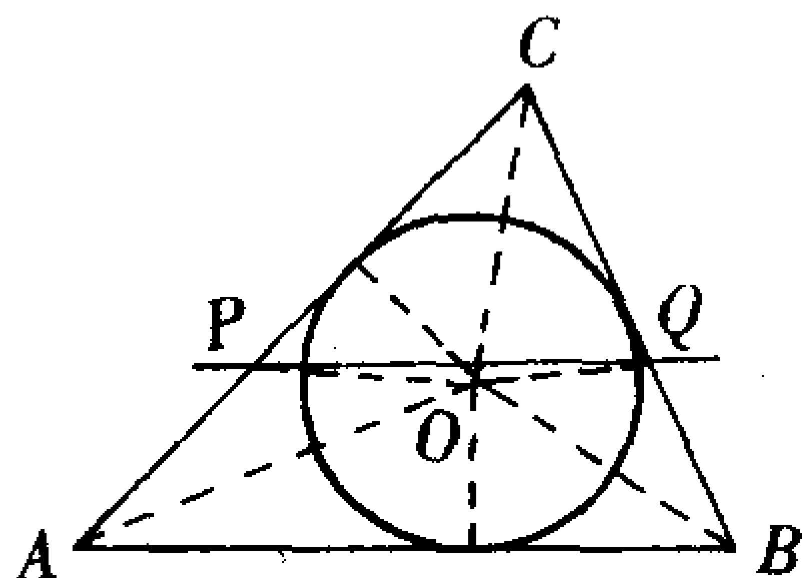
又　$A'K=DM$，

$\therefore$　在MK两侧的A'和D到MK的距离相等，进而$A'D$的中点在KM上.

若点K在直线MD上，则$\angle A'KM=0°$或$180°$，这时命题亦成立.

5·4　试证：(1)将已知三角形分成两个面积和周长都相等的多边形的直线，一定经过该三角形的内心；(2)对于有内切圆的任意多边形有与(1)类似的结论.

（第5届全苏数学奥林匹克，1971年）



［证］　(1)设平分$\triangle ABC$面积与周长的直线分别交边AC和BC于点P和Q. O表示$\triangle ABC$的内心，上为内切圆半径，连PO、QO

则　$S_{五边形ABQOP}=\frac{1}{2}r(AP+AB+BQ)$，

$$S_{\text{四边形}OQCP}=\frac{1}{2}r(QC+CP).$$

因为直线 PQ 平分三角形周长，

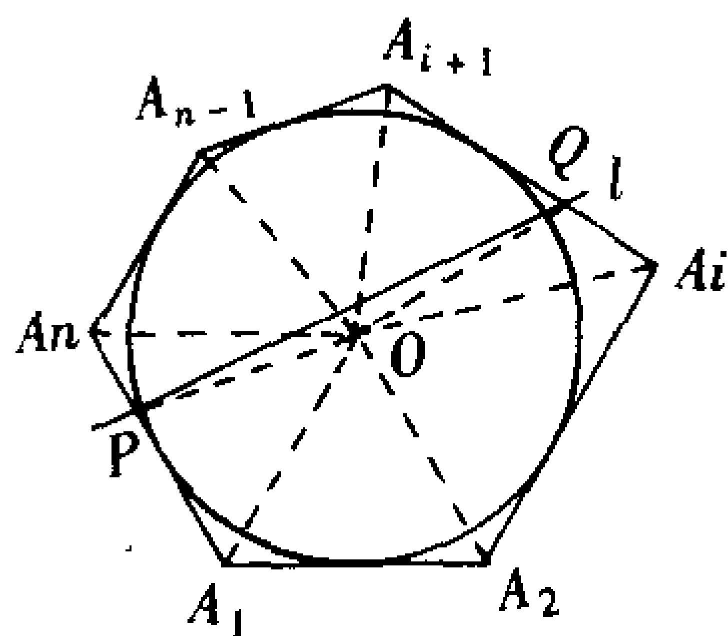
$AP+AB+BQ=QC+CP$,

所以 $S_{\text{五边形}ABQOP}=S_{\text{四边形}OQCP}$.

此外，依条件 $S_{\text{四边形}ABQP}=S_{\triangle QCP}$. 所以 $S_{\triangle OPQ}=0$.

即 直线 PQ 经过 O 点.

(2)设直线 l 与圆外切多边形的边界交于 P、Q 两点，并且平分这个圆外切多边形的周长和面积. 多边形内切圆心为 O，将多边形各顶点与 O 连结，形成若干个三角形，三角形的高是内切圆⊙O 的半径，



注意到折线 $PA_1A_2\cdots Q$ 与折线 $PA_nA_{n-1}\cdots Q$ 等长，且

$S_{A_1A_2}\cdots QOP=S_{\triangle PQQ\cdots A_{n-1}A_n}$,

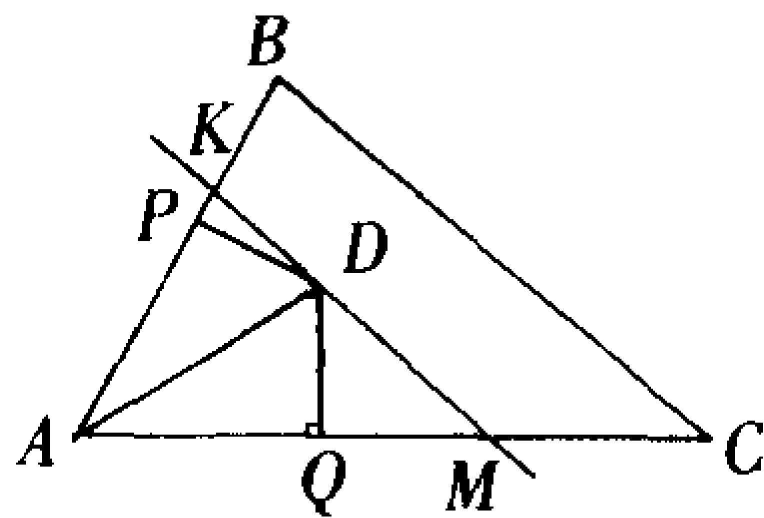
又 $S_{PQ\cdots A_{n-1}A_n}=S_{PA_1A_2}\cdots Q$,

推得 $S_{\triangle PQQ}=O$, $\therefore$ l 经过 O 点.

5·5 设一直线将三角形划分成等面积和等周长的两部分，证明：三角形的内心位于这条直线上.

(前南斯拉夫数学奥林匹克，1981 年)

[证] 设直线 MK 分别与△ABC 的边 AB 和 AC 相交于点 K 和 M.



我们证明，当且仅当直线 KM 通过△ABC 的内心时，比例式

$$\frac{S_{\triangle AKM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+BC+CA}$$

才能成立.

本题的结论是$\frac{S_{\triangle AKM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$时的特例.

设 r 是△ABC 内切圆的半径，则

$2S_{\triangle ABC}=r(AB+BC+CA)$.

又设 ρ 是圆心 D 在 KM 上且与边 AK、AM 相切的圆的半径.

由于 $S_{\triangle AKM}=S_{\triangle ADM}+S_{\triangle ADK}$,

则 $S_{\triangle AKM}=\frac{1}{2}\rho(AK+AM)$,

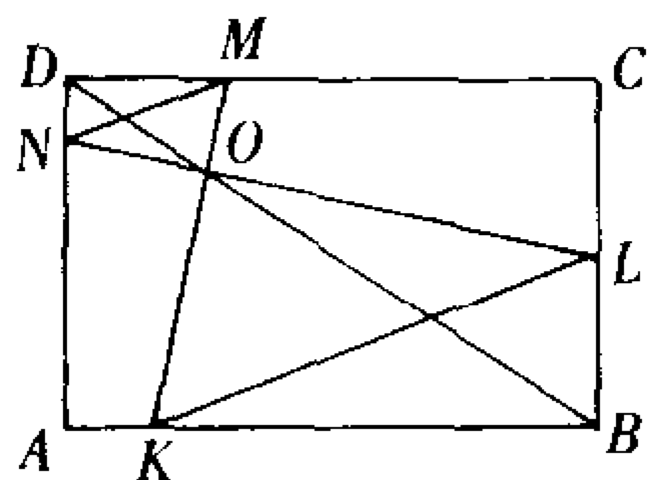
即 $2S_{\triangle AKM}=\rho(AK+AM)$.

当且仅当 $\rho=r$ 时, $\frac{S_{\triangle AKM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+BC+CA}$.

又由于 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上,且 $\rho=r$,所以当且仅当两个圆的圆心重合时,上述比例式成立.

5·6 在矩形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上分别取异于顶点的点 K、L、M、N.已知 $KL/\!/MN$,$KM\perp NL$.求证:KM 和 LN 的交点在矩形的对角线 BD 上.

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)



[证] 设 O 是 KM 和 NL 的交点,连结 DO、OB.

$\because$ $\angle NDM+\angle MON=180°$,

$\therefore$ D、N、O、M 四点共圆.

$\therefore$ $\angle NOD=\angle NMD$.

同理 $\angle LOB=\angle LKB$.

又 $\because$ $NM/\!/KL$, $KB/\!/DM$, $\therefore$ $\angle NMD=\angle LKB$.

$\therefore$ $\angle NOD=\angle LOB$.

$\therefore$ D、O、B 三点共线,即点 O 在 BD 上.

注 条件 $KM\perp NL$ 可以去掉,改证如下.

$\because$ $KL/\!/NM$.

$\therefore$ $\triangle NMD\backsim\triangle LKB$, $\triangle NOM\backsim\triangle LOK$.

$\therefore$ $\frac{DN}{BL}=\frac{NM}{LK}=\frac{NO}{OL}$,

$\angle DNM=\angle BLK$, $\angle MNO=\angle KLO$.

$\therefore$ $\angle DNO=\angle BLO$. $\therefore$ $\triangle DNO\backsim\triangle BLO$.

$\therefore$ $\angle DON=\angle BOL$.

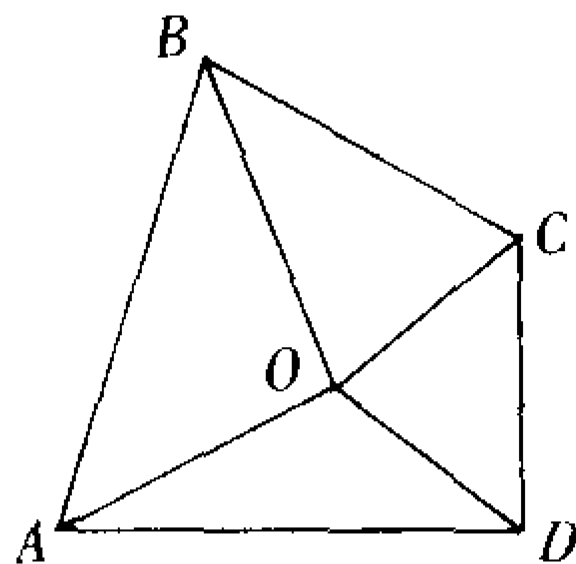
$\therefore$ D、O、B 三点共线,即点 O 在对角线 BD 上.

5·7 试证:如果 O 是面积为 S 的四边形 $ABCD$ 内的一个点,且 $2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$.则四边形 $ABCD$ 是正方形,且点 O 是

它的中心.

（英国数学奥林匹克，1982 年）

[证] 根据题意有



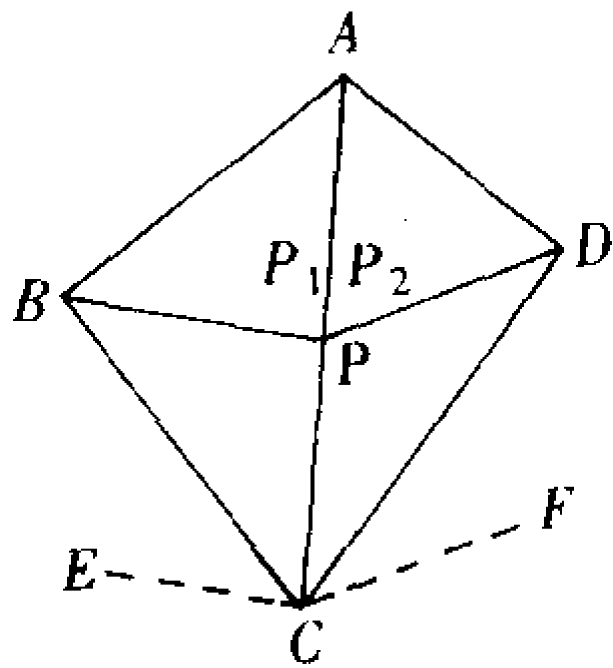
$$
\begin{aligned}
& OA^2+OB^2+OC^2+OD^2 \\
=& \frac{1}{2}(OA^2+OB^2)+\frac{1}{2}(OB^2+OC^2) \\
& +\frac{1}{2}(OC^2+OD^2)+\frac{1}{2}(OD^2+OA^2) \\
\geqslant & OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA \\
\geqslant & 2S_{\triangle AOB}+2S_{\triangle BOC}+2S_{\triangle COD}+2S_{\triangle DOA} \\
=& 2S.
\end{aligned}
$$

因此当且仅当 $OA=OB=OC=OD$，且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=90°$时，题设的等式才可能成立，此时 $ABCD$ 是正方形，点 O 是它的中心.

5·8 设在四边形 $ABCD$ 内可找到一点 P，使得四个三角形 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 的面积相等. 求证：点 P 必位于对角线 AC 或 BD 上.

（瑞士数学奥林匹克，1983 年）

[证] 用反证法. 设点 P 不在 BD 上.



此时，BP 和 DP 相交于 P，我们证明满足条件的点 P 必在 AC 上.

由题设 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PDA}$，所以点 A 到 BP 的距离与点 C 到 BP 的距离相等，A 点到 BP 的距离与点 C 到 DP 的距离相等.

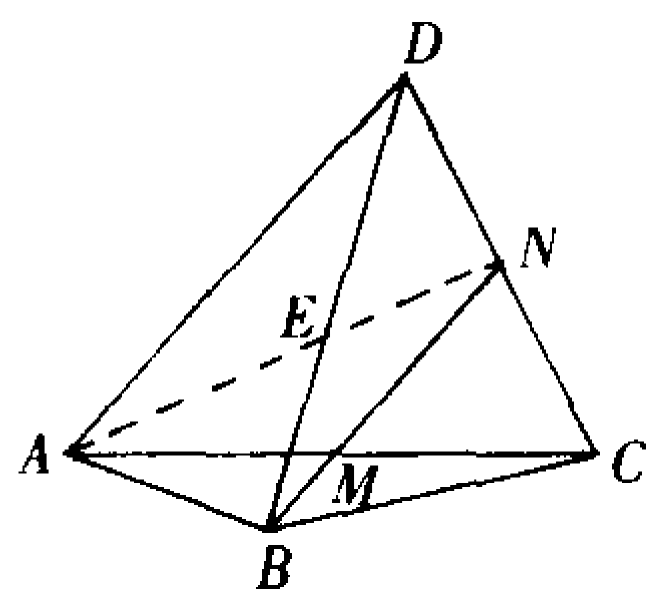
过 C 作 $CE\parallel BP$，$FC\parallel PD$，则点 A 到直线 CE 的距离等于点 A 到直线 BP 距离的 2 倍.

点 A 到直线 FC 的距离等于点 A 到直线 DP 距离的 2 倍.

连结 AC，设 AC 与 BP 交于 P_1，AC 与 DP 交于 P_2，显然 P_1 是 AC 的中点，P_2 也是 AC 的中点.

因而 P_1 和 P_2 重合. 即点 P 在 AC 上，且为 AC 的中点.

5·9 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 $3:4:1$，点 M、N 分别在 AC、CD 上，满足 $AM:AC=CN:CD$，并



且 B、M、N 三点共线. 求证: M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

(中国高中数学联赛,1983 年)

[证 1] 不妨设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$, $S_{\triangle ABC}=1$,

于是 $S_{\triangle ABD}=3$, $S_{\triangle BCD}=4$, $S_{\triangle ACD}=3+4-1=6$

$S_{\triangle ABM}=r$, $S_{\triangle BCM}=1-r$, $S_{\triangle BCN}=4r$, $S_{\triangle ACN}=6r$,

$S_{\triangle CNM}=S_{\triangle BCN}-S_{\triangle BCM}=4r-(1-r)=5r-1$,

$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ACN}-S_{\triangle CNM}=6r-(5r-1)=r+1$,

$\therefore\ \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{r+1}{6r}$.

又 $\because\ \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{AM}{AC}=r$,

$\therefore\ \frac{r+1}{6r}=r$ 即 $6r^2-r-1=0$.

这个方程在(0,1)中有惟一解 $r=\frac{1}{2}$,

即 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

[证 2] 不妨设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$, $S_{\triangle ABC}=1$,

这时 $S_{\triangle ABD}=3$, $S_{\triangle BCD}=4$, $S_{\triangle ACD}=6$

$S_{\triangle ABM}=r$, $S_{\triangle BCM}=1-r$, $S_{\triangle BCD}=4r$, $S_{\triangle ACN}=6r$

设两条对角线 AC 与 BD 交于 E,

$\therefore\ AE:EC=3:4$, 且 $BD=7BE$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle BND}}{S_{\triangle BME}}=\frac{BD\cdot BN}{BE\cdot BM}=\frac{7BN}{BM}=\frac{7S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BCM}}=\frac{28r}{1-r},$$

$$\text{又}\because\ \frac{S_{\triangle BND}}{S_{\triangle BME}}=\frac{(1-r)S_{\triangle BCD}}{\left(\frac{EM}{AC}\right)\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{4(1-r)AC}{EM}$$

$$=\frac{4(1-r)AC}{AC-(AE+ME)}=\frac{4(1-r)AC}{AC-\left[\left(\frac{3}{7}\right)+1-r\right]AC}$$

$$=\frac{4(1-r)}{r-\left(\frac{3}{7}\right)},$$

$$\therefore \quad \frac{28r}{1-r}=\frac{4(1-r)}{r-\left(\frac{3}{7}\right)}.$$

即 $(1-r)^2=r(7r-3)$,

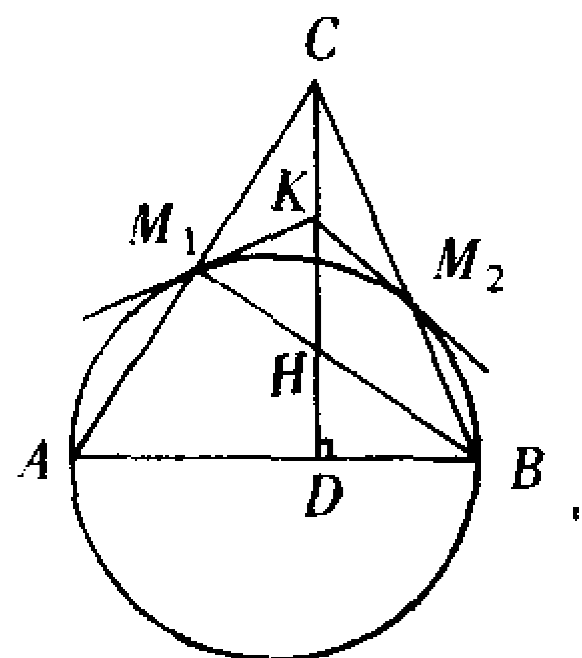
亦即 $6r^2-r-1=0$, 解得 $r=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ M 与 N 分别为 AC 与 CD 的中点.

5·10 以锐角$\triangle ABC$ 的 AB 边为直径作一圆.设 M_1 和 M_2 分别是圆与 AC、BC 的交点,过 M_1、M_2 分别作圆的切线.证明:这两条切线的交点落在$\triangle ABC$ 的高 CD 上.

(基辅数学奥林匹克,1966 年)

[证] $\because$ $\angle AM_1B=90°$, 又 BM_1 也是$\triangle ABC$ 的高,



$\therefore$ BM_1 与 CD 的交点 H 是垂心,设过 M_1 点的切线与 CD 交于 K,

$\because$ A、D、H、M_1 四点共圆,

$\therefore$ $\angle KHM_1=\angle A=\angle KM_1B$.

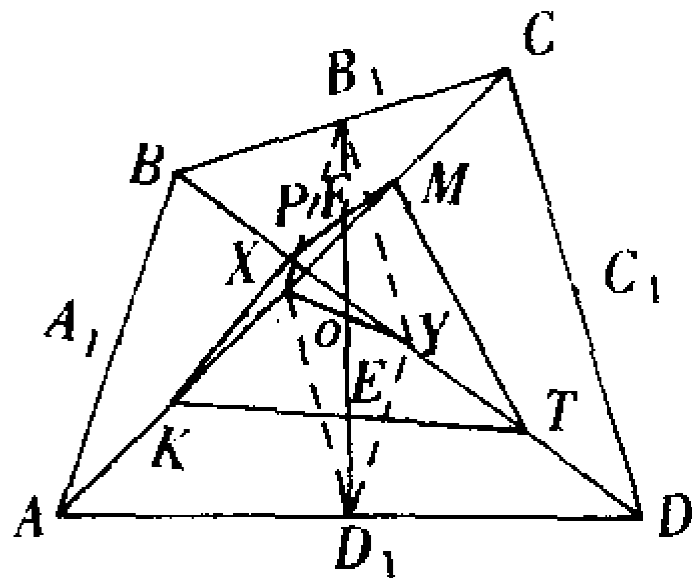
因而易证 K 是 CH 的中点,

同理 过 M_2 的切线也通过 CH 的中点 K.

5·11 设 $ABCD$ 为凸四边形,在其对角线 AC 上取两点 K 和 M,在对角线 BD 上取两点 P 和 T,使得 $AK=MC=\frac{1}{4}AC$, $BP=TD=\frac{1}{4}BD$.过 AD 和 BC 的中点连一直线,求证:该直线经过 PM 和 KT 的中点.

(第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年)

[证] 设四边形 $ABCD$ 四边的中点分别是 A_1、B_1、C_1、D_1,两条对角线的中点分别是 X 和 Y.我们证明 B_1D_1 经过 PM 和 KT 的中点.



将直线 B_1D_1 同线段 PM、KT 和 XY 的交点分别记作 E、F 和 O.

在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中,由中位线定理得

$B_1X \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}AB \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} D_1Y$,

从而四边形B_1XD_1Y是平行四边形.

于是线段XY被点O所平分.

因此,PO是$\triangle BXY$的中位线,B_1M是$\triangle BXC$的中位线.

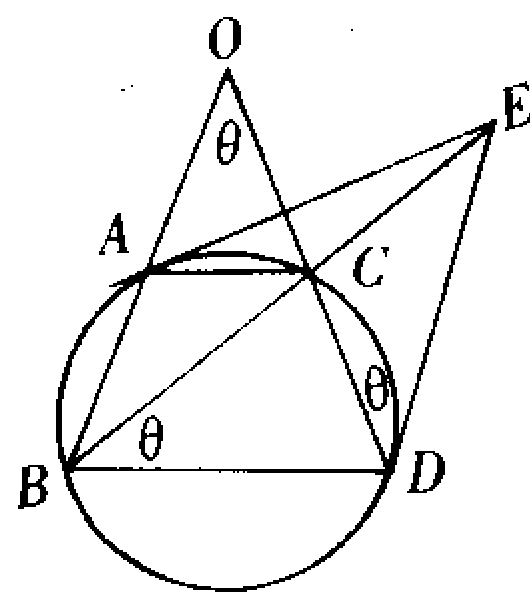
因此,$PO \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} B_1M$,四边形$B_1POM$是平行四边形,点$E$为$PM$的中点.

同理　点F是KT的中点.

于是B_1D_1过PM和KT的中点.

5·12　O为圆外一点,二直线OAB、OCD交这圆于A、B、C、D,且A、C分别为OB、OD的中点,这两条直线之间的锐角θ等于每一直线与圆相截处的锐角(即过B、D的切线与直线所成的角).求$\cos\theta$,并证明A、D处的切线相交在直线BC上.

(英国数学奥林匹克,1985年)



[解]　由已知,过D的切线DE与OCD所成的角为θ,即$\angle ODE=\theta$,

$\therefore\quad \angle CBD=\angle ODE=\theta$.

同理　$\angle ADB=\theta$.

$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD},\ AB=CD$.

又$\because$　A是OB的中点,C是OD的中点,

$\therefore\quad OB=OD$.

即$\triangle OBD$为等腰三角形.

于是　$\angle BAD=\theta+\angle ADO=\angle ADB+\angle ADO=\angle ODB$,

$\therefore\quad AD=BD$,

同理　$BC=BD$.

又因为A、C是OB、OD的中点,

$\therefore\quad AC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AD$. 即　$AD=2AC$.

在$\triangle ACD$中,由正弦定理得

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC},$$

即 $\dfrac{2AC}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}+\theta\right)}=\dfrac{AC}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}-\theta\right)}$,

因此 $\dfrac{\cos\dfrac{3}{2}\theta}{\cos\dfrac{1}{2}\theta}=\dfrac{1}{2}$,

由三倍角公式 $4\cos^2\dfrac{\theta}{2}-3=\dfrac{1}{2}$,

从而 $2\cos\theta=\dfrac{3}{2}$,有 $\theta=\arccos\dfrac{3}{4}$.

设 D 处的切线交 BC 于 E,连 AE.

$\therefore$ $\angle EDC=\theta=\angle BOD$, $\therefore$ $ED /\!/ DB$.

因为 C 是 OD 的中点,也是 BE 的中点,

$\therefore$ 四边形 $OBDE$ 为平行四边形.

因而 $OE=BE=AD$.

又四边形 $OADE$ 为等腰梯形, $\therefore$ O、A、D、E 四点共圆.

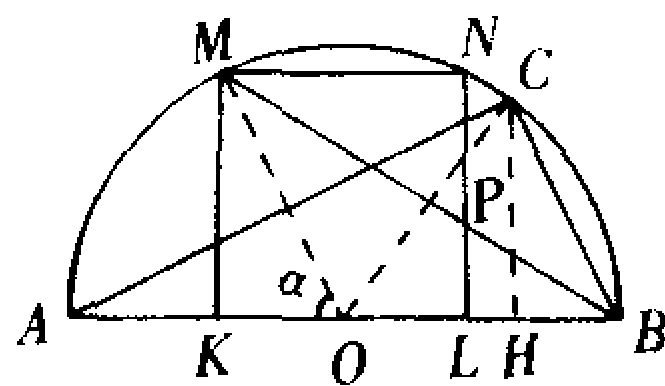
即 $\angle OAE=\angle ODE=\theta$.

因此 EA 为过 A 之切线.即 A、D 处的切线与 BC 相交于一点.

5·13 在半圆的直径 AB 上取点 K 与 L,又在半圆弧上取点 M、N,使得四边形 $KLMN$ 成为一个正方形,它的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积.求证:$\triangle ABC$ 的内切圆圆心与正方形的一条边及连接顶点 M 或 N 和顶点 A 或 B 的直线的交点重合.

(英国数学奥林匹克,1980 年)

[证] 设 a 为正方形 $KLMN$ 的边长,R 是以 O 为圆心的半圆的半径,r 是内切于 $\triangle ABC$ 的圆的半径,



$\alpha=\angle AON<90°$, 且 $\angle COB<90°$.则

$NK=ON^2-KO^2=R^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2$.

$\therefore$ $a=\dfrac{2R}{\sqrt{5}}$.

由于正方形 $KLMN$ 与三角形 ABC 的面积相等所以有

$$a^2=\frac{4R^2}{5}=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot CH.$$

故 $CH=\frac{4R}{5}$.其中 CH 为$\triangle ABC$ 的高.

下面证明 ON 是$\angle AOC$ 的平分线.

事实上,因为 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ $\alpha>45^\circ$, 从而 $2\alpha>90^\circ$, 又 $\angle AOC>90^\circ$, 于是

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$

而 $\sin\angle COB=\frac{CH}{OC}=\frac{4}{5}=\sin\angle AOC$.

于是 $\angle AOC=2\alpha$, 且 $\angle AON=\angle CON$, $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC}$.

$\therefore$ ON 是$\angle AOC$ 的平分线.

由于圆周角$\angle ABN$ 和$\angle CBN$ 所对的弧$\overset{\frown}{AN}$与$\overset{\frown}{NC}$相等,所以 BN 是$\angle ABC$ 的平分线,且过$\triangle ABC$ 的内切圆的圆心.

直角$\triangle ABC$ 的内切圆半径为

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{2R(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2}=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)R.$$

另一方面,由于 $\triangle NKB\backsim\triangle PLB$, 所以

$$PL=\frac{NK\cdot LB}{KB}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}R=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}R$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)R=r.$$

于是 PL 是$\triangle ABC$ 内切圆半径,又 $PL\perp AB$,因此 P 是内切圆圆心,又 P 是直线BN 与LM 的交点,由此问题得证.

5·14 在锐角$\triangle ABC$ 中,AD、BE 是它的两个高,AP、BQ 是两个角平分线,I、O 分别是它的内心和外心.证明:点 D、E、I 共线当且仅当P、Q、O 共线.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证 1] 分别记 $d_a(X)$、$d_b(X)$、$d_c(X)$是$\triangle ABC$ 内任一点X 到边

BC、CA、AB 的距离.先证 X 在 PQ 上当且仅当

$$d_a(X)+d_b(X)=d_c(X). \quad ①$$

每个距离 $d_a(X)$、$d_b(X)$、$d_c(X)$在下面意义不是线性依赖于点 X 的.令 X 取遍任一线段 UV,其终点在给定三角形的边上.

设 $x=\dfrac{UX}{UV}$, 则 $d_a(X)=[d_a(V)-d_a(U)]x+d_a(U)$;

对 d_b、d_c 也有类似的等式.

所以 $\delta(X)=d_a(X)+d_b(X)-d_c(X)$是在 UV 上 X 的线性函数.

因 AP、PQ 是角平分线, 故 $\delta(P)=\delta(Q)=0$.

由此,对 PQ 上任一点 X, 有 $\delta(X)=0$.

反之,假设对$\triangle ABC$ 的某个内点 X,有 $\delta(X)=0$,令 PX 交三角形周边于点 W,因 $\delta(P)=\delta(X)=0$,必有 $\delta(W)=0$.

但在$\triangle ABC$ 的边上使 $\delta(X)=0$ 的点仅是 P 和 Q,故 W 与 Q 重合,亦即 X 在 PQ 上.

以 K、L、M 分别表示边 BC、CA、AB 的中点,对外心 O 应用条件①,有

$$P、Q、O\text{ 共线当且仅当 } OK+OL=OM. \quad ②$$

其次,是要建立起内心 I 在 DE 上的充要条件,即

$$D、E、I\text{ 共线当且仅当 } AE+BD=DE. \quad ③$$

以 α、β、γ 分别表示$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

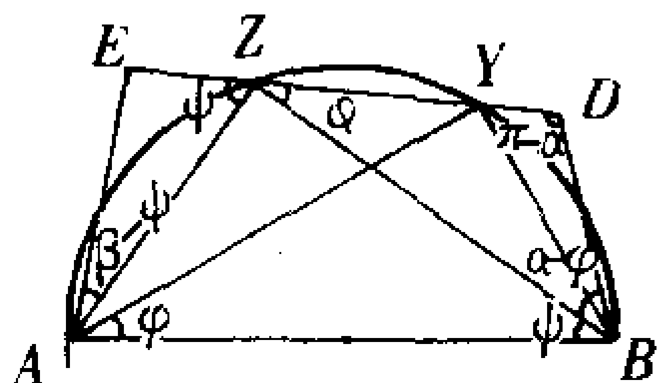


图 1

考虑任一过点 A、B 且交线段 DE 于点 Y、Z(也可是同一点)的圆 Γ,记$\angle YAB=\varphi$,$\angle YBA=\psi$.因点 A、B、Y、Z 共圆,故有$\angle BZD=\varphi$.

另一方面,因 $ABDE$ 是圆内接四边形,又有$\angle BDZ=180^\circ-\alpha$.

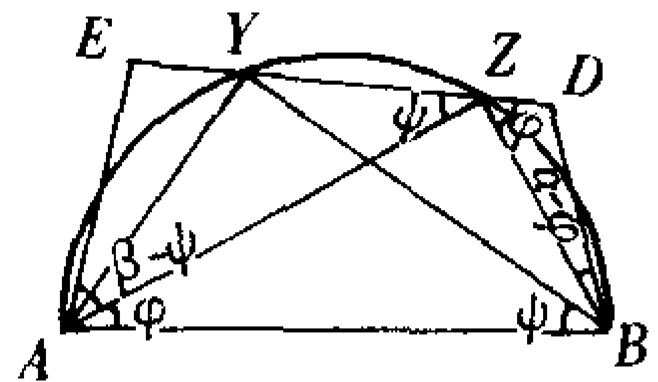


图 2

因此 $\angle DBZ=180^\circ-\angle BZD-\angle BDZ=\alpha-\varphi$.类似的论证应用于$\angle AZE$ 和$\angle EAZ$,则有

$$\angle BZD=\varphi,\ \angle DBZ=\alpha-\varphi,\ \angle AZE=\psi,\ \angle EAZ=\beta-\psi. \quad ④$$

现设$\triangle ABC$的内心在DE上，暂记为Y.因DE在以AB为直径的圆内，故$\angle AYB$是钝角.

因此Γ和直线DE的第二公共点Z也在线段DE上.

由④和$\varphi=\frac{\alpha}{2}$，$\psi=\frac{\beta}{2}$，

可得　$\angle EAZ=\angle EZA$，$\angle DBZ=\angle DZB$，

故　$AE=ZE$，$BD=ZD$.

所以　$AE+BD=ZE+ZD=DE$.

反之，如$AE+BD=DE$，则在DE上有点Z，使得$AE=ZE$，$BD=ZD$.$\triangle ABZ$的外接圆Γ交DE于某一点Y.

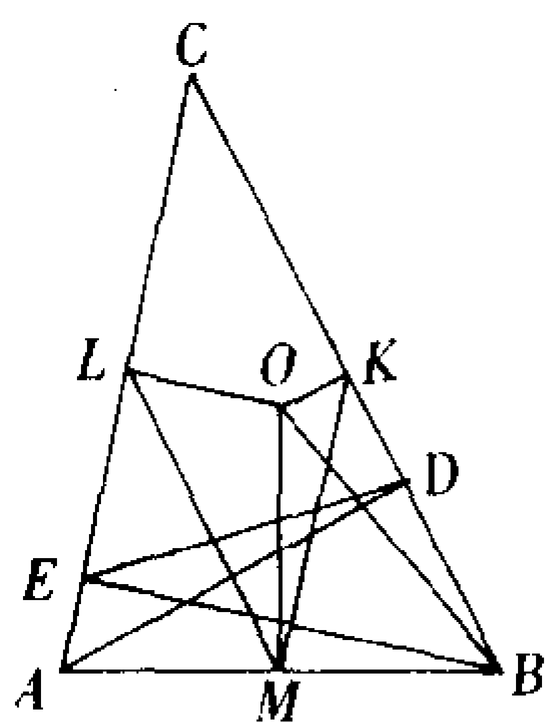


图 3

再由④，又有　$\varphi=\alpha-\varphi,\psi=\beta-\psi$.

故$\varphi=\frac{\alpha}{2},\psi=\frac{\beta}{2}$，$Y$是$\triangle ABC$的内心.③得以证明.

考虑到②和③，现在只需证明等式

$OK+OL=OM$　和　$AE+BD=DE$等价.

考察圆内接四边形$ABDE$和$BKOM$，有

$\angle EAD=90^\circ-\gamma=\angle OBM=\angle OKM$，

$\angle AED=180^\circ-\beta=\angle KOM$.

因此$\triangle OKM$与$\triangle EAD$相似.

同样地，$\triangle OLM$和$\triangle DBE$也相似.

$$\therefore\quad \frac{OK}{OM}=\frac{EA}{ED},\ \frac{OL}{OM}=\frac{DB}{DE}.$$

把这两等式相加，可得

$\frac{OK+OL}{OM}=\frac{EA+DB}{DE}$，即得所证.

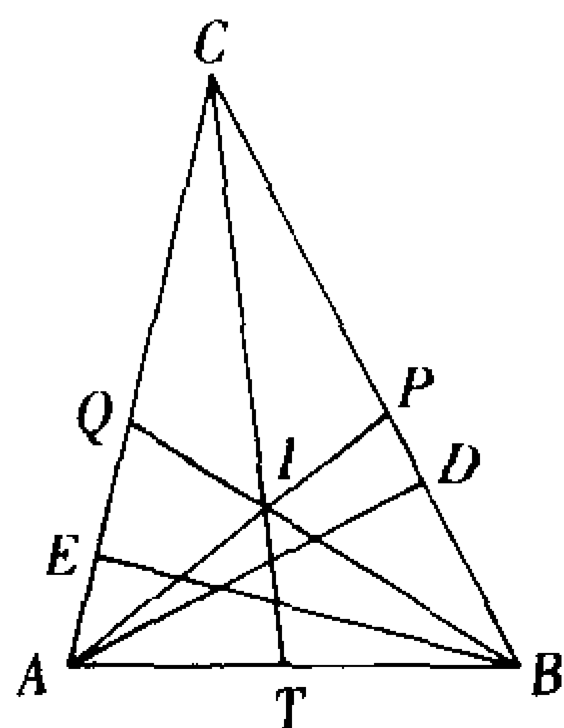


图 4

［证 2］　证明的开始与证明1中的相同，在得到式②后，我们转到用三角来计算.设R是外接圆半径，则$OK=R\cos\alpha$，$OL=R\cos\beta$，$OM=R\cos\gamma$，且②取以下形式

点P、Q、O共线当且仅当

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\gamma. \qquad ⑤$$

令$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，CT是$\angle C$的角平

分线，T 在边 AB 上，则 $AT=\frac{bc}{a+b}$.

因 AI 是 $\triangle ACT$ 的 $\angle A$ 的平分线，可得

$$\frac{CT}{CI}=1+\frac{TI}{CI}=1+\frac{TA}{CA}$$

$$=1+\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a+b+c}{a+b}.$$

另一方面，$\triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 相似，相似比为 $\cos\gamma$，且射线 CI 是这两个三角形 $\angle C$ 的公共角平分线.

因此，点 D、E、I 的共线性等价于 $\frac{CI}{CT}=\cos\gamma$.

再结合上面的等式并应用正弦定理，可得

点 D、E、I 共线当且仅当 $\sin\alpha+\sin\beta=(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\cos\gamma$. ⑥

由三角运算，式⑥引出以下诸等价形式

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\cos\gamma)=\sin\gamma\cos\gamma,$$

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\gamma,$$

$$2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\gamma.$$

而最后这个等式等价于⑤，故结论成立.

[证 3]　对于 $\triangle ABC$ 所在平面上的任一点 G，存在惟一的数组 u、v、w，使

$u\overrightarrow{GA}+v\overrightarrow{GB}+w\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$，和 $u+v+w=1$. 这数组称作在给定 $\triangle ABC$ 中的 G 的重心坐标.

一条直线过点 G，存在着充要条件. 下面给出其重心坐标.

令 G 不同于点 C，u、v、w 是在给定 $\triangle ABC$ 中的 G 的重心坐标，X、Y 分别在 AC、BC 上，$\overrightarrow{CX}=x\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CY}=y\overrightarrow{CB}$，即 X、Y 的重心坐标分别是 $(x,0,1-x)$ 和 $(0,y,1-y)$. 则

X、Y、G 共线当且仅当 $uy+ux=xy$. ⑦

为应用(7)，先注意 O、I 均不能与 C 重合，外心 O 的重心坐标是 $\left(\frac{\sin2\alpha}{s},\frac{\sin2\beta}{s},\frac{\sin2\gamma}{s}\right)$，此处 $s=\sin2a+\sin2\beta+\sin2\gamma$.

此外　$\overrightarrow{CQ}=\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CP}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$，故⑦转化成

$$\sin 2\alpha\,\frac{b}{b+c}+\sin 2\beta\,\frac{a}{a+c}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma).$$

两端乘以 $\frac{(a+c)(b+c)}{ab}$，有

$$\sin 2\alpha\left(1+\frac{c}{a}\right)+\sin 2\beta\left(1+\frac{c}{b}\right)=\sin 2a+\sin 2\beta+\sin 2\gamma,$$

它等价于证明 2 中的⑤.

I 的重心坐标是 $\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$，且

$\overrightarrow{CE}=\frac{a}{b}\cos\gamma\cdot\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{b}{a}\cos\gamma\cdot\overrightarrow{CB}$.

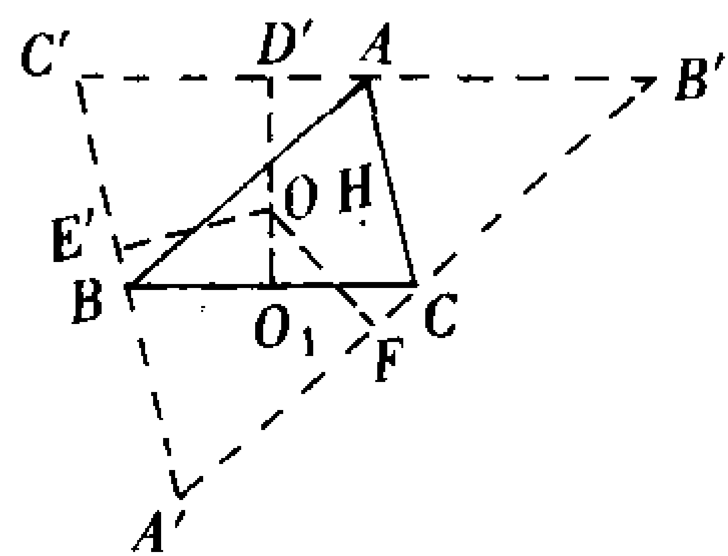
于是,⑦可取以下形式

$$\frac{b}{a+b+c}\cos\gamma+\frac{a}{a+b+c}\cos\gamma=\cos^2\gamma.$$

因 $\cos\gamma\neq 0$,上式等价于证明 2 中的⑥,而⑤与⑥等价,结论成立.

5·15　$\triangle ABC$ 中,H 为垂心,O 为外心,R 为外接圆的半径. D 为 A 关于 BC 的对称点,E 为 B 关于 CA 的对称点,F 为 C 关于 AB 的对称点. 求证:D、E、F 共线当且仅当 $OH=2R$.

（第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年）



[证 1]　过 A、B、C 分别作对边的平行线,交得$\triangle A'B'C'$.

易知$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$,并且相似比为 2∶1,

H 是$\triangle A'B'C'$的外心,$\triangle A'B'C'$的外接圆半径为 $2R$.

设 O 在$\triangle A'B'C'$三边上的射影分别为 D'、E'、F',则 OD' 与 BC 的交点 O_1 是 BC 的中点. 熟知 $HA=2OO_1$,

所以　$OD'=\overline{OO_1}+\overline{O_1D'}=\frac{1}{2}\overline{HA}+\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}HD$,

又$\overline{OD'}\mathbin{/\!/}\overline{HD}$.

同理　$OE'\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}\frac{1}{2}HE$，$OF'\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}\frac{1}{2}HF$.

于是将 O 连同 OD'、OE'、OF' 平移,使 O 与 H 重合,然后旋转 $180°$,并以 O 为位似中心放大至 2 倍,则 D'、E'、F'分别与 D、E、F 重

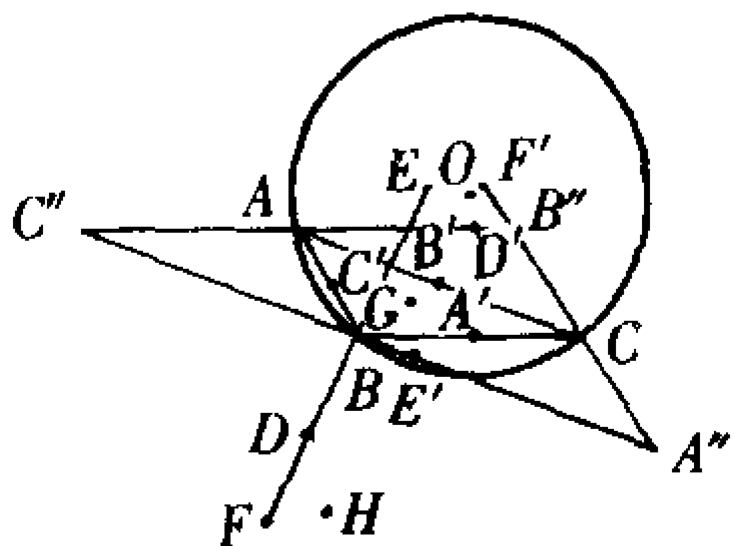
合.从而

D、E、F 共线的充要条件 D'、E'、F' 共线.

由西摩松定理 D'、E'、F' 共线的充要条件 O 在 $\odot(H,2R)$ 上.

即 D、E、F 共线当且仅当 $OH=2R$.

[证 2] 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，BC、CA、AB 的中点分别为 A'、B'、C'.



过 A、B、C 分别作 BC、CA、AB 的平行线，其交点分别为 A''、B''、C''. 则 $\triangle A''B''C''$ 的重心为 G，外心为 H. 设点 O 在直线 $B''C''$、$C''A''$、$A''B''$ 上的投影分别为 D'、E'、F'.

以 G 为位似中心，$-\frac{1}{2}$ 为位似比，作位似变换 h，其将 A、B、C、A''、B''、C'' 分别变换为 A'、B'、C'、A、B、C.

由于 $A'D'\perp BC$，且 $AD:A'D'=2:1=GA:GA'$ 及 $\angle DAG=\angle D'A'G$，有 $h(D)=D'$.

类似地可得 $h(E)=E'$，$h(F)=F'$.

于是，D、E、F 三点共线等价于 D'、E'、F' 三点共线.

因 D'、E'、F' 分别是 O 在 $B''C''$、$C''A''$、$A''B''$ 上的投影，由西姆松定理，D'、E'、F' 三点共线的充分必要条件是 O 在 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆上.

因为 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆半径为 $2R$，

所以 O 在此圆上的充分必要条件是 $OH=2R$.

5·16 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 为非等腰三角形，内心为 I，又 $C_i(i=1,2,3)$ 为过 I 与 A_iA_{i+1} 和 A_iA_{i+2} 相切的小圆(增加的角标作模 3 同余)，$B_i(i=1,2,3)$ 为圆 C_{i+1} 和 C_{i+2} 的另一交点. 证明：$\triangle A_1B_1I$，$\triangle A_2B_2I$，$\triangle A_3B_3I$ 的外心共线.

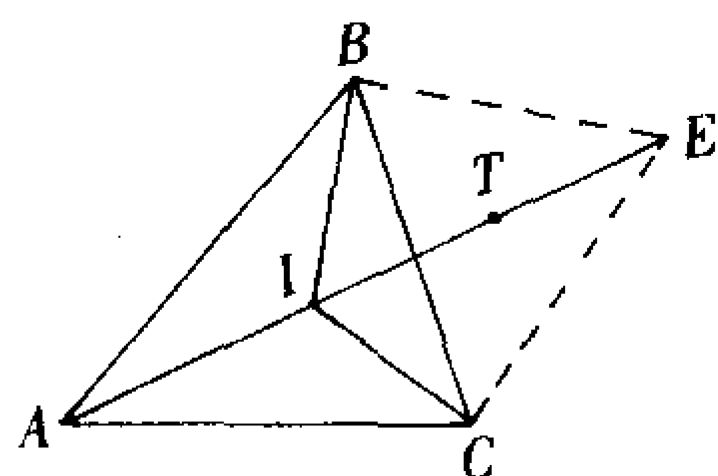
(第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年)

[证 1] 由于 $\triangle A_1A_2A_3$ 为非等腰三角形，易见，$\triangle A_1B_1I$、$\triangle A_2B_2I$、$\triangle A_3B_3I$ 的外心均可定义.

我们先来看下面的引理.

引理 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，T 为 $\triangle BIC$ 的外心，则 T 必在 $\angle A$ 的内角平分线上.

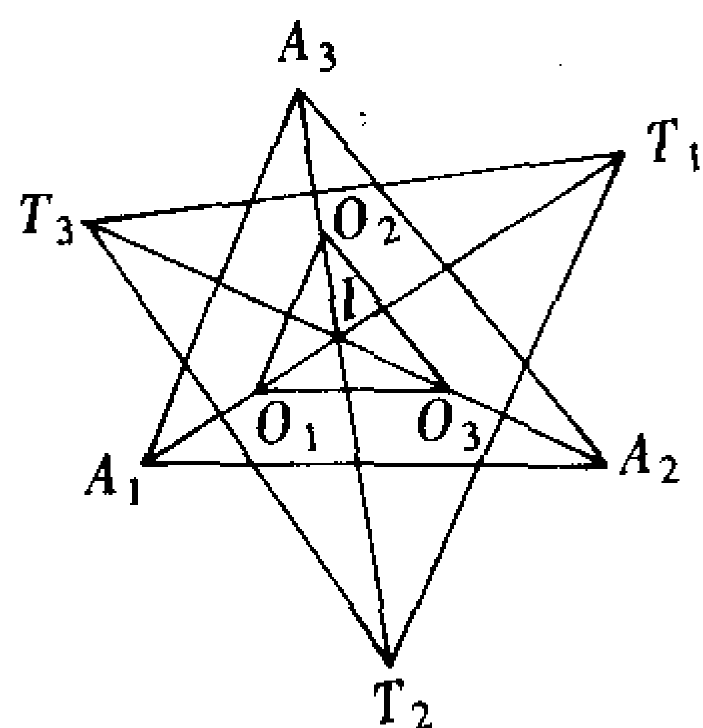
引理的证明 如图所示，作出 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线，它们相



交于旁心 E.而 E 在 $\angle A$ 的内角平分线上.

因为 $BE\perp BI$ 且 $CE\perp CI$,所以,四边形 $BECI$ 内接于圆,其外接圆的圆心在 EI 上,这一圆心亦即 $\triangle BIC$ 的外心,引理得证.

下面我们来证明原命题.



对于 $i=1,2,3$,我们记 O_i 为 $\odot C_i$ 的圆心,T_i 为 $\triangle A_{i+1}IA_{i+2}$ 的外心.显然,O_i 在 $\angle A_i$ 的内角平分线上.

由引理知,T_i 也在 $\angle A_i$ 的内角平分线上.

因此,$\triangle O_1O_2O_3$ 和 $\triangle T_1T_2T_3$ 对点 I 是透视的.

由笛沙格定理知,它们必关于一条直线透视,即若记 $Q_i(i=1,2,3)$ 为直线 $O_{i+1}O_{i+2}$ 和 $T_{i+1}T_{i+2}$ 的交点,则 Q_1、Q_2、Q_3 三点共线.

但由于 $T_{i+1}T_{i+2}$ 是 A_iI 的垂直平分线,而 $O_{i+1}O_{i+2}$ 是 B_iI 的垂直平分线;

因此,点 Q_1、Q_2、Q_3 恰分别为 $\triangle A_1B_1I$、$\triangle A_2B_2I$、$\triangle A_3B_3I$ 的外心.

注 不熟悉笛沙格定理则可按下述方法推理.

对 $\triangle IO_1O_2$、$\triangle IO_2O_3$、$\triangle IO_3O_1$ 和三点组 (T_1,T_2,Q_3)、(T_2,T_3,Q_1)、(T_3,T_1,Q_2) 分别应用梅涅劳斯定理,可以发现一些熟知的结论:

$$\frac{O_1T_1}{IT_1}\cdot\frac{IT_2}{O_2T_2}\cdot\frac{Q_2Q_3}{Q_1Q_3}=1,$$

$$\frac{IT_3}{O_3T_3}\cdot\frac{O_2T_2}{IT_2}\cdot\frac{Q_3Q_1}{O_2O_1}=1,$$

$$\frac{IT_1}{O_1T_1}\cdot\frac{O_3T_3}{IT_3}\cdot\frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}=1.$$

将以上三式相乘即得

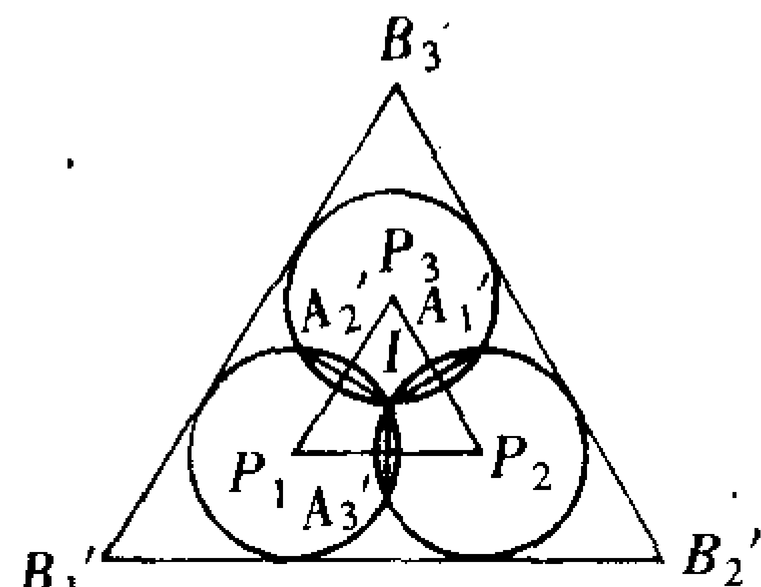
$$\frac{Q_2Q_3}{Q_1Q_3}\cdot\frac{Q_3Q_1}{Q_2Q_1}\cdot\frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}=1.$$

这说明点 Q_1、Q_2、Q_3 共线.

[**证 2**] 此证明建立在反演基础上.

我们把内心 I 作为反演的中心,且反演的次数任意.用符号“′”来

表示点经过反演后所得的像，得到如下所示的“二重”图.



事实上，$\odot C_i$ 的像是直线 $B_{i+1}'B_{i+2}'$，这些直线构成了$\triangle B_1'B_2'B_3'$.

直线 A_iA_{i+1}被变为圆 Γ_{i+2}，边 A_iA_{i+1}变为不包含点 I 的弧$\overset{\frown}{A_i'A_{i+1}'}$. 注意，由于从点 I 到$\triangle A_1A_2A_3$ 各边的距离相等，所以，这些圆的半径都相等.

我们注意到，若 Σ_1、Σ_2、Σ_3 为三个过一点 I 的圆且两两不相切，则它们的圆心共线当且仅当存在另一点 $J\neq I$，使得这三个圆均过 J.

我们将在 Σ_i 作为$\triangle A_iB_iI$ 的外接圆时应用这一结论.

由于反演变换将 Σ_i 变为直线 $A_i'B_i'$，则必有直线 $A_1'B_1'$、$A_2'B_2'$、$A_3'B_3'$ 共线. 由此，说明$\triangle A_1'A_2'A_3'$ 和$\triangle B_1'B_2'B_3'$ 是保形的，即它们的对应边平行.

由于圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3 的半径相等，则由它们的圆心构成的$\triangle P_1P_2P_3$ 的各边与$\triangle B_1'B_2'B_3'$ 的对应边平行，以 I 为中心、比率为$\frac{1}{2}$的保形变换将$\triangle A_1'A_2'A_3'$ 变为顶点为$\triangle P_1P_2P_3$ 各边中点的三角形.

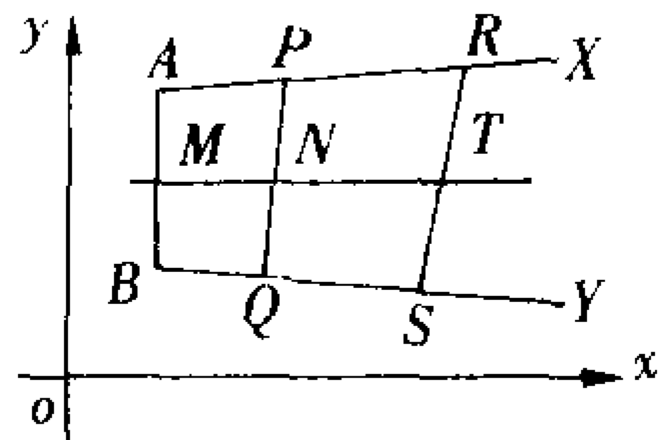
因此，$\triangle A_1'A_2'A_3'$ 和$\triangle P_1P_2P_3$ 的对应边也平行. 由此即得结论.

5·17　设 P、R 为射线AX 上两点，Q、S 为射线BY 上两点，并满足$\frac{AP}{BQ}=\frac{AR}{BS}=\lambda$，点 M、N、T 分别在线段AB、PQ、RS 上，且满足$\frac{AM}{MB}=\frac{PN}{NQ}=\frac{RT}{TS}=k$. 问 M、N、T 三点的位置关系如何？

（中国国家集训队测验题，1994 年）

[解]　建立直角坐标系，并用(x_D, y_D)来表示点 D 的坐标.

$$\because\ \frac{AP}{BQ}=\frac{AR}{BS},\ \therefore\ \frac{AR}{AP}=\frac{BS}{BQ}=u.$$



设 $x_P=x_A+a_1$，$y_P=y_A+b_1$，$x_Q=x_B+a_2$，$y_Q=y_B+b_2$，于是有

$x_R=x_A+ua_1$，$y_R=y_A+ub_1$，

$x_S=x_B+ua_2$，$y_S=y_B+ub_2$.

$\because \quad \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{PN}{NQ}=\dfrac{RT}{TS}=k$,

$\therefore \quad x_M=\dfrac{x_A+kx_B}{1+k},\ y_M=\dfrac{y_A+ky_B}{1+k}$,

$x_N=\dfrac{x_P+kx_Q}{1+k},\ y_N=\dfrac{y_P+ky_Q}{1+k}$,

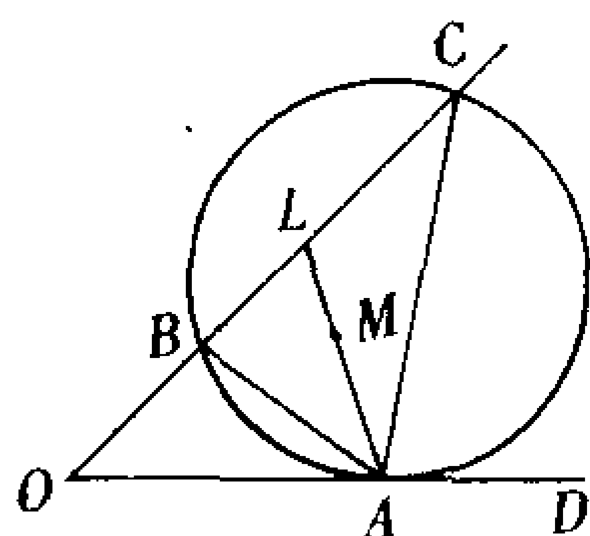
$x_T=\dfrac{x_R+kx_S}{1+k},\ y_T=\dfrac{y_R+ky_S}{1+k}$.

$\therefore \quad \dfrac{y_T-y_M}{y_N-y_M}=u=\dfrac{x_T-x_M}{x_N-x_M}$.

$\therefore$ M、N、T三点共线.

5·18 设有一个定角,在它的一条边上有一个异于角顶的定点A.考察所有这样的$\triangle ABC$,它的顶点B和C都位于定角的另一条边上且外接圆同点A所在的边切于点A,求证:这些三角形的内心全都位于同一条直线上.

(前苏联教委推荐试题,1989年)



[证] 设定角的顶点为O,$\triangle ABC$的内心为M,于是M位于$\angle BAC$的平分线AL上.我们来证明$\angle OAM$为定值.

设 $\angle O=\alpha$, 于是α为定值.

$\because \quad \angle CAD=\angle CBA=\alpha+\angle OAB$,

$\therefore \quad \angle BAM=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha-2\angle OAB)$.

$\therefore \quad \angle OAM=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha)$.

由此可见,点M位于一条与OA交成$\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha)$角的直线AL上.

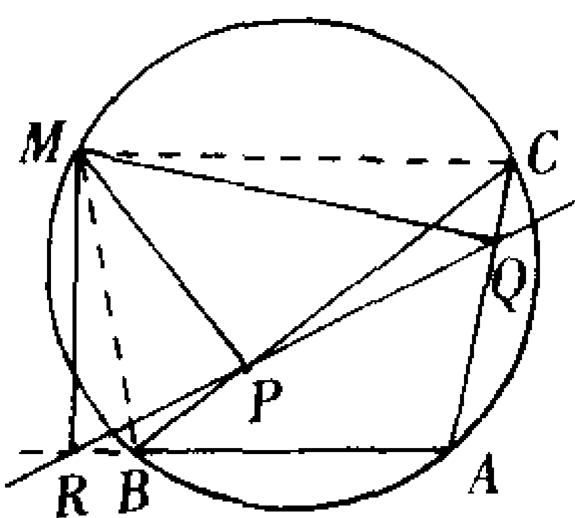
5·19 在圆上任取三点A、B、C.求证:由圆上任一点M向直线AB、BC及CA所作垂线的垂足在一条直线上.

(波兰数学奥林匹克,1949年)

[证1] 设P、Q、R是由点M向直线BC、CA、AB所作垂线的垂足.

如果点M和点A、B、C之一重合,则P、Q、R三点中有两点重合,显然有P、Q、R共线.

现在设点 M 位于以 A、B、C 为顶点的圆周角之一的内部，不妨设 M 位于 $\angle BAC$ 的内部，由 M、B、A、C 共圆可得



$\angle ABM+\angle ACM=180°$.

若 $\angle ABM=\angle ACM=90°$，这时 R 与 B 重合，Q 与 C 重合，从而 P、Q、R 都在直线 BC 上.

若 $\angle ABM\neq\angle ACM$，不妨设 $\angle ABM$ 是钝角，此时点 R 位于线段 AB 的延长线上，而点 Q 可能位于线段 AC 上，也可能位于线段 CA 的延长线上.

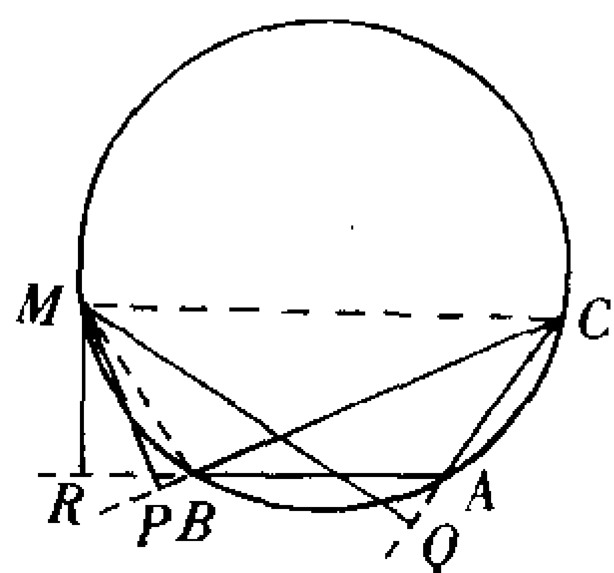
若点 Q 在线段 AC 上，这时点 P 在线段 BC 上.

由 M、R、B、P 共圆可得 $\angle BPR=\angle BMR$.

由 C、M、P、Q 共圆可得 $\angle CPQ=\angle CMQ$.

又∵ $\angle CPQ=\angle CMQ=90°-\angle MCQ$.

且 $\angle BPR=\angle BMQ=90°-\angle MBR$.



以及 M、B、A、C 共圆可得

$\angle MCQ=\angle MBR$.

于是 $\angle CPQ=\angle BPR$，

由于 B、P、C 在一条直线上，所以 R、P、Q 共线.

若点 Q 在线段 CA 的延长线上，此时由于 $\angle MBC$ 是钝角，所以点 P 在线段 CB 的延长线上.

同法可证 $\angle RPB+\angle QPC=180°$.

因而 R、P、Q 共线.

[证 2] 连结 MA、MB、MC.

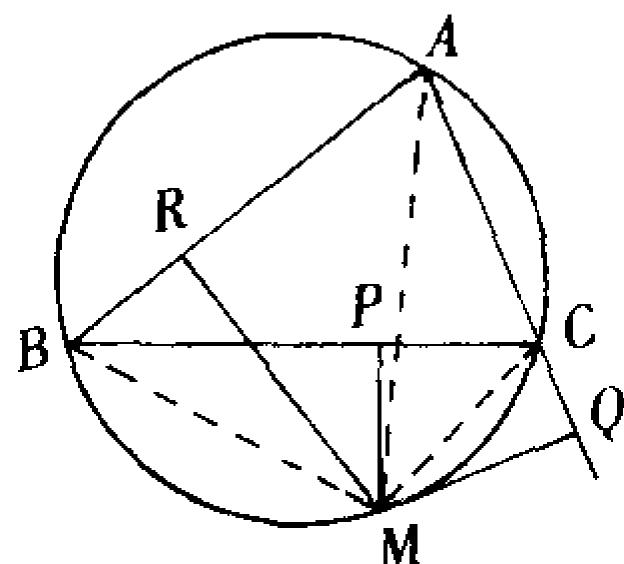
∵ $MP\perp BC$，$MQ\perp AC$，$MR\perp AB$.

∴ $AR=MA\cdot\cos\angle MAR$,

$BR=MB\cdot\cos\angle MBR$,

$BP=MB\cdot\cos\angle MBP$,

$CP=MC\cdot\cos\angle MCP$,



$CQ=MC\cdot\cos\angle MCQ$, $AQ=MA\cdot\cos\angle MAQ$.

又∵ $\angle MAR=\angle MCP$，$\angle MBR=$

$\angle MCQ$，$\angle MBP=\angle MAQ$，故有

$$\frac{AR}{BR}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}=\frac{MA\cdot\cos\angle MAR}{MB\cos\angle MBR}\cdot\frac{MB\cdot\cos\angle MBP}{MC\cdot\cos\angle MCP}\cdot\frac{MC\cdot\cos\angle MCQ}{MA\cdot\cos\angle MAQ}=1.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 R、P、Q 三点共线.

［证 3］ 连结 MA、MB、MC.

$\because\quad \angle MRA=90^\circ=\angle MPC$，$\angle MAR=\angle MCP$，

$\therefore\quad \triangle MAR\backsim\triangle MCP$. $\therefore\quad \dfrac{AR}{CP}=\dfrac{MA}{MC}$.

同理 $\dfrac{BP}{AQ}=\dfrac{MB}{MA}$，$\dfrac{CQ}{BR}=\dfrac{MC}{MB}$.

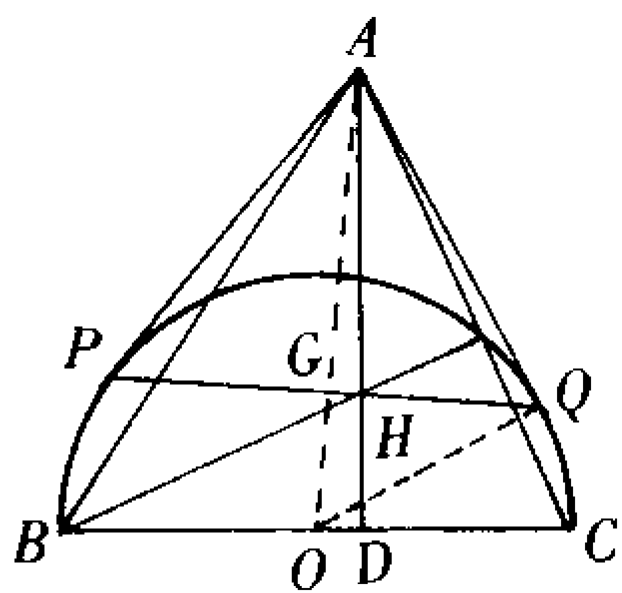
$\therefore\quad \dfrac{AR}{RB}\cdot\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{AR}{CP}\cdot\dfrac{BP}{AQ}\cdot\dfrac{CQ}{BR}=1$.

由梅涅劳斯定理的逆定理知 R、P、Q 三点共线.

对于图形不同的情形,证明的方法是完全平行的.

5·20 设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的垂心,由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ,切点分别为 P、Q,求证:P、H、Q 三点共线.

（第 11 届中国中学生数学冬令营,1996 年）



［证 1］ 记 BC 中点为 O,连结 PQ、AO 交于点 G,于是 $AO\perp PQ$. 设 AD、BE 是$\triangle ABC$ 的两条高. 于是点 E 在$\odot O$ 上.

$\because\quad \angle HEC=90^\circ=\angle HDC$,

$\therefore\quad H$、D、C、E 四点共圆.

$\therefore\quad AQ^2=AE\cdot AC=AH\cdot AD$.

连结 OQ,于是 $OQ\perp AQ$. 由射影定理有

$AG\cdot AO=AQ^2=AH\cdot AD$.

$\therefore\quad G$、O、D、H 四点共圆.

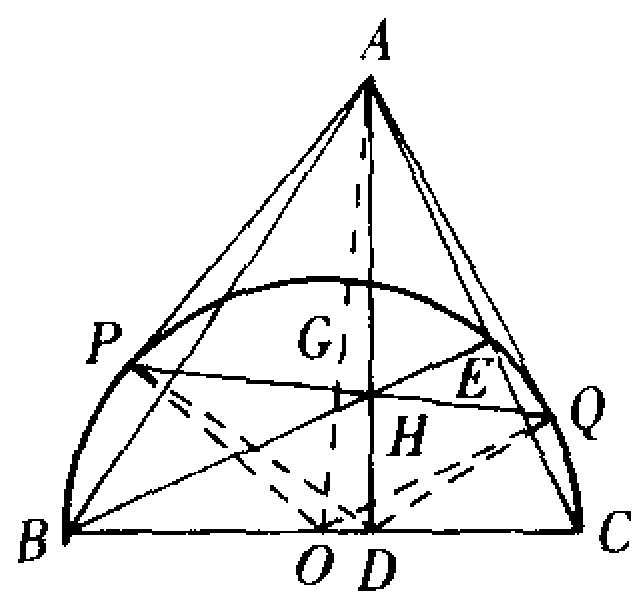
连结 HG,于是有

$\angle HGO=180^\circ-\angle HDO=90^\circ=\angle QGO$.

$\therefore\quad$ 直线 HG 与 PQ 重合,即 P、H、Q 三点共线.

［证 2］ 记 BC 中点为 O,连结 PH、QH、PD、QD、AO;OP、OQ 并设 AD、BE 为$\triangle ABC$ 的两条高,于是点 E 在$\odot O$ 上且有

$OP \perp AP, OQ \perp AQ$.



$\because$ $\angle APO = 90° = \angle AQO = \angle ADO$,

$\therefore$ A、P、O、D、Q 五点共圆.

$\therefore$ $\angle APD + \angle AQD = 180°$.

$\because$ $\angle HEC = 90° = \angle HDC$,

$\therefore$ H、D、C、E 四点共圆.

$\therefore$ $AP^2 = AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

$\therefore$ 过 H、D、Q 三点的圆与 AQ 切于点 Q,过 H、D、P 三点的圆与 AP 切于点 P.

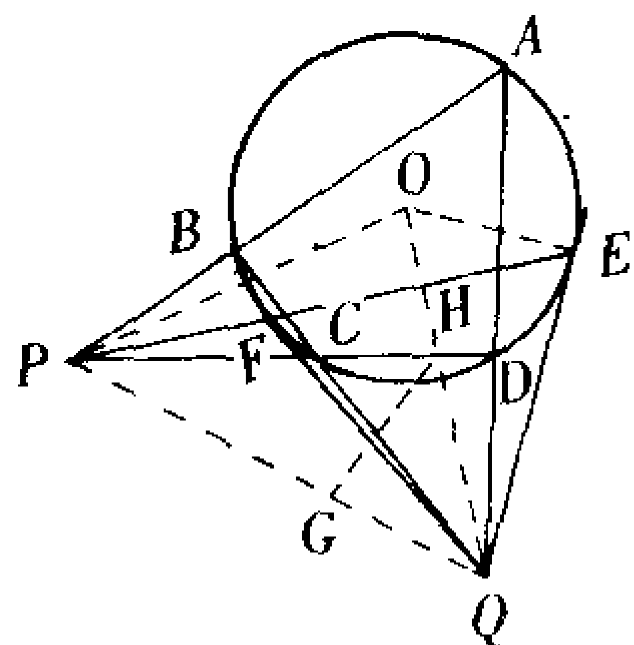
$\therefore$ $\angle AHP = \angle APD$, $\angle AHQ = \angle AQD$.

$\therefore$ $\angle AHP + \angle AHQ = \angle APD + \angle AQD = 180°$.

$\therefore$ P、H、Q 三点共线.

5·21 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P,AD 与 BC 的延长线交于点 Q,过 Q 作⊙O 的两条切线,切点分别为 E、F,求证:P、E、F 三点共线.

(第 12 届中国中学生数学冬令营,1997 年)



[证 1] 连结 OP、OQ、OE、PQ,连结 EF 交 OQ 于点 H,于是 $EF \perp OQ$.因为 $\angle PCQ = 180° - \angle A = \angle APQ + \angle AQP$,所以可在 $\angle PCQ$ 内作 CG 交 PQ 于点 G,使得

$$\angle QCG = \angle BPG.$$

$\therefore$ B、P、G、C 和 C、G、Q、D 都四点共圆.

$$\therefore\ PQ^2 = PG \cdot PQ + GQ \cdot PQ = PC \cdot PD + QC \cdot QB = PO^2 - r^2 + QE^2,$$

其中 r 为⊙O 的半径.

$\therefore$ $PQ^2 - QE^2 = PO^2 - OE^2$.

$\therefore$ $PQ^2 - QH^2 = PQ^2 - OH^2$, $PQ^2 - PO^2 = QH^2 - OH^2$.

$\therefore$ $PQ^2 - PO^2 = OQ(QH - OH)$. ①

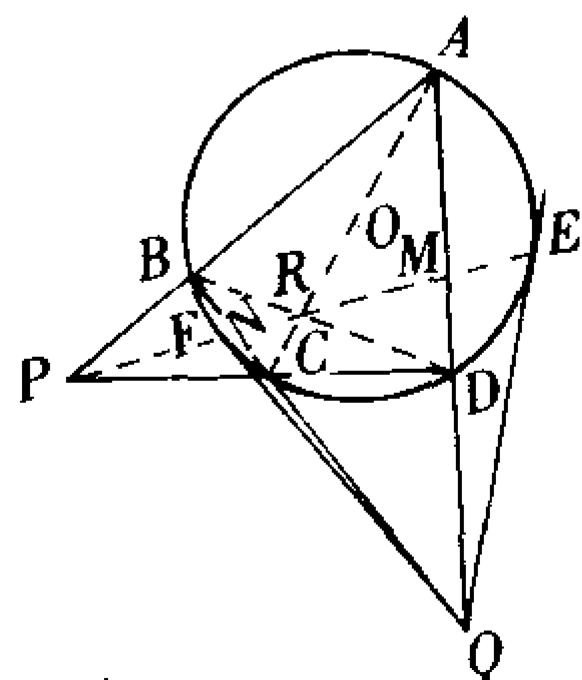
另一方面,过点 P 作 $PH' \perp OQ$ 于点 H',由勾股定理有

$PQ^2 - PO^2 = QH'^2 - OH'^2 = OQ(QH' - OH')$. ②

将①与②比较即得

$QH - OH = QH' - OH'$.

∴ 点 H' 与 H 重合. ∴ P、E、F 三点共线.



［证 2］ 连结 AC、BD 交于点 R，连结 PR 并延长，分别交 AD、BC 于点 M、N. 由塞瓦定理有

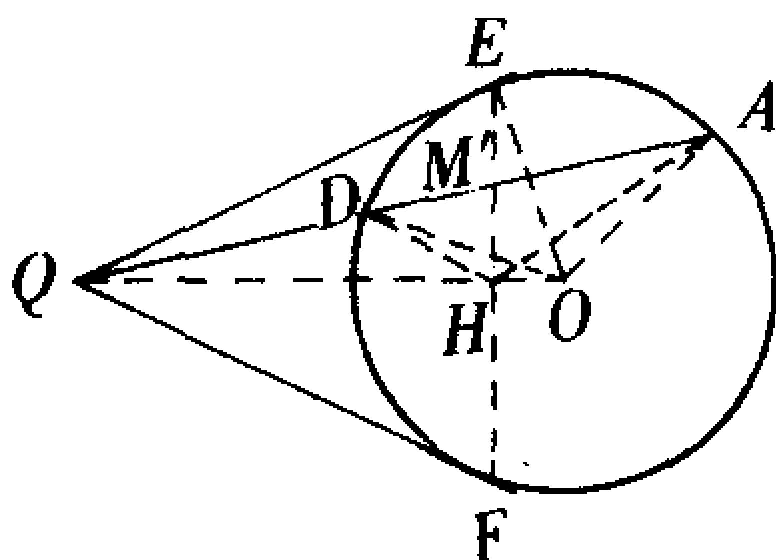
$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{AM}=1. \quad ①$$

直线 QCB 与 $\triangle APD$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{AQ}=1. \quad ②$$

比较①和②，得到

$$\frac{DM}{AM}=\frac{DQ}{AQ}. \quad ③$$



另一方面，连结 QO、EF 交于点 H，EF 交 AD 于点 M'，交 BC 于点 N'. 连结 DH、AH、OA、OD、OE. 由切割线定理和射影定理有

$QD\cdot QA = QE^2 = QH\cdot QO$.

∴ D、H、O、A 四点共圆.

∴ $\angle QHD = \angle DAO = \angle ODA = \angle OHA$.

∴ OQ 平分 $\triangle HAD$ 的顶角 $\angle AHD$ 的外角.

∵ $EH \perp QO$，∴ HM' 平分 $\angle AHD$.

$$\therefore \quad \frac{AM'}{DM'}=\frac{AH}{DH}=\frac{QA}{QD}. \quad ④$$

比较③和④，得到 $\dfrac{DM}{AM}=\dfrac{DM'}{AM'}$.

∴ 点 M' 与 M 重合，即点 M 在 EF 上.

同理 点 N 在 EF 上.

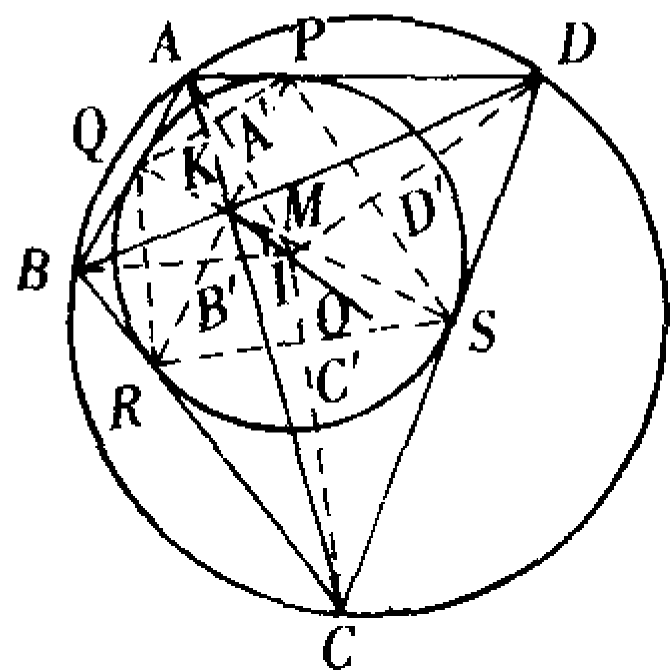
∴ 直线 PNM 与 EF 重合. 故 P、E、F 三点共线.

5·22 双心四边形是指既有内切圆又有外接圆的四边形. 求证：对这样的四边形，两个心与对角线的交点共线.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

［证］ 设四边形 $ABCD$ 为双心四边形，其外接圆圆心为 O，内切圆圆心为 I，对角线 AC 和 BD 的交点为 K.

为证明 O、I、K 三点共线需用下面的三个引理.



引理 1　对圆外切四边形 $ABCD$,设切点为 P、Q、R、S,则 PR 与 QS 的交点就是对角线 AC 与 BD 的交点 K.

引理 2　若 K 为⊙I 内一定点,则对 K 点张直角的弦 EF 的中点的轨迹是一个圆,圆心为 IK 的中点 M.

引理 3　在引理 1 中,如果 $ABCD$ 有外接圆,则 PR 与 QS 互相垂直.

以上三个引理的证明均不难,此处略去.

由引理 3,PQ、QR、RS、SP 对 K 点张直角,因而由引理 2,它们的中点 A'、B'、C'、D' 均在以 JK 的中点 M 为圆心的一个圆上.

由于 IA 与 PQ 相交于 A',所以 A' 就是以 I 为反演中心,⊙I 为反演圆时,A 经反演所得的象,同样 B'、C'、D' 分别为 B、C、D 的象.

因此,⊙O 经这反演成为 $A'B'C'D'$ 的外接圆,从而 O 与这圆的圆心 M,反演中心 I 共线,于是 O 在直线 IM 上,因此 O、I、K 共线.

5·23　已知:在平面上一线段 AB,M 为 AB 上任一点,在 AB 的一侧分别以 AM 与 BM 为一边作正方形 $AMCD$ 与 $BMEF$. 这两个正方形的外接圆除相交于点 M 外,还相交于点 N.

(1)求证:直线 AE 与 BC 相交于点 N.

(2)求证:不论点 M 在线段 AB 上的位置如何,直线 MN 总通过一定点.

(3)当 M 在线段 AB 上运动时,求上述两个正方形的中心连线的中点的轨迹.

(第 1 届国际数学奥林匹克,1959 年)

[**解**]　(1)如图,假定直线 AE 和 BC 交于 N'.

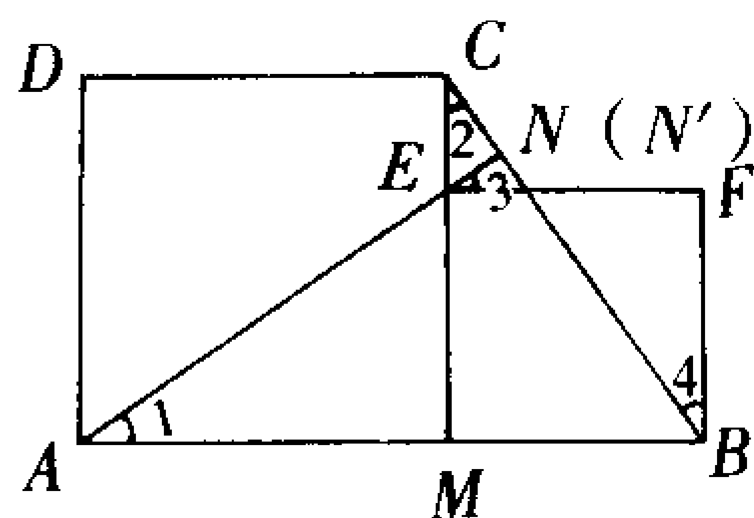
在△AME 和△BMC 中,因为

$AM=MC$, $EM=BM$,

$\angle AME=\angle BMC=90^\circ$,

∴　$\triangle AME \cong \triangle BMC$. $\angle 1=\angle 2$.

于是 A、M、N'、C 共圆.



从而 A、M、N'、C、D 共圆，即 N'在正方形 $AMCD$ 的外接圆上.

于是 $\angle AN'C=90°$，$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$.

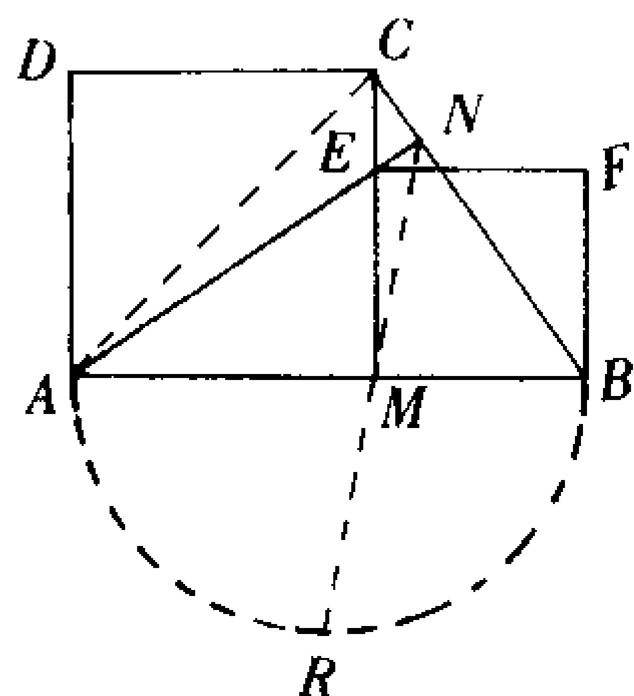
又由 $CM /\!/ BF$ 可得 $\angle 2=\angle 4$，

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

从而 E、N'、F、B 共圆.

即 B、M、E、N'、F 共圆，N'在正方形 $BMEF$ 的外接圆上.

于是 N'为正方形 $AMCD$ 和 $BMEF$ 外接圆的交点. 从而 N'与 N 重合，即 AE 和 BC 相交于点 N.



(2) 由(1)可知，$\angle ANB=90°$，即 N 在以 AB 为直径的圆上.

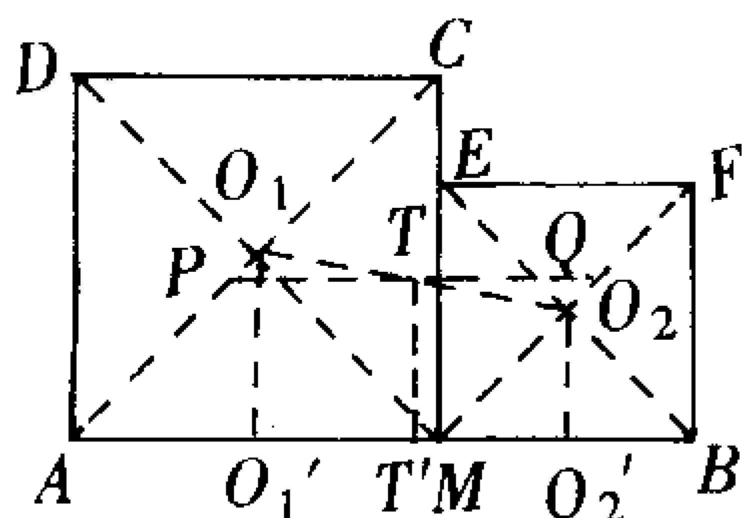
连 AC，由(1)知，A、M、N、C、D 共圆，于是 $\angle ANM=\angle ACM=45°$.

$\therefore$ $\angle BNM=45°$.

知 NM 为$\angle ANB$ 的平分线.

延长 NM 交以 AB 为直径的圆于 R 点，则 R 为$\overset{\frown}{AB}$的中点，R 为定点.

于是直线 MN 必过定点.



(3) 设 O_1 和 O_2 为正方形 $AMCD$ 和 $BMEF$ 的中心，T 为 O_1O_2 的中点.

过 O_1、T、O_2 分别作 $O_1O_1'\perp AB$，$TT'\perp AB$，$O_2O_2'\perp AB$，垂足依次为 O_1'、T'、O_2'. 于是有

$$TT'=\frac{1}{2}(O_1O_1'+O_2O_2')=\frac{1}{2}\left(\frac{AM}{2}+\frac{MB}{2}\right)=\frac{1}{4}AB.$$

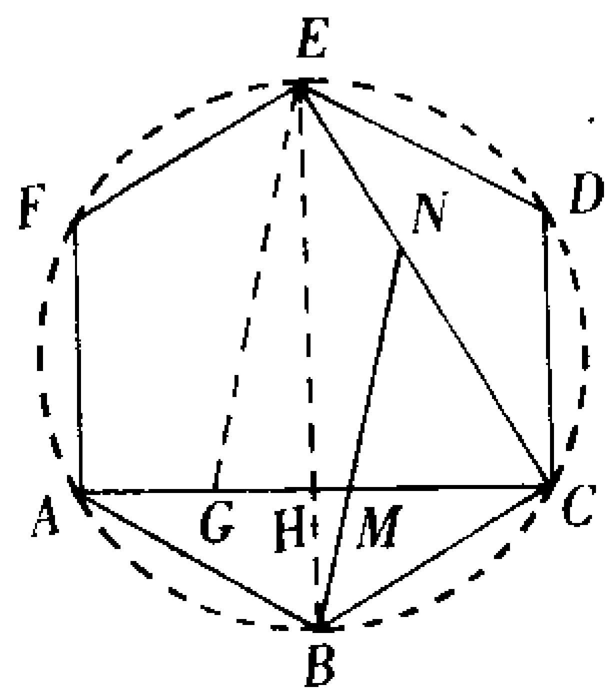
因此 TT'为定值.

作和 AB 平行且与 AB 的距离为$\frac{1}{4}AB$ 的线段 PQ，该线段的端点 P、Q 分别距 AD、BF 为$\frac{1}{4}AB$，并且仅当其中一个正方形退化为一点时，T 点与 P 或 Q 点重合，线段 PQ 即为所求的 T 的轨迹.

5·24 已知：AC、CE 是正六边形 $ABCDEF$ 的两条对角线，点 M、N 分别内分 AC、CE，且使 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$. 如果 B、M、N 三点共线，试求 r 的值.

（第 23 届国际数学奥林匹克，1982 年）

[解 1] 连结 BE 交 AC 于 H，过 E 作 $EG /\!/ NB$ 交 AC 于 G.



设 $AC=CE=1$.

于是 $AM=CN=r$，$MC=EN=1-r$.

$\because$ $EH=3HB$，

$\therefore$ $GH=3HM=3\left(r-\frac{1}{2}\right)$.

从而 $GM=4\left(r-\frac{1}{2}\right)$.

$\because$ $EG /\!/ NM$. $\therefore$ $\frac{GM}{MC}=\frac{EN}{NC}$.

即 $$\frac{4\left(r-\frac{1}{2}\right)}{1-r}=\frac{1-r}{r},$$

解得 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[解 2] 因为 B、M、N 三点共线，所以

$2S_{\triangle CMN}+2S_{\triangle CMB}=2S_{\triangle CNB}$.

设 $AC=CE=1$，于是 $CN=r$，$CM=1-r$.

在$\triangle ABC$ 中，使用正弦定理可得 $BC=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

因而有 $$\frac{\sqrt{3}}{2}r(1-r)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(1-r)=\frac{1}{\sqrt{3}}r.$$

即 $3r(1-r)+(1-r)=2r$.

由此解得 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[解 3] 记 $AC=CE=1$，于是 $CN=AM=r$.

在$\triangle ABC$ 中，使用正弦定理可得 $BC=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

在$\triangle CMN$、$\triangle AMB$中分别使用余弦定理得

$$MN^2=r^2+(1-r)^2-r(1-r)=3r^2-3r+1, \quad ①$$

$$BM^2=r^2+\frac{1}{3}-2r\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=r^2-r+\frac{1}{3}. \quad ②$$

又 $$\frac{MN}{NC}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\angle NMC},$$

$$\frac{BM}{AB}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin\angle AMB}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin\angle NMC}.$$

又∵ $$\frac{MN}{BM}=\frac{NC\cdot\sin 60^\circ}{AB\cdot\sin 30^\circ}=\frac{r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}}=3r.$$

再由①、②可得 $3r^2-3r+1=9r^2\left(r^2-r+\frac{1}{3}\right)$,

即 $3r^2-3r+1=3r^2(3r^2-3r+1)$.

∵ $3r^2-3r+1>0$,

∴ $3r^2=1$, 得 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[解 4] 连结BE交AC于点H,不妨设$AC=CE=1$,于是

$AM=CN=r$, $CM=RN=1-r$, $BE=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$HM=r-\frac{1}{2}$, $BH=\frac{1}{4}BE=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

直线BMN与$\triangle ECH$相截,由梅涅劳斯定理有

$$1=\frac{BE}{HB}\cdot\frac{HM}{MC}\cdot\frac{CN}{NE}=\frac{4}{1}\cdot\frac{r-\frac{1}{2}}{1-r}\cdot\frac{r}{1-r}.$$

∴ $4r^2-2r=1-2r+r^2$,即$3r^2=1$.

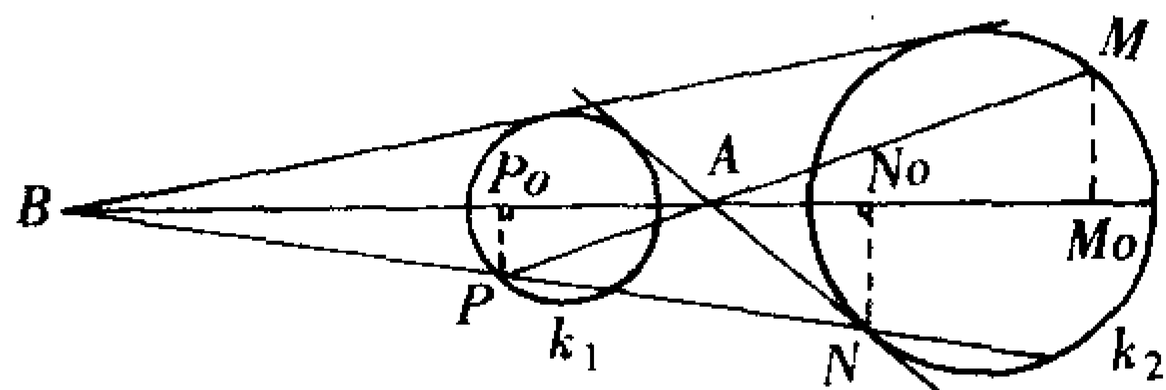
∴ $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5·25 两个不相等的圆k_1和k_2相离,它们的内、外公切线分别与连心线交于A、B两点,设P为圆k_1上任意一点,求证:存在k_2的一条

直径其一端点在直线 PA 上,另一端点在直线 PB 上.

(波兰数学奥林匹克,1991 年)

[证] 如图,延长 PA、PB 与$\odot k_2$ 相交.



因为两圆是关于点 A 的内位似图形,则点 P 关于位似中心 A 在$\odot k_2$ 上必有对应点,设该点为 M.

又因为两圆也是关于点 B 的外位似图形,则点 P 关于位似中心 B 在$\odot k_2$ 上必有对应点,设该点为 N.

分别作点 P、M、N 在连心线上的射影 P_0、M_0、N_0,

设$\odot k_1$、$\odot k_2$ 半径为 r_1、r_2.

$\because \quad MM_0A \backsim \triangle PP_0A$, $\therefore \quad \dfrac{MM_0}{PP_0}=\dfrac{MA}{PA}=\dfrac{r_2}{r_1}$,

又$\because \quad \triangle NN_0B \backsim \triangle PP_0B$, $\therefore \quad \dfrac{NN_0}{PP_0}=\dfrac{NB}{PB}=\dfrac{r_2}{r_1}$.

于是 $\quad \dfrac{MM_0}{PP_0}=\dfrac{NN_0}{PP_0}$, 故 $\quad MM_0=NN_0$.

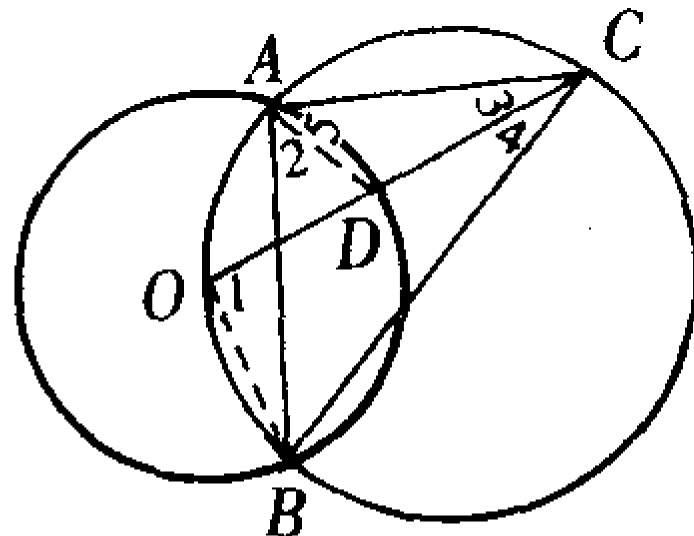
即 M_0、N_0 关于$\odot k_2$ 的圆心对称,从而 M、N 关于$\odot k_2$ 的圆心对称,于是 MN 是$\odot k_2$ 的直径.

5·26 圆 S_1 及圆 S_2 相交于点 A 和 B,圆 S_2 的圆心 O 位于 S_1 的圆周上,弦 OC 交圆 S_2 于点 D.求证:点 D 是$\triangle ABC$ 的角平分线的交点.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)

[证] 连 OB、AD.

由于$\angle 1$ 是圆心角,$\angle 2$ 是周圆角,且$\angle 1$ 和$\angle 2$ 都对$\overset{\frown}{BD}$,则 $\angle 1 = 2\angle 2$.



又因为$\angle BAC$ 与$\angle 1$ 都是$\overset{\frown}{BC}$上的圆周角,

则 $\angle 1=\angle BAC$,

于是 $\angle 1=\angle 2+\angle 5=2\angle 2$,

即 $\angle 2=\angle 5$.

由 $OA=OB$ 可知 $\overset{\frown}{OA}=\overset{\frown}{OB}$, 于是

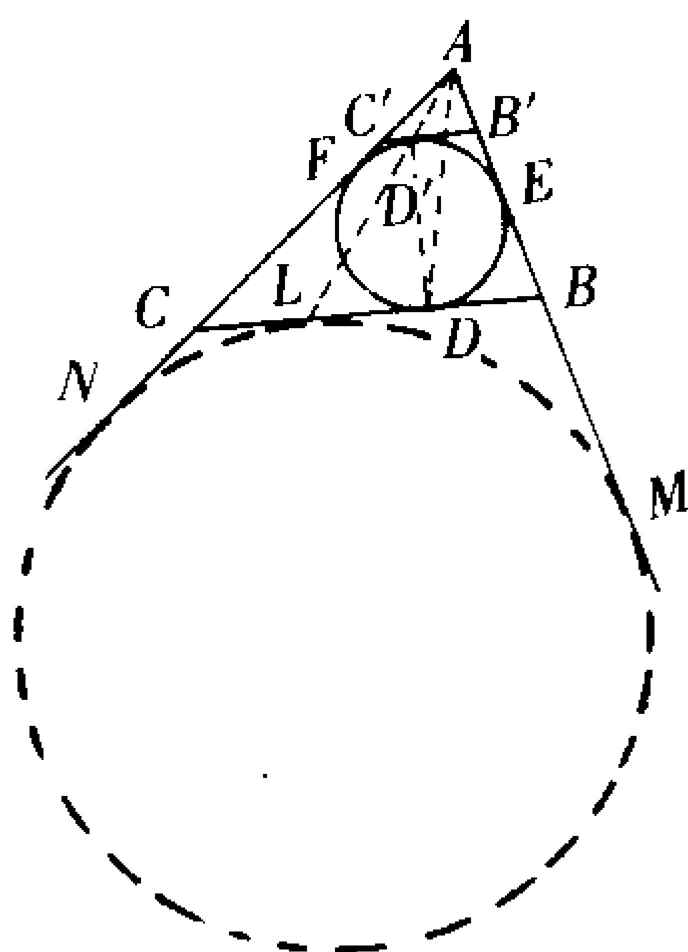
$\angle 3=\angle 4$.

· 因此 AD 和 CD 分别为 $\angle BAC$ 和 $\angle BOC$ 的平分线，即 D 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线的交点.

5·27 $\triangle ABC$ 的边 BC 与它的内切圆相切于点 D. 求证：该圆圆心在线段 BC 与 AD 两个中点的连线上.

（英国数学奥林匹克，1977年）

［证］ 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB、AC 边相切于 E、F，旁切圆与 BC 切于 L，与 AB、AC 延长线切于 M、N，则



$$\begin{aligned}2DB&=DB+BE=CB-CD+AB-AE\\&=CB+AB-CF-AF\\&=CB+AB-CA.\\2CL&=CL+CN\\&=CB-LB+AN-AC\\&=CB-BM+AM-AC\\&=CB+AB-AC.\end{aligned}$$

$\therefore\quad DB=CL$.

于是线段 BC 的中点与线段 DL 的中点重合.

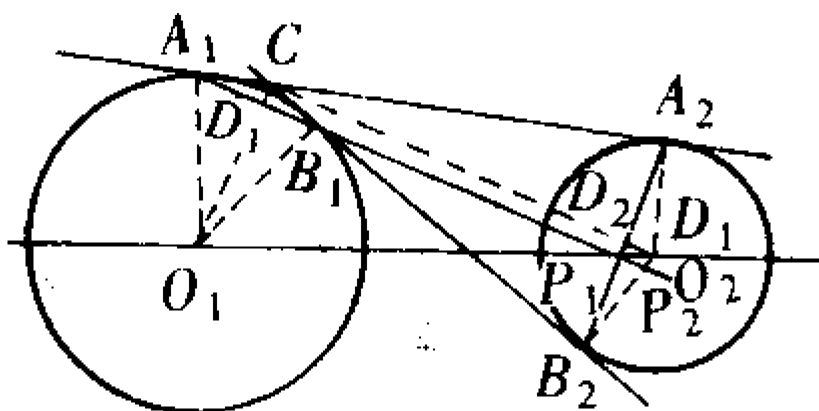
设 $D'D$ 是内切圆的直径，$B'C'$ 切内切圆于 D'.

以 A 为位似中心，将旁切圆变换到内切圆. 在这变换下，点 L 变到点 D'. 因此 L、D'、A 同在一条直线上，而线段 LD、$D'D$、AD 的中点也同在一条直线上，即内切圆圆心、LD 的中点、AD 的中点共线.

从而内切圆的圆心在线段 BC 与 AD 两个中点的连线上.

5·28 对两个外离的圆作一条外公切线和一条内公切线，将属于每个圆的两个切点连成一条弦，求证：两弦所在的直线的交点在两圆的连心线上.

（匈牙利数学奥林匹克，1961年）



［证1］ 假设 C 是圆心为 O_1 和 O_2 的两圆的外公切线 A_1A_2 和内公切线 B_1B_2 的交点.

四边形 $O_1A_1CB_1$ 和 $CA_2O_2B_2$ 在顶点 A_1、B_1 和 A_2、B_2 处的内角为直角，又

$\angle A_1CB_1=\angle A_2O_2B_2$，且 $A_1B_1 /\!/ CO_2$，$A_2B_2 /\!/ CO_1$，

由此可证出四边形 $O_1A_1CB_1$ 和 $CA_2O_2B_2$ 相似，从而

$$\frac{O_1D_1}{O_1C}=\frac{CD_2}{CO_2} \quad ①$$

设直线 A_1B_1 与 O_1O_2 交于 P_1，直线 A_2B_2 与 O_1O_2 交于 P_2.

我们设法证明 P_1 和 P_2 重合.

由于平行的对角线 A_1B_1 和 CO_2 将 $\angle CO_1O_2$ 的边分成比例

$$\frac{O_1D_1}{O_1C}=\frac{O_1P_2}{O_1O_2}, \quad ②$$

而平行的对角线 A_2B_2 和 CO_1 将 $\angle CO_2O_1$ 的边分成比例

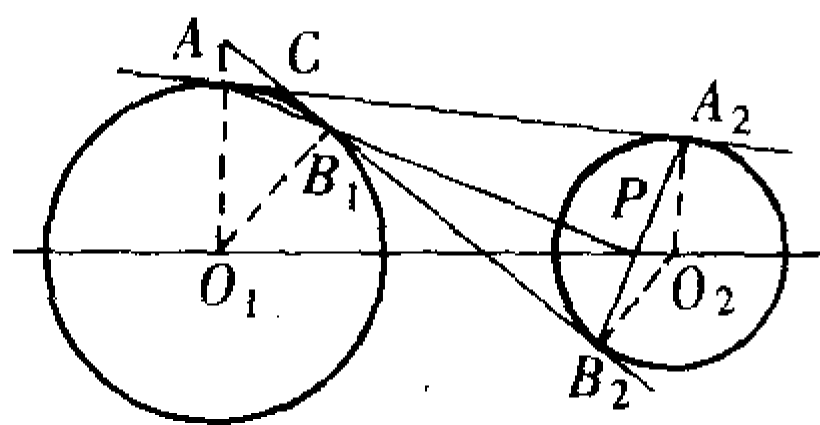
$$\frac{CD_2}{CO_2}=\frac{O_1P_2}{O_1O_2} \quad ③$$

由①、②和③得 $\dfrac{O_1P_1}{O_1O_2}=\dfrac{O_1P_2}{O_1O_2}$.

$\therefore\quad O_1P_1=O_1P_2$.

因此 P_1 和 P_2 重合.

［证 2］ 记直线 A_1A_2 与 B_1B_2 的交点为 C，直线 A_1B_1 与 O_1O_2 的交点为 P. 由正弦定理有



$$A_1P=\frac{O_1P\cdot\sin\angle A_1O_1P}{\sin\angle O_1A_1P},$$

$$B_1P=\frac{O_1P\cdot\sin\angle B_1O_1P}{\sin\angle O_1B_1P}.$$

$\because\quad \angle O_1A_1P=\angle O_1B_1A_1=180^\circ-\angle O_1B_1P$,

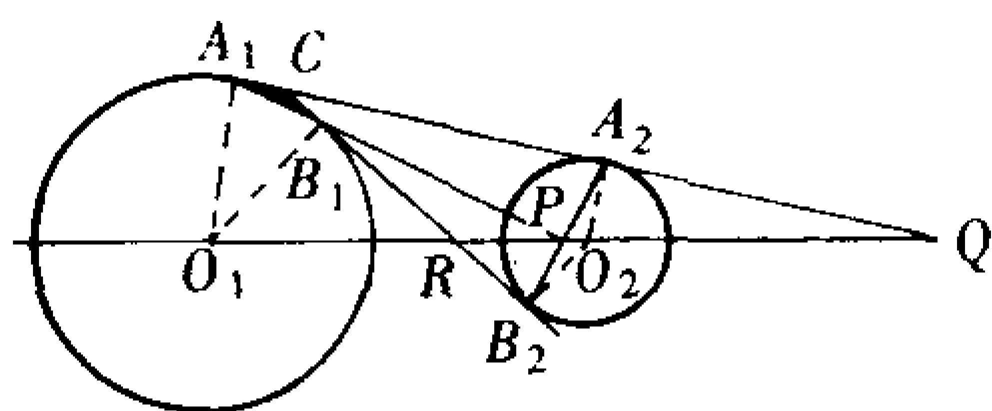
$$\therefore\quad \frac{A_1P}{B_1P}=\frac{\sin\angle A_1O_1P}{\sin\angle B_1O_1P}=\frac{O_1O_2\cdot\sin\angle A_1O_1P}{O_1O_2\cdot\sin\angle B_1O_1P}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

又$\because\quad CA_2=CB_2$,

$$\therefore\quad \frac{CA_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1P}{B_1P}\cdot\frac{B_1B_2}{CB_2}=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1P}{B_1P}=1.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A_2、P、B_2 三点共线，即 A_1B_1、A_2B_2、O_1O_2 三线共点.

［证 3］ 分别记直线 O_1O_2 与 A_1B_1、A_2B_2、A_1A_2、B_1B_2 的交点



为 P、P'、Q、R，记 A_1A_2 与 B_1B_2 的交点为 C.

直线 A_1B_1P 与△CRQ 相截，直线 $A_2P'B_2$ 与△CRQ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{CB_1}{B_1R}\cdot\frac{RP}{PQ}\cdot\frac{QA_1}{CA_1}=1,\quad \frac{CB_2}{RB_2}\cdot\frac{RP'}{P'Q}\cdot\frac{QA_2}{A_2C}=1.$$

∵ $CA_1=CB_1$，$CB_2=CA_2$，

∴ $\dfrac{RP}{PQ}=\dfrac{B_1R}{QA_1}$，$\dfrac{RP'}{P'Q}=\dfrac{RB_2}{QA_2}$.

∵ $O_1A_1\perp A_1A_2$，$O_2A_2\perp A_1A_2$，

$O_1B_1\perp B_1B_2$，$O_2B_2\perp B_1B_2$，

∴ $O_1A_1/\!/O_2A_2$，$O_1B_1/\!/B_2O_2$.

∴ $\triangle QA_1O_1\backsim\triangle QA_2O_2$，$\triangle O_1RB_1\backsim\triangle O_2RB_2$.

∴ $\dfrac{QA_1}{QA_2}=\dfrac{O_1A_1}{O_2A_2}=\dfrac{O_1B_1}{O_2B_2}=\dfrac{B_1R}{B_2R}$.

∴ $\dfrac{B_1R}{QA_1}=\dfrac{B_2R}{QA_2}$. ∴ $\dfrac{RP}{PQ}=\dfrac{RP'}{P'Q}$.

∴ $\dfrac{RP}{RQ}=\dfrac{RP}{RP+PQ}=\dfrac{RP'}{RP'+P'Q}=\dfrac{RP'}{RQ}$.

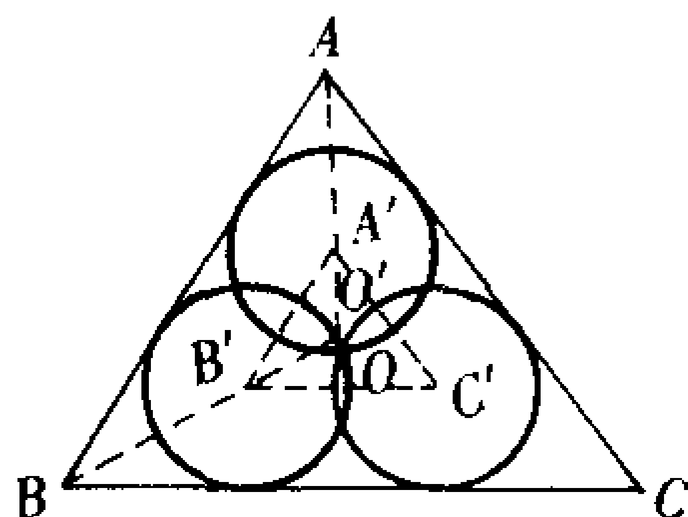
∴ $RP=RP'$，∴ 点 P' 与 P 重合.

∴ A_1B_1、A_2B_2、O_1O_2 三线共点 P.

5·29 已知：三个等圆有一个公共点 O，并且都在一个已知三角形内，每一个圆与三角形的两边相切，求证：这个三角形的内心、外心与点 O 共线.

（第22届国际数学奥林匹克，1981年）

［证］ 将三个等圆的圆心分别记为 A'、B'、C'.



连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$.

因为 AB、BC、CA 为等圆的公切线，则必有

$A'B'/\!/AB$，$B'C'/\!/BC$，$C'A'/\!/CA$.

∴ $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

连结 AA'、BB'、CC' 并延长，由于 AA'、BB'、CC' 是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，则它们必交于一点，设此点为 O'，则 O' 是 $\triangle ABC$ 的内心，同时 O' 也是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的位似中心.

由于 $\odot A'$、$\odot B'$、$\odot C'$ 是等圆且相交于 O，则 O 是 $\triangle A'B'C'$ 的外心.

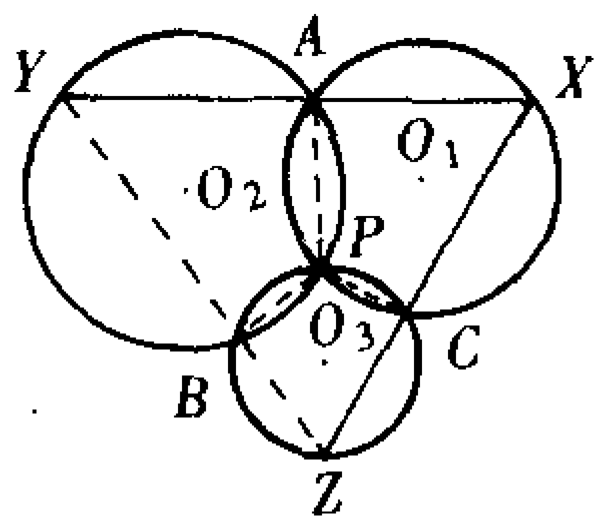
设 $\triangle ABC$ 的外心为 O''，则两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的位似中心 O' 以及这两个三角形的外心 O 及 O'' 三点共线.

于是 $\triangle ABC$ 的内心、外心与点 O 三点共线.

5·30　K_1、K_2、K_3 为三个圆，交于 P 点. 圆心分别为 O_1、O_2、O_3，设 K_1 与 K_2 又交于 A，K_2 与 K_3 又交于 B，K_3 与 K_1 又交于 C，X 为 K_1 上任意一点，直线 XA 交 K_2 于 Y，直线 XC 交 K_3 于 Z，求证：(1) Z、B、Y 共线；(2) $S_{\triangle XYZ} \leqslant 4S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

［证］ (1)连 PA、PB、PC、BY、BZ.



$\because$　$\angle PBY = \angle PAX$，$\angle PBZ = \angle PCX$.

而　$\angle PAX + \angle PCX = 180°$，

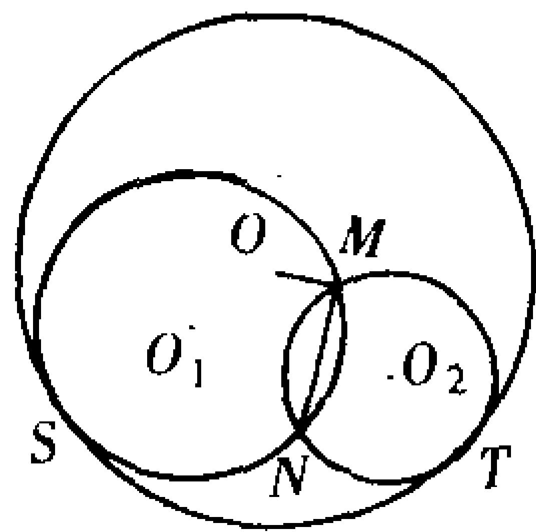
$\therefore$　$\angle PBY + \angle PBZ = 180°$. 因而 Z、B、Y 共线.

(2) 由于 $\angle X$、$\angle Y$ 的大小不变，则所有的 $\triangle XYZ$ 均相似，因此当 XY 最大时，$\triangle XYZ$ 的面积最大

容易证明，当 $XY \parallel O_1O_2$ 时，XY 最大，此时 $XY = 2O_1O_2$.

因而 $S_{\triangle XYZ} \leqslant 4S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

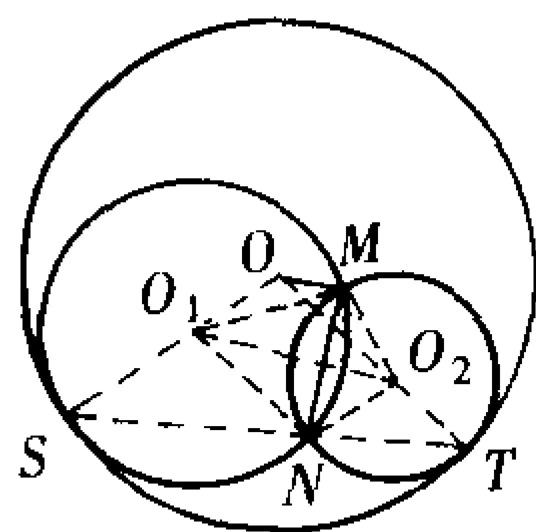
5·31　如图，已知：两个半径不相等的 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 M、N 两点，且 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别与 $\odot O$ 内切于 S、T 两点. 求证：$OM \perp MN$ 的充分必要条件是 S、N、T 三点共线.



（中国高中数学联赛，1997 年）

［证 1］ 如图，设 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$ 的半径分别为 r_1、r_2、r. 由条件知 O、O_1、S 三点共线，O、O_2、T 三点共线，且 $OS = OT = r$. 连结 OS、OT、SN、NT、O_1M、O_1N、O_2M、O_2N、O_1O_2.

（充分性）设 S、N、T 三点共线，则 $\angle S = \angle T$.



又$\triangle O_2SN$与$\triangle O_2NT$均为等腰三角形.

故$\angle S=\angle O_1NS$，$\angle T=\angle O_2NT$.

于是 $\angle S=\angle O_2NT$，$\angle T=\angle O_2NS$.

从而 $O_2N/\!/OS$，$O_1N/\!/OT$.

故四边形OO_1NO_2为平行四边形.

因此 $OO_1=O_2N=r_2=MO_2$，

$OO_2=O_2N=r_1=MO_1$.

故 $\triangle O_1MO\cong\triangle O_2OM$.

从而 $S_{\triangle O_1MO}=S_{\triangle O_2OM}$.

由此得$O_1O_2/\!/OM$.

又由于 $O_1O_2\perp MN$，故 $OM\perp MN$.

(必要性)若$OM\perp MN$，$O_1O_2\perp MN$，有 $O_1O_2/\!/OM$.

从而 $S_{\triangle O_1MO}=S_{\triangle O_2OM}$.

设$OM=a$,由$O_1M=r_1$，$O_1O=r-r_1$，$O_2O=r-r_2$，$O_2M=r_2$，知 $\triangle O_1MO$与$\triangle O_2OM$的周长都等于$a+r$，记 $p=\frac{a+r}{2}$.

由三角形面积的海伦公式,有

$$S_{\triangle O_1MO}=\sqrt{p(p-r_1)(p-r+r_1)(p-a)}$$
$$=\sqrt{p(p-r_2)(p-r+r_2)(p-a)}$$
$$=S_{\triangle O_2OM}.$$

化简得 $(r_1-r_2)(r-r_1-r_2)=0$.

又已知 $r_1\neq r_2$，有 $r=r_1+r_2$.

故 $O_1O=r-r_1=r_2=O_2N$，且 $O_2O=r-r_2=r_1=O_1N$.

$\therefore$ OO_1NO_2为平行四边形.

从而 $\angle O_1NT+\angle T=180^\circ$，$\angle O_2NS+\angle S=180^\circ$.

又 $\triangle O_1SN$与$\triangle O_2NT$均为等腰三角形,

$\angle T=\angle O_2NT$，$\angle S=\angle O_1NS$,

$$\therefore\quad O_1NO_2+2\angle S=\angle O_2NS+\angle S=\angle O_1NT+\angle T$$
$$=\angle O_1NO_2+2\angle T,$$

即 $\angle S=\angle T$.

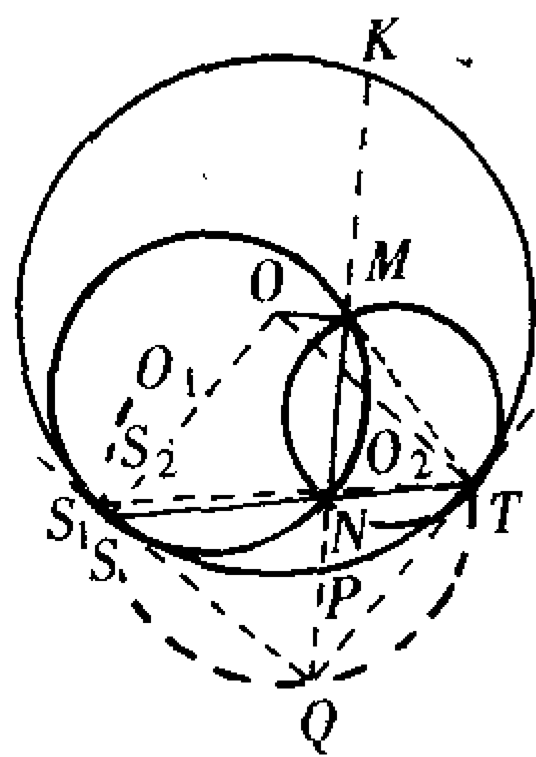
于是　$\angle O_1NS=\angle O_2NT$.

故　$\angle O_1NS+\angle O_1NO_2+\angle O_2NT=\angle SNO_2+\angle S=180^\circ$.

$\therefore$　S、N、T 三点共线.

[证 2]　由已知条件知 O、O_1、S 三点共线，O、O_2、T 三点共线，延长 MN 交$\odot O$ 于 K、P，过 S 作$\odot O_1$ 的切线 SQ，过 T 作$\odot O_2$ 的切线 TQ，由蒙日定理知三条根轴交于一点 Q，即 M、N、Q 三点共线.

(充分性)　若 S、N、T 三点共线，



$\because$　QS、QT 为切线，$\therefore$　$\angle TSQ=\angle STQ$.

$\because$　$OS\perp SQ$，$OT\perp TQ$，

$\therefore$　O、S、Q、T 四点共圆.

$\therefore$　$\angle TSQ=\angle TOQ$.

又$\because$　$\angle STQ=\angle TMQ$，

$\therefore$　$\angle TOQ=\angle TMQ$.

$\therefore$　O、M、T、Q 四点共圆.

$\therefore$　$OT\perp TQ$，$\therefore$　$\angle OMN=90^\circ$.

(必要性)　若$\angle OMN=90^\circ$，

$\because$　$OS\perp SQ$，$OT\perp TQ$，

$\therefore$　$\angle OSQ=\angle OTQ=\angle OMQ=90^\circ$.

$\therefore$　O、M、T、Q、S 五点共圆.

延长 TN 交$\odot O$ 于 S_1，交 $OMTQS$ 所确定的圆于 S_2，则

$S_1N\cdot NT=PN\cdot KN$，$S_2N\cdot NT=MN\cdot QN$.

$\because$　$\angle ONM=90^\circ$，

$\therefore$　$OM\perp KP$，从而有　$MK=MP$.

由于　$QP\cdot QK=QS^2=QN\cdot QM$，

$\therefore$　$QP\cdot(QM+MP)=(PQ+PN)\cdot QM$.

$\therefore$　$QP\cdot MP=PN\cdot QM$.

$\therefore$　$(QN-PN)(MN+PN)=PN(QN+MN)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad QN\cdot MN&=PN\cdot MN+PN\cdot MN+PN^2\\&=PN(MN+NP)+PN\cdot MN\\&=PN(MK+MN)=PN-KN.\end{aligned}$$

有　$S_1N\cdot NT=S_2N\cdot NT$，

$\therefore$　$S_1N=S_2N$，即　S_1、S_2 重合.

而 S 是五点圆与$\odot O$ 的交点，

$\therefore \quad S_1=S_2=S$，即 S、N、T 三点共线.

[证 3](必要性) 若$\angle OMN=90^\circ$，

$\because \quad OS\perp SQ$，$OT\perp TQ$，

$\therefore \quad \angle OSQ=\angle OTQ=\angle OMQ=90^\circ$.

故 O、M、T、Q、S 五点共圆.

有 $\angle OSM=\angle OTM$.

又 $\because \quad O_1S=O_1M$，$O_2T=O_2M$，

$\therefore \quad \angle OSM=\angle O_1MS$，$\angle OTM=\angle O_2MT$.

$\therefore \quad \angle O_1MS=\angle O_2MT$.

故 $\angle O_1OO_2=\angle SMT=\angle SMT+\angle O_1MS-\angle O_2MT=\angle O_1MO_2$.

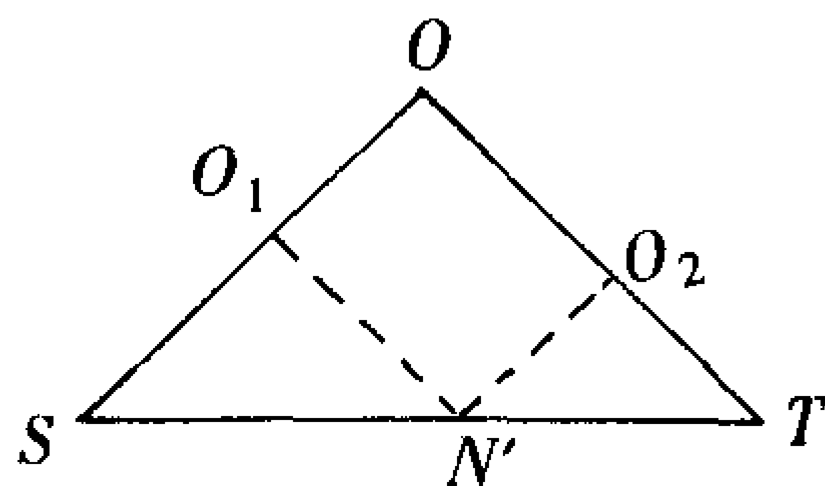
$\therefore \quad O$、O_1、O_2、M 四点共圆.

又$\because \quad OM\perp MN$，$O_1O_2\perp MN$，

$\therefore \quad OM /\!/ O_1O_2$，$OO_1=MO_2$.

设 $\odot O$、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 R、r_1、r_2，则 $OO_1=r_2$.

$\therefore \quad R=OS=OO_1+O_1S=r_1+r_2$.



过 O_1 作 $O_1N' /\!/ OT$ 交 ST 于 N'，过 N' 作 $N'O_2' /\!/ OS$ 交 OT 于 O_2'.

由于$\triangle OST$ 为等腰三角形，

故 $N'O_2'=OO_1=r_2$.

于是 $OO_2'=O_1N'=O_1S=r_1$，

$O_2'T=OT-OO_2'=r-r_1=r_2$.

故 O_2'与O_2 重合.

对于 N'、N'到O_2 的距离为 $O_2'N'=r_2$，N'到O_1 的距离为 $O_1N'=r_1$，

$\therefore \quad N'$为$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的交点.

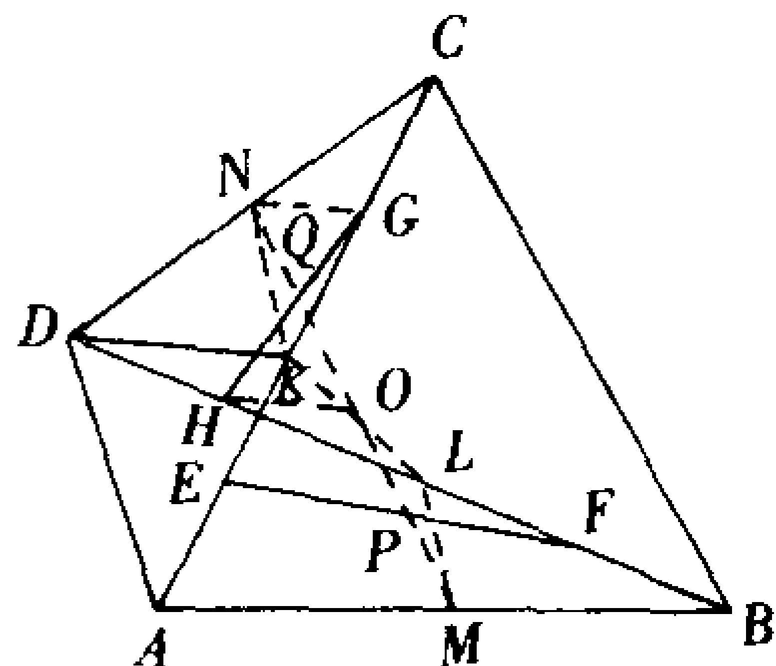
因此，N'与N 重合，故 N 在S、T 所在直线上.

5·32 在凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线AC 和BD 上各取两点E、G 和F、H，使得 $AE=GC=\frac{1}{4}AC$，$BF=HD=\frac{1}{4}BD$. 设 AB、CD、

EF、GH 的中点分别为 M、N、P、Q，求证：M、N、P、Q 四点共线.

（全俄数学奥林匹克，1991 年）

［证 1］ 连结 MN，分别交 EF、GH 于点 P'、Q'，分别取 AC、BD 的中点 K、L，连结 KL 交 MN 于点 O，连结 NK、ML，于是



$$NK \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}DA \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} LM.$$

$\therefore$ 四边形 $NKML$ 为平行四边形.

$\therefore$ 点 O 为 KL 中点.

连结 HO、NG，于是 $HO \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}DK \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} NG$.

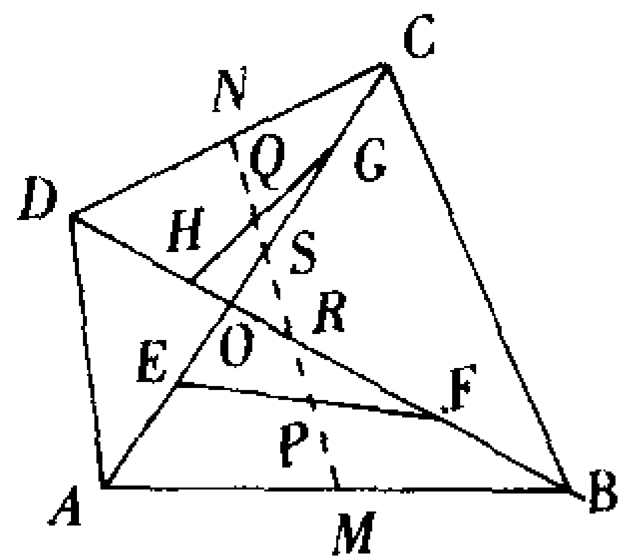
$\therefore$ 四边形 $HOGN$ 为平行四边形.

$\therefore$ Q' 为 HG 中点.

$\therefore$ 点 Q' 与 Q 重合.

同理点 P' 与 P 重合. 所以 M、N、P、Q 四点共线.

［证 2］ 连结 MN，分别交 AC、BD 于点 S、R，记 AC、BD 的交点为 O.



直线 SRM 与 $\triangle OAB$ 相截，直线 RSN 与 $\triangle OCD$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{OS}{AS}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BR}{RO}=1, \quad \frac{OS}{SC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DR}{OR}=1.$$

$\because$ $AM=MB$，$CN=DN$，

$\therefore$ $\frac{AS}{BR}=\frac{OS}{OR}=\frac{CS}{DR}$. $\quad\therefore$ $\frac{AS}{BR}=\frac{AS+CS}{BR+DR}=\frac{AC}{BD}$.

$\because$ $AS=AE+ES$，$\quad AE=\frac{1}{4}AC$；

$BR=BF+FR$，$\quad BF=\frac{1}{4}BD$.

$\therefore$ $\frac{AS}{AC}=\frac{BR}{BD}$，$\frac{ES}{AC}=\frac{FR}{BD}$.

$\therefore$ $\frac{ES}{FR}=\frac{AC}{BD}=\frac{AS}{BR}=\frac{OS}{OR}$.

又 $\because$ $EP=PF$，

$\therefore \quad \frac{OS}{ES}\cdot\frac{EP}{PF}\cdot\frac{FR}{RO}=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{FR}{ES}\cdot\frac{EP}{PF}=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{FR}{ES}=1.$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 S、R、P 三点共线.

即 M、P、N 三点共线.

同理,M、Q、N 三点共线.

所以 M、P、Q,N 四点共线.

[证 3] 将所论平面看作复平面,仍用点的字母来代表相应的复数.

$\because$ M、N 分别为 AB、CD 的中点,

$\therefore \quad N=\frac{1}{2}(C+D),\ M=\frac{1}{2}(A+B).$

$\because \quad AE=\frac{1}{4}AC,\ BF=\frac{1}{4}BD,$

$\therefore \quad E=\frac{1}{4}(3A+C),\ F=\frac{1}{4}(3B+D).$

$\because$ P 为 EF 中点,

$$\therefore \quad P=\frac{1}{2}(E+F)=\frac{1}{8}(3A+C+3B+D)$$

$$=\frac{3}{8}(A+B)+\frac{1}{8}(C+D)=\frac{3}{4}M+\frac{1}{4}N.$$

$\therefore$ M、P、N 三点共线.

同理,M、Q、N 三点共线.

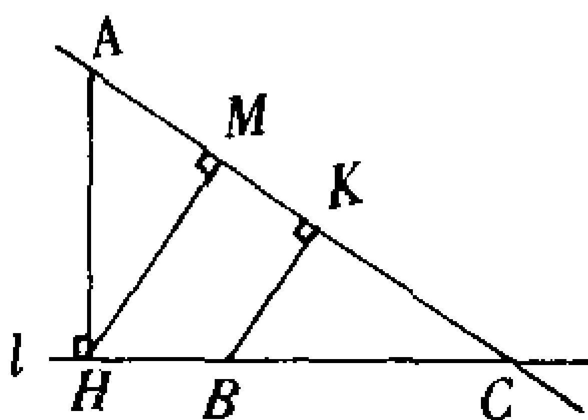
$\therefore$ M、P、Q、N 四点共线.

5·33 平面上有 n 个点,连接其中任意两点的直线都含有其中另一个点.求证:这 n 个点共线.

(前民主德国数学奥林匹克,1972 年)

[证] 假设所有的点不共线.

过所有的点作所有可能的直线,并考虑所有的点与所作直线之间的所有可能的非零距离,因为这些距离只有有限多个,所以至少有一点 A 与一条直线 l,使得它们之间的距离最小.



过 A 在直线 l 上作垂线 AH.由于直线 l 至少含有给定点中的三个点,所以总有两个点,它们在直线 l 上点 H 的同侧.设它们是点 B 和点 C,且点

B 介于点 H 和点 C 之间.其中不排斥 B 与 H 重合的情形.

作 $BK\perp AC$ 于 K，$HM\perp AC$ 于 M.

由 $\triangle BKC\backsim\triangle HMC$

可得 $BK=\dfrac{HM\cdot BC}{HC}\leqslant HM<HA$

(如果 $A=M$，则 $AC/\!/HC$，不可能).

即点 A 到直线 l 的距离并不是最小的，导致矛盾.

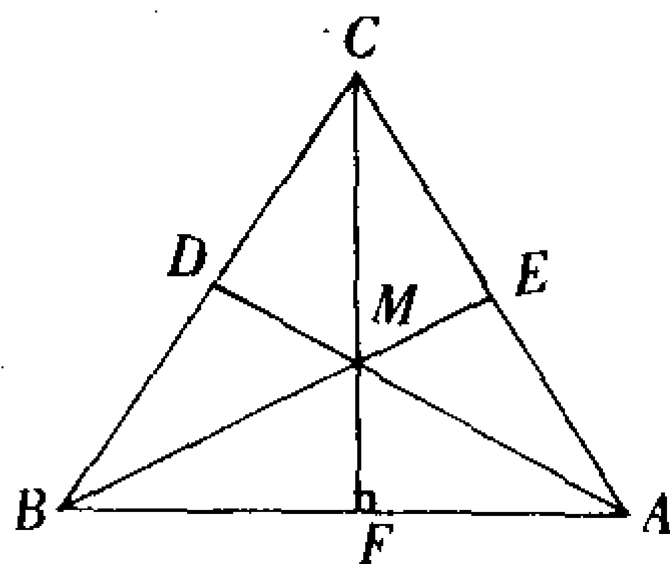
于是所有的 n 个点共线.

(二)线共点

5·34 为了使 $\triangle ABC$ 中角 A 的平分线，由顶点 B 引出的中线，以及从顶点 C 作出的高线恰好交于一点，三角形的角应当满足什么条件?

(波兰数学奥林匹克，1961 年)

[解] 设 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，BE 为 AC 的中线，CF 是 AB 的高线.



由题设，AD、BE 和 CF 交于一点 M，则由塞瓦定理可知

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \qquad ①$$

设 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$.

由三角形内角平分线性质得 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}$.

又由 E 是中点得 $\dfrac{CE}{EA}=1$.

由 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCF$ 是直角三角形得

$$AF=b\cos A,\quad FB=a\cos B.$$

于是①式化为 $\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b\cos A}{a\cos B}=1$.

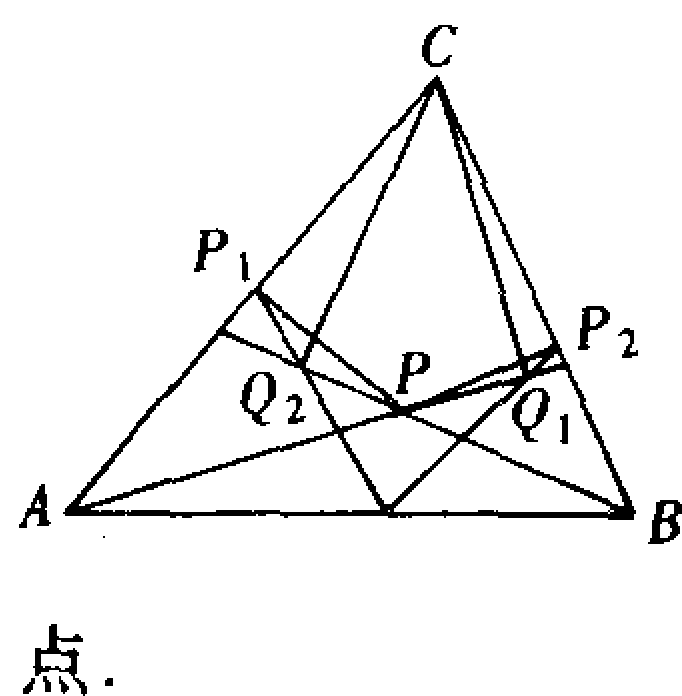
再由正弦定理有 $\dfrac{\sin C\cdot\cos A}{\sin A\cdot\cos B}=1$.

即 $$\operatorname{tg}A=\frac{\sin C}{\cos B} \qquad ②$$

反之,若三角形的三个角满足关系式②,则由塞瓦定理的逆定理可以证明 AD、BE、CF 交于一点.

5·35 设 P 是$\triangle ABC$ 内任一点,P_1 和 P_2 分别是从 P 到边 AC 和 BC 的垂线的垂足,Q_1 和 Q_2 是从 C 到 AP 和 BP 的垂线的垂足.求证:直线 Q_1P_2、Q_2P_1 和 AB 三线共点.

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)



[证] 由已知 P_1、P_2、Q_1、Q_2 对 CP 张直角,所以 C、P_1、Q_2、P、Q_1、P_2 六点共圆.

由于 CP_1 和 Q_1P 交于点 A,CP_2 和 Q_2P 交于点 B.

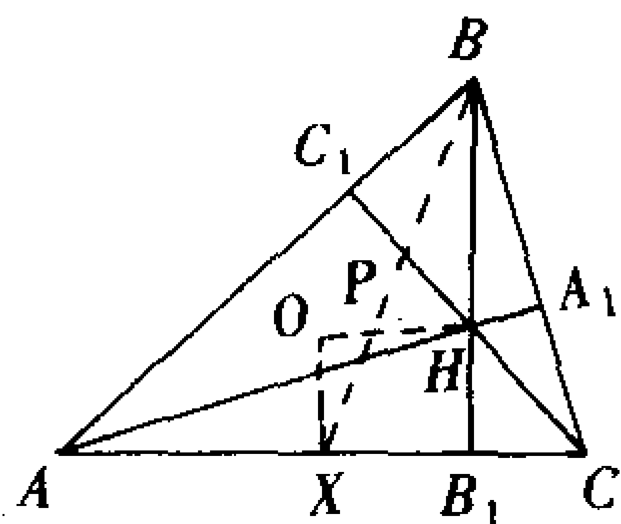
应用巴斯卡定理可知,Q_1P_2 与 Q_2P_1 的交点在直线 AB 上,因此 Q_1P_2、Q_2P_1 和 AB 共点.

5·36 设$\triangle A_1B_1C_1$ 是不等边锐角$\triangle ABC$ 的垂足三角形,A_2、B_2、C_2 是内切于$\triangle A_1B_1C_1$ 的圆与它的边的切点.试证:$\triangle A_2B_2C_2$ 和$\triangle ABC$ 的欧拉线重合.

注 1 垂足三角形是指以三角形三条高线与各边交点为顶点的三角形.

注 2 欧拉线是指三角形的垂心,重心和外心三心所确定的直线.

(第 7 届巴尔干地区数学奥林匹克,1990 年)



[证] 设点 X 是边 AC 的中点.O 是$\triangle ABC$ 的外心,H 是它的垂心.P 是线段 OH 与 BX 的交点.则

$OX \perp AC$, $\quad OX // BH$.

于是 $\quad \triangle OXP \backsim \triangle HBP$.

设 $\quad \triangle PBM$ 与$\triangle OXP$ 的相似比为 k,则

$$k=\frac{BH}{OX}.$$

又因为 $\angle AOX$ 与$\angle ABC$ 的度数都等于$\triangle ABC$ 外接圆的$\overset{\frown}{AD}$的度数的一半,则 $\angle AOX=\angle ABC$.

$$\text{有} \quad OX=\frac{\frac{AC}{2}}{\operatorname{tg}\angle AOX}=\frac{AC}{2\operatorname{tg}\angle ABC}.$$

且 $BH=\frac{BA_1}{\sin\angle BHA_1}=\frac{BA_1}{\sin\angle ACB}$.

又由正弦定理 $\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}$.

于是有

$$k=\frac{BH}{OX}=\frac{\frac{BA_1}{\sin\angle ACB}}{\frac{AC}{2\operatorname{tg}\angle ABC}}$$

$$=\frac{2BA_1\cdot\operatorname{tg}\angle ABC}{AC\cdot\frac{AB}{AC}\sin\angle ABC}$$

$$=\frac{2BA_1}{AB\cdot\cos\angle ABC}.$$

在直角$\triangle AA_1B$中， $\frac{BA_1}{AB}=\cos\angle ABC$,

于是 $k=2$. 即 $\frac{BP}{PX}=2$.

从而点 P 为$\triangle ABC$的重心，所以外心、垂心、重心共线.

其次,从$\triangle OXP\backsim\triangle HBP$ 可得 $\frac{OP}{PH}=\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$.

下证本题.

因为 H 是$\triangle A_1B_1C_1$ 的内心,所以 H 是$\triangle A_2B_2C_2$ 的外心,对四边形 $HA_2C_1B_2$ 的对角线 $HC_1\perp A_2B_2$.

$\therefore$ $A_2B_2/\!/AB$.

同理 $A_2C_2/\!/AC$, $B_2C_2/\!/BC$.

$\therefore$ $\triangle A_2B_2C_2$ 与$\triangle ABC$ 位似.

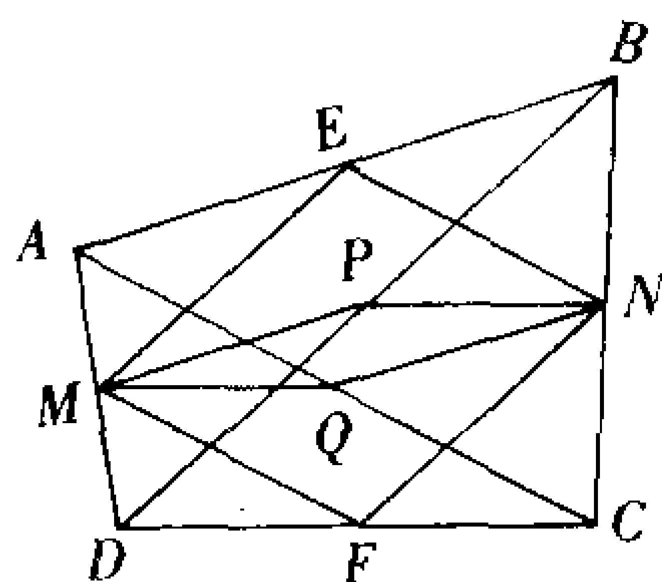
因此$\triangle A_2B_2C_2$ 和$\triangle ABC$ 的欧拉线或者平行,或者重合.

但是,由于 H 既是$\triangle A_2B_2C_2$ 的外心,又是$\triangle ABC$ 的垂心,所以这两个三角形的欧拉线一定重合.

5·37 证明:连接四边形的对边的中点的两条线段与连接对角线的中点的线段交于一点,且被此点平分.

(基辅数学奥林匹克,1940 年)

[证] 设在四边形 $ABCD$ 中,E、N、F、M、P、Q 分别是 AB、BC、CD、DA、BD、AC 的中点.如图



∵ 四边形 $MENF$ 是平行四边形，

∴ EF、MN 互相平分于 O 点.

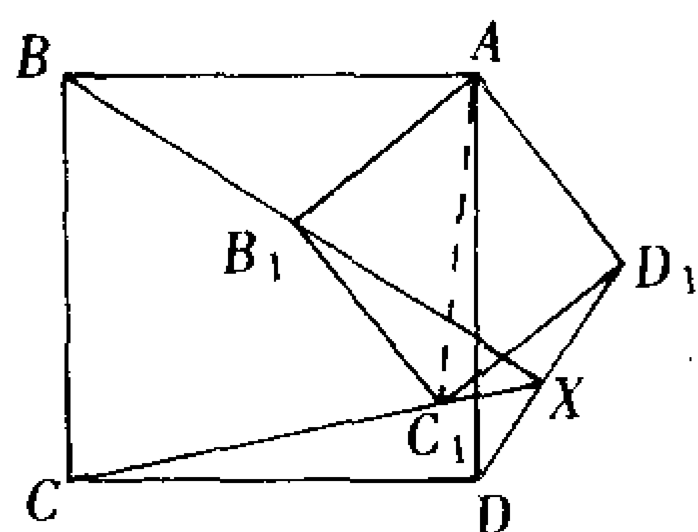
∵ 四边形 $MPNQ$ 是平行四边形，

∴ PQ、MN 也互相平分于 O 点.

∴ EF、MN、PQ 三线共点 O 且都被点 O 所平分.

5·38 正方形 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 同向，B 与 B_1 不重合.求证：直线 BB_1、CC_1、DD_1 三线共点.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）



［证］ 绕 A 点逆时针旋转 90°时，B 成为 D，B_1 成为 D_1，所以 BB_1 成为 DD_1，从而原图中有 $BB_1 \perp DD_1$.

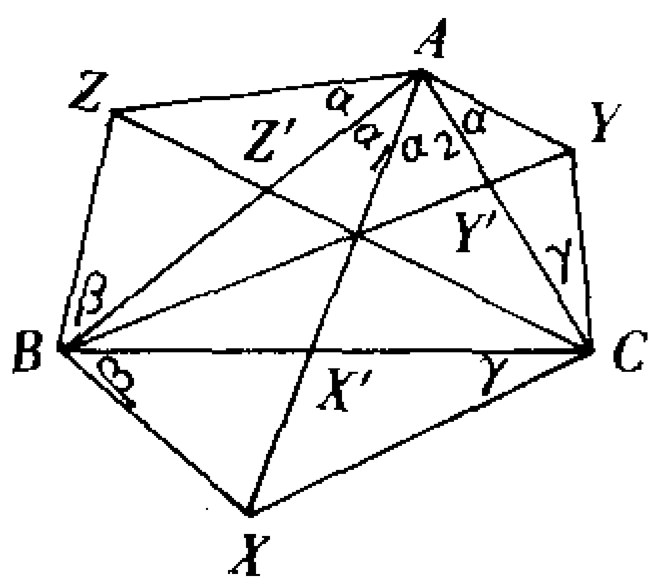
设 BB_1 与 DD_1 的交点 X，则 X 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上，也在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接圆上.

∴ $\angle C_1XB_1 = \angle C_1AB_1 = 45°$， 且 $\angle CXB = \angle CAB = 45°$.

于是 C、C_1、X 三点共线， 即 BB_1、CC_1、DD_1 交于一点 X.

5·39 已知：$\triangle ABC$ 及形外的点 X、Y、Z，$\angle BAZ = \angle CAY$，$\angle CBX = \angle ABZ$，$\angle ACY = \angle BCX$.求证：AX、BY、CZ 共点.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）



［证］ 由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin\angle AX'B} = \frac{BX'}{\sin\alpha_1},$$

$$\frac{AC}{\sin\angle AX'C} = \frac{X'C}{\sin\alpha_2}.$$

于是有 $$\frac{BX'}{X'C} = \frac{AB\sin\alpha_1}{AC\sin\alpha_2}. \qquad ①$$

又 $$\frac{BX}{\sin\alpha_1} = \frac{AX}{\sin(B+\beta)}, \qquad ②$$

且 $$\frac{CX}{\sin\alpha_2} = \frac{AX}{\sin(C+\gamma)}. \qquad ③$$

及 $$\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}. \qquad ④$$

由②、③和④得 $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{\sin\beta\cdot\sin(B+\beta)}{\sin\gamma\cdot\sin(C+\gamma)}$. ⑤

由①和⑤得 $\dfrac{BX'}{X'C}=\dfrac{AB\cdot\sin\beta\cdot\sin(B+\beta)}{AC\cdot\sin\gamma\cdot\sin(C+\gamma)}$. ⑥

同理可得

$$\frac{CY'}{Y'A}=\frac{BC\cdot\sin\gamma\cdot\sin(C+\gamma)}{BA\cdot\sin\alpha\cdot\sin(A+\alpha)}, \quad ⑦$$

$$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{CA\cdot\sin\alpha\cdot\sin(A+\alpha)}{CB\cdot\sin\beta\cdot\sin(B+\beta)}.$$

由⑥、⑦和⑧得

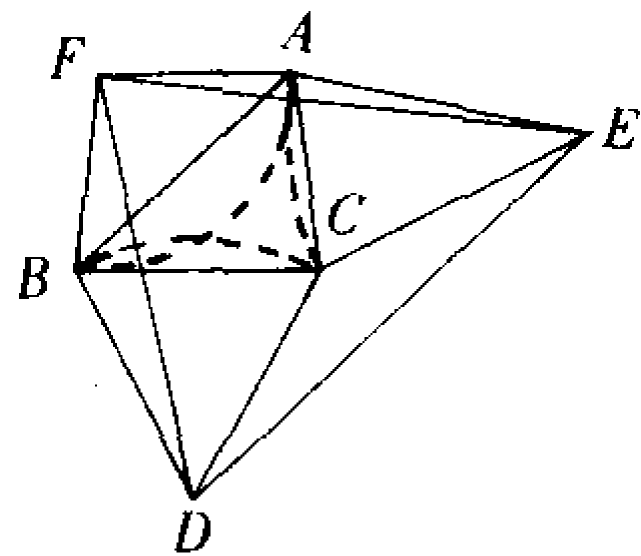
$$\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理可得 AX、BY、CZ 三线共点.

5·40 分别以 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 为底向形外作等腰 $\triangle BCD$、$\triangle CAE$、$\triangle ABF$. 求证:分别过 A、B、C 作 EF、FD、DE 的垂线共点.

(美国数学奥林匹克,1997 年)

[证] 分别以 D、E、F 为圆心,DB、EC、FA 为半径作圆.



$\odot E$、$\odot F$ 的公共弦;$\odot F$、$\odot D$ 的公共弦;$\odot D$、$\odot E$ 的公共弦(所在直线)即为分别过 A、B、C 所作 EF、FD、DE 的垂线.

熟知该三条弦共点(三圆的根心)对三个圆的幂相等. 故三条垂线共点.

5·41 在锐角$\triangle ABC$ 的各边分别向形外作三个彼此相似的锐角三角形:$\triangle AC_1B$、$\triangle BA_1C$、$\triangle CB_1A$,且$\angle AB_1C=ABC_1=\angle A_1BC$,$\angle BA_1C=\angle BAC_1=\angle B_1AC$. 求证:(1)$\triangle AC_1B$、$\triangle BA_1C$ 和$\triangle CB_1A$ 的外接圆共点;(2)直线 AA_1、BB_1、CC_1 共点.

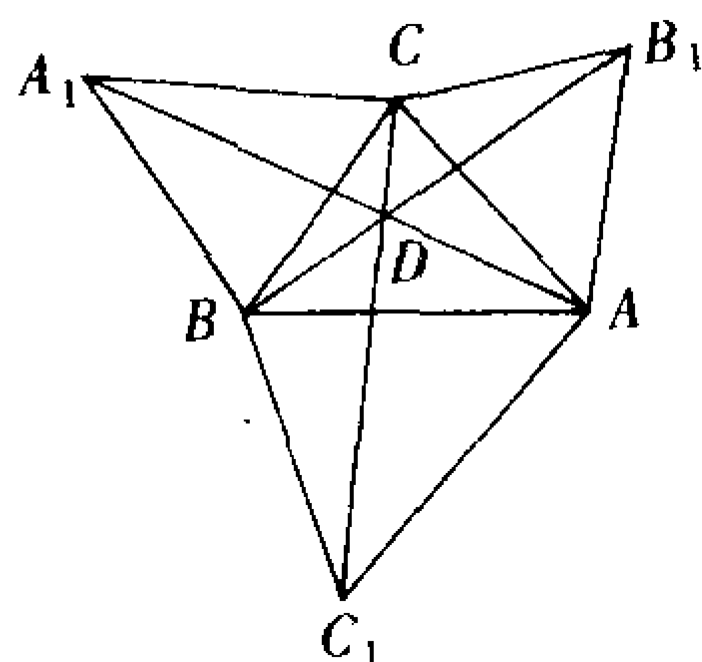
(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

[证] 设 D 是 AA_1 与 BB_1 的交点

$\because$ $\angle A_1CA=\angle B_1CB$, 且 $A_1C:BC=AC:B_1C$.

$\therefore$ $\triangle A_1CA\backsim\triangle B_1CB$.

$\therefore$ $\angle DBC=\angle DA_1C$.



因此 B、D、C、A_1 四点共圆.

因此由$\angle CDB_1=\angle BA_1C=\angle B_1AC$ 得，A、D、C、B_1 四点共圆.

即 D 是$\triangle A_1BC$ 与$\triangle AB_1C$ 的两个外接圆的交点.

注意到 $\angle ADB=180^\circ-\angle ADB_1=180^\circ-\angle ACB_1=180^\circ-\angle AC_1B$.

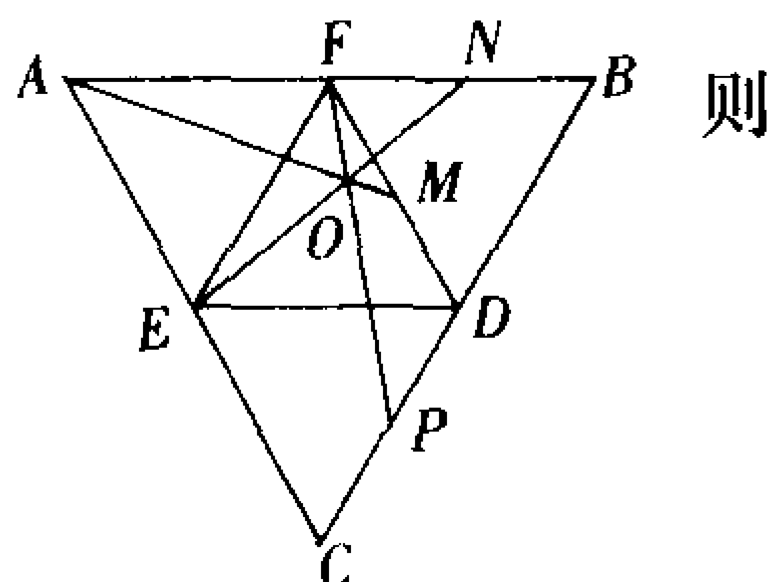
所以点 A、D_1、B 和 C_1 四点共圆，于是 D 是所论三个外接圆的交点.

易知$\angle CDB_1=\angle CAB_1=\angle BAC_1=\angle BDC_1$，

$\therefore$ C、D_1、C_1 三点共线.即 A_1A、B_1B、C_1C 相交于同一点.

5·42 如图，$\triangle ABC$ 是正三角形，D、E、F、M、N、P 分别是 BC、CA、AB、FD、FB、DC 的中点.(1)求证：AM、EN、FP 三线共点.(2)设 O 为 AM、EN、FP 的交点，求：$OM:OF:ON:OE:OP:OA$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年)



[解] (1)设 AM 与EN 交于O，连 FO、FP，则

$\triangle AMF\cong\triangle ENF\cong\triangle FPD$.

$\therefore$ $\angle FAM=\angle FEN=\angle DFP$.

$\therefore$ A、E、O、F 四点共圆，

$\therefore$ $\angle EAO=\angle EFO$.

$\therefore$ $\angle DFO=60^\circ-\angle EFO=60^\circ-\angle EAO$
$=\angle FAM=\angle DFP$.

$\therefore$ FP 也过O 点.

$\therefore$ AM、EN、FP 共点.

(2)$\because$ $\angle OFD=\angle OAF$，$\therefore$ $\triangle OFM\backsim\triangle FAM$.

$\therefore$ $\dfrac{OM}{OF}=\dfrac{FM}{FA}=\dfrac{1}{2}$.

在$\triangle OMF$ 中，由余弦定理有

$FM^2=OM^2+OF^2-2OM\cdot OF\cdot\cos120^\circ=7OM^2$.

$\therefore$ $FM=\sqrt{7}OM$.

$\therefore \quad FA=2\sqrt{7}OM,\ AM=\dfrac{AF\cdot FM}{FO}=7OM.$

则 $EN=FP=AM=7OM.$

且 $OA=6OM,\ OP=5OM.$

又∵ $\angle OFE=\angle OAE=\angle OMF,$

$\therefore \quad \triangle OFE\backsim\triangle OMF.$

$$\therefore \quad \frac{OF}{OE}=\frac{OM}{OF}=\frac{1}{2},$$

$\therefore \quad OE=2OF=4OM$

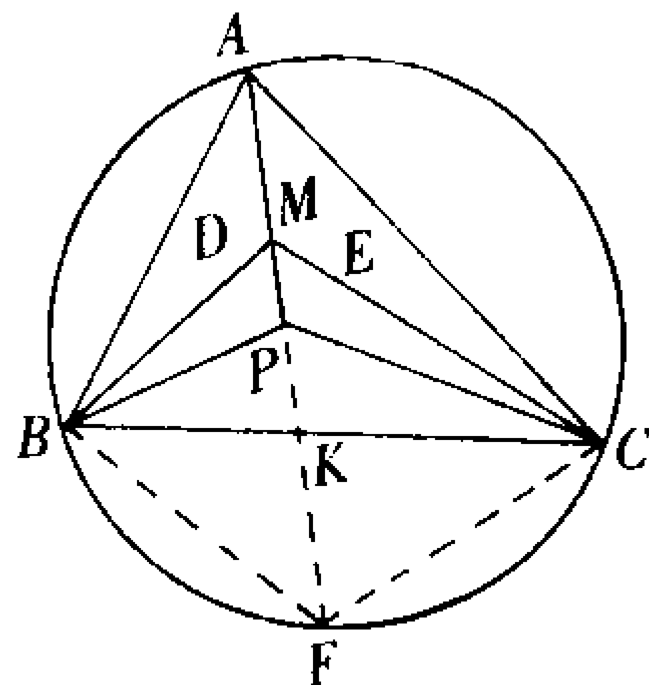
$\therefore \quad ON=EN-OE=3OM,$

$OM:OF:ON:OE:OP:OA=1:2:3:4:5:6.$

5·43 设 P 是$\triangle ABC$内一点,满足条件$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$.又设$D$和$E$分别是$\triangle APB$和$\triangle APC$的内心,求证:$AP$、$BD$、$CE$三线共点.

(第37届国际数学奥林匹克,1996年)

[证1] 延长AP交BC于点K,交$\triangle ABC$的外接圆于点F,连结BF、CF.于是



$$\begin{aligned}&\angle APC-\angle ABC\\=&\angle AKC+\angle PCK-\angle ABC\\=&\angle PCK+\angle KAB\\=&\angle PCK+\angle BCF=\angle PCF.\end{aligned}$$

同理 $\angle APB-\angle ACB=\angle PBF.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle PCF&=\angle APC-\angle ABC\\&=\angle APB-\angle ACB=\angle PBF.\end{aligned}$$

在$\triangle PBF$和$\triangle PCF$中分别应用正弦定理有

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB}=\frac{PF}{\sin\angle PBF}=\frac{PF}{\sin\angle PCF}=\frac{PC}{\sin\angle PFC}.$$

$$\therefore\quad \frac{PB}{PC}=\frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}.$$

连结BD并延长交AP于点M,连结CM.

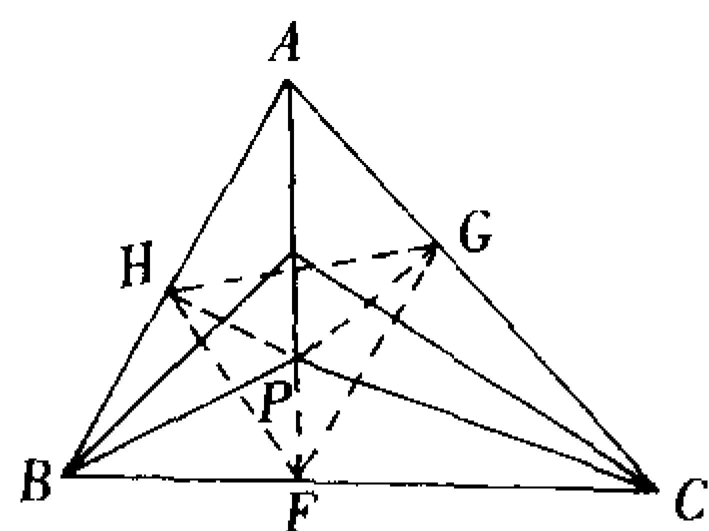
∵ 点D为$\triangle ABP$的内心,

$\therefore$ BM平分$\angle ABP$.

$\therefore \quad \dfrac{AM}{MP}=\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{AC}{PC}$. $\therefore \quad CM$ 平分$\angle ACP$.

$\therefore \quad$ 点 E 在CM上. $\therefore \quad AP$、BD、CE 三线共点.

[证 2]　过点 P 分别作$PF \perp BC$ 于点F, $PG \perp CA$ 于点G, $PH \perp AB$ 于点H. 连结 FG、GH、HF.



于是 H、B、F、P; P、F、C、G 和 H、P、G、A 都四点共圆, 且 BP、CP、AP 分别为三圆的直径.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \angle FGH &= \angle FGP + \angle PGH = \angle FCP + \angle HAP \\ &= \angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB \\ &= \angle CAP + \angle CBP = \angle GHP + \angle FHP \\ &= \angle GHF.\end{aligned}$$

$\therefore \quad HF = FG$.

$\because \quad HF = BP\sin B, \ FG = CP\sin C$,

$\therefore \quad \dfrac{BP}{CP}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{AB}{AC}$.

以下证明同证 1.

5·44　I 为$\triangle ABC$ 的内心, X、Y 分别为内切圆与 AB、BC 的切点, D、E 分别为BC、CA 的中点. 求证: AI、XY 与 ED 共点.

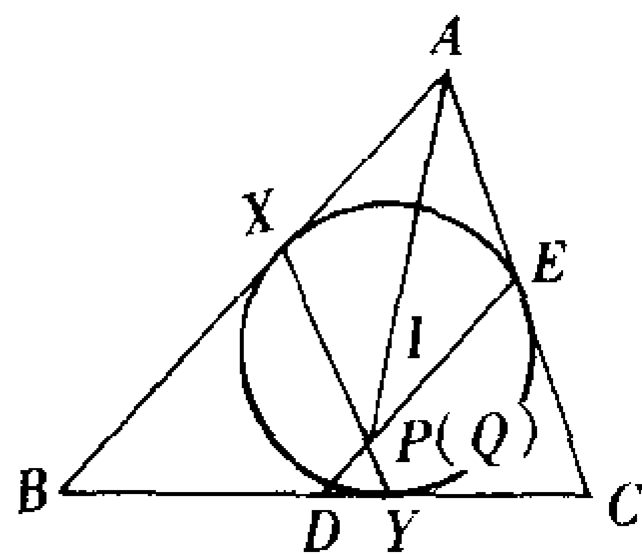
(加拿大数学奥林匹克训练题, 1988 年)

[证]　设 a、b、c 为$\triangle ABC$ 的三边的边长, 又设 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, 则 $AX = s-a, \ BX = BY = s-b$.

设 DE 分别与XY、AI 交于P、Q,

则由　$DE /\!/ BA$

得　$\angle DPY = \angle BXY = \angle BYX$,



且　$DP = DY = s-b-\dfrac{a}{2}$.

又因为　$EQ /\!/ AX$, 则　$\angle EQA = \angle IAX = \angle IAE$,

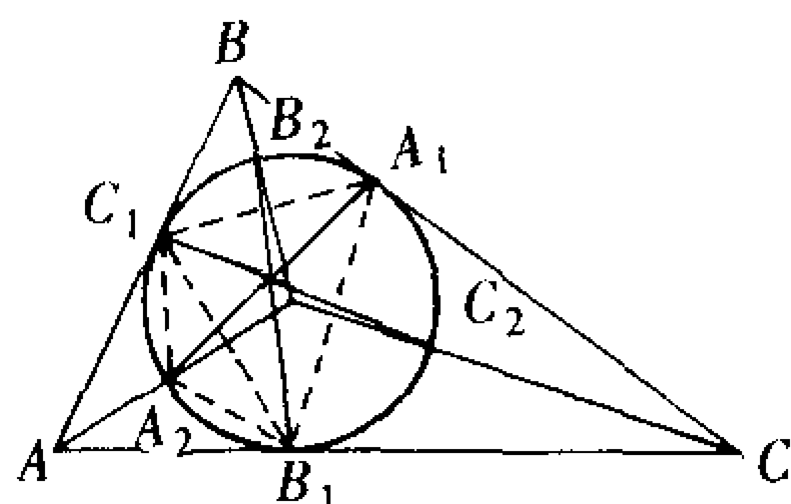
且　$EQ = AE = \dfrac{b}{2}$.

于是 $EQ+PD=s-b-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{c}{2}=ED$.

从而 P 与 Q 重合,即 DE、XY、AI 三线共点.

5·45 圆 O 内切于$\triangle ABC$,A_1、B_1、C_1 分别为 BC、CA、AB 边上的切点. AO、BO、CO 分别交圆于 A_2、B_2、C_2. 求证:A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 交于一点.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)



[证] 连接 A_2B_1、A_2C_1,由题设知 $AB_1=AC_1$,则 AO 是 B_1C_1 的中垂线.

$\therefore$ $A_2B_1=A_2C_1$, 则 $\overset{\frown}{A_2B_1}=\overset{\frown}{A_2C_1}$.

即 A_2 是$\overset{\frown}{B_1C_1}$中点.

同理可证 B_2 是 $\overset{\frown}{C_1A_1}$ 中点,C_2 是 $\overset{\frown}{A_1B_1}$中点.连接 C_1A_1、A_1B_1.

$\therefore$ $\angle C_1A_1A_2=\angle A_2A_1B_1$,

即 A_1A_2 是$\triangle A_1B_1C_1$ 中$\angle C_1A_1B_1$ 的角平分线.

同理可证 B_1B_2、C_1C_2 也是$\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线.

故 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 交于一点.

5·46 已知:$\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形,它的三边分别为 a_1、a_2、a_3,其中 a_i 是A_i 的对边,M_i 是边 a_i 的中点,T_i 为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆与 a_i 边的切点,S_i 是 T_i 关于$\angle A_i$ 的平分线的对称点,$i=1,2,3$. 求证:M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 三线共点.

(第 23 届国际数学奥林匹克,1982 年)

[证] 设 A_iB_i 是$\angle A_i$ 的平分线($i=1,2,3$).

$\because$ S_1、T_3 关于 A_1B_1 的对称点分别为 T_1、T_2,

$\therefore$ $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_2T_1}$.

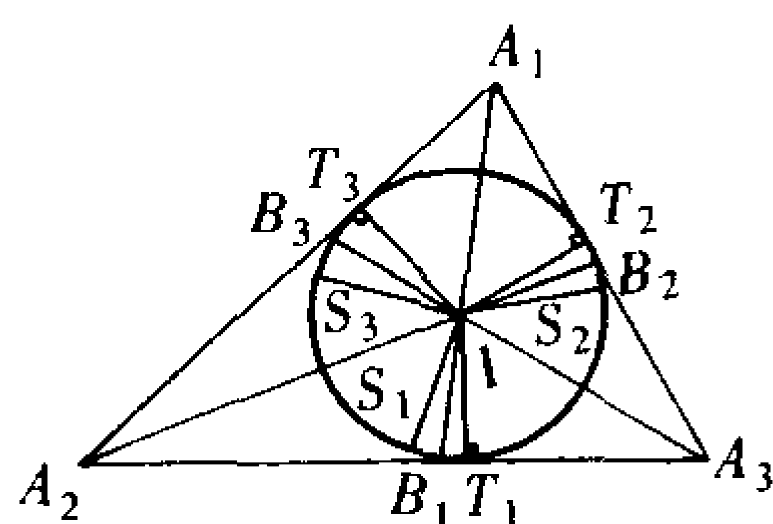
同理,考察以 A_2B_2 为轴的对称关系可得 $\overset{\frown}{T_2T_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$.

从而有 $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$.

$\therefore$ $S_1S_2/\!/A_1A_2/\!/M_1M_2$.

同理 $S_2S_3/\!/M_2M_3$, $S_3S_1/\!/M_3M_1$.

即$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 的三边分别平行.因此这两个三角形



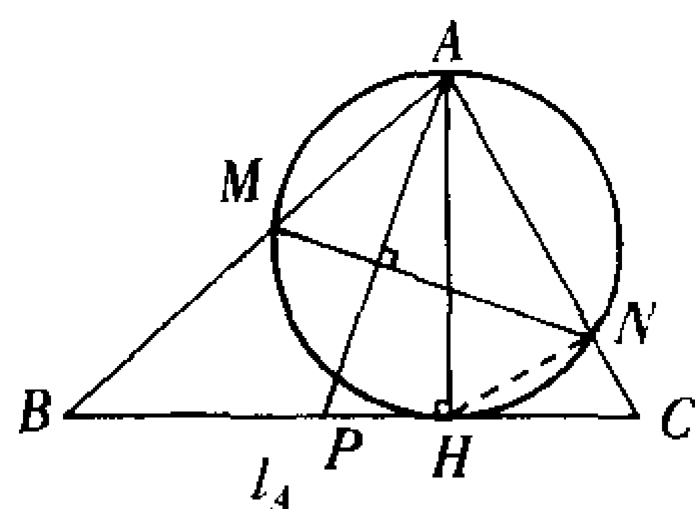
或者全等,或者位似.

另一方面,$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆,由于$\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形,所以内切圆的半径小于外接圆之半,而$\triangle M_1M_2M_3$ 的外接圆半径恰为$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆半径之半,因而,$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 的外接圆半径不相等,从而$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 不全等,而必然位似.

因此,$\triangle S_1S_2S_3$ 和$\triangle M_1M_2M_3$ 三对对应顶点的连线 M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 必交于位似中心,当然是三线共点.

5·47 设$\triangle ABC$ 为锐角三角形,三条直线 l_A、l_B、l_C 分别通过顶点A、B、C,并以下述方式作出:设 H 是由 A 向 BC 作垂线的垂足,S_A 是以 AH 为直径的圆,S_A 与边 AB 与 AC 分别交于点 M 与 N,M 与 N 异于A,l_A 为过点 A 与 MN 垂直的直线,直线 l_B 与 l_C 类似地作出.证明:直线 l_A、l_B、l_C 共点.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)



[证] 记 A、B、C 为$\triangle ABC$ 的三个内角,a、b、c 为其对边的长度.

由 l_A 的作法可知:

$\angle AMN=\angle AHN=90^\circ-\angle HAC=\angle C$.

类似地,$\angle ANM=\angle B$.

$\therefore \quad \triangle AMN\backsim\triangle ACB$.

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 l_A 与边 MN 和边 BC 均相交,设 l_A 交 BC 于 P.

$\angle BAP=90^\circ-\angle AMN=90^\circ-C$,

$\angle CAP=90^\circ-\angle ANM=90^\circ-B$.

由
$$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle CAP}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\angle BAP}{\frac{1}{2}AC\cdot AP\cdot\sin\angle CAP}=\frac{c\cos C}{b\cos B}. \quad ①$$

设 l_B 交 AC 于 Q,l_C 交 AB 于 R,类似地有

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{a\cos A}{c\cos C},\qquad ②$$
$$\frac{AR}{RB}=\frac{b\cos B}{a\cos A}.\qquad ③$$

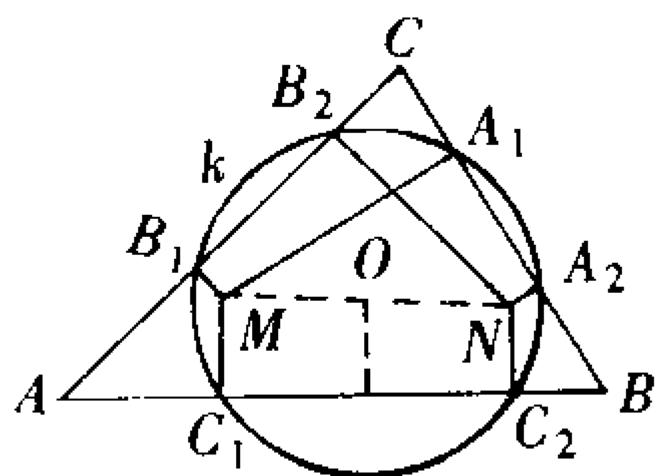
将①、②、③相乘得 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$.

由塞瓦定理的逆定理知，l_A、l_B、l_C 共点. 可以证明此点为$\triangle ABC$的外心.

5·48 圆和$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 交于 A_1、A_2；B_1、B_2；C_1、C_2. 求证：如果由点 A_1、B_1、C_1 作 BC、CA、AB 的垂线相交于一点，那么由点 A_2、B_2、C_2 所作 BC、CA、AB 的垂线也相交于一点.

（匈牙利数学奥林匹克，1914 年）

[证] 设由点 A_1、B_1、C_1 向 BC、CA、AB 所作的垂线交于一点 M.



由于圆 O 的弦 C_1C_2 的垂直平分线通过圆心 O，若直线 MO 交过 C_2 垂直于 AB 的直线于 N，则 $NO=OM$，即 N 是 M 关于 O 的对称点.

这个结论对于过 A_2、B_2 的垂线也成立.

因此由点 A_2、B_2、C_2 所作 BC、CA、AB 的垂线也相交于一点 N.

5·49 过$\triangle ABC$ 的顶点 B、C 的圆与边 AB、AC 分别交于点 C' 和 B'，H 和 H' 分别为$\triangle ABC$ 与$\triangle AB'C'$的垂心. 求证：BB'、CC' 和 HH' 三线共点.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

[证 1] 记 BB' 与 CC' 的交点为 P. 连结 PH、PH'.

∵ B、C、B'、C' 四点共圆.

∴ $\angle ABC=\angle AB'C'$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$，$\triangle HBC\backsim\triangle HB'C'$，$\triangle PBC\backsim\triangle PC'B'$.

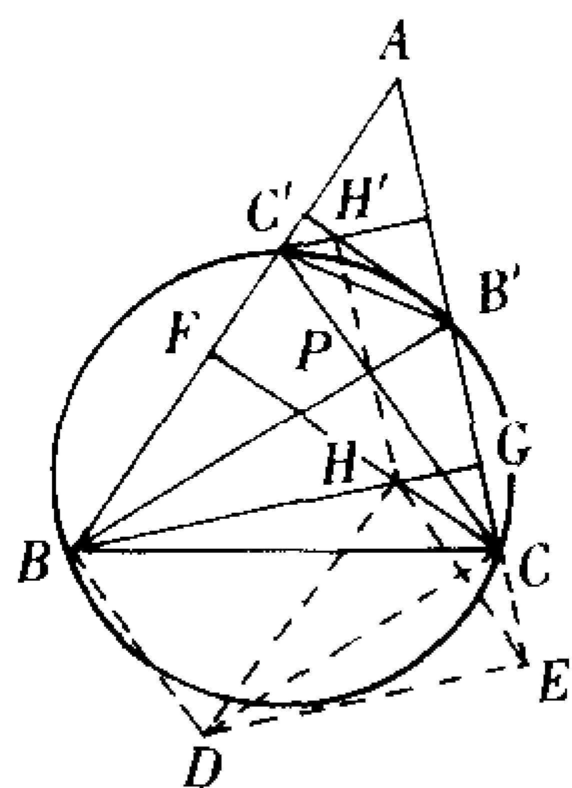
作平行四边形 $PBDC$，于是

$\triangle DCB\backsim\triangle PC'B'$.

∴ 四边形 $HBDC\backsim$四边形 $H'B'P'C'$.

∴ $\triangle H'B'P'\backsim\triangle HBD$. ∴ $\angle B'PH'=\angle BDH$.

过 H 作 $HE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} PC$，连结 CE、DE，则四边形 $PHEC$ 和 $HBDE$ 都是平行四边形.



$\because$ $BG\perp AC, CF\perp AB$, $\angle BB'C=\angle BC'C$,

$\therefore$ $\angle PBH=\angle PCH$.

$\therefore$ $\angle CDE=\angle PBH=\angle PCH=\angle CHE$.

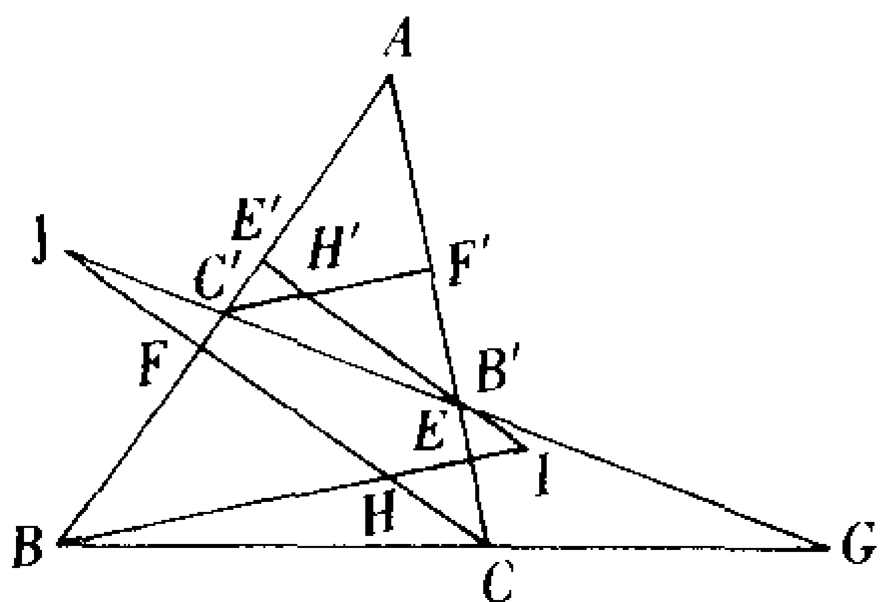
$\therefore$ H、D、E、C 四点共圆.

$\therefore$ $\angle BPH=\angle DCE=\angle DHE=\angle BDH=\angle B'PH'$.

$\therefore$ H'、P、H 三点共线.

$\therefore$ BB'、CC'、HH'三线共点.

[证 2] 设 BE、CF 为$\triangle ABC$ 的两条高，$B'E'$、$C'F'$为$\triangle AB'C'$的两条高.又设 $B'C'$、BC 相交于 G，$H'B'$、HB 相交于 I，$H'C'$、HC 相交于 J.



由 Desargues 定理，要证$\triangle HBC$ 与$\triangle H'B'C'$的对应顶点的连线共点，只要证对应边的交点 I、J、G 共线.

因为 B、C、B'、C'共圆，所以 $GC\cdot GB=GC'\cdot GB'$.易知 B、C、E、F 共圆，B'、C'、E'、F'共圆，G 在这两圆的根轴 l 上.

因为$\angle BEB'+\angle B'E'B'=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，

所以 B、E、B'、E'四点共圆，从而 $IE\cdot IB=IB'\cdot IE'$，I 也在上述两个圆的根轴 l 上.

同理 J 也在 l 上.

因此，I、J、G 共线，BB'、CC'、HH'共点.

5·50 $\triangle ABC$ 的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分线分别交其外接圆于点 K、L、M，R 是边 AB 的内点.点 P、Q 由条件定义：$RP\parallel AK$，$BP\perp BL$；$RQ\parallel BL$，$AQ\perp AK$.证明：KP、LQ、MR 交于一点.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

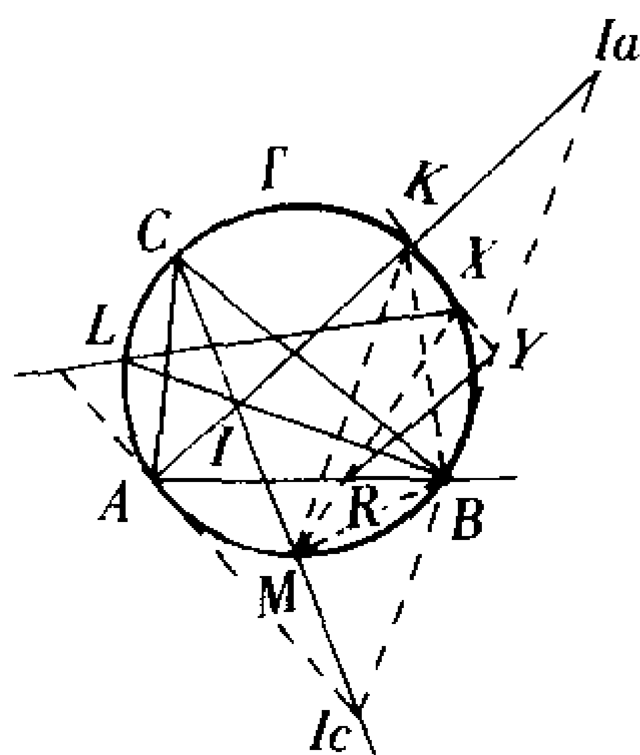
[证] 如下页图，令 MR 交$\triangle ABC$ 的外接圆Γ 于点 X，则 X 就是 KP、LQ、MR 的交点.

设 I_a、I_b、I_c 和 I 分别是$\triangle ABC$ 的旁心和内心.直线 I_aI_c 是$\angle B$ 的外角平分线，垂直于内角平分线 BL.

由 $BP\perp BL$，知 P 在 I_aI_c 上.

因$\angle IKM=\angle BKM$，$\angle IKM=\angle BMK$，点B与I关于KM对称，

故　$KM /\!/ I_aI_c$.



考察KX(当X与K重合时，"直线KX"解释成在K点与Γ相切)，因由K所作平行于I_aI_c的Γ的弦只有KM，故KX不平行于I_aI_c，X不与M重合.

令Y是KX与I_aI_c的交点，我们要证Y与P重合，只要证明$RY /\!/ AK$.

注意到Y与I_a在I_aI_c上，且在B的同一侧，这是因为过K且与BI_c相交的直线必与较小的弧$\overset{\frown}{BM}$相交.

然而KY交Γ于点X，所以Y不在BI_c上，Y在BI_a上.

其次，我们要证B、R、X、Y共圆. 以α、β、γ表示$\triangle ABC$的三个角，容易验证以下等式成立：

$$\angle MCK=90^\circ-\frac{\beta}{2},\ \angle ABI_a=90^\circ+\frac{\beta}{2},\ \angle AI_aB=\frac{\gamma}{2}.$$

由前两式可得　$\angle MCK+\angle RBY=\angle MCK+\angle ABI_a=180^\circ$.

由第三式可得　$\angle RXB=\angle MXB=\angle MCB=\dfrac{\gamma}{2}=\angle AI_aB$.

暂时假设点X在由平行线I_aI_c与KM所作成的有限带内，则

$\angle RXY=\angle MXY=180^\circ-\angle MXK=\angle MCK=180^\circ-\angle RBY$.

所以，B、R、X、Y共圆.

当X位于这个带的外部时，结论同样也成立，但对$\angle RXY$的计算需做一些变动.

于是　$\angle RYB=\angle RXB$. 因而$\angle RYB=\angle AI_aB$.

由此　$RY /\!/ AI_a$，也即　$RY /\!/ AK$.

按照P的定义，Y与P重合. 换言之，KP过点X，由对称性，LQ也过点X.

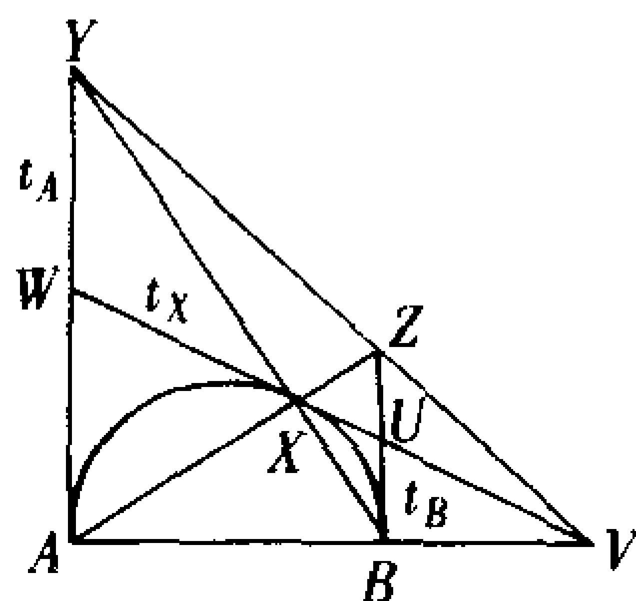
注　当R取遍AB(含A、B)时，结论也成立，证明基本思路同，但需区别更多的情况. 若运用向量知识证明似较简，问题的一般形式为：

$\triangle ABC$的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的平分线分别交外接圆于点K，L，M. 设R是AB上的点，过R作平行于AK，BL的两直线分别交$\angle B$、$\angle A$外角平分线于P、Q.

试证 KP、LQ、MR 共点.

5·51 已知:直径为 AB 的圆和圆上另一点 X,设 t_A、t_B、t_X 分别是这个圆在 A、B、X 的切线.设 Z 是直线 AX 与 t_B 的交点,Y 是直线 BX 与 t_A 的交点.求证:三直线 YZ、t_X、AB 或者平行,或者交于一点.

(第 6 届加拿大数学奥林匹克,1974 年)



[证 1] (1)如果 $t_X /\!/ AB$,这时有 $YZ /\!/ AB$,因此 YZ、t_X 与 AB 互相平行.

(2)如果 t_X 不与 AB 平行.

设 t_X 分别交直线 AB、BZ、AY 于 V、U、W. 我们只需证明 V、Z、Y 共线即可证出 YZ、t_X、AB 交于一点(这点是 V).

由切线长定理有 $WA = WX$,

$\therefore\ \angle AYX = \angle YXW$,

于是 $WA = WX = WY$, 即 W 是 AY 的中点.

同理 U 是 BZ 的中点.

因此 V、Z、Y 共线.

[证 2] 记 $\angle XAB = \alpha$, 于是 $\angle AYB = \alpha$, $\angle AWV = 2\alpha$.

$$\therefore\ AZ = \frac{AB}{\cos\alpha},\ AX = AB\cos\alpha.$$

$$\therefore\ XZ = AZ - AX = AB\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = AB\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\therefore\ \frac{AZ}{XZ} = \frac{\frac{AB}{\cos\alpha}}{\frac{AB\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

$$\because\ WA = WX,\ WV = \frac{AW}{\cos2\alpha},$$

$$\therefore\ XV = WV - WX = AW\left(\frac{1}{\cos2\alpha} - 1\right) = AW\,\frac{2\sin^2}{\cos2\alpha}.$$

$$\therefore\ \frac{XV}{WV} = 2\sin^2\alpha.$$

又$\because\ AY = 2WY$,

$$\therefore\ \frac{WY}{AY}\cdot\frac{AZ}{XZ}\cdot\frac{XV}{WV} = 1.$$

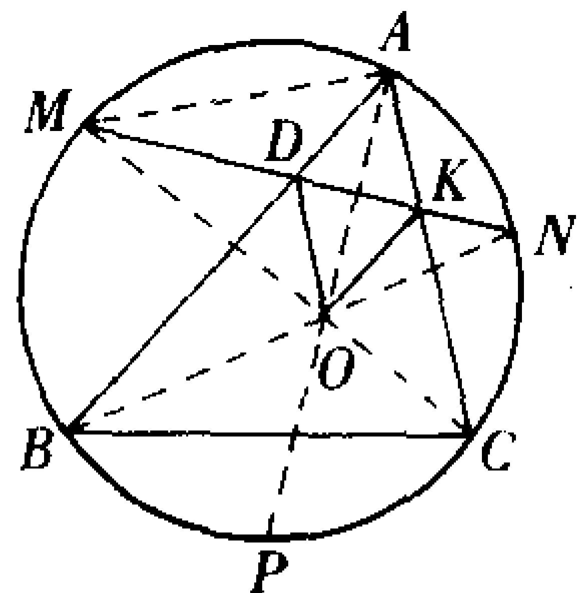
由梅涅劳斯定理的逆定理知 Y、Z、V 三点共线. 所以 YZ、t_X、AB 若不平行则必共点.

5·52　(1)连结$\triangle ABC$的外接圆弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$之中点的线段与边AB、AC分别交于点D、K. 试证:点A、D、K以及三角形ABC的内心O是一个菱形的四个顶点.

(2)T_1和T_2为圆内接三角形,同时T_1的顶点是T_2的顶点分圆周所得弧的中点. 求证:在六边形$T_1\cap T_2$中,连结相对顶点的对角线平行于三角形T_1的边且相交于一点.

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[证]　(1)设O为$\triangle ABC$的内心,则有$\overset{\frown}{AB}$中点M与O、C在一直线上,且$\overset{\frown}{AC}$中点N与O、B在一直线上,$\overset{\frown}{BC}$中点P与O,A在一直线上.



由　$\overset{\frown}{MP}+\overset{\frown}{AN}=180°$, 知　$AP\perp MN$.

$\because$　AO平分$\angle BAC$,

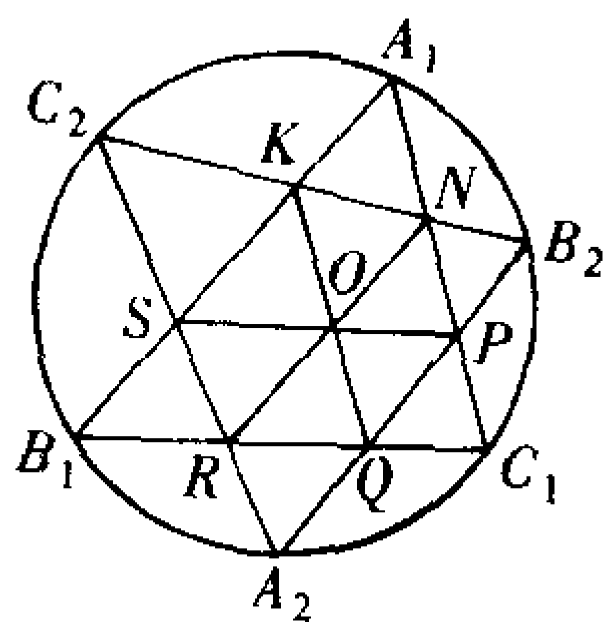
$\therefore$　$AD=AK$, $OD=OK$.

又　$\angle AMN=\angle CMN$, $\therefore$　$MA=MO$, 即MN为AO中垂线.

$\therefore$　$AD=DO$, $AK=KO$.

故　$AD=DO=OK=KA$, 即　A、D、O、K为一菱形四顶点.

(2)如图,设$\triangle A_1B_1C_1$为T_1,$\triangle A_2B_2C_2$为T_2,设O为$\triangle A_1B_1C_1$的内心,因为A_2为$\overset{\frown}{B_1C_1}$的中点. B_2为$\overset{\frown}{C_1A_1}$的中点,C_2为$\overset{\frown}{A_1B_1}$的中点.



依(1)的结果可知:A_1KON、B_1ROS、C_1POQ都是菱形.

有　$OS/\!/B_1C_1$, $OP/\!/B_1C_1$.

所以　S、O、P三点共线.

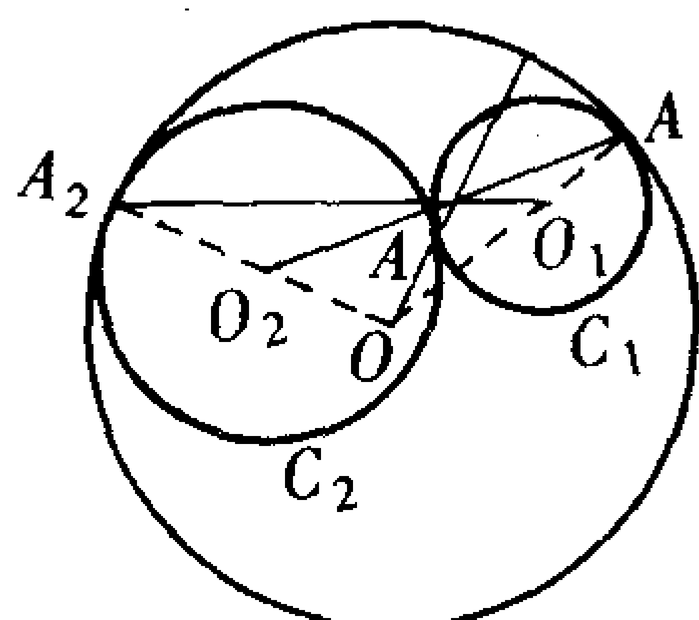
同理　R、O、N三点共线,K、O、Q三点共线.

因此$T_1\cap T_2$所得六边形$KNPQRS$中对角线SP、KQ、NR相交于一点O,且$SP/\!/B_1C_1$,$KQ/\!/A_1C_1$,$RN/\!/A_1B_1$.

5·53　在以O为圆心,r为半径的圆C内,有两个互相外切于点A的圆C_1、圆C_2,圆C_1、C_2分别与圆C内切于A_1、A_2点. 圆C_1、C_2

的圆心为 O_1、O_2.求证:三条直线 OA、O_1A_2 和 O_2A_1 共点.

(亚太地区数学奥林匹克,1992年)



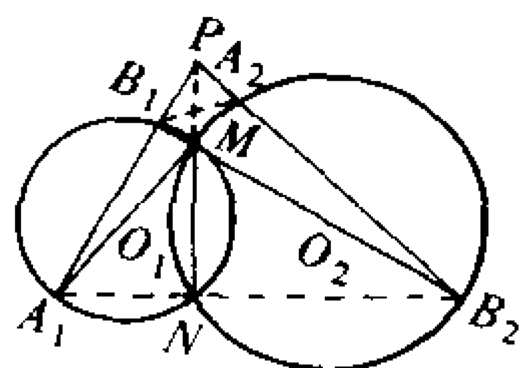
[证] 设圆 C_1 的半径为 r_1,圆 C_2 的半径为 r_2.在 $\triangle OO_1O_2$ 中,

$$\frac{OA_1}{A_1O_1}\cdot\frac{O_1A}{AO_2}\cdot\frac{O_2A_2}{A_2O}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理可知,OA、O_1A_2 和 O_2A_1 三直线共点.

5·54 两个圆的圆心分别是 O_1 和 O_2,它们相交于 M 点和 N 点.直线 O_1M 交第一个圆于 A_1 点,交第二个圆于 A_2 点;直线 O_2M 交第一个圆于 B_1 点,交第二个圆于 B_2 点.求证:直线 A_1B_1、A_2B_2、MN 相交于同一点.

(莫斯科数学奥林匹克,1960年)



[证1] 如图,设 A_1B_1、A_2B_2 交于 P 点,连 PM、A_2B_1、A_1B_2.

∵ $\angle A_1NM+\angle MNB_2=90^\circ+90^\circ=180^\circ$,

∴ N 过 A_1B_2.

∵ P、A_2、M、B_1 四点共圆,

∴ $\angle PMB_1=\angle PA_2B_1$,

∵ B_1、A_2、B_2、A_1 四点共圆,

∴ $\angle PA_2B_1=\angle B_1A_1B_2=\angle B_2MN$.

即 $\angle PMB_1=\angle B_2MN$, 而 B_1、M、B_2 共线.

∴ P、M、N 共线.

即 A_1B_1、A_2B_2、MN 交于 P 点.

[证2] 连结 A_1N、NB_2,则有 $\angle A_1NM=90^\circ=\angle B_2NM$.

∴ A_1、N、B_2 三点共线.

记直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点为 P.

∵ $\angle MB_1A_1=90^\circ=\angle MA_2B_2$,

∴ 点 M 为 $\triangle PA_1B_2$ 的垂心.

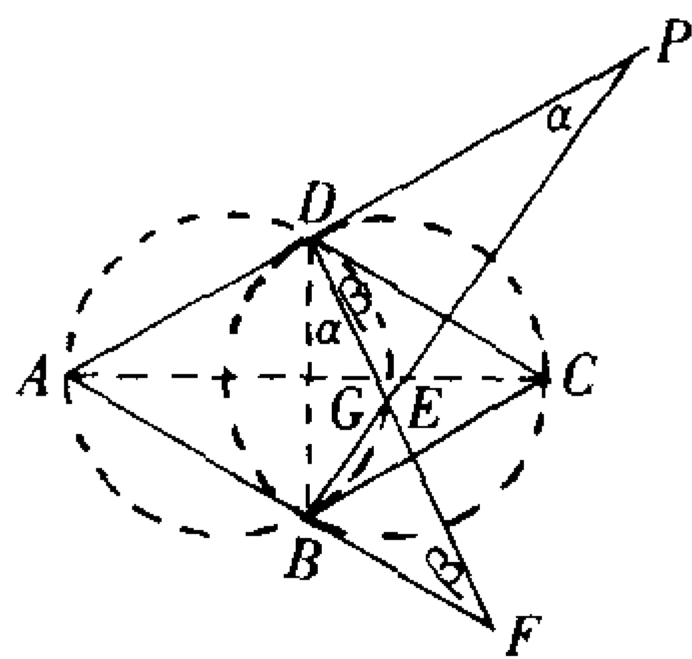
∵ $MN\perp A_1B_2$, ∴ MN 与 $\triangle PA_1B_2$ 的 A_1B_2 上的高线重合,即直线 MN 也过点 P.

∴ A_1B_1、A_2B_2、MN 三线共点.

5·55 在菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=60^\circ$,E 为$\triangle ABD$ 的外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{BD}$上的任意一点,直线 DE 与AB 交于点 F,求证:AD、BE、CF 三线共点.

(中国国家集训队测验题,1997 年)

[证 1] 连结 AC,并记 $AC\cap DE=G$, $BE\cap AD=P$.



设$\angle BDF=\alpha$, $\angle FDC=\beta$,

于是 $\alpha+\beta=60^\circ$且$\angle DBE=\beta$,$\angle EBC=\alpha$, $\angle AFG=\beta$, $\angle P=\alpha$.

记 $AD=a$. 由正弦定理有

$$AP=\frac{a\sin(60^\circ+\beta)}{\sin\alpha},\quad DF=\frac{a\cdot\sin60^\circ}{\sin\beta},$$

$$\begin{aligned}DP&=AP-AD=\frac{a(\sin(60^\circ+\beta)-\sin\alpha)}{\sin\alpha}\\&=\frac{a(\sin(60^\circ+\beta)-\sin(60^\circ-\beta)}{\sin\alpha}\\&=\frac{2a\cos60^\circ\sin\beta}{\sin\alpha}\\&=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\end{aligned}$$

$$GC=\frac{a\sin\beta}{\sin(90^\circ+\alpha)},\quad AG=\frac{a\sin(60+\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)},$$

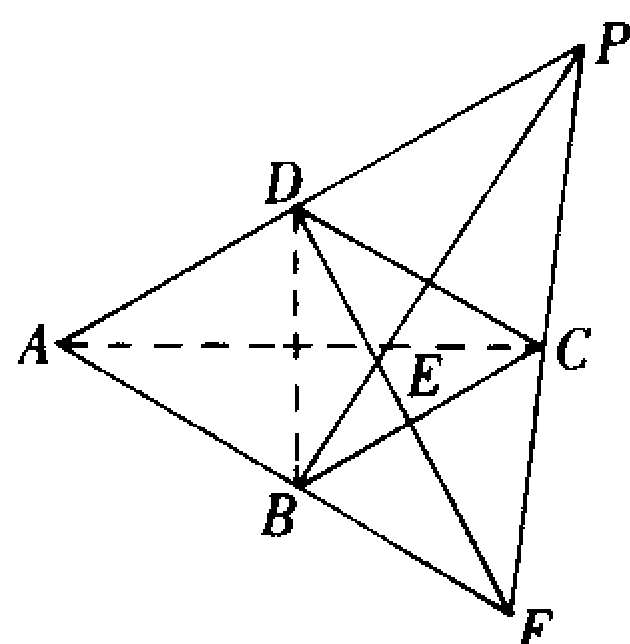
$$GF=\frac{AG\sin30^\circ}{\sin\beta}=\frac{a\sin(60+\alpha)}{2\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta}.$$

又∵ $AC=\sqrt{3}a$.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{DP}{AP}\cdot\frac{AC}{CG}\cdot\frac{GF}{FD}\\&=\frac{\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\beta)\cdot\sin\beta\cdot2\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\sin\beta\cdot\sin60^\circ}\\&=1.\end{aligned}$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 F、C、P 三点共线,即 AD、BE、CF 三线共点.

[证 2] 设 $AD=a$,$\angle BDF=\alpha$,$\angle DBE=\beta$,于是 $\alpha+\beta=60^\circ$.



记 $AD\cap BE=P$,连结 AC、PC、PF、CF.

由正弦定理有

$$AF=\frac{AD\sin\angle ADF}{\sin\angle AFD}=\frac{a\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin\beta},$$

$$AP=\frac{AB\sin\angle ABP}{\sin\angle APB}=\frac{a\sin(60^\circ+\beta)}{\sin\alpha}=\frac{a\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin\alpha}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}AF\cdot AC\cdot\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin\beta},$$

$$S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}AP\cdot AF\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sin^2(60^\circ+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$$\because\quad \sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)=2\sin30^\circ\cos(30^\circ-\alpha)=\sin(60^\circ+\alpha),$$

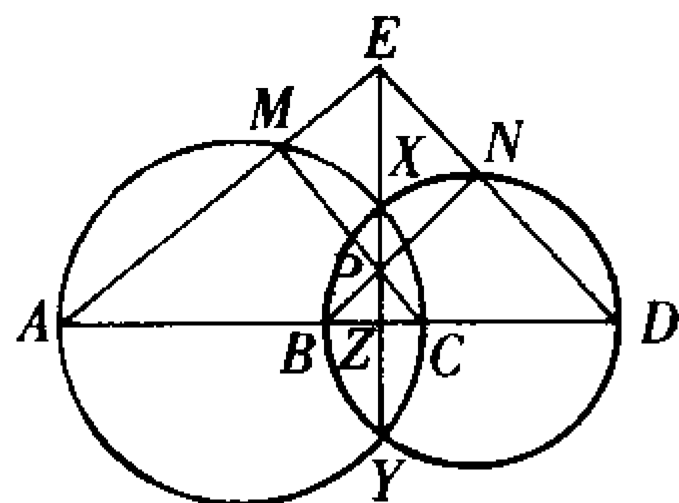
$$\therefore\quad \frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$\therefore\quad S_{\triangle APF}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle ACF}$.

$\therefore\quad F$、C、P 三点共线,即 AD、BE、CF 三线共点.

5·56　设 A、B、C、D 是一条直线上依次排列的 4 个不同点,分别以 AC、BD 为直径的两圆交于点 X 和 Y,直线 XY 交 BC 于点 Z,P 为直线 XY 上异于点 Z 的一点,直线 CP 与以 AC 为直径的圆交于 C 和 M,直线 BP 与以 BD 为直径的圆交于 B 和 N,求证:AM、XY、DN 三线共点.

(第 36 届国际数学奥林匹克,1995 年)



[证 1]　记直线 AM 与 XY 的交点为 E,连结 ED.

$\because\quad \angle PCZ=90^\circ-\angle A=\angle AEZ,$

$\therefore\quad \triangle EAZ\backsim\triangle CPZ.\quad \therefore\quad \dfrac{AZ}{PZ}=\dfrac{EZ}{CZ}.$

$\therefore\quad EZ\cdot PZ=AZ\cdot CZ=XZ\cdot YZ=BZ\cdot DZ.$

$\therefore \quad \dfrac{BZ}{EZ}=\dfrac{PZ}{DZ}$. 又$\because \quad \angle PZB=90^\circ=\angle EZD$,

$\therefore \quad \triangle PBZ \backsim \triangle DEZ$.

$\therefore \quad \angle EDZ=\angle BPZ=90^\circ-\angle PBZ=\angle D$.

$\therefore$ 直线 ED 与 ND 重合,即直线 AM、XY、DN 三线共点.

[证 2] 记直线 AM 与 XY 的交点为E,连结 EN.

$\because \quad \angle PCZ=90^\circ-\angle A=\angle MEP,\ \angle EMP=90^\circ=\angle PZC$,

$\therefore \quad \triangle EMP \backsim \triangle CZP$. $\therefore \quad \dfrac{EP}{CP}=\dfrac{MP}{PZ}$.

$\therefore \quad EP\cdot PZ=MP\cdot PC=XP\cdot PY=BP\cdot PN$.

$\therefore \quad \dfrac{EP}{BP}=\dfrac{PN}{PZ}$. 又$\because \quad \angle BPZ=\angle EPN$.

$\therefore \quad \triangle EPN \backsim \triangle BPZ$. $\therefore \quad \angle ENP=\angle BZP=90^\circ$.

$\therefore \quad \angle ENP+\angle PND=180^\circ$,

即 E、N、D 三点共线,亦即 AM、XY、DN 三线共点.

[证 3] 记直线 AM 与 XY 的交点为E,于是直线 AME 与$\triangle PZC$ 的三边延长线都相交,由梅涅劳斯定理有

$$1=\frac{PE}{ZE}\cdot\frac{AZ}{AC}\cdot\frac{CM}{PM}=\frac{PE}{ZE}\cdot\frac{CM}{AC}\cdot\frac{AZ}{PM}. \qquad ①$$

$\because \quad \angle AMC=90^\circ=\angle PZC,\ \angle PZB=90^\circ=\angle BND$,

$\therefore \quad \triangle CAM \backsim \triangle CPZ,\ \triangle BDN \backsim \triangle BPZ$.

$\therefore \quad \dfrac{CM}{AC}=\dfrac{CZ}{PC},\ \dfrac{BN}{BD}=\dfrac{BZ}{BP}$.

$\because \quad AZ\cdot CZ=XZ\cdot YZ=BZ\cdot DZ$,

$MP\cdot PC=XP\cdot PY=BP\cdot PN$,

$$\therefore \quad \frac{CM}{AC}\cdot\frac{AZ}{PM}=\frac{AZ}{MP}\cdot\frac{CZ}{PC}=\frac{BZ}{BP}\cdot\frac{DZ}{PN}=\frac{BN}{BD}\cdot\frac{DZ}{PN}. \qquad ②$$

将②代入①,得到

$$1=\frac{PE}{EZ}\cdot\frac{BN}{BD}\cdot\frac{DZ}{PN}=\frac{PE}{EZ}\cdot\frac{DZ}{BD}\cdot\frac{BN}{PN}.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 E、N、D 三点共线,所以 AM、XY、DN 三线共点.

[证 4] 分别记直线 XY 与 AM、DN 的交点为 E 和 E'. 直线 EPZ 与$\triangle MAC$ 相截,直线 $E'PZ$ 与$\triangle NBD$ 相截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{EM}{EA}\cdot\frac{AZ}{CZ}\cdot\frac{CP}{PM}=1,\quad \frac{NP}{PB}\cdot\frac{BZ}{DZ}\cdot\frac{DE'}{NE'}=1.$$

$\because$ $\angle AZE=\angle EMP=\angle CZP=90^\circ$,

$\angle MEP=\angle AEZ=90^\circ-\angle A=\angle PCZ$,

$\therefore$ $\triangle EAZ\backsim\triangle EPM\backsim\triangle CPZ$.

$\therefore$ $\dfrac{EM}{PM}=\dfrac{CZ}{PZ}$, $\dfrac{CP}{CZ}=\dfrac{EA}{EZ}$.

$\therefore$ $1=\dfrac{EM}{PM}\cdot\dfrac{CP}{CZ}\cdot\dfrac{AZ}{EA}=\dfrac{CZ}{PZ}\cdot\dfrac{EA}{EZ}\cdot\dfrac{AZ}{EA}=\dfrac{CZ}{EZ}\cdot\dfrac{AZ}{PZ}$.

$\therefore$ $EZ=\dfrac{AZ\cdot CZ}{PZ}=\dfrac{XZ\cdot YZ}{PZ}$.

同理　$E'Z=\dfrac{XZ\cdot YZ}{PZ}$.　$\therefore$　$E'Z=EZ$.

$\therefore$　点 E' 与 E 重合.

$\therefore$　AM、XY、DN 三线共点.

[证 5]　分别记直线 XY 与 AM、DN 的交点为 E 和 E'. 由相交弦定理有

$$AZ\cdot CZ=XZ\cdot YZ=BZ\cdot DZ.$$

在 $\triangle EAZ$ 和 $\triangle E'DZ$ 中应用正弦定理有

$$\frac{EZ}{\sin A}=\frac{AZ}{\sin\angle AEZ},\quad \frac{E'Z}{\sin D}=\frac{DZ}{\sin\angle DE'Z}.$$

$$\therefore\quad E'Z=\frac{DZ\cdot\sin D}{\sin\angle DE'Z}=\frac{DZ\cdot\sin\angle BPZ}{\sin\angle PBZ}$$
$$=\frac{DZ\cdot BZ}{PZ}=\frac{AZ\cdot CZ}{PZ}=\frac{AZ\cdot\sin\angle CPZ}{\sin\angle PCZ}$$
$$=\frac{AZ\cdot\sin A}{\sin\angle AEZ}=EZ.$$

$\therefore$　点 E' 与 E 重合.

$\therefore$　AM、XY、DN 三线共点.

[证 6]　分别记直线 XY 与 AM、DN 的交点为 E 和 E'.

$\because$　$\angle EMC=90^\circ=\angle EZC$,

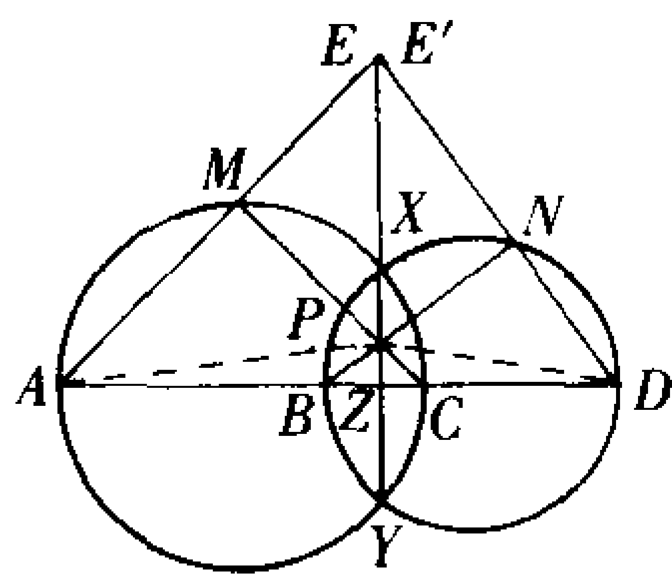
$\therefore$　E、M、Z、C 四点共圆.

$\therefore$　$EP\cdot PZ=MP\cdot PC=XP\cdot PY$.

同理　$E'P\cdot PZ=NP\cdot PB=XP\cdot PY$.

$\therefore\quad EP=E'P.\quad\therefore\quad$ 点 E' 与 E 重合.

$\therefore\quad AM、XY、DN$ 三线共点.



[证 7] 分别记直线 XY 与 $AM、DN$ 的交点为 E 和 E',连结 $PA、PD$.由相交弦定理有

$MP\cdot PC=XP\cdot PY=BP\cdot PN$.

$\because\quad \angle AMP=90^\circ=\angle PND,\ EZ\perp AD,$

$$\therefore\quad \frac{AZ\cdot EP}{DZ\cdot E'P}=\frac{S_{\triangle EAP}}{S_{\triangle E'DP}}=\frac{EA\cdot PM}{E'D\cdot PN}=\frac{EA\cdot PB}{E'D\cdot PC}. \qquad ①$$

$\because\quad \triangle PBZ\backsim\triangle DE'Z,\ \triangle PCZ\backsim\triangle AEZ,$

$$\therefore\quad \frac{PB}{PZ}=\frac{DE'}{DZ},\quad \frac{PZ}{PC}=\frac{AZ}{AE}.$$

$$\therefore\quad \frac{PB}{PC}=\frac{PB}{PZ}\cdot\frac{PZ}{PC}=\frac{DE'}{DZ}\cdot\frac{AZ}{AE}. \qquad ②$$

将②代入①,得到

$$\frac{AZ\cdot EP}{DZ\cdot E'P}=\frac{EA}{E'D}\cdot\frac{DE'}{DZ}\cdot\frac{AZ}{AE}=\frac{AZ}{DZ}.$$

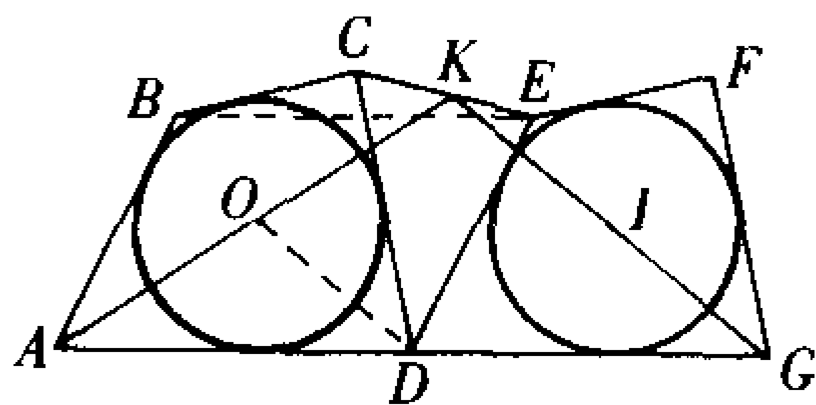
$\therefore\quad EP=E'P.\quad\therefore\quad$ 点 E' 与 E 重合.

$\therefore\quad AM、XY、DN$ 三线共点.

5·57 D 为 AG 的中点,在 AG 的同侧作全等的四边形 $ABCD$ 与 $DEFG$,使它们都有内切圆,圆心分别为 O 与 I.试证:$AD、CE$ 与 GI 共点.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[证] 设 AO 与 GI 交于 K,我们证明 K 在 CE 上.



$\because\quad$ 四边形 $ABCD$ 与 $DEFG$ 全等,

$\therefore\quad GI\,/\!/\,OD,$

由于 D 是 AG 的中点,则 O 是 AK 的中点.

以 O 为坐标原点建立直角坐标系,并设圆 O 的方程为

$$x^2+y^2=1. \qquad ①$$

由于 $AB \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} DE$,则四边形 $ADBE$ 为平行四边形.

设 A 的坐标为(x_A,y_A),余类推,则

$$x_E=x_B+x_D-x_A,$$
$$y_E=y_B+y_D-y_A. \qquad ②$$

直线 CE 的方程为

$$\frac{y-y_C}{y_E-y_C}=\frac{x-x_C}{x_E-x_C}. \qquad ③$$

由于 K 与 A 关于坐标原点 O 对称,则 K 的坐标为$(-x_A,-y_A)$.

证明 K 在 CE 上等价于证明

$$\frac{y_K-y_C}{y_E-y_C}=\frac{x_K-x_C}{x_E-x_C},$$

及 $$\frac{y_A+y_C}{y_E-y_C}=\frac{x_A+x_C}{x_E-x_C}. \qquad ④$$

②代入④得 $$\frac{y_A+y_C}{y_B+y_D-y_A-y_C}=\frac{x_A+x_c}{x_B+x_D-x_A-x_C},$$

即 $$\frac{y_A+y_C}{y_B+y_D}=\frac{x_A+x_C}{x_B+x_D}.$$

即 $(y_Ax_B-y_Bx_A)+(y_Ax_D-x_Ay_D)+(y_Cx_D-x_Cy_D)-(y_Cx_B-x_Cy_B)=0 \qquad ⑤$

∵ O 到 AB 的距离等于 1,

∴ $BA=2S_{\triangle OBA}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x_B&y_B\\1&x_A&y_A\end{vmatrix}$的绝对值$=|x_By_A-y_Bx_A|$. ⑥

同样可得出 AD、DC、CB 的表达式.

由于 $ABCD$ 是圆外切四边形.则

$$BA+DC=AD+CB, \qquad ⑦$$

将表达式⑥等代入⑦式即得⑤式成立.

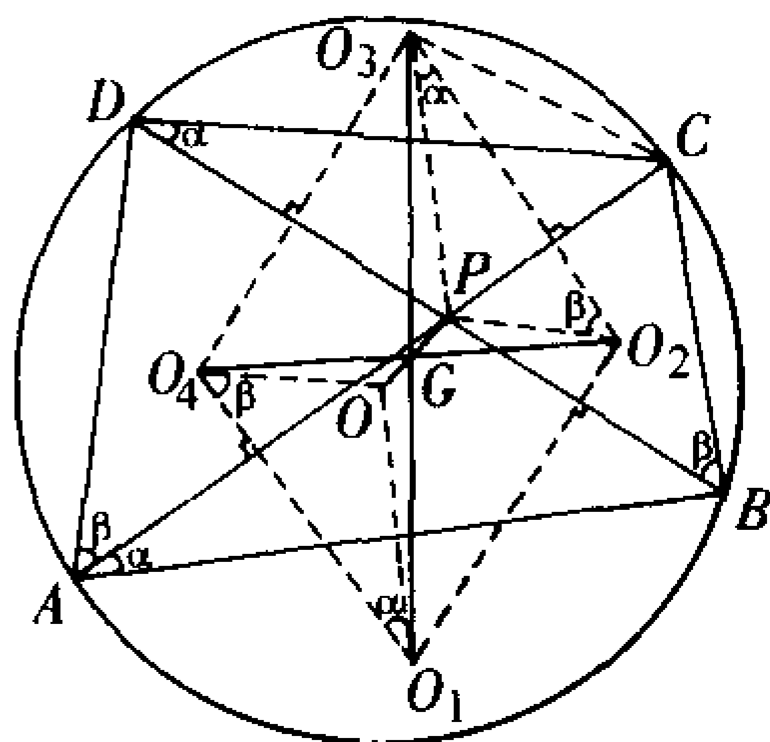
于是可证得④式成立,即 K 在 CE 上,从而 AO、GI、CE 共线.

5·58 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,对角线 AC 与 BD 相交于 P.设 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$ 和 $\triangle DAP$ 的外接圆圆心分别是 O_1、O_2、O_3、O_4.求证:OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点.

(中国高中数学联赛,1990 年)

[证] 如下页图,连 O_1O_2、O_2O_3、O_3O_4、O_4O_1,易证

$O_1O_4 \perp AC$, $O_2O_3 \perp AC$.



$\therefore$ $O_1O_4 /\!/ O_2O_3$,

同理 $O_1O_2 /\!/ O_3O_4$.

$\therefore$ $O_1O_2O_3O_4$ 是平行四边形,

$\therefore$ O_1O_3 与 O_2O_4 相交于 $O_1O_2O_3$ 的中点 G,连 OO_1、OO_4、PO_2、PO_3、CO_3,

记 $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$,

$\angle CAD = \angle CBD = \beta$.

利用 $OO_1 \perp AB$, $O_1O_4 \perp AC$,

可证 $\angle OO_1O_4 = \angle CAB = \alpha$,

再利用 $\angle PO_3O_2 = \frac{1}{2}\angle PO_3C = \angle BDC$,

可证 $\angle PO_3O_2 = \alpha$,

$\therefore$ $\angle OO_1O_4 = \angle PO_3O_2$,

同理 $\angle OO_4O_1 = \angle PO_2O_3$,

而 $O_1O_4 = O_2O_3$, $\therefore$ $\triangle OO_1O_4 \cong \triangle PO_2O_3$,

$\because$ $O_1O_4 /\!/ O_2O_3$, $\therefore$ $\angle OO_1O_4 = \angle O_1O_3O_2$,

$\therefore$ $\angle OO_1O_3 = \angle O_3O_1O_4 - \angle OO_1O_4$

$= \angle O_1O_3O_2 - \angle PO_3O_2 = \angle O_1O_3P$.

$\therefore$ $OO_1 /\!/ PO_3$.

又 $OO_1 = PO_3$, $\therefore$ OO_1PO_3 是平行四边形.

$\therefore$ O_1O_3 与 OP 也相交于 O_1O_3 的中点 G.

所以,OP、O_1O_3、O_2O_4 相交于同一点 G.

5·59 $ABCDEF$ 是凸六边形,若对角线 AD、BE、CF 中的每一条都等分该六边形的面积,问这三条对角线必定共点吗?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

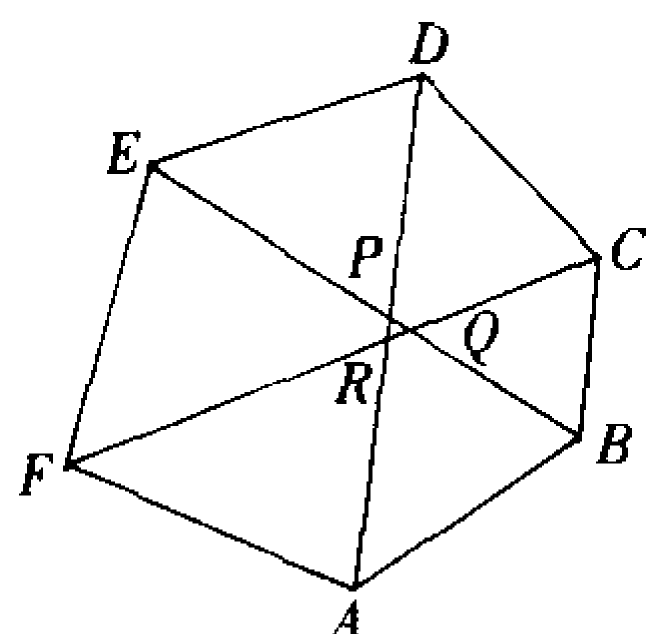
[解] 设 AD、BE 交于 P,BE、CF 交于 Q,CF、AD 交于 R,且 P、Q、R 不同.

不妨设 P 和 DE 在 CF 的同侧.

$\because$ AD 和 BE 是面积的等分线,

$\therefore$ $S_{\triangle PDE} + S_{\text{四边形}PDCB} = S_{\text{四边形}PBCD} + S_{\triangle PBA}$.

$\because$ $S_{\triangle PDE} = S_{\triangle PBA}$.



有　$PA \cdot PB = PD \cdot PE$.

同理　$QC \cdot QB = QE \cdot QF$，$RC \cdot RD = RF \cdot RA$.

$\therefore$　$PA \cdot PB \cdot RC \cdot RD \cdot QE \cdot QF = QC \cdot QB \cdot RA \cdot RF \cdot PD \cdot PE$　①

$\because$　$PA > RA$，$PB > QB$，$RC > QC$，
$RD > PD$，$QE > PE$，$QF > RF$，

$\therefore$　$PA \cdot PB \cdot RC \cdot RD \cdot QE \cdot QF > QC \cdot QB \cdot RA \cdot RF \cdot PD \cdot PE$　②

①式与②式相悖，因而假设不真，从而 AD、BE、CF 三线共点.

5·60　(1)已知：一个正六边形，六个正方形和六个正三角形的边长都相等.求证：用它们能拼成一个既不重叠又不留空隙的正十二边形.

(2)设 $P_1, P_2, \cdots, P_{12}$依次为正十二边形的顶点.求证：三条对角线 P_1P_9、P_2P_{11}、P_4P 12交于一点.

（第24届美国普特南数学竞赛，1963年）

［证］　(1)在边长为 a 的正六边形的每边上向外各作一个正方形，于是每两个共顶点的正方形的两邻边的夹角为

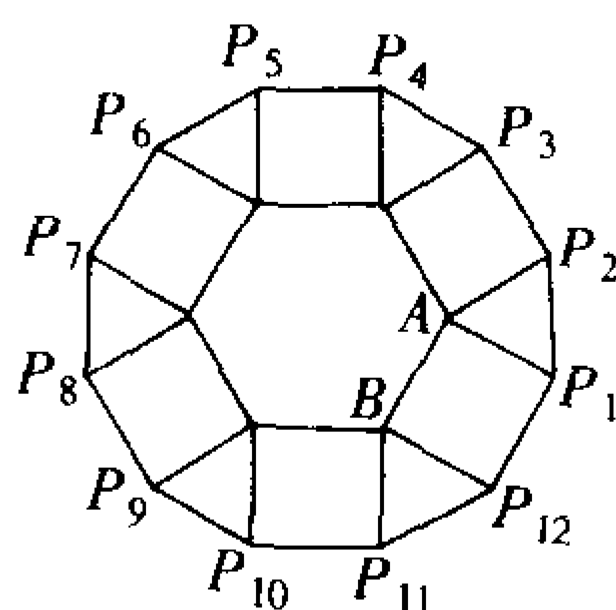
$$360° - 90° - 120° - 90° = 60°.$$

因此，在这六个正方形的相邻空隙里，恰好可安放六个边长为 a 的正三角形.

这样，就拼成了符合本题要求的正十二边形，边长为 a，每个顶角等于 $90° + 60° = 150°$.

(2)因为正十二边形有一个外接圆，所以$\angle P_1P_{12}P_4$ 是$\overparen{P_1P_4}$所对圆心角的一半，又因

$$\angle P_1P_{12}P_4 = 360° \times \frac{3}{12} \times \frac{1}{2} = 45°.$$



所以 $P_{12}P_4$ 所在直线与正方形 P_1ABP_{12}的一条对角线所在直线重合.

同理，P_1P_9 所在直线与正方形 P_1ABP_{12}的另一条对角线所在直线重合.

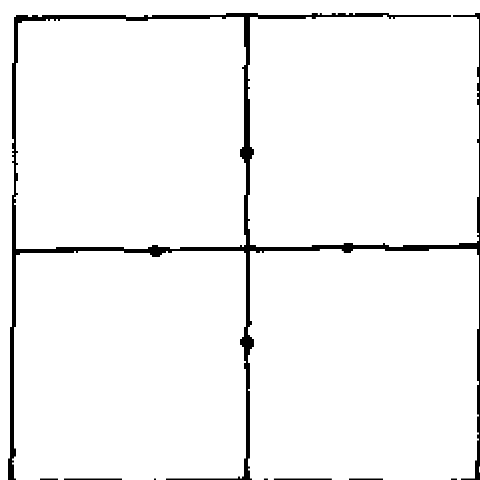
另一方面，P_2P_{11}显然是六边形 $P_1P_2ABP_{11}P_{12}$的对称轴，因此正十二边形的三条对角线 P_1P_9、P_2P_{11}、P_4P_{12}交于正方形 P_1ABP_{12}的中

心.

5·61　9条直线中的每一条都把正方形分成面积之比为2∶3的两个四边形.试证:这9条直线中至少有3条相交于一点.

(第6届全苏数学奥林匹克,1972年)

［证］　如果一条直线把正方形分成面积比为2∶3的两个四边形,则这两部分是梯形(或矩形),那么这条直线把位于这两个梯形中位线上的正方形的一组对边中点的连接线段分成2∶3两部分.



即这条直线过正方形对边中点连结线段的2∶3分点.

这样的分点如图所示共有四个.而这样的直线共有9条,根据抽屉原则,至少有3条直线相交于这4个点中的某一个点.

5·62　50条线段在一条直线上,证明下列结论至少一个正确:(1)某8条线段有公共点.(2)存在8条线段,其中的任意两条都没有公共点.

(第6届全苏数学奥林匹克,1972年)

［证］　设$[a_1,b_1]$是右端点最小的线段.如果包含b_1点的线段数大于7,问题就解决了.

如果小于或等于7,那么至少有43条线段上的所有点完全在$[a_1,b_1]$右边,在它们中取右端点最小的线段设为$[a_2,b_2]$,那么要么b_2属于8条线段,要么有36条线段在b_2的右边.

依此类推,我们或者可找出一点同时在8条线段上,或者可得到7条两两无公共点的线段$[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_7,b_7]$.

一般地,在$[a_k,b_k]$右边有不少于$50-7k$条线段,因而在$[a_7,b_7]$右边还至少有一条线段$[a_8,b_8]$.

5·63　在平面上有$n(\geqslant 3)$条线段,其中任何3条都有公共点.求证:所有这n条线段有一个公共点.

(波兰数学奥林匹克,1958年)

［证］　如果已知线段$a_1,a_2,\cdots,a_n$中有两条,比如说a_1和a_2不在一条直线上,因而它们有一个公共点A.设$a_3,a_4,\cdots,a_n$中的任一条a_k,由题设a_1,a_2,a_k有公共点,因而a_k含有点A,因此,所有线段$a_1,a_2,\cdots,a_n$都含有点A,即所有这n条线段都有公共点.

如果已知线段 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的任何两条都在一条直线上,由于任何 3 条都有公共点,则这 n 条线段都在同一直线上.

下面我们用数字归纳法证明所有 n 条直线在同一直线上,任何二条都有公共点,那么所有线段有一个公共点.

(1)$n=2$ 时,命题显然成立.

(2)假设 $n=k$ 时,命题成立,我们证明 $n=k+1$ 时命题成立.

设线段 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 有公共点 P,线段 a_{k+1}的端点为 M、N.

如果 P 点落在点 M、N 之间或者与其中一点重合,那么 P 就是线段 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$的公共点.

如果点 M 落在点 P、N 之间,由于线段 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中每条都含有点 P,又由假设,它们也都含有线段 MN 的某个点 Q,因而它们含有整条线段 PQ,而 M 属于线段 PQ,所以 M 是线段 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 的公共点.

同理,如果点 N 落在 M、P 之间,那么 N 就是线段 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的公共点.

因而　命题对 $n=k+1$ 成立.

于是　命题对 $n\geqslant 2$ 成立.

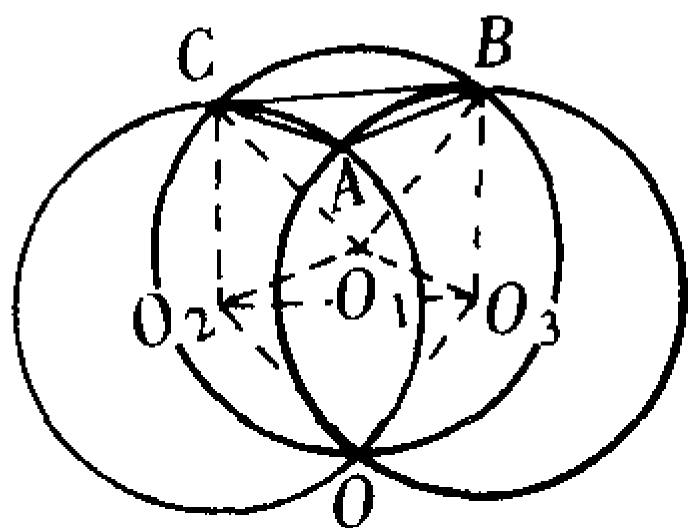
第六章　点共圆或圆共点

(一)点共圆

6·1　三个半径都为 r 的圆相交于一点 O,另外两两相交于点 A、B、C.求证:通过点 A、B、C 可以作一个半径仍为 r 的圆.

(匈牙利数学奥林匹克,1923 年)

[证]　设圆 OBC、OCA 和 OAB 的圆心为 O_1、O_2、O_3.



连 OO_1、OO_2、OO_3,则

$$OO_1=OO_2=OO_3=r.$$

则　$\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆的圆心是 O,半径是 r.

由于四边形 OO_1CO_2 和 OO_1BO_3 都是边长为 r 的菱形,于是

$$O_2C \mathrel{\underline{\parallel}} OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_3B=r,$$

从而四边形 O_2O_3BC 是平行四边形.

$\therefore$　$O_2O_3=BC$.

同理可证　$O_3O_1=CA$,　$O_1O_2=AB$.

因此有　$\triangle ABC\cong\triangle O_1O_2O_3$.

所以$\triangle ABC$ 的外接圆半径与$\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆半径都等于 r.

6·2　在$\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为钝角,点 E 和 H 位于边 AB 上,点 K 和 M 分别位于边 AC 和 BC 上,使得 $AH=AC$,$EB=BC$,$AE=AK$,BH

$=BM$.试证:E,H,K,M四点共圆.

(莫斯科数学奥林匹克,1972年)

[证] 连结KE、CH.

∵ $AH=AC, AE=AK$,

∴ $KE /\!/ CH$, $KC=EH$,

即 四边形$KEHC$是等腰梯形.

∴ K、E、H、C四点共圆,即点K在$\triangle CEH$的外接圆$\odot O$上.

同理 点M在$\odot O$上.

故 E、H、K、M四点共圆.

6·3 一个能够内接于一圆的四边形称为可内接的,一个能够外切于一圆的四边形称为可外切的.证明:若一个边长为a、b、c、d的可外切四边形具有面积$A=\sqrt{abcd}$,则它也是可内接的.

(第31届美国普特南数学竞赛,1970年)

[证] 因为四边形是圆的外切四边形,则

$a+c=b+d$, $a-b=d-c$.

设k为四边形的一条对角线长,α和β是对角线k所对的四边形的两个内角,由余弦定理可有

$$k^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta.$$

在上式两边减去$(a-b)^2=(d-c)^2$,则

$$2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta). \quad ①$$

由于四边形的面积A为

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\alpha=\sqrt{abcd},$$

则
$$\begin{aligned}4A^2&=4abcd\\&=a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta\\&=a^2b^2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)+c^2d^2(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)\\&\quad+2abcd\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

由①式可得

$$\begin{aligned}4abcd&=abcd(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)+abcd(1+\cos\beta)(1-\cos\alpha)\\&\quad+2abcd\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

即 $4=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$,

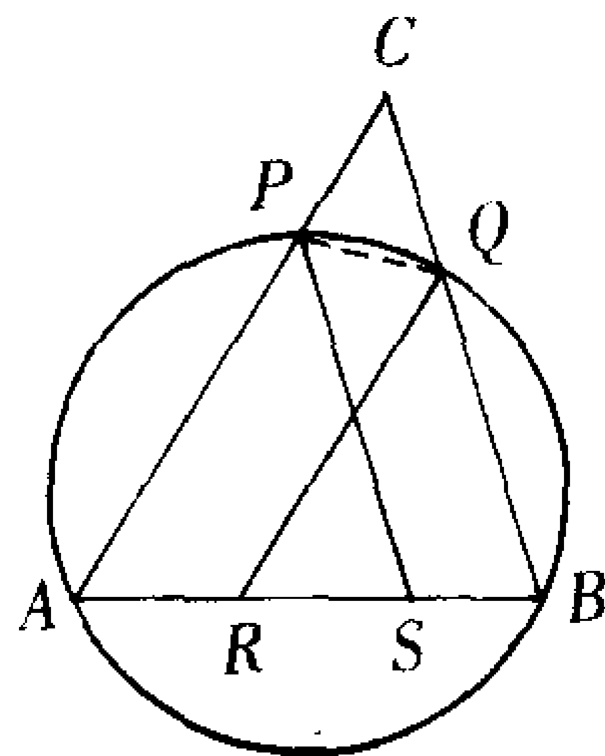
有　$\cos(\alpha+\beta)=-1$.

由于　$0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, 则　$\alpha+\beta=\pi$.

即这个四边形是圆内接四边形.

6·4　过$\triangle ABC$的顶点A和B作一圆,分别交边AC、CB于交P和Q,过Q作$QR\parallel CA$交AB于点R,过P作$PS\parallel CB$交AB于点S,求证:P、Q、R、S四点共圆.

(前苏联教委推荐试题,1988年)



[证]　连结PQ,于是有　$\angle PQC=\angle A$.

∵　$QR\parallel CA$,

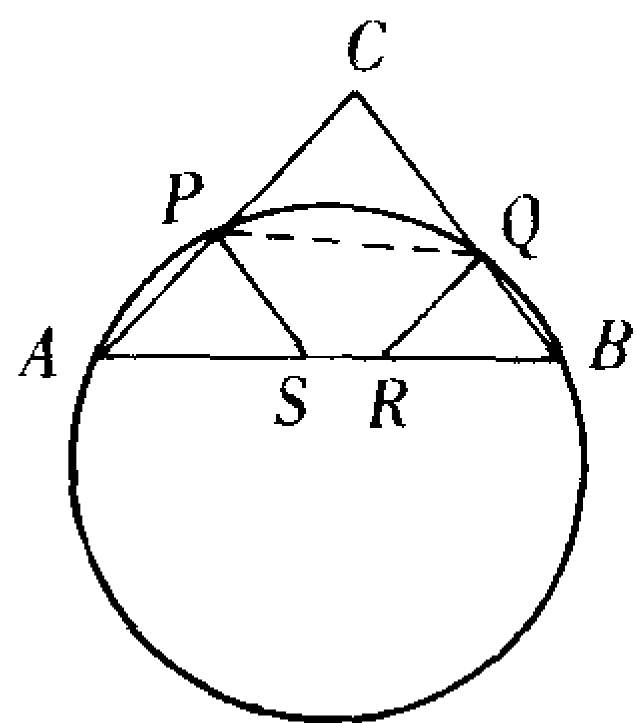
∴　$\angle RQB=\angle C$.

∴　$\angle PQR=\angle B$.

∵　$PS\parallel CB$,

∴　$\angle PSA=\angle B=\angle PQR$.

∴　P、Q、R、S四点共圆.



6·5　在直角$\triangle ABC$的两条直角边AC、BC上各取一点D和E,由顶点C分别向直线DE、EA、AB和BD引垂线,求证:所得的4个垂足共圆.

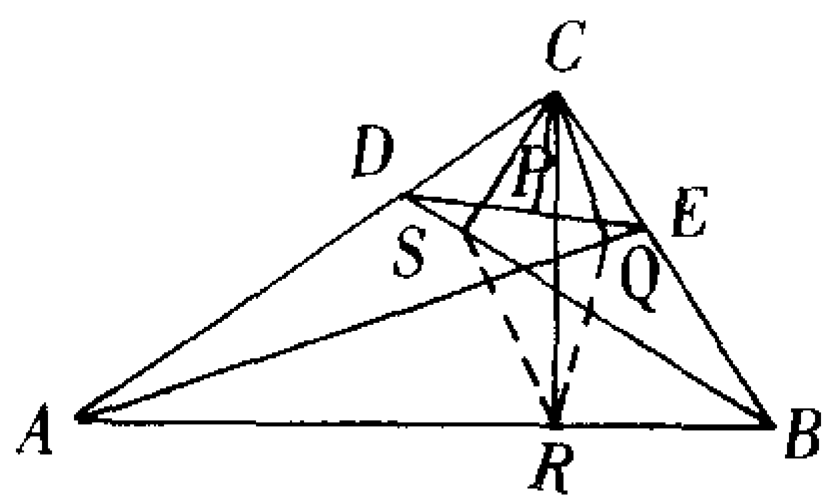
(前苏联教委推荐试题,1989年)

[证1]　∵　$\angle ARC=90^\circ=\angle AQC$,

∴　A、R、Q、C四点共圆.

∴　$\angle CRQ=\angle CAQ=\angle ECQ$.

同理　$\angle CRS=\angle CBS=\angle DCS$.



∵　$\angle CPE=90^\circ=\angle CQE$,

∴　C、P、Q、E四点共圆.

∴　$\angle QPE=\angle ECQ=\angle CRQ$.

同理　$\angle SPD=\angle CRS$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle SPQ+\angle SRQ &=\angle SPQ+\angle SRC+\angle CRQ\\ &=\angle SPQ+\angle SPD+\angle QPE\\ &=180^\circ.\end{aligned}$$

∴　P、Q、R、S四点共圆.

[证 2] ∵ $\angle ARC=90^\circ=\angle AQC$，$\angle DSC=90^\circ=\angle DPC$，

∴ A、R、Q、C 和 D、S、P、C 都四点共圆.

∴ $\angle AQR=\angle ACR$，$\angle BSP=\angle DCP$.

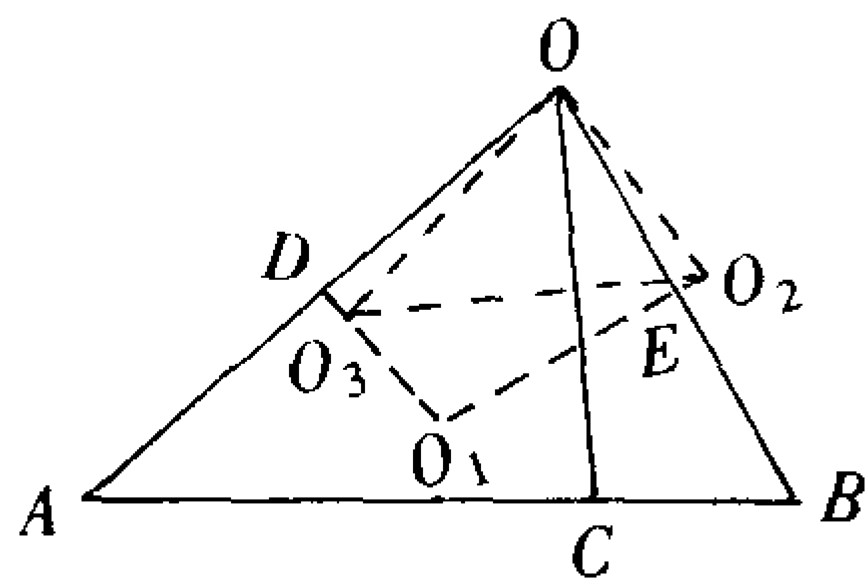
同理 $\angle BSR=\angle BCR$，$\angle AQP=\angle ECP$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle PSR+\angle PQR&=\angle PSB+\angle BSR+\angle PQA+\angle AQR\\&=\angle DCP+\angle BCR+\angle ECP+\angle ACR\\&=180^\circ.\end{aligned}$$

∴ P、Q、R、S 四点共圆.

6·6 给定同一条直线上的三个点 A、B、C，和直线外一点 O. 将 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OAC$ 的外接圆圆心分别记作 O_1、O_2、O_3. 求证：O_1、O_2、O、O_3 四点共圆.

（莫斯科数学奥林匹克，1964 年）



[证] 不失一般性，假定 C 位于 A 和 B 之间. 如图，连 O_1O_2、O_2O_3 分别交 OB、OA 于 E、D，连 OO_1、OO_2、O_2O_3.

由三角形外接圆性质以及四点共圆的判定.

注意到 O_1、O_3、D 共线，其中 D 是 OA 的中点；O_1、O_2、E 共线，其中 E 是 OB 的中点.

在 $\odot O_3$ 即 $\triangle OAC$ 的外接圆中，$\angle OO_3D=\angle OCA$.

在 $\odot O_2$ 即 $\triangle OBC$ 的外接圆中，$\angle OO_2E=\angle OCA$.

∴ $\angle OO_3D=\angle OO_2E$，故 O_1、O_2、O、O_3 四点共圆.

6·7 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，点 X 是 $\triangle ABC$ 内的一点，$\triangle XBC$ 的内切圆也与 BC 切于点 D 并与 CX、XB 分别切于点 Y 和 Z，求证：E、F、Z、Y 四点共圆.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

[证 1] 若 $EF\parallel BC$. 则 $AB=AC$. 这时 AD 为图形的对称轴，因而四边形 $EFZY$ 是等腰梯形，当然四点共圆.

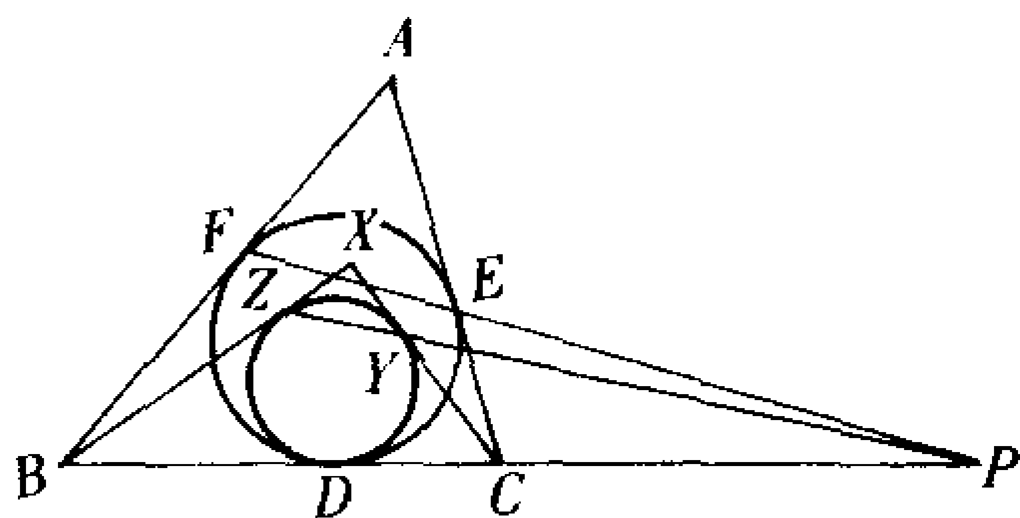
若 EF 不平行于 BC，记两条直线的交点为 P. 由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

$\because$ $AF=AE$，$XZ=XY$，

$CE=CD=CY$，

$BF=BD=BZ$，



$$\therefore\quad 1=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CE}{AE}$$

$$=\frac{BP}{BF}\cdot\frac{CE}{CP}=\frac{BP}{BZ}\cdot\frac{CY}{CP}$$

$$=\frac{XZ}{BZ}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CY}{XY}.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 Z、Y、P 三点共线.

$\therefore$ $PZ\cdot PY=PD^2=PE\cdot PF$.

$\therefore$ E、F、Z、Y 四点共圆.

[证 2] 设 FE、BC 相交于 L，则由梅涅劳斯定理有

$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{CL}{LB}=\frac{EC}{BF}=\frac{CD}{DB}.$$

$\therefore$ L 是 BC 延长线上一个定点(即$\angle A$ 的外角平分线与 BC 的交点).

同理　YZ 与 BC 的交点也是 L.

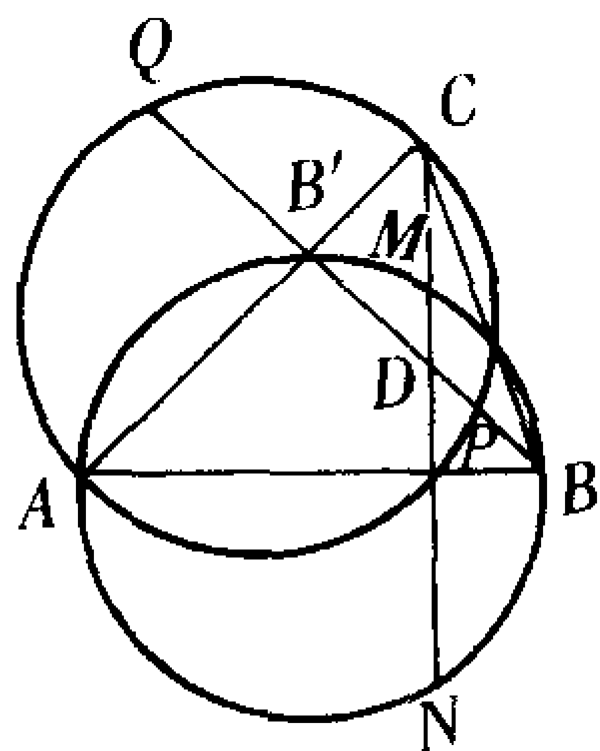
$\because$ $LE\cdot LF=CD^2=LY\cdot LZ$，

故四边形 $EFZY$ 是圆内接四边形.

6·8　给出平面上一个锐角$\triangle ABC$，以 AB 为直径的圆与 AB 边的高线 CC' 及其延长线交于 M、N，以 AC 为直径的圆与 AC 边的高线及其延长线交于 P、Q. 求证：M、N、P、Q 共圆.

(第 19 届美国数学奥林匹克，1990 年)

[证 1]　由于 AB 是圆的直径，且 $AB\perp CN$，则 AB 是 MN 的垂直平分线.



同样，AC 是 PQ 的垂直平分线.

由于$\triangle ABM$ 为直角三角形，$MC'\perp AB$，则由射影定理有

$$AM^2=AB\cdot AC'=AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC.$$

同理　$AP^2=AC\cdot AB'=AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$.

$\therefore \quad AM = AP$.

进而有 $\quad AM = AN = AP = AQ$.

所以 M、N、P、Q 四点在以 A 为圆心的圆上.

[证 2] 设 MN 和 PQ 交于 D,则由相交弦定理得

$$DP \cdot DQ = DC \cdot DC', \tag{①}$$

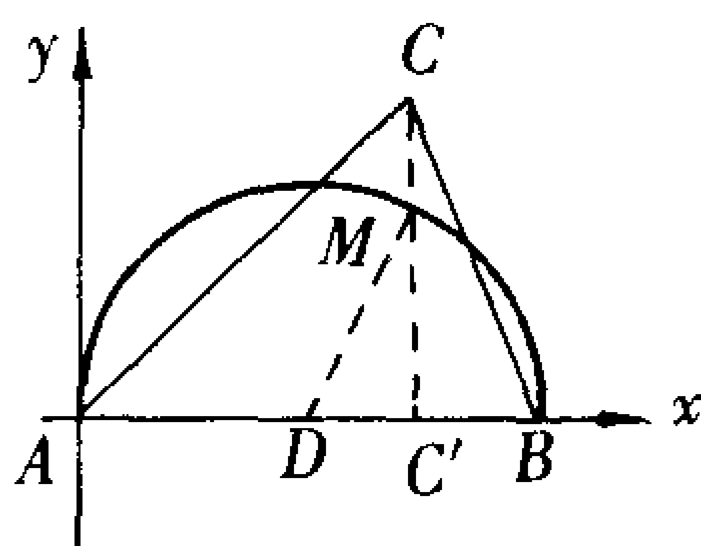
$$DM \cdot DN = DB \cdot DB'. \tag{②}$$

由 $\angle CC'B = \angle CB'B = 90°$, 可得 C、B、C'、B' 四点共圆.

于是 $\quad DC \cdot DC' = DB \cdot DB'$. ③

从而由①、②、③有 $\quad DP \cdot DQ = DM \cdot DN$.

即 P、Q、M、N 共圆.



[证 3] 如图引进直角坐标系,设 $A(0,0)$,$B(b,0)$,$C(c,d)$,则以 AB 为直径的圆的圆心为 $D\left(\frac{b}{2},0\right)$,半径为 $\frac{b}{2}$.

设 $M(c,m)$,由两点间距离公式有

$$\left(c-\frac{b}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

即 $\quad m^2 + c^2 = bc$.

$\because \quad AM^2 = m^2 + c^2$,

及 $\quad bc = AC' \cdot AB = AB \cdot AC\cos A$.

$\therefore \quad AM^2 = AB \cdot AC\cos A$.

由 $\quad M$、P 的地位对称可得 $\quad AP^2 = AC \cdot AB\cos A$.

$\therefore \quad AM = AP$.

同理可得 $\quad AM = AN = AP = AQ$.

$\therefore \quad M$、N、P、Q 四点共圆.

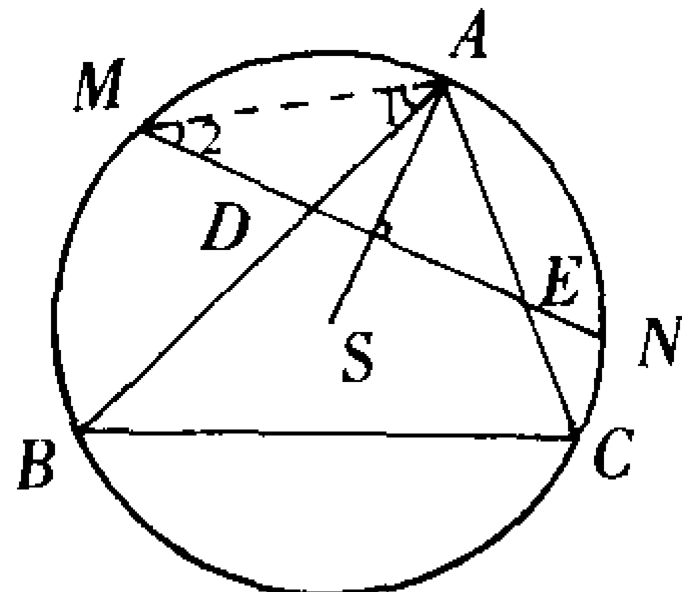


图 1

6·9 已知:$\triangle ABC$ 内接于圆 S,点 S 为圆心,直线 p 垂直于直线 AS 且与 AB、AC 分别交于 D 和 E.求证:B、C、D、E 四点共圆.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1989 年)

[证] 分下面四种情况讨论:

(1)直线 p 与 $\triangle ABC$ 两边相交,且与圆 S 交于两点 M、N(图 1)

$\because\quad AS\perp MN$，$\therefore\quad \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$.

又 $\angle ADE=\angle 1+\angle 2$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AN})$的度数

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AM})$的度数

$=\angle C$.

因此，B、C、D、E 四点共圆.

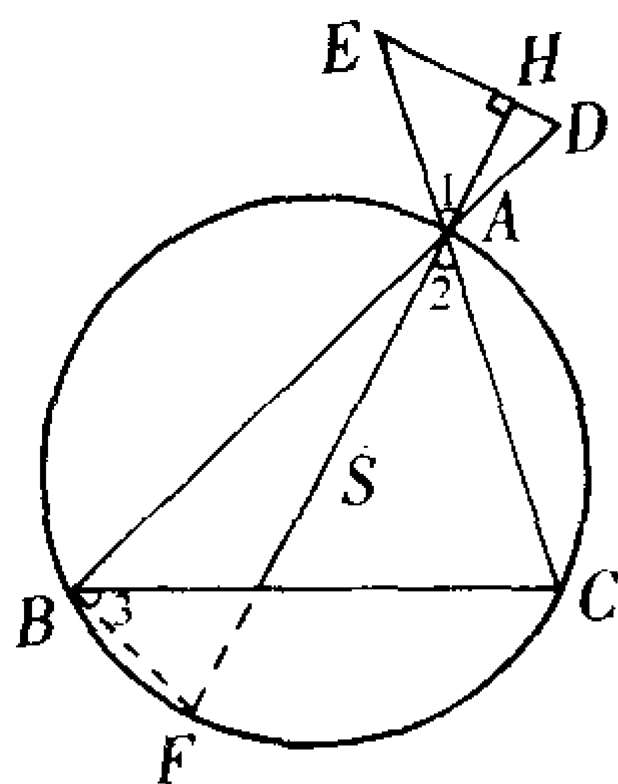


图 2

(2)直线 p 与$\triangle ABC$ 的两边 BA、CA 的延长线相交，

延长 AS 交圆 S 于 F，连 BF.(图 2)

$\therefore\quad \angle AED=90^\circ-\angle 1=90^\circ-\angle 2$

$=90^\circ-\angle 3=\angle ABC$.

因此，B、C、D、E 共圆.

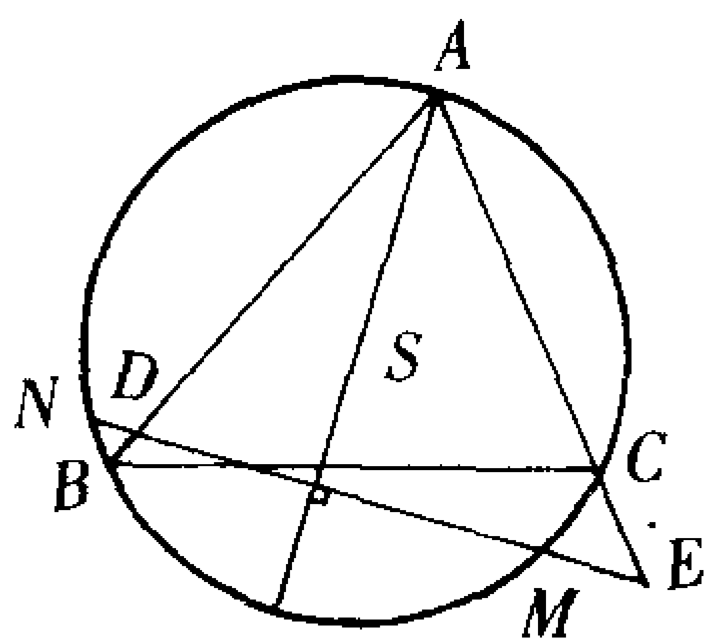


图 3

(3)直线 p 与边 AB 交于 D，与 AC 延长线交于 E，交圆 S 于 M、N(图 3).

$\because\quad AS\perp MN$，$\therefore\quad \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$.

又 $\angle AED=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AN}-\overset{\frown}{MC})$的度数

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AM}-\overset{\frown}{MC})$的度数

$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$的度数

$=\angle B$.

$\therefore\quad B$、C、D、E 共圆.

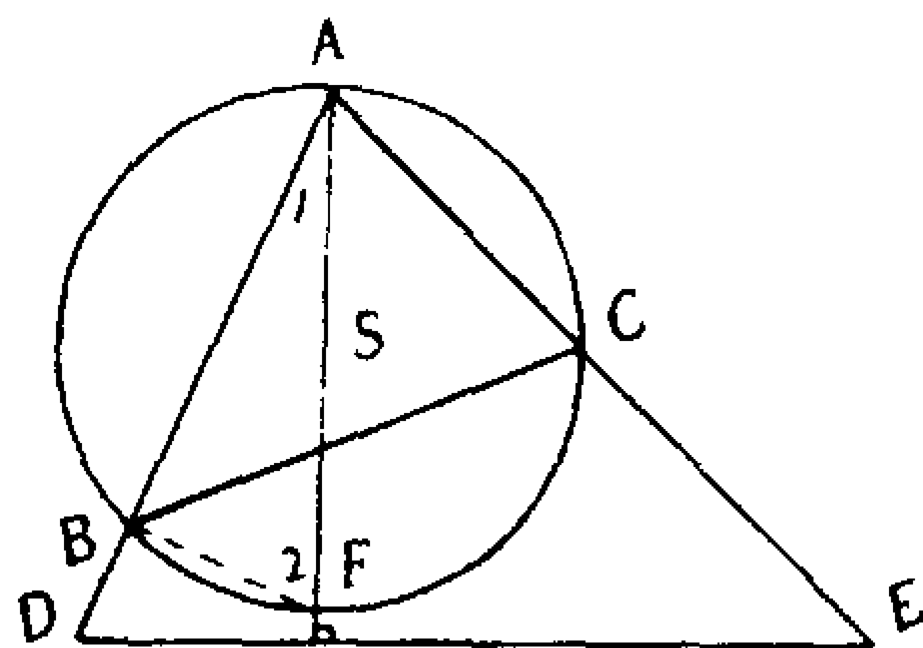


图 4

(4)直线 p 与边 AB、AC 的延长线交于 D、E，设 AS 延长线交圆 S 于 F，连 BF.(图 4)则

$\angle ADE=90^\circ-\angle 1=\angle 2=\angle C$.

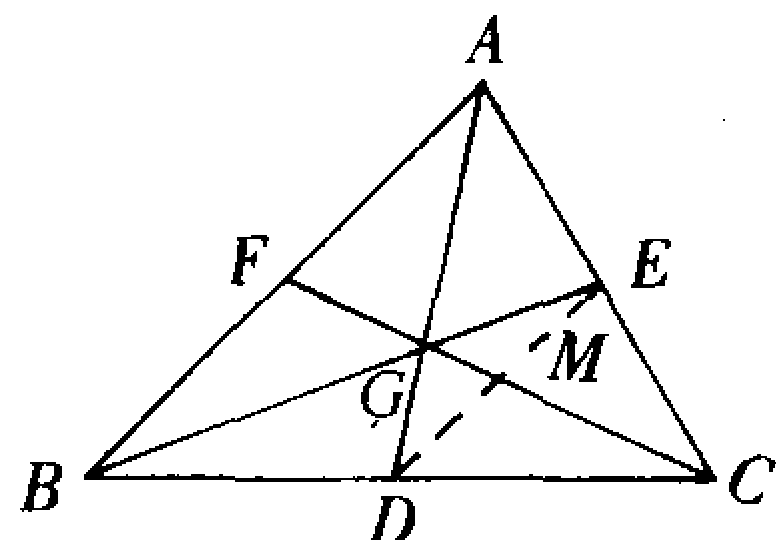
$\therefore\quad B$、C、D、E 共圆.

综合(1)、(2)、(3)、(4)，本题得证.

6·10 在$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点，G 为重心，试问

对$\angle BAC$的每个值有多少个互不相似的三角形ABC,使得$AEGF$为圆内接四边形?

(亚太地区数学奥林匹克,1990年)



[解] 由A、E、G、F共圆可得$\angle CGE=\angle BAC$.

又由DE是$\triangle ABC$的中位线得

$DE /\!/ AB$,

$\therefore \quad \angle CED=\angle BAC$.

故 $\angle CGE=\angle CED$.

设DE交CF于M,则$\triangle CEM \backsim \triangle CGE$,

因而 $\dfrac{CM}{CE}=\dfrac{CE}{CG}$, 即 $CM\cdot CG=CE^2$.

设$AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,且a边上的中线为m_a,b边上的中线为m_b,c边上的中线为m_c,则

$$\frac{1}{2}m_c\cdot\frac{2}{3}m_c=\left(\frac{1}{2}b\right)^2.$$

即 $m_c^2=\dfrac{3}{4}b^2$. ①

又由中线公式得 $m_c^2=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2-\dfrac{1}{4}c^2$. ②

由①、②得 $\dfrac{3}{4}b^2=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2-\dfrac{1}{4}c^2$.

即 $b^2+c^2=2a^2$. ③

再由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC$, ④

由③、④得 $b^2+c^2=4bc\cos\angle BAC$. ⑤

又 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,

$\therefore \quad 4bc\cos\angle BAC\geqslant 2bc$,

故 $\cos\angle BAC\geqslant\dfrac{1}{2}$, $\therefore \quad \angle BAC\leqslant 60^\circ$.

此时方程⑤化为

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2-4\left(\frac{b}{c}\right)\cos\angle BAC+1=0. \quad ⑥$$

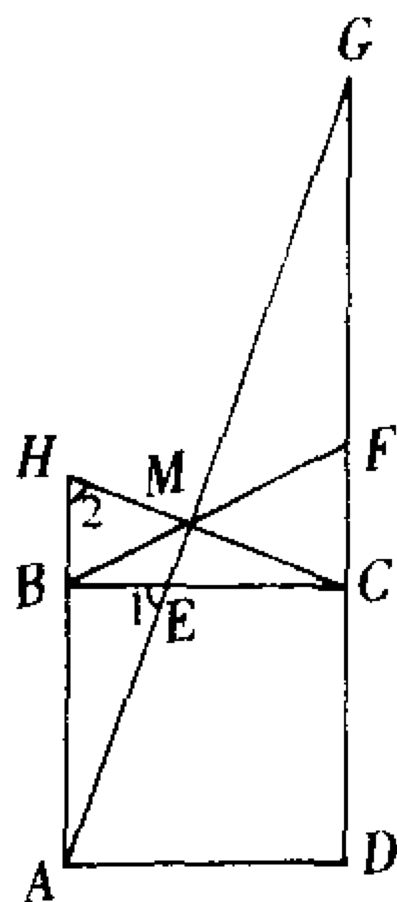
显然该方程的两个根互为倒数,因此对于满足$\angle BAC\leqslant 60^\circ$且又满足$AEGF$为圆内接四边形的互不相似的$\triangle ABC$只有一个.

在$\angle BAC>60°$时，方程⑥无解，所以没有满足条件的$\triangle ABC$.

6·11　正方形 $ABCD$ 的边长等于a，在边 BC 上取线段BE 等于$\frac{a}{3}$，在边 DC 的延长线上取CF 等于$\frac{a}{2}$，求证：直线 AE 和BF 的交点在正方形 $ABCD$ 的外接圆上.

（匈牙利数学奥林匹克，1951 年）

［证］　如图，设 AE 和BF 交于M. AE 与DC 所在直线交于G，BM 与DC 所在直线交于F.



由　$\triangle ABE\backsim\triangle GDA$　得

$\frac{AB}{BE}=\frac{GD}{AD}=3$. 有 $GD=3a$.

由平行线截比例线段定理有

$$\frac{BH}{BA}=\frac{FC}{FG}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{1}{3}.$$

∴　$BH=\frac{AB}{3}=\frac{a}{3}$. 又　$BE=\frac{a}{3}$.

∴　$\triangle BHC\cong\triangle ABE$,

从而　$\angle1=\angle2$，即 H、B、E、M 四点共圆.

由　$\angle HBC=\angle CMA=90°$，于是 M 在以AC 为直径的圆上，即M 在正方形$ABCD$ 的外接圆上.

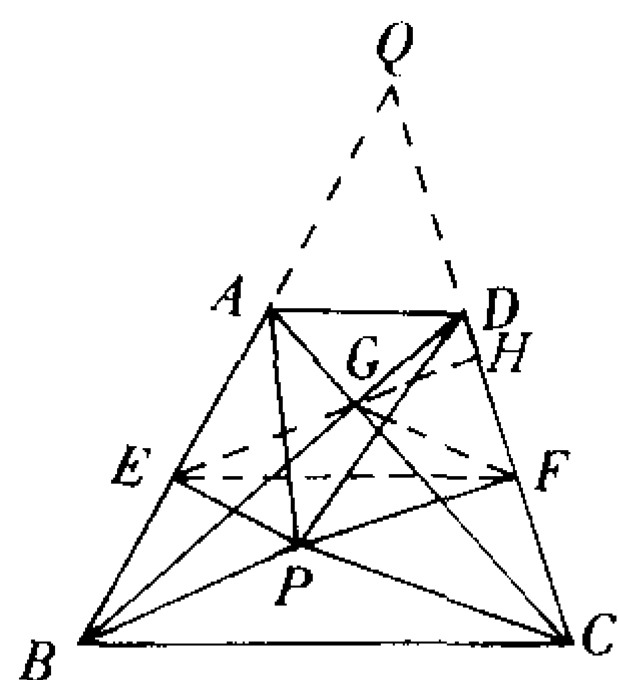
6·12　凸四边形 $ABCD$ 中，两对角线 AC 和BD 互相垂直，两对边AB 与CD 不平行，且 AB 与 CD 的垂直平分线交于形内的一点P. 证明：$ABCD$ 为圆内接四边形的充要条件是$\triangle ABP$ 的面积等于$\triangle CDP$的面积.

（第 39 届国际数学奥林匹克，1998 年）

［证 1］（必要性）　如图所示，不妨设 BA 和CD 交于点Q，AC 与BD 交于点G，E、F 分别为AB 与CD 的中点，H 为EG 的延长线与CD的交点.

若A、B、C、D 四点共圆，由条件 GE 为直角$\triangle AGB$ 的斜边上的中线，可知

$\angle HGC=\angle AGE=\angle GAE=\angle BDC$.



从而　$\angle HGC+\angle HCG$

$=\angle GDC+\angle DCG$

$=90^\circ$,

故 $EH\perp CD$. $\therefore$　$EG/\!/PF$.

同理可证 $GF/\!/PE$. 于是四边形 $PFGE$ 为平行四边形.

此时　$PF=EG=\frac{1}{2}AB$，$PE=GF=\frac{1}{2}CD$. 这表明

$$S_{\triangle AEP}=\frac{1}{2}AB\cdot PE=\frac{1}{4}AB\cdot CD=\frac{1}{2}PF\cdot CD=S_{\triangle CDP}.$$

(充分性)　若 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$，则有　$\frac{EG}{GF}=\frac{AB}{CD}=\frac{PF}{EP}$,

而在$\triangle GEF$ 与$\triangle PFE$ 中,有

$\angle EGF=\angle EGB+\angle BGC+\angle FGC$

$=90^\circ+\angle QBD+\angle QCA$

$=90^\circ+(\angle GDC-\angle Q)+\angle GCD$

$=180^\circ-\angle Q=\angle EPF$.

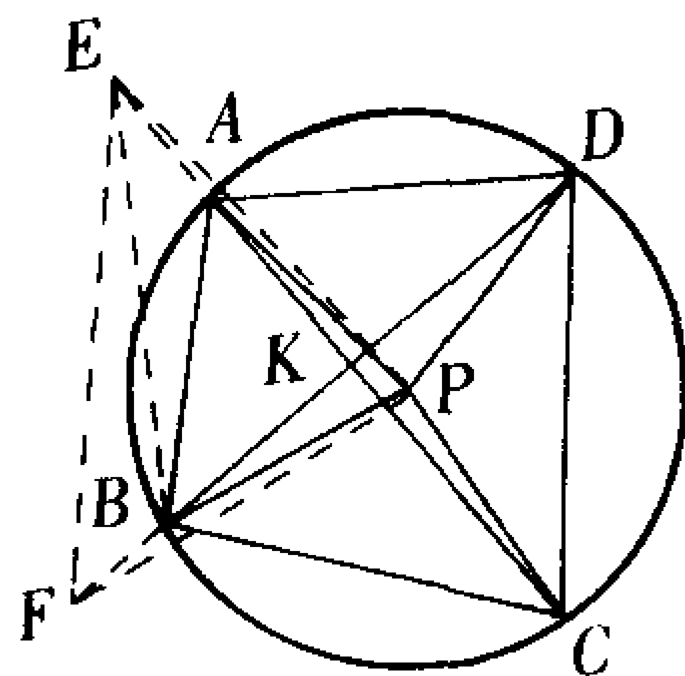
从而$\triangle GEF\backsim\triangle PFE$，而　$EF=EF$，故　$\triangle GEF\cong\triangle PFE$.

由此易证　四边形 $PFGE$ 为平行四边形.

于是　$EH\perp CD$，这表明

$\angle CDB=90^\circ-\angle DGH=90^\circ-\angle EGB=90^\circ-\angle ABG=\angle BAC$,

所以 A、B、C、D 四点共圆.



[证 2]　(必要性)　即当 A、B、C、D 四点共圆时,有 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$.

设两条垂直的对角线 AC 与 BD 交于一点 K. 从而,

$90^\circ=\angle AKB=\angle DBC+\angle ACB$

$\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$

$=\frac{1}{2}(\angle APB+\angle CPD)$,

有　$\angle APB+\angle CPD=180^\circ$.

$\therefore\quad \sin\angle APB=\sin\angle CPD$.

又由于 A、B、C、D 共圆，且 AB 与 CD 不平行，

故 P 为 $ABCD$ 外接圆的圆心.

从而 $PA=PB=PC=PD$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle ABP}&=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot PB\cdot\sin\angle APB\\&=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot PD\cdot\sin\angle CPD\\&=S_{\triangle CDP}.\end{aligned}$$

(充分性) 即当 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$时，有 A、B、C、D 四点共圆.

如果 $PA=PD$，那么，由 P 的定义可知 A、B、C、D 都在一个以 P 为圆心的圆周上.

否则，不失一般性，假设 $PA<PD$，于是可在 KA 延长线上取一点 E，使 $PE=PD$；在 KB 延长线上取一点 F，使 $PF=PC$.

则凸四边形 $EDCF$ 满足 E、D、C、F 共圆，且对角线 $EC\perp FD$.

对其应用前述必要性的证明可知 $S_{\triangle PEF}=S_{\triangle PCD}$.

另一方面，无论 P 位置如何，总有直线 BP 与线段 AC 相交，可知 E 到直线 BP 的距离一定大于 A 到直线 BP 的距离，

有 $S_{\triangle ABP}<S_{\triangle EBP}$.

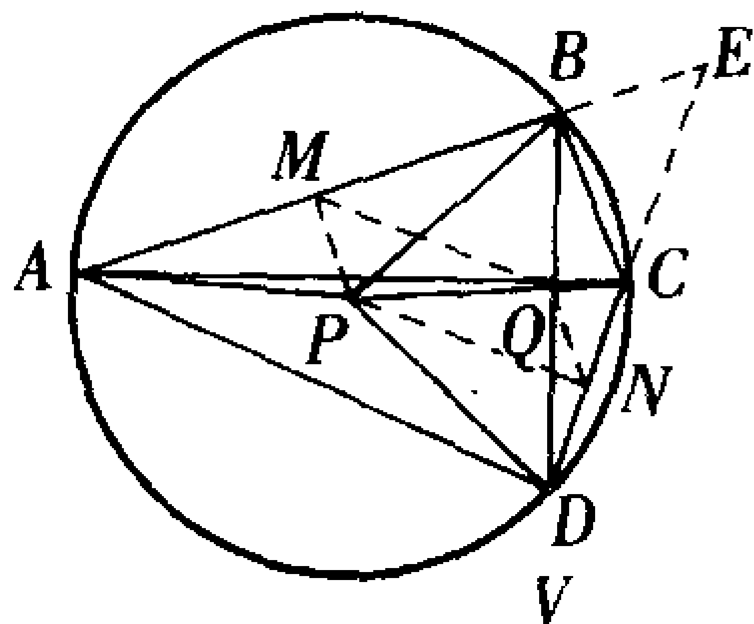
类似地，直线 EP 必与线段 BD 相交. 从而 F 到直线 PE 的距离一定大于 B 到直线 PE 的距离，

有 $S_{\triangle EFP}>S_{\triangle ERP}$. 从而，$S_{\triangle EFP}>S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$.

与前述矛盾，故假设不成立. 故必有 $PA=PD$，即 A、B、C、D 共圆.

综上知：A、B、C、D 四点共圆的充分必要条件为 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 面积相等.

[证 3] (充分性) 因 $AB\not\parallel CD$，令 E 是AB 和 CD 的交点，因 P 是 AB 及 CD 的垂直平分线的交点.



设 AB、CD 的中点分别为 M、N，AC 与 BD 交于Q，所以 $PM\perp AB$，$PN\perp PC$.

故由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PCD}$，

知 $\frac{1}{2}AB \cdot MP = \frac{1}{2}CD \cdot PN$.

又由 Rt$\triangle AQB$ 及 Rt$\triangle CQD$,知

$\frac{1}{2}AB = MQ = AM = BM$, $\frac{1}{2}CD = QN = DN = CN$.

所以 $MQ \cdot MP = QN \cdot PN$,

即 $\frac{MQ}{QN} = \frac{PN}{PM}$. ①

又 $PM \perp AB$, $PN \perp CD$,知

$$\begin{aligned}\angle MPN &= 180° - \angle E = \angle BDE + \angle DBE \\ &= \angle QDC + (\angle AQB + \angle BAQ) = \angle QDC + 90° + \angle BAQ \\ &= \angle DQN + 90° + \angle AQM = \angle MQN.\end{aligned} \quad ②$$

由①、② 知$\triangle MPN \backsim \triangle MQN$. 从而

$\frac{MP}{QN} = \frac{PN}{MQ} = \frac{MN}{NM} = 1$.

有 $MP = QN$, $PN = MQ$,和 $MP = QN = NC$, $PN = MQ = MB$,

知 Rt$\triangle BMP \cong$ Rt$\triangle PNC$. 所以 $PB = PC$.

由题设 P 是 AB、CD 中垂线的交点知

$PB = PA$, $PC = PD$.

故 $PA = PB = PC = PD$. 所以 A、B、C、D 四点共圆.

6·13 设 $ABCD$ 是凸四边形,O 是对角线 AC 和 BD 的交点.如 $OA\sin A + OC\sin C = OB\sin B + OD\sin D$,证明:$ABCD$ 是圆内接四边形.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证] 先看这样的事实.设 O 是$\angle UAV$ 内部的点,如图 1~3,令

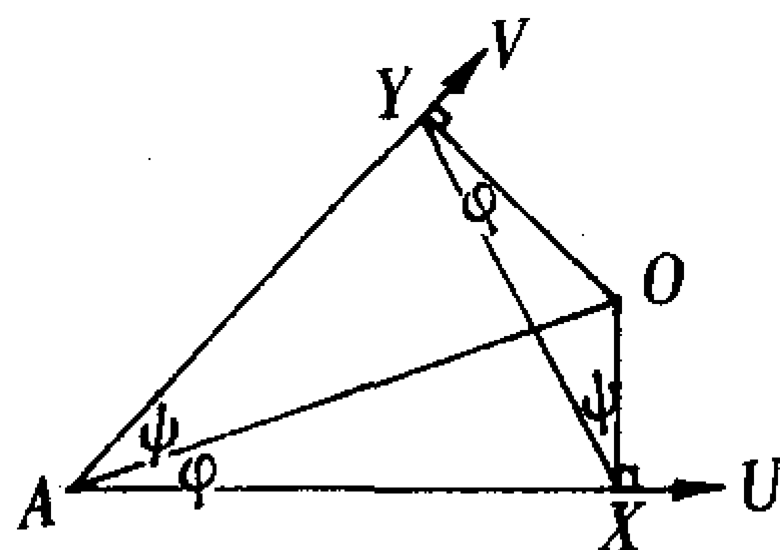


图 1

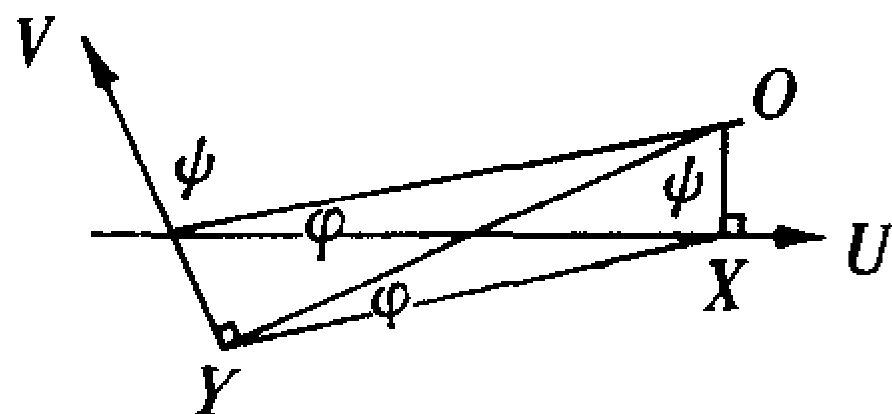


图 2

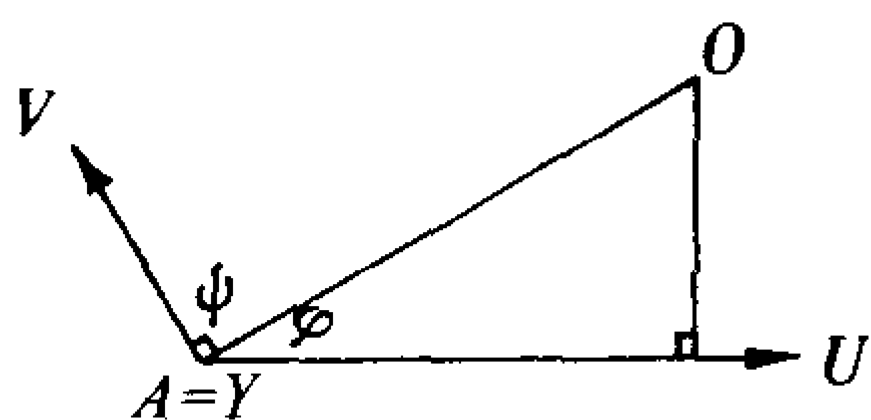


图 3

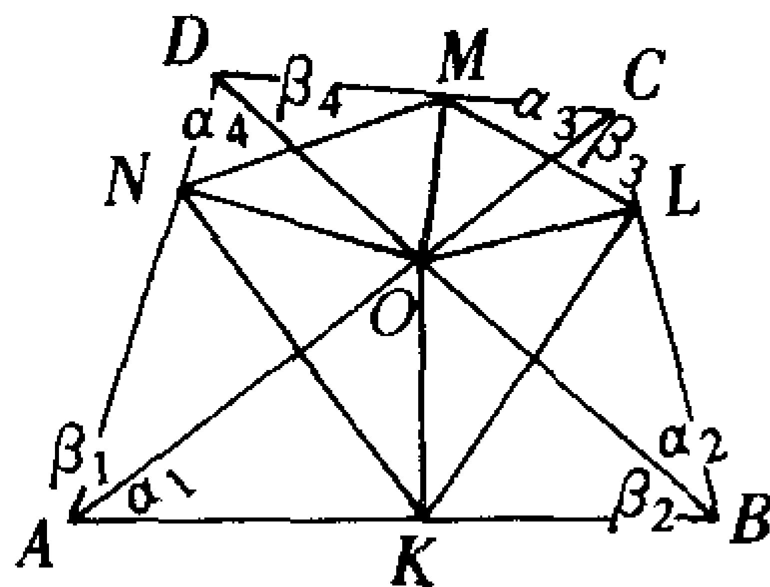


图 4

$\angle OAU=\varphi$，$\angle OAV=\psi$，如 X、Y 分别是 O 在 AU、AV 上的正射影，则由正弦定理及 X、Y 在以 OA 为直径的圆上，可得

$$XY=OA\sin\angle UAV, \quad ①$$

$$XY=OX\cos\psi+OY\cos\varphi \quad ②$$

①、②对可能的情形都成立. X 或 Y 可在 $\angle UAV$ 的对应边（$\angle A$ 的外部）的延长线上，也可能与 A 重合.

令 O 到 AB、BC、CD、DA 的正射影分别是 K、L、M、N. 则由①，题设条件就变成

$$NK+LM=KL+MN. \quad ③$$

如图 4 所示引入角的记号. 由②可得

$$KL=OK\cos\alpha_2+OL\cos\beta_2,$$

$$MN=OM\cos\alpha_4+ON\cos\beta_4,$$

$$LM=OL\cos\alpha_3+OM\cos\beta_3,$$

$$NK=ON\cos\alpha_1+OK\cos\beta_1.$$

因此，③可改写成

$$OK(\cos\beta_1-\cos\alpha_2)+OL(\cos\alpha_3-\cos\beta_2)+OM(\cos\beta_3-\cos\alpha_4)+ON(\cos\alpha_1-\cos\beta_4)=0. \quad ④$$

欲证 $ABCD$ 是圆内接四边形，只要有 $\alpha_1=\beta_4$ 就够了.

不失一般性，假设 $\alpha_1\geqslant\beta_4$. 因为它们都等价于 A 在 $\triangle BCD$ 的外接圆内或圆上，故 $\beta_1\geqslant\alpha_2$.

另一方面，$\alpha_1+\beta_2=\alpha_3+\beta_4$，所以 $\alpha_3\geqslant\beta_2$. 类似有 $\beta_3\geqslant\alpha_4$.

因余弦函数在 $(0,\pi)$ 内是严格递减函数，由这四个角的不等式，可得

$$\cos\beta_1\leqslant\cos\alpha_2,\quad \cos\alpha_3\leqslant\cos\beta_2,\quad \cos\beta_3\leqslant\cos\alpha_4,\quad \cos\alpha_1\leqslant\cos\beta_4. \quad ⑤$$

比较④与⑤，得 $\beta_1=\alpha_2$，$\alpha_3=\beta_2$，$\beta_3=\alpha_4$，$\alpha_1=\beta_4$.

注 等式③可作为把本题转化为纯几何关系的起点.通常，这一近似情况是要有依赖条件的，所以，可考虑下面的题目：

设 $ABCD$ 是凸四边形，O 是其对角线 AC 和 BD 的交点.每一对角线与此四边形中每一边所成的角是锐角.如 $OA\sin A+OC\sin C=OB\sin B+OD\sin D$，证明 $ABCD$ 是圆内接四边形.

6·14 一个凸四边形 $ABCD$，其中 $AB=AD$，$CB=CD$.求证：(1)它有一个内切圆.(2)当且仅当 $AB\perp BC$ 时，它有一个外接圆.(3)如果 $AB\perp BC$，则内切圆圆心与外接圆圆心之间的距离的平方为 $R^2+r^2-r\sqrt{r^2+R^2}$，其中 r 为内切圆半径，R 为外接圆半径.

（前民主德国数学奥林匹克，1973 年）

［证］ (1)由题设 $AB=AD$，$CB=CD$.

$\therefore\quad AB+CD=AD+BC$.

因此 四边形 $ABCD$ 有内切圆.

(2)由于 $AB\perp BC$，则 $\angle ABC=90°$.

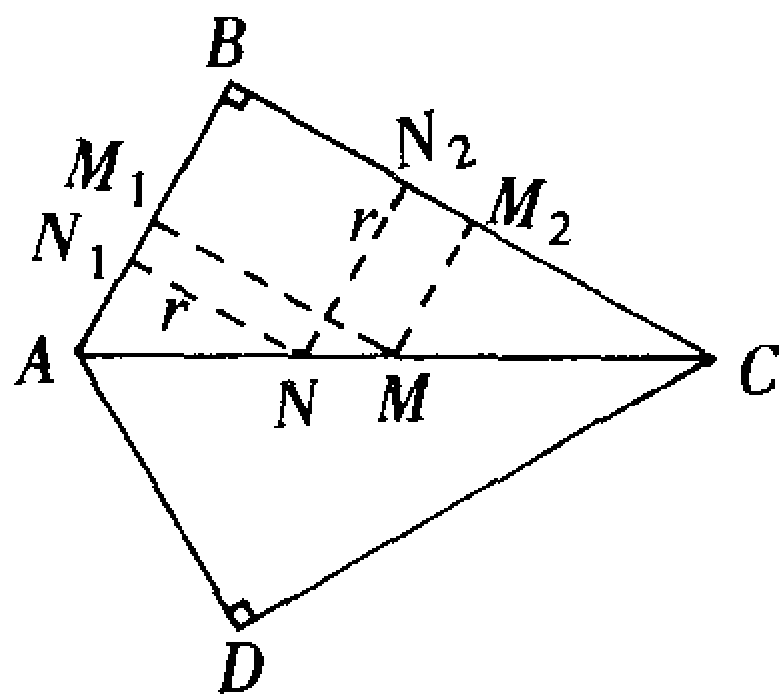
又$\because\quad AB=AD$，$CB=CD$，$AC=AC$.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC$.

于是 $\angle ADC=\angle ABC=90°$，$\angle ADC+\angle ABC=180°$.

因此四边形有外接圆.

(3)设以 N 为圆心的内切圆和边 AB 与 BC 相切于 N_1、N_2 两点.



显然 N 在对角线 AC 上.

又四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心 M 是 AC 的中点，

作 $MM_1\perp AB$ 于 M_1，$MM_2\perp BC$ 于 M_2.

记 $AB=x$，$BC=y$，

$\because\quad \triangle ANN_1\backsim\triangle ACB$，

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{AB}{BC}=\frac{AN_1}{N_1N}=\frac{x-r}{r}.$$

即 $\qquad xy=r(x+y)$.

由 $\qquad x^2+y^2=AB^2+BC^2=AC^2=4R^2$.

从而 $\qquad (x+y)^2=x^2+y^2+2xy=4R^2+2r(x+y)$.

于是　　$x+y=r+\sqrt{r+4R^2}$.

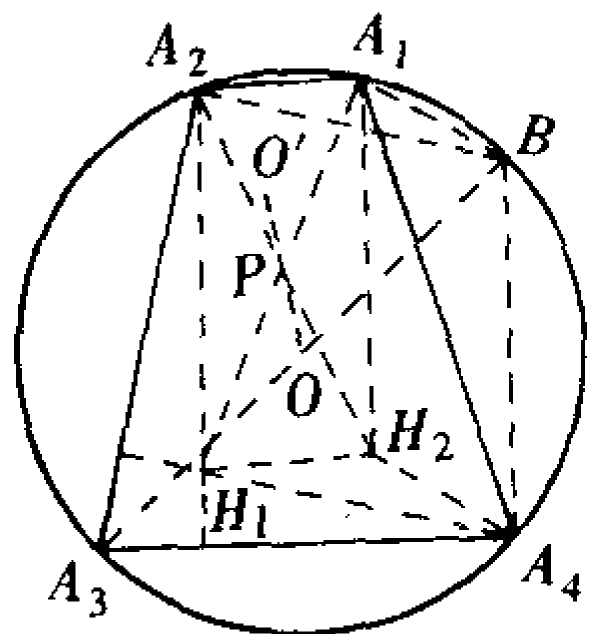
由于　　$NM^2=N_1M_1^2+N_2M_2^2$,

则　　$$NM^2=\left(BN_1-\frac{AB}{2}\right)^2+\left(BN_2-\frac{BC}{2}\right)^2$$
$$=\left(r-\frac{x}{2}\right)^2+\left(r-\frac{y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{x^2+y^2}{4}-r(x+y)+2r^2$$
$$=R^2-r(r+\sqrt{r+4R^2})+2r^2$$
$$=R^2+r^2-r\sqrt{r+4R^2}.$$

6·15　设 $A_1A_2A_3A_4$ 为⊙O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为△$A_2A_3A_4$、△$A_3A_4A_1$、△$A_4A_1A_2$、△$A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置.

（中国高中数学联赛，1992 年）

[证 1]　如图，过 A_3 作⊙O 的直径 A_3B. 连 BA_1、BA_2、BA_4、H_1A_2、H_1A_4、H_2A_1、H_2A_4.



因 A_4H_1、BA_4 同垂直于 A_3A_4，故 $A_2H_1 /\!/ BA_4$.

因 A_4H_1、BA_2 同垂直于 A_2A_3，故 $A_2H_1 /\!/ BA_2$.

因此，四边形 $H_1A_4BA_2$ 为平行四边形，从而

$A_2H_1 \mathrel{\underline{/\!/}} BA_4$.

同理　可得四边形 $H_2A_4BA_1$ 为平行四边形.

因此　$A_1H_2 \mathrel{\underline{/\!/}} BA_4$，从而　$A_2H_1 \mathrel{\underline{/\!/}} A_1H_2$. 连结 H_1、H_2.

因此　四边形 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形.

连 A_1H_1、A_2H_2. 由平行四边形的性质，知对角线 A_1H_1 与 A_2H_2 互相平分. 设它们的交点为 P，则 $A_1P=PH_1$，$A_2P=PH_2$.

同理可得　A_2H_2 与 A_3H_3 互相平分，则交点为 A_2H_2 的中点，故为 P.

同理　A_3H_3 与 A_4H_4 互相平分于点 P，即 $A_3P=PH_3$，$A_4P=PH_4$.

于是 A_i 和 $H_i(i=1,2,3,4)$ 关于点 P 是中心对称的.

$\because$ A_1、A_2、A_3、A_4 共圆,故 H_1、H_2、H_3、H_4 这四点也共圆,其圆心是点 O 关于点 P 的中心对称点.

连 OP,延长 OP 到 O',使 $PO'=OP$,则 O' 是 H_1、H_2、H_3、H_4 所决定的圆的圆心.

[证 2] 设⊙O 的半径是 R,并设 P 是线段 A_1H_1 的中点.连结 OP 并延长到 O',使 $O'P=OP$.

易知,四边形 $OA_1O'H_1$ 是平行四边形,故 $O'H_1=OA_1=R$.

过 A_3 作⊙O 的直径 A_3B,连结 BA_4,则 A_2H_1、BA_4 同垂直于 A_3A_4,故 $A_2H_1 /\!/ BA_4$.

因 A_4H_1、BA_2 同垂直于 A_2A_3, 故 $A_4H_1 /\!/ BA_2$.

因此,四边形 $H_1A_4BA_2$ 为平行四边形,从而 $A_2H_1 \underline{\underline{/\!/}} BA_4$

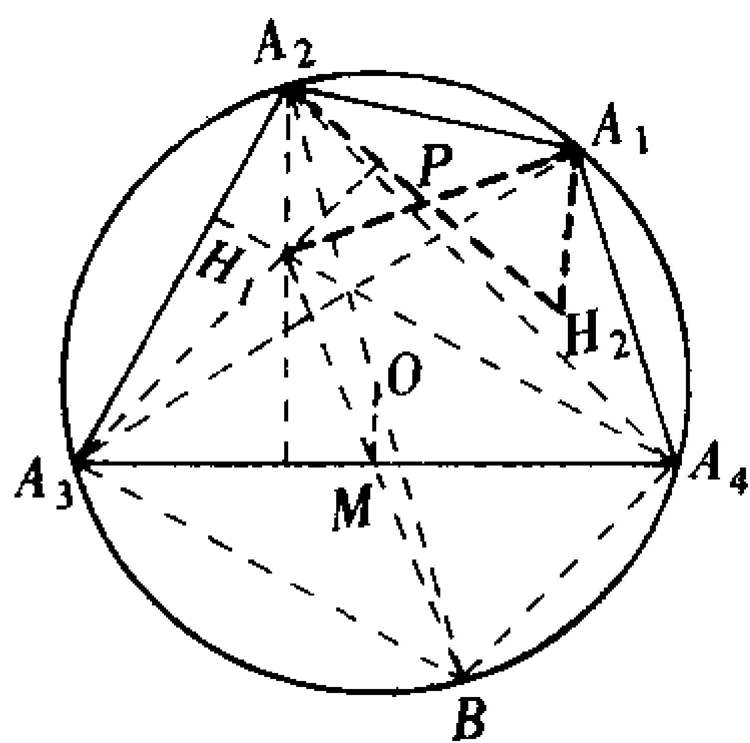
同理可证 $A_1H_2 \underline{\underline{/\!/}} BA_4$. 所以 $A_2H_1 \underline{\underline{/\!/}} A_1H_2$,

P 也是 A_2H_2 的中点,从而 $O'H_2=OA_2=R$.

类似地可证 $O'H_3=OA_3=R$, $O'H_4=OA_4=R$.

所以 $O'H_1=O'H_2=O'H_3=O'H_4=R$.

即 H_1、H_2、H_3、H_4 在以 O' 为中心,R 为半径的圆上.



[证 3] 如图,过△$A_2A_3A_4$ 的外接圆的圆心 O 作 A_3A_4 的垂线 OM,垂足为 M.作直径 A_2B,连 BA_3、BA_4 及 H_1A_2、H_1A_3、H_1A_4.

因 BA_3 和 A_4H_1 同垂直于 A_2A_3,

故 $BA_3 /\!/ A_4H_1$.

同理 $BA_4 /\!/ A_3H_1$,

故四边形 $BA_4H_1A_3$ 为平行四边形.由于 M 是 A_3A_4 的中点,故 B、M、H_1 共线.

OM 为△BA_2H_1 的中位线,$A_2H_1 \underline{\underline{/\!/}} 2\cdot OM$.

同理 在△$A_1A_3A_4$ 中,有 $A_1H_2 \underline{\underline{/\!/}} 2\cdot OM$.

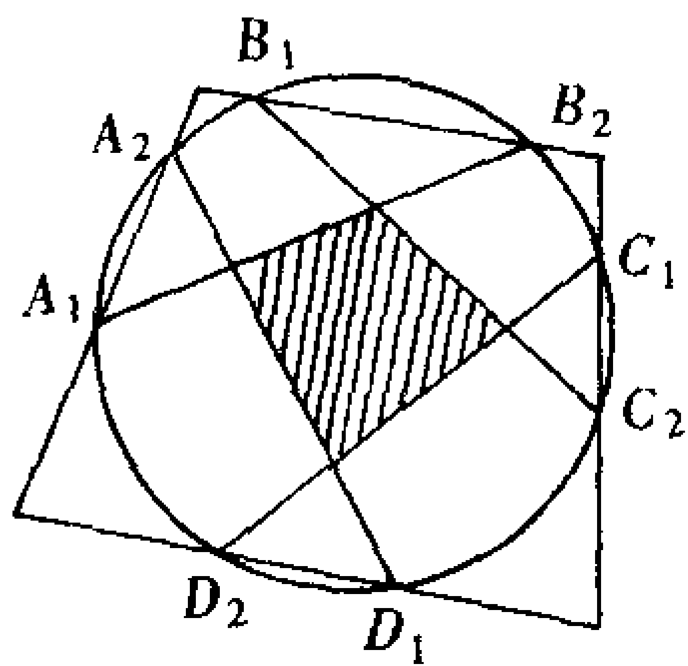
因此有 $A_2H_1 \underline{\underline{/\!/}} A_1H_2$,四边形 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形.

连 A_1H_1、A_2H_2.由平行四边形的性质知 A_1H_1 与 A_2H_2 互相平分,设交点为 P.

同理　A_2H_2 与 A_3H_3 互相平分于点 P，且 A_3H_3 与 A_4H_4 互相平分于点 P.

(以下同证 1)

6·16　在圆周内部有一凸四边形，其边的延长线交圆周于点 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2、D_1、D_2(如图). 试证：若 $A_1B_2 = B_1C_2 = C_1D_2 = D_1A_2$，则由直线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 所围成的四边形是圆内接四边形.



(第 19 届全俄数学奥林匹克，1993 年)

[证]　设直线 A_1A_2 与 B_1B_2 的夹角为 α，C_1C_2 与 D_1D_2 的夹角为 β.

又设任意一条等弦 A_1B_2、B_1C_2、C_1D_2、D_1A_2 所对的弧都等于 γ. 则由圆外角定理有

$$(\alpha+\beta)\text{的度数} = \left[\frac{1}{2}(\gamma+\overset{\frown}{A_2B_1}) + \frac{1}{2}(\gamma-\overset{\frown}{C_2D_1})\right]\text{的度数}$$

$$= \left[\gamma - \frac{1}{2}(2\pi-2\gamma)\right]\text{的度数}$$

$$= \pi.$$

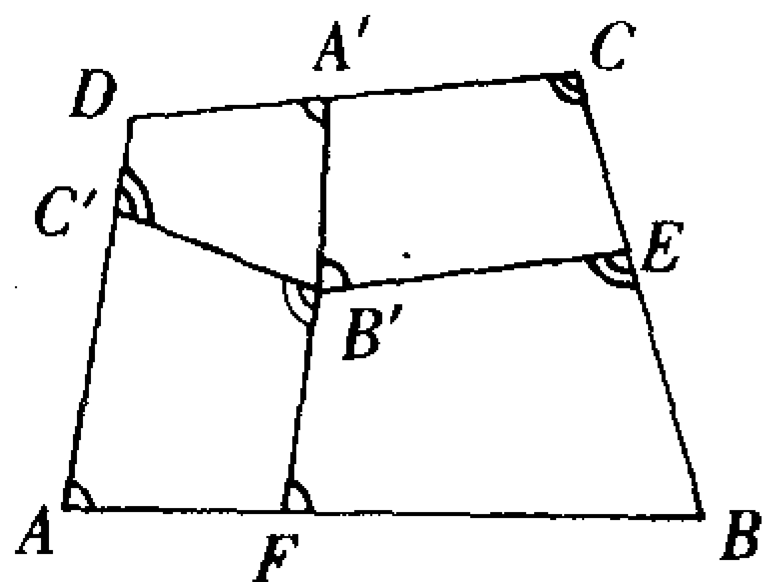
因此 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 所围成的四边形是圆内接四边形.

6·17　证明：对 $n \geqslant 4$，每一个有外接圆的四边形，总可划分成 n 个都有外接圆的四边形.

(第 14 届国际数学奥林匹克，1972 年)

[证]　(1) $n=4$ 时的情形.

设 $ABCD$ 是有外接圆的四边形，则 $\angle A + \angle C = 180°$.



取 CD 的一个内点 A'，AD 的一个内点 C'，且作 $\angle DA'B' = \angle A$，$\angle DC'B' = \angle C$，由于 A'、C' 可以取在 D 的任意近邻.

因此可以使 $A'B'$、$C'B'$ 的交点 B' 是四边形 $ABCD$ 内的一点，且位于 D 的任意近邻，于是，过 B' 分别作平行于 DC 和 DA 的直线，可以使它们分别交 BC 和 AB 于内点 E、F.

这样得到的四边形 $A'B'C'D$、$B'ECA'$、$FBEB'$ 和 $AFB'C'$ 对角都互

补，因而就是所要求的可划分成的四边形.

事实上，由作法知：

$\angle DA'B'=\angle A'B'E=\angle B'FB=\angle A$，

且 $\angle DC'B'=\angle FB'C'=\angle B'EB=\angle C$.

$\therefore\ \angle DA'B'+\angle DC'B'=\angle C'B'F+\angle A=\angle A'B'E+\angle C$

$=\angle B'FB+\angle B'EB=180°$.

于是四边形 $A'B'C'D$、$FBEB'$、$B'ECA'$、$AFB'C'$ 都有外接圆.

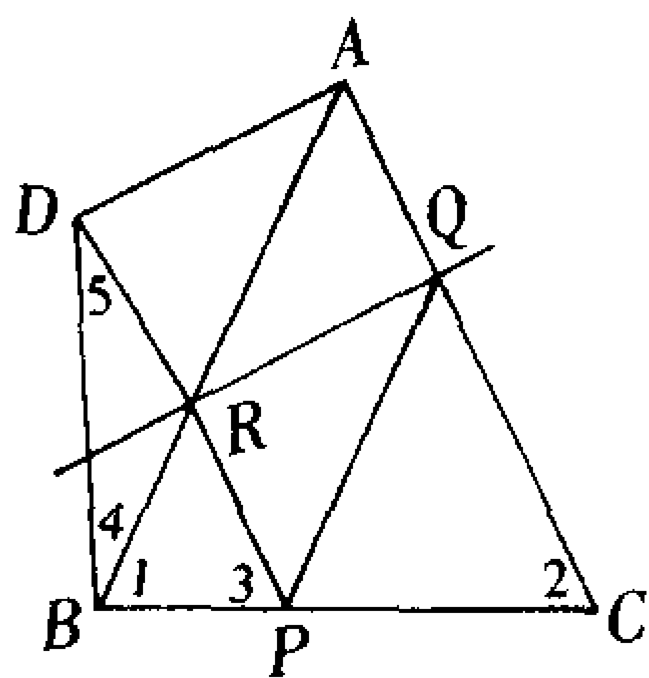
(2) $n\geqslant 5$ 时的情形.

首先，按(1)中的作法将 $ABCD$ 分成四个对角互补的四边形.

注意到，由(1)，四边形 $B'ECA'$、$AFB'C'$ 都是等腰梯形，因此只要将其中一个等腰梯形用平行于底边的直线把这个等腰梯形分成 $n-3$ 个等腰梯形，就把四边形 $ABCD$ 分成为 n 个有外接圆的四边形.

6·18　通过等腰△ABC 的底边 BC 上的点 P 引平行于两腰的直线，交两腰于点 Q 和 R. 求证：点 P 关于直线 QR 的对称点 D 在等腰△ABC 的外接圆上.

（匈牙利数学奥林匹克，1949 年）



[证 1]　因为△ABC 为等腰三角形，

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$，　①

$\because\ RP\parallel AC$，　$\therefore\ \angle 3=\angle 2$，

$\therefore\ \angle 1=\angle 3$，　有　$RB=RP$.

又∵　P 和 D 关于 RQ 对称，

$\therefore\ PR=DR$，$PQ=QD$.

因此　$RB=DR$，　有　$\angle 4=\angle 5$.　②

由　$PQ\parallel AB$，$RP\parallel AC$.

则四边形 $ARPQ$ 是平行四边形

于是　$AR=PQ$..　即　$QD=AR$，

再由　$AQ=RP=RD$

可得　△$ADQ\cong$△DAR，于是　$\angle ADR=\angle QAD$.　③

由①，②，③得　$\angle 1+\angle 4+\angle QAD=\angle 2+\angle 5+\angle ADR$.

所以 A、C、B、D 四点共圆，即 D 在△ABC 的外接圆上.

[证 2]　由证 1 可得 $RP=RB=RD$，

同法可证　$QP=QC=QD$.

所以 P、B、D 在以 R 为圆心的圆上，P、C、D 在以 Q 为圆心的圆上，由于同弧上的圆心角等于圆周角的一半，

$\therefore \quad \angle CDP=\frac{1}{2}\angle CQP,\ \angle PDB=\frac{1}{2}\angle PRB.$

又 $\angle CQP=\angle PRB=\angle CAB$，及 $\angle CDP+\angle PDB=\angle CAB$，

即 $\angle CDB=\angle CAB.$

于是 A、D、B、C 共圆，即 D 在△ABC 的外接圆上.

6·19 设 A、B、C、D 是平面上四个不同的点，使得过 A 和 B 的每个圆与过 C 和 D 的每个圆相交(或重合). 求证：这四点或者共线或者共圆.

（第 26 届美国普特南数学竞赛，1965 年）

[证] 用反证法. 假设 A、B、C、D 既不共线又不共圆，则线段 AB 的垂直平分线 p 与线段 CD 的垂直平分线 q 不可能重合.

这时有两种情形：

(1)若直线 p 与 q 相交，则它们的交点是两个同心圆的圆心，一个圆过 A、B 两点，一个圆过 C、D 两点，这两个圆既不可能相交也不可能重合(否则四点共圆)与题设矛盾.

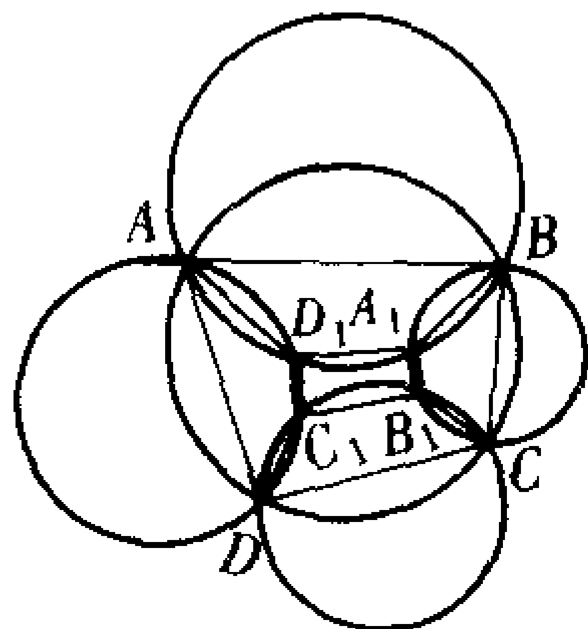
(2)若直线 p 与 q 平行，则直线 AB 与 CD 也平行，考虑分别位于 p、q 上，又是平行直线 AB 与 CD 之间的中点的两点 P 和 Q，显然圆 ABP 与圆 CDQ 没有公共点，也与题设矛盾.

综上，A、B、C、D 这四点或者共线或者共圆.

6·20 在圆周上给定了4 个点 A、B、C、D. 过每两个相邻点都作一个圆周，将每两个相邻圆周的第二个交点分别记作 A_1、B_1、C_1 和 D_1 (其中有些点可能与前面的点重合). 求证：A_1、B_1、C_1、D_1 四点共圆.

（莫斯科数学奥林匹克，1955 年）

[证] 诸圆位置及相交情况见右图：



由 $\angle D_1A_1B_1=360^\circ-\angle BA_1D_1-\angle BA_1B_1$

$=360^\circ-(180^\circ-\angle BAD_1)-(180^\circ-\angle BCB_1)$

$=\angle BAD_1+\angle BCB_1$，

且 $\angle D_1C_1B_1$

$=360^\circ-\angle D_1C_1D-\angle B_1C_1D$

$= 360° - (180° - \angle D_1AD) - (180° - \angle B_1CD)$

$= \angle D_1AD + \angle B_1CD$,

$\therefore \quad \angle D_1A_1B_1 + \angle D_1C_1B_1$

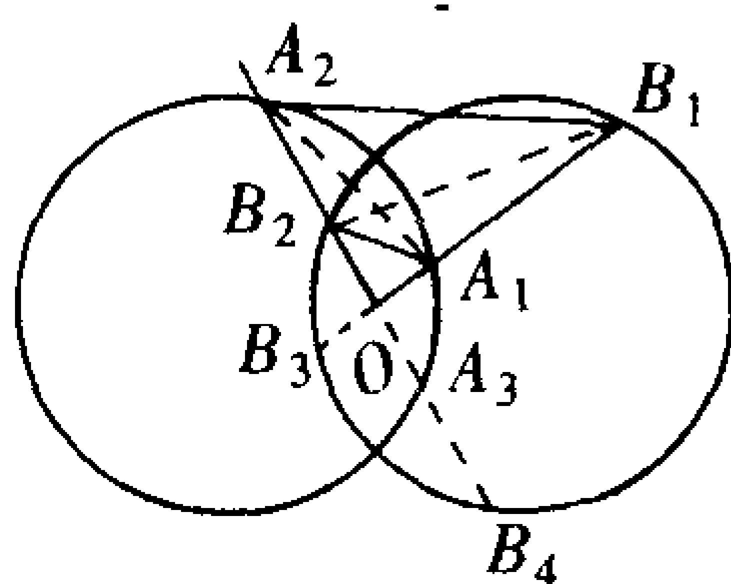
$= (\angle BAD_1 + \angle D_1AD) + (\angle BCB_1 + \angle B_1CD)$

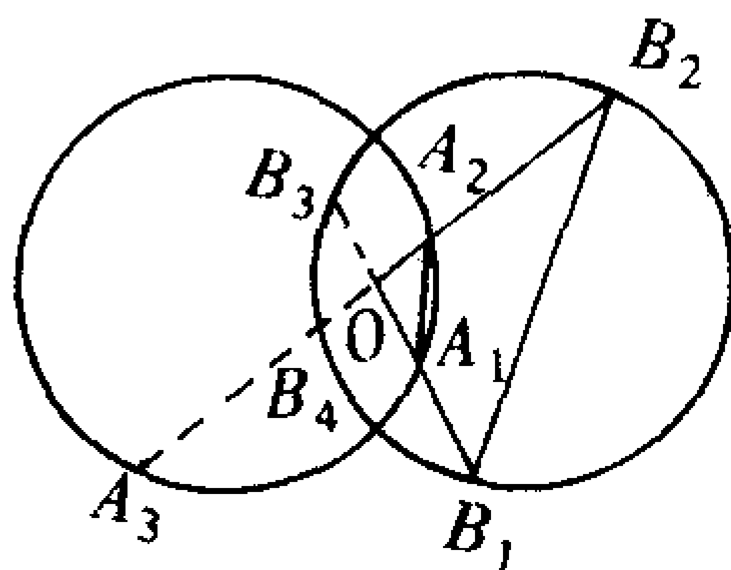
$= \angle BAD + \angle BCD = 180°$.

故 A_1、B_1、C_1、D_1 四点共圆.

6·21 从两个半径相等的相交圆周的对称中心引两条直线,它们交两圆周于不在同一直线上的 4 个点,证明:这 4 个点在同一圆周上.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)





[证] 如左图所示的情形,$\overset{\frown}{B_2B_3} = \overset{\frown}{A_1A_3}$(因为这两条弧关于点 O 对称),于是$\angle A_3A_2A_1 = \angle B_3B_1B_2$

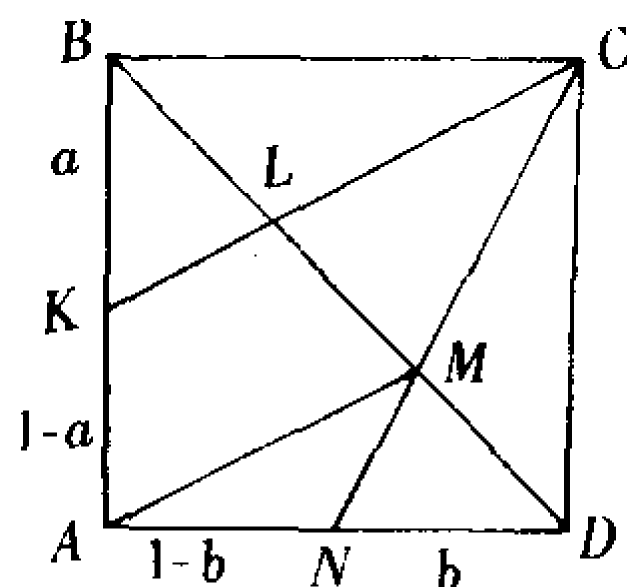
即 A_2、B_1 对 A_1B_2 张等角,所以 A_1、A_2、B_1、B_2 四点共圆.

如右图所示的情形,$\overset{\frown}{B_2B_3} = \overset{\frown}{A_1A_3}$,于是$\angle A_3A_2A_1 = \angle B_3B_1B_2$.

即四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的一个外角等于它的内对角,于是 A_1、A_2、B_1、B_2 四点共圆.

6·22 在正方形 $ABCD$ 的AB、AD 边上分别取点K、N,使得 $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$.线段 CK、CN 分别交对角线BD 于L、M.求证:K、L、M、N 和A 五点共圆.

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)



[证] 先证$\angle BKC + \angle DNC = \frac{3}{4}\pi$.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,并设

$a = BK = \text{ctg}\angle BKC$,

$b = DN = \text{ctg}\angle DNC$.

题设得 $(1-a)(1-b) = 2ab$, 即

$$\frac{a+b}{ab-1}=-1.$$

又 $\quad \operatorname{tg}(\angle BKC+\angle DNC)=\frac{\operatorname{tg}\angle BKC+\operatorname{tg}\angle DNC}{1-\operatorname{tg}\angle BKC\cdot\operatorname{tg}\angle DNC}$

$=\frac{\operatorname{ctg}\angle BKC+\operatorname{ctg}\angle DNC}{\operatorname{ctg}\angle BKC\cdot\operatorname{ctg}\angle DNC-1}$

$=\frac{a+b}{ab-1}=-1.$

$\because$ $\angle BKC$、$\angle DNC$ 都是锐角，

$\therefore$ $\angle BKC+\angle DNC=\frac{3\pi}{4}$,

又 $\angle BLK=\pi-\angle KBL-\angle BKL=\frac{3\pi}{4}-\angle BKL=\angle DNC$

$\because$ $BC /\!/ ND$, $\therefore$ $\angle DNC=\angle BCM$.

由图形对称性易知，$\angle BCM=\angle BAM$,

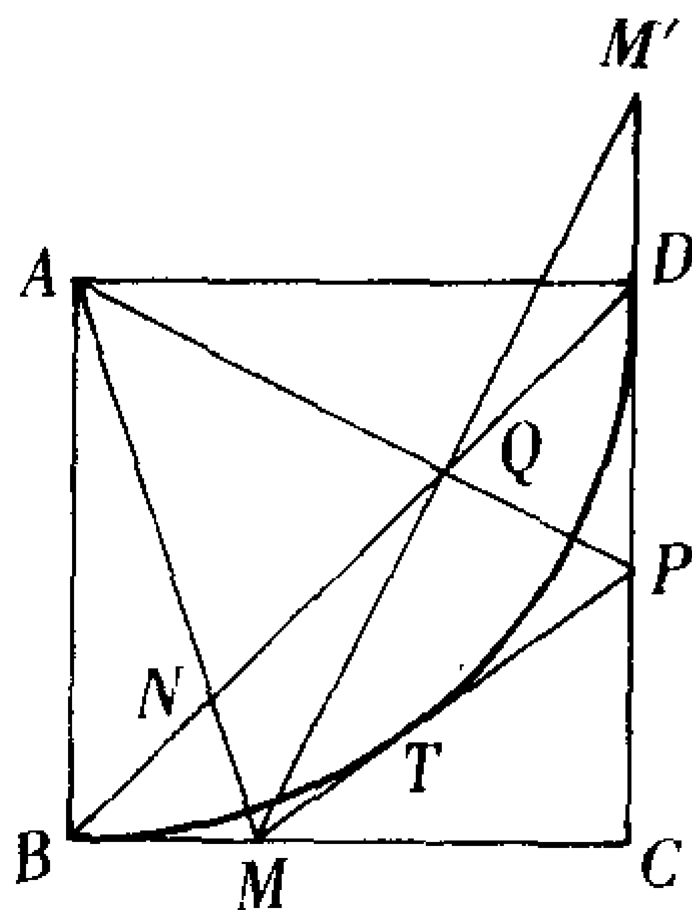
$\therefore$ $\angle KLM+\angle KAM=\pi$, $\therefore$ A、K、L、M 共圆.

过 A、L、M 确定惟一的圆，故 K、L、M、N、A 五点共圆.

6·23 设 P、M 分别在正方形 $ABCD$ 的边 DC、BC 上，PM 与以 A 为圆心，AB 为半径的圆相切，线段 PA 与 MA 分别交对角线 BD 于 Q、N. 求证：五边形 $PQNMC$ 内接于圆.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

[证 1] 设 MP 切圆 A 于 T.



延长 CD 到 M' 使 $DM'=BM$.

由于 PM、PD、CB 切圆 A 于 T、D、B，则由切线长定理得

$PT=PD$, $MT=MB$.

$\therefore$ $M'P=M'D+DP=BM+PT=MP$.

又$\because$ $BM=DM'$, $AB=AD$,

$\angle ABM=\angle ADM'=90°$

$\therefore$ $\triangle ABM\cong\triangle ADM'$,

有 $AM=AM'$,

$\therefore$ $\triangle APM\cong\triangle APM'$.

连 MM'，设 MM' 与 AP 相交于 Q'，则 $MM'\perp AP$.

连 BQ'、$Q'D$，由 A、B、M、Q'共圆可知

$\angle BQ'M=\angle BAM$.

由 A、M'、D、Q'共圆可知　$\angle M'Q'D=\angle M'AD$.

又　$\angle M'AD=\angle BAM$.

$\therefore$　$\angle M'Q'D=\angle BQ'M$,

从而 B、Q'、D 共线，于是 Q'与 Q 重合.

则　$\angle MQP=90°$，因而 Q 在以 MP 为直径的圆上.

同理，N 也在以 MP 为直径的圆上，

于是，五边形 $PQNMC$ 内接于以 MP 为直径的圆.

[证 2]　由于 PM、PD、MB 是圆 A 的切线，则 PA 平分$\angle TAD$，MA 平分$\angle BAT$.

$\therefore$　$\angle MAP=45°=\angle NDP$，于是 N、A、D、P 共圆.

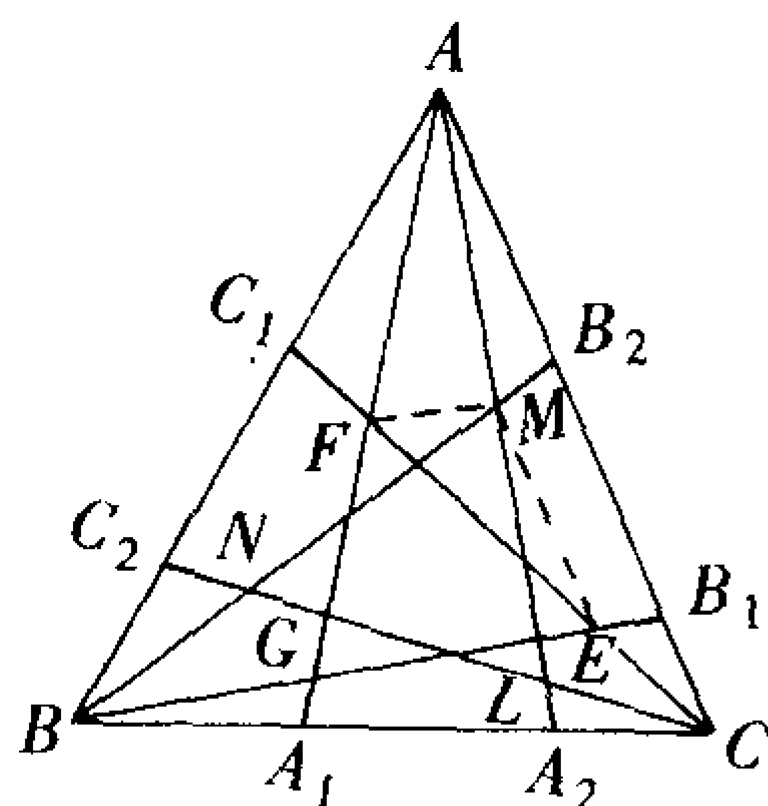
又　$\angle DPQ=\angle DNA=\angle DAC$，于是 C、N、Q、P 共圆.

同理　C、M、N、Q 共圆.

因而，五边形 $PQNMC$ 是圆内接五边形.

6·24　在锐角$\triangle ABC$ 的边 BC 上取两点 A_1、A_2，(A_2 位于 A_1 与 C 之间)，在边 CA 上取两点 B_1、B_2(B_2 位于 B_1 与 A 之间)，在边 AB 上取两点 C_1、C_2(C_2 位于 C_1 与 B 之间)，使得$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1$，直线 AA_1、BB_1、CC_1 可构成一个三角形，直线 AA_2、BB_2、CC_2 也可构成一个三角形，求证：这两个三角形的 6 个顶点共圆.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）



[证 1]　设所论的两个三角形分别为$\triangle EFG$ 和$\triangle LMN$(如图)，连结 FM、ME.

$\because$　$\angle AC_1C=180°-\angle CC_1C_2$

$=180°-\angle BB_2B_1$

$=\angle AB_2B$,

$\therefore$　$\triangle AC_1C\backsim\triangle AB_2B$.

$\therefore$　$\angle ABB_2=\angle ACC_1$，$\dfrac{AC_1}{AC}=\dfrac{AB_2}{AB}$.

同理　$\angle BAA_1=\angle BCC_2$.

$\therefore$　$\angle A_1GB=\angle BAA_1+\angle B_1BB_2+\angle ABB_2$

$$=\angle BCC_2+\angle C_2CC_1+\angle ACC_1=\angle ACB.$$

同理　$\angle ACB=\angle AMB_2$，$\angle A_2LC=\angle ABC=\angle AFC_1$.

在$\triangle ABG$、$\triangle ABC$ 和$\triangle ALC$ 中应用正弦定理有

$$\frac{AG}{\sin\angle ABG}=\frac{AB}{\sin\angle A_1GB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$=\frac{AC}{\sin\angle A_2LC}=\frac{AL}{\sin\angle ACL}.$$

$\because$　$\angle ABG=\angle ACL$，　$\therefore$　$AG=AL$.

同理　$BE=BM$，$CF=CN$.

再于　$\triangle AC_1F$、$\triangle ABC$ 和 $\triangle AB_2M$ 中应用正弦定理又有

$$\frac{AF}{\sin\angle AC_1F}=\frac{AC_1}{\sin\angle AFC_1}=\frac{AC_1}{AC}\cdot\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB_2}{AB}\cdot\frac{AB}{\sin\angle ACB}$$

$$=\frac{AB_2}{\sin\angle AMB_2}=\frac{AM}{\sin\angle AB_2M}.$$

$\because$　$\angle AC_1F=\angle AB_2M$，$\therefore$　$AF=AM$.

同理　$BG=BN$，$CE=CL$.

$\therefore$　$FM /\!/ BC$，$ME /\!/ AC$.

$\therefore$　$\angle FME=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle FGE$.

$\therefore$　$\angle FME+\angle FGE=180^\circ$.

$\therefore$　F、G、E、M 四点共圆，即点 M 在$\triangle EFG$ 的外接圆上.

同理，点 L、N 也都在$\triangle EFG$ 的外接圆上.

$\therefore$　E、F、G、L、M、N 六点共圆.

[证 2]　设所论的两个三角形分别为$\triangle EFG$、$\triangle LMN$（如图），连结 FM、ME.

$\because$　$\angle BC_1F=\angle FA_1A_2=\angle A_1A_2M=\angle MB_2C$，

$\therefore$　C_1、B、A_1、F；M、A_2、C、B_2 和 C_1、B、C、B_2 都四点共圆.

$\therefore$　$AF\cdot AA_1=AC_1\cdot AB=AB_2\cdot AC=AM\cdot AA_2$.

$\because$　$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1$，　$\therefore$　$AA_1=AA_2$.　$\therefore AF=AM$.

$\therefore$　$FM /\!/ BC$.

$\because$　$\angle C_1C_2C=\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2$，

$\therefore$　$\angle BC_2C=\angle AA_2C=\angle BA_1A=\angle BB_1C$.

$\therefore$　G、A_1、C、B_2；　C_2、B、A_2、L　和　C_2、B、C、B_1 都四点共圆.

$\therefore\quad AG\cdot AA_1=AB_1\cdot AC=AC_2\cdot AB=AL\cdot AA_2$.

$\because\quad AA_1=AA_2$, $\therefore\quad AG=AL$. 同理 $BE=BM$.

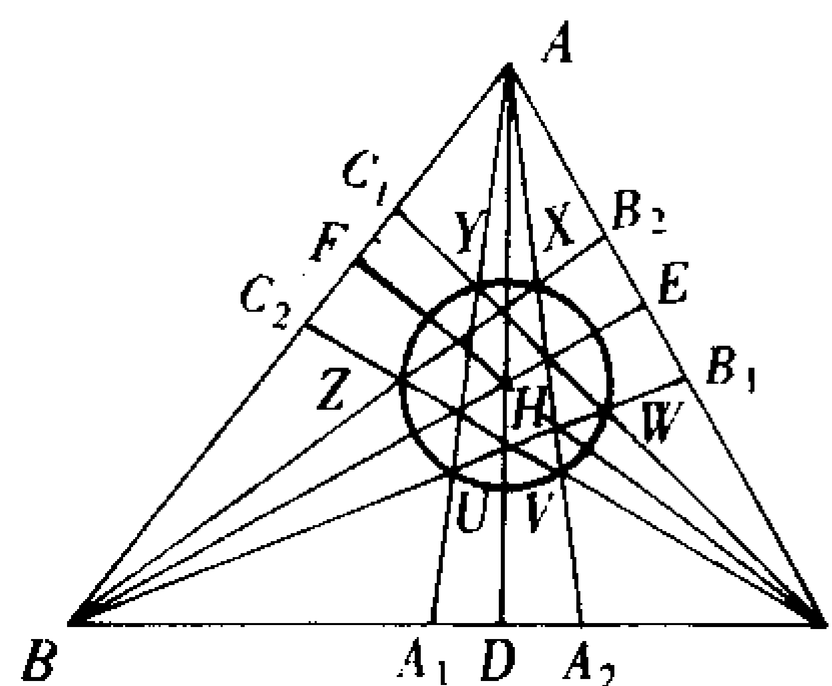
$\therefore\quad ME\,/\!/\,AC$.

$\therefore\quad \angle FME=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle FGE$.

$\therefore\quad \angle FME+\angle FGE=180^\circ$.

$\therefore\quad F、G、E、M$ 四点共圆,即点 M 在$\triangle EFG$ 的外接圆上.同理可证点 $L、N$ 也在此圆上.

$\therefore\quad E、F、G、L、M、N$ 六点共圆.



[证 3]　A_1 可以在高 AD 左侧任取,$A_1、A_2$ 关于高 AD 对称.设$\triangle ABC$ 的三条高相交于点H,由四点共圆的性质知

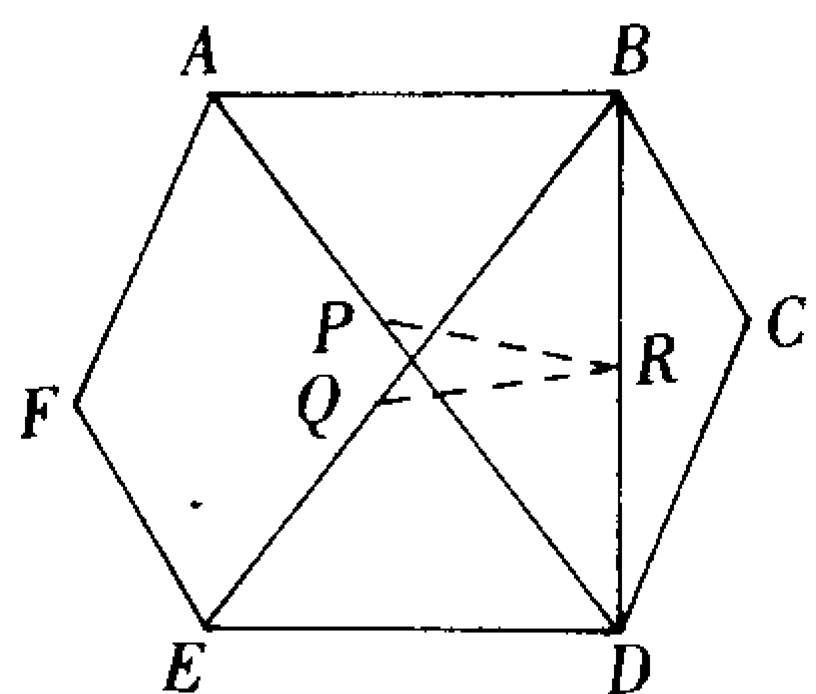
$$AX\cdot AA_2=AB_2\cdot AC=AC_1\cdot AB=AY\cdot AA_1,$$

从而 $AX=AY$,即 XY 亦关于AD 对称,所以 $HX=HY$.

同理,$HY=HZ=HU=HV=HW=HX$.因此,$X、Y、Z、U、V、W$ 都在以H 为圆心的同一圆上.

6·25　证明:如果六边形的对边相互平行,连接各组相对顶点的对角线又都相等,则该六边形具有外接圆.

(莫斯科数学奥林匹克,1949 年)



[证]　设在六边形 $ABCDEF$ 中,$AB\,/\!/\,DE$,$BC\,/\!/\,FE$,$CD\,/\!/\,FA$,且 $AD=BE=FC$.

设 AD 的中点为 P,BE 的中点为 Q,BD 的中点为R,如图,连 $PR、QR$.

由三角线中位线性质有

$$PR\,/\!/\,AB\,/\!/\,ED\,/\!/\,QR,$$

$\therefore\quad P、Q$ 重合.

故　$A、B、D、E$ 为$\odot P$(P 为圆心半径为AP)上的点.

同理可证 $F、C$ 两点也在此圆上.

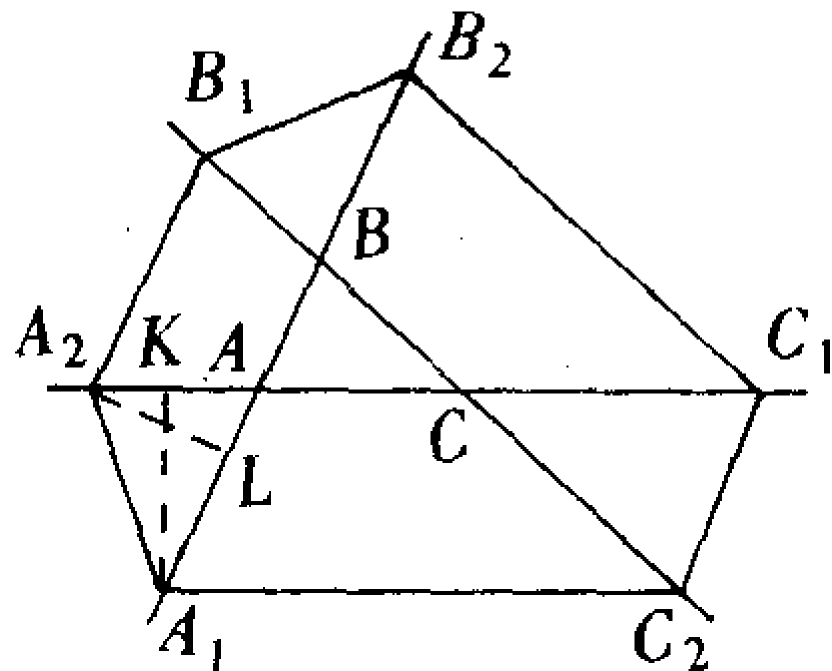
$\therefore\quad A、B、C、D、E、F$ 共圆.

6·26　引三条直线分别平行于三角形的三条边.每条直线与相应

的边的距离恰等于该边的长度. 同时,对于每条边,平行于它的直线和该边所对的顶点位于该边的两侧. 试证:三角形各边延长线与所引的三条直线的6个交点在同一圆周上.

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

[证] 如图,设给定的三角形为$\triangle ABC$,而A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2为各边延长线与所引直线的交点,且设$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$.



在$\triangle AA_1A_2$中,作高A_1K、A_2L. 由题设知$A_1K=b$,$A_2L=c$,

所以 $\dfrac{c}{AA_2}=\sin\angle A_1AA_2=\dfrac{b}{A_1A}$.

又 $\angle A_1AA_2=\angle BAC$,

$\therefore$ $\triangle AA_2A_1 \backsim \triangle ABC$

同理可证 $\triangle ABC \backsim \triangle C_2C_1C$,于是

$\angle ABC=\angle AA_2A_1=\angle C_2C_1C$

$\because$ $A_1C_1 /\!/ A_2C_1$,

$\therefore$ $\angle A_2A_1C_2+\angle A_2C_1C_2=\angle A_2A_1C_2+\angle A_1A_2C_1=180°$.

$\therefore$ A_1、A_2、C_1、C_2共圆.

$\because$ $B_1C_2 /\!/ B_2C_1$ $\therefore$ $\angle A_1B_2C_1=\angle ABC=\angle A_1A_2C_1$,

$\therefore$ B_2在A_1、A_2、C_1、C_2所在的圆上.

同理可证,B_1也在这个圆上. 于是A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2在同一个圆上.

6·27 在$\triangle ABC$中,D、E、F为三边的中点,X、Y、Z为三条高的垂足,H为垂心,P、Q、R为HA、HB、HC的中点. 求证:D、E、F、X、Y、Z、P、Q、R共圆.

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

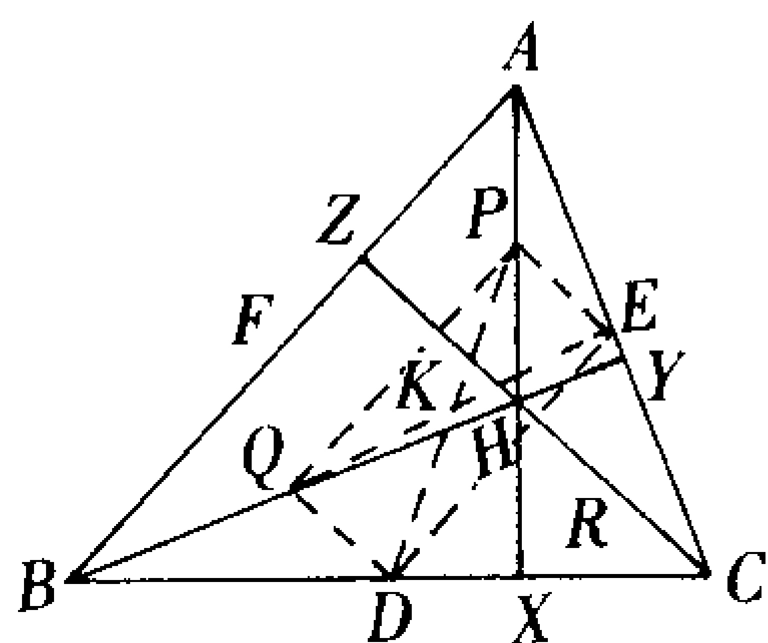
[证] 因为P、E分别是AH和AC的中点,则 $PE /\!/ HC$.

同理 $QD /\!/ HC$, 于是 $PE /\!/ QD$.

又$\because$ $PQ /\!/ AB /\!/ DE$, $AB \perp HC$,

$\therefore$ 四边形$PQDE$是矩形,则$PD=QE$.

设PD、QE交于K,则K是PD和QE的中点,



同理四边形 $PRDF$ 为矩形，则 $PD = RF$.

因而 PD 和 RF 也交于 K.

于是 P、Q、D、E、R、F 都在以 PD 为直径的圆上，PD、QE 和 RF 为直径.

又∵ $\angle PXD = \angle QYE = \angle RZF = 90°$,

∴ X、Y、Z 也在这个圆上.

因此，D、E、F、X、Y、Z、P、Q、R 九点共圆.

6·28 在正 1976 边形中，标出了所有边的中点以及所有对角线的中点，问最多有多少个标出的点在同一圆周上？

（第 10 届全苏数学奥林匹克 1976 年）

[解] 答最多有 1976 个标出的点在同一圆上.

事实上，以圆心 O 为圆心，将所标出的点除 O 外，每 1976 个为一组在一个圆上，如最大的一个是以 O 为圆心，正 1976 边形各边中点所在的圆. 这样的圆共画出 987 个，每个圆上都恰有标出的 1976 个点.

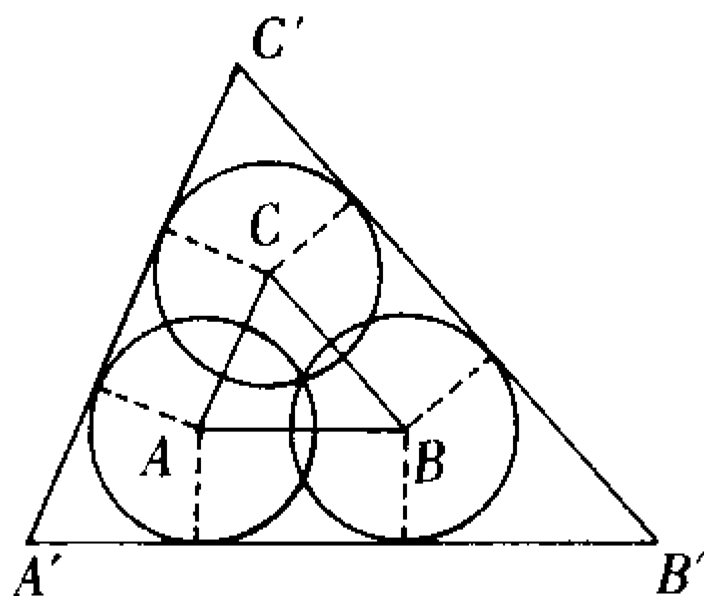
此外任意画一个圆 Γ，它与每个上述的圆至多有两个交点. 如果这些交点都恰为所标出的点，总计过 987×2 个标出的点，若 Γ 至多再过 O，所以总计至多过 $987\times 2+1=1975$ 个点.

可见，所标出的点至多有 1976 个点在同一圆周上.

(二)圆共点

6·29 证明：对任意 $\triangle ABC$ 都存在三个半径相等的圆，其中一个圆与边 AB 和 BC 相切，另一个与边 BC 和 AC 相切，第三个与边 AC 和 AB 相切. 而且这三个圆恰有一个公共点.

（保加利亚数学奥林匹克，1984 年）



[证] 给定 $\triangle ABC$，构造一个与它相似的 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 存在题目所说的图（于是原三角形相应的圆的存在性也就得到证明）.

为此，分别以 A、B、C 为圆心，以 $\triangle ABC$

的外接圆半径为半径作三个圆,则这些圆周有一个公共点(即$\triangle ABC$的外心).

这些圆的三条公切线构成$\triangle A'B'C'$,显然

$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$(因为$AB /\!/ A'B'$, $AC /\!/ A'C'$, $BC /\!/ B'C'$),$\triangle A'B'C'$满足要求.

6·30 设O为$\triangle ABC$内一点,线段AX、BY与CZ均以O为中点.求证:$\triangle BCX$、$\triangle CAY$、$\triangle ABZ$与$\triangle XYZ$的外接圆共点.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988年)

[证] 由于C、A、Y分别与Z、X、B关于O点中心对称,所以

$$\angle CAY = \angle ZXB,\ ZY /\!/ BC.$$

设M为$\triangle BCX$与$\triangle XYZ$的外接圆的交点(M与X不同).

则由于圆内接四边形的外角等于它的内对角及$ZY /\!/ BC$.

$\therefore\quad \angle YMC = \angle XBC + \angle XZY = \angle ZXB = \angle CAY$,

从而M也在$\triangle AYC$的外接圆上.

同理,M也在$\triangle AZB$的外接圆上.

于是四个三角形的外接圆共点.

6·31 在凸四边形$ABCD$的边AB上(异于A、B)取点E,又AC、DE交于F.求证:$\triangle ABC$、$\triangle CDF$和$\triangle BDE$的外接圆共点.

(第24届全苏数学奥林匹克,1990年)

[证] 分两种情况考虑:

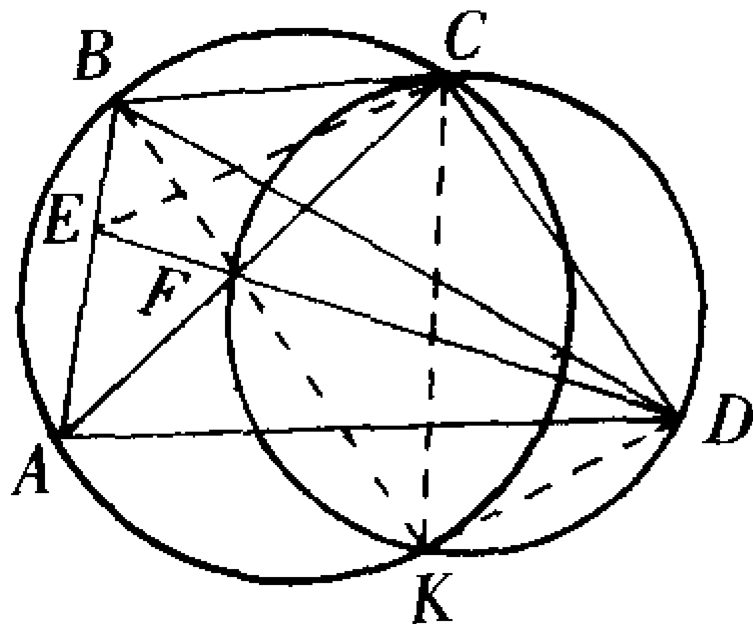


图1

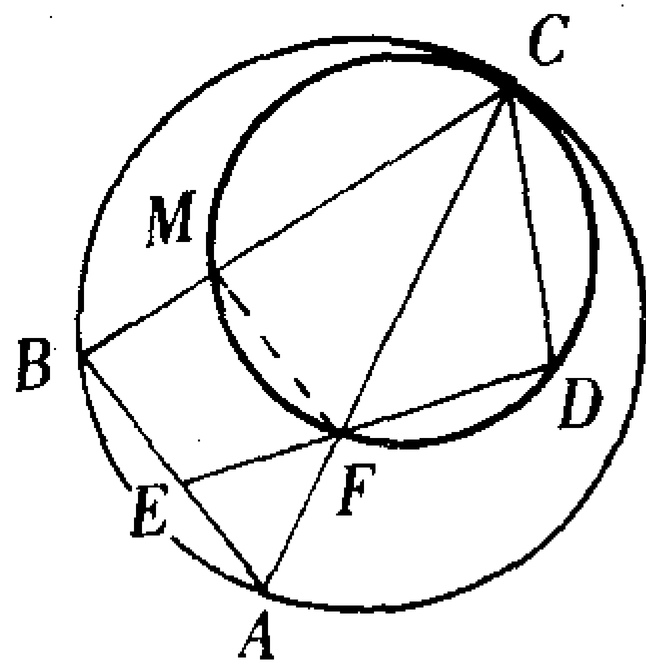


图2

①见图 1，$\triangle ABC$、$\triangle CDF$ 的外接圆除 C 之外还有另一交点 K，易知

$$\angle EBK=\angle ABK=\angle ACK=\angle FCK=\angle FDK=\angle EDK,$$

所以 B、D、K、E 共圆，即 K 为题中所述的三个三角形的外接圆的公共点.

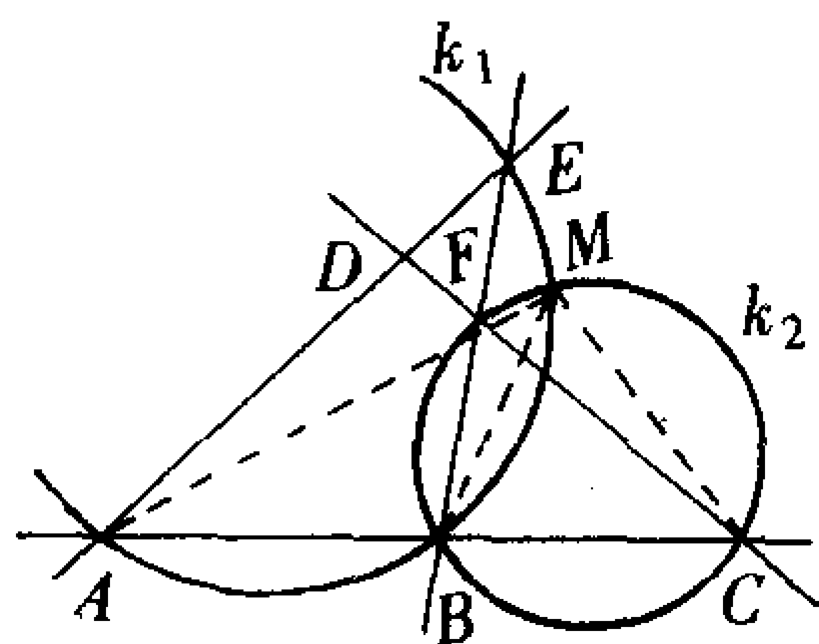
②见图 2，$\triangle ABC$、$\triangle CDF$ 的外接圆相切于 C 点. 设 $\triangle CDF$ 的外接圆交 BC 于 M. 由"弦切角等于同弧上的圆周角"知 $\angle ABC=\angle FMC$. 又四边形 $CDFM$ 内接于圆，所以 $\angle FMC+\angle CDF=180°$.

从而 $\angle EBC+\angle EDC=180°$，

所以 B、E、D、C 共圆，即 C 为题中所述的三个三角形的外接圆的公共点.

6·32 四条直线交于六点，组成四个三角形. 求证：这些三角形的外接圆交于一点.

（波兰数学奥林匹克，1960 年）



［证］ 四条直线交于六点的组成的图形称为完全四边形.

四条直线中每一条都与其他三条直线相交，并且所有的交点都是不同的.

这些直线中任何三条确定一个三角形，而且每条直线都含有六个交点中的三个点.

记这些点为 A、B、C、D、E、F. 设 (A,B,C)、(A,D,E)、(C,F,D)、(B,F,E) 为四条直线，且点 B 在线段 AC 内部，点 D 在线段 AE 内部，点 F 是线段 CD 和 BE 的公共内点.

完全四边形含有 $\triangle ABE$、$\triangle BCF$、$\triangle ACD$、$\triangle DEF$. 设 k_1、k_2、k_3、k_4 是这些三角形的外接圆.

因为圆 k_2 的点 F 是圆 k_1 的弦 BE 的内部，而圆 k_2 的点 C 落在圆 k_1 的弦 AB 的延长线上，所以圆 k_1 和 k_2 的交点 M 和 B 在直线 FC 的两侧.

点 M 与点 D、E、F 位于直线 AB 同侧，则

$$\angle AMB=\angle AEB,\ \angle BMC=\angle BFC.$$

有 $\angle AMC=\angle AMB+\angle BMC=\angle AEB+\angle BFC$

$$=\angle AEB+\angle DFE=\angle ADC.$$

因为点 D 和 M 位于直线 AC 同侧，所以 A、C、M、D 共圆. 因此 M 在 A、C、D 确定的圆 k_3 上.

于是圆 k_1、k_2、k_3 有公共点 M.

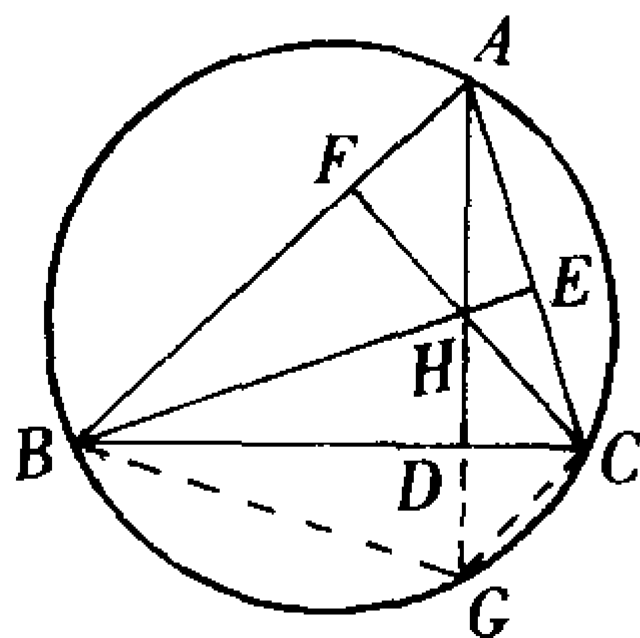
类似地可以证明，圆 k_1、k_2、k_4 有公共点 N，点 M、N 在圆 k_1 和圆 k_2 上. 但因点 A 在圆 k_2 的弦 BC 的延长线上，也在圆 k_4 的弦 DE 的延长线上，所以点 M 和 N 都不可能与圆 k_1 和 k_2 的公共点 A 重合. 因此，点 M 与点 N 重合.

于是圆 k_1、k_2、k_3、k_4 有一个公共点.

6·33 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：$\triangle HAB$、$\triangle HBC$、$\triangle HCA$ 的外接圆相等.

(第 10 届莫斯科数学奥林匹克，1947 年)

[证] 延长高 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 G，连结 BG、CG.



$\because$ $\angle GBC=\angle GAC=\angle HBC$,

$\angle GCB=\angle GAB=\angle HCB$,

$\therefore$ $\triangle GBC\cong\triangle HBC$.

$\therefore$ $\triangle HBC$ 的外接圆与 $\triangle GBC$ 的外接圆相等.

$\therefore$ $\triangle HBC$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相等.

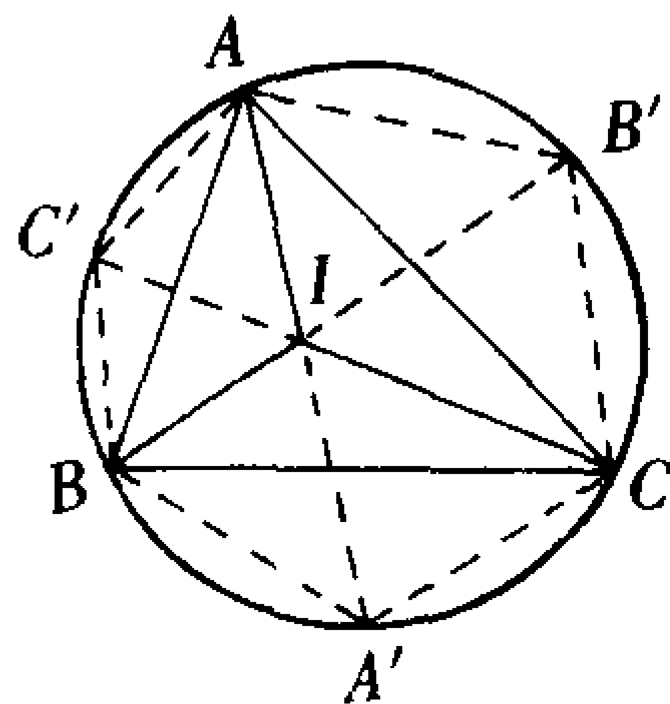
同理 $\triangle HAB$、$\triangle HCA$ 和 $\triangle ABC$ 的外接圆也都相等.

$\therefore$ $\triangle HAB$、$\triangle HBC$、$\triangle HCA$ 的外接圆都相等.

6·34 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，且 A'、B'、C' 分别是三角形 IBC，ICA、IAB 的外心. 求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外心.

(第 17 届美国数学奥林匹克，1988 年)

[证] 事实上，我们可以证明更强的结论：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外接圆.



为此，我们只需证明 A、B、C、A'、B'、C' 六点共圆，而这又只需证明 A、B、C、A' 四点共圆.

连 IA、IB、IC、IA'、$A'B$、$A'C$.

因为 $\angle BIC=\angle A+\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$.

又因为 A'是$\triangle IBC$ 的外心,则有

$$BA'=IA'=CA'.$$

$$\therefore\quad \angle IBA'+\angle ICA'=\angle BIA'+\angle CIA'=\angle BIC,$$

$$\begin{aligned}\angle BA'C&=2\pi-\angle BIC-(\angle IBA'+\angle ICA')\\&=2\pi-2\angle BIC\\&=2\pi-2\left(\angle A+\frac{\angle B+\angle C}{2}\right)\\&=\pi-A.\end{aligned}$$

即 $\angle A+\angle BA'C=\pi$. $\therefore$ A、B、C、A'共圆.

同理, A、B、C、B'共圆, A、B、C、C'共圆,

从而有 A、B、C、A'、B'、C'共圆.

6·35 如果圆 S 与圆$\sum$的公共弦是圆$\sum$的直径,则称圆 S“径截”圆$\sum$.设 A、B、C 是互异 3 点,圆 S_A、S_B、S_C 是分别以 A、B、C 为心的 3 个圆.求证 A、B、C 三点共线的充分必要条件是任何一个圆 S 都不能同时径截三圆 S_A、S_B、S_C.进一步地,如果存在多于 1 个圆.它们都同时径截圆 S_A、S_B、S_C,则这些圆 S 都过两个固定点.对于圆 S_A、S_B、S_C,求出这样的两个点.

(第 34 届国际数学奥林匹克预选题,1993 年)

[证] 我们用一个引理和三个定理来给出本题的证明.

引理 设 A 和 B 是不同两点,S_A、S_B 是分别以 A、B 为心,a 和 b 为半径的两个圆,则与圆 S_A、S_B 都径截的具有适当半径的圆 S_P 的圆心 P 的轨迹是直线 AB 的一条垂线,其垂足 N 满足条件

$$\overline{AN}:\overline{NB}=(AB^2+b^2-a^2):(AB^2+a^2-b^2),\qquad (*)$$

其中左端的符号$\overline{XY}$表示以 X 为起点,以 Y 为终点的有向线段的带有正负号的长度.

引理的证明 首先设点 P 具有所论性质,并设 Q_A、Q_B 是圆 S_P 分别与圆 S_A、S_B 的交点之一.于是 $PQ_A=PQ_B$ 且 $\angle PQA_A=90^\circ=\angle PBQ_B$.设点 N 是由点 P 作直线 AB 的垂线的垂足,又有

$$PQ_A^2=PA^2+a^2=PN^2+AN^2+a^2,$$

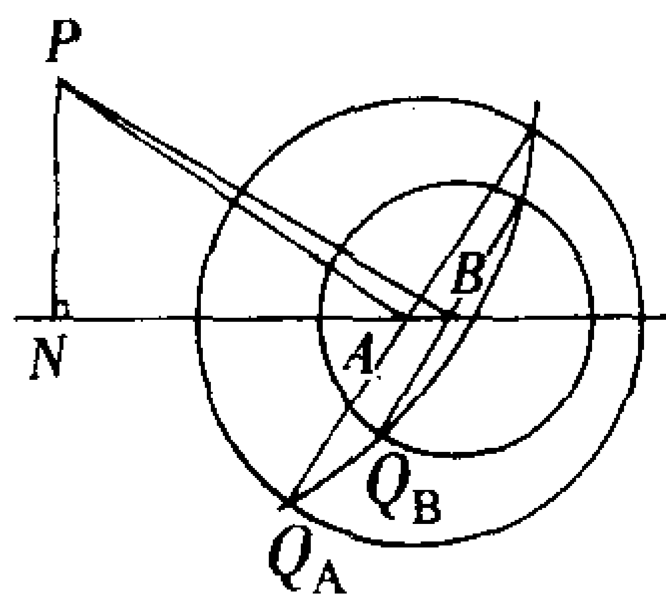
$$PQ_B^2 = PB^2 + b^2 = PN^2 + NB^2 + b^2.$$

$\therefore\quad AN^2 + a^2 = NB^2 + b^2.\qquad$ 又$\because\quad \overline{AN} + \overline{NB} = \overline{AB}$,

$\therefore\quad (\overline{AN} - \overline{NB})\overline{AB} = AN^2 - NB^2 = b^2 - a^2.$

$$\therefore\quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{2\,\overline{AB}\cdot\overline{AN}}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{NB}} = \frac{\overline{AB}(\overline{AN} + \overline{AB} - \overline{NB})}{\overline{AB}(\overline{NB} + \overline{AB} - \overline{AN})} = \frac{AB^2 + AN^2 - NB^2}{AB^2 + NB^2 - AN^2}$$
$$= \frac{AB^2 + b^2 - a^2}{AB^2 + a^2 - b^2},$$

即点 N 满足㊉式.注意.这个比例式表明点 N 的位置与点 P 无关.所以,具有所论性质的点 P 都在过点 N 所作的直线 AB 的垂线上.



反之,设点 N 使条件㊉成立,P 是过点 N 所作的直线 AB 的垂线上的任意一点,则前段论证可反推到关系式 $PA^2 + a^2 = PB^2 + b^2$.

分别过点 A 和 B 作 PA、PB 的垂线,分别交圆 S_A、S_B 于点 Q_A、Q_B.于是$\angle PAQ_A = 90° = \angle PBQ_B$.

由勾股定理有 $PQ_A = PQ_B = p$.

以点 P 为心,p 为半径作圆 S_P,则它与圆 S_A、S_B 都径截,即点 P 具有所论的性质.

定理 1　设 A、B、C 三点不共线且 S_A、S_B、S_C 是题中所给的 3 个圆,则存在惟一的点 P 具有所论的性质.

定理 1 的证明　对于任意点 P 和以点 X 为心,x 为半径的圆 S_X,定义

$$f(P, S_X) = PX^2 + x^2.$$

借助于函数 f,上述引理指出,点 P 对于圆 S_A、S_B 具有所论性质,当且仅当 $f(P,S_A) = f(P,S_B)$,而这个条件成立又当且仅当点 P 在直线 AB 的某条固定的垂线上.

设 $f(P', S_A) = f(P', S_B)$,$f(P'', S_A) = f(P'', S_C)$.

由引理知点 P' 的轨迹是 AB 的一条垂线,而点 P'' 的轨迹则是直线 AC 的一条垂线.

因为 A、B、C 三点不共线,所以作为轨迹的这两条垂线有惟一的交点 P.

显然,点 P 是使得 $f(P', S_A) = f(P, S_B) = f(P, S_C)$ 的惟一点.

定理 2 若 A、B、C 三点共线，则具有题中所论性质的点 P 不可能恰有一点.

定理 2 的证明 当 A、B、C 三点共线时，由 3 对圆 $\{S_A, S_B\}$、$\{S_A, S_C\}$、$\{S_B, S_C\}$ 所给出的 3 条轨迹（垂线）或者是 3 条互异的平行线，或者重合为 1 条直线，因为由定理 1 的论证可知，两条线重合而第 3 条与它们平行而不重合的情形是不会出现的.

若为前者，满足题中要求的点 P 不存在；

若为后者，这条重合直线上的所有点都满足题中的要求，即有无穷多个点满足题中的要求.

定理 3 在有无穷多个点 P 满足题中要求的情况下，相应的圆 S_P 全都过两个固定点.

定理 3 的证明 这时，A、B、C 三点共线，设 N 是直线 ABC 上的一点，使得 $NA^2 + a^2 = NB^2 + b^2 = NC^2 + c^2 = r^2$.

记 $PN = h$，$P^2 = PN^2 + AN^2 + a^2 = h^2 + r^2$，

于是以 P 为心，p 为半径的圆 S_P 与直线 ABC 交于两点 E 和 F，使得 $\overline{EN} = \overline{NF} = r$.

由于 r 与 h 无关，故所有这样的圆 S_P 都过 E、F 两点，即它们都过两个固定点.

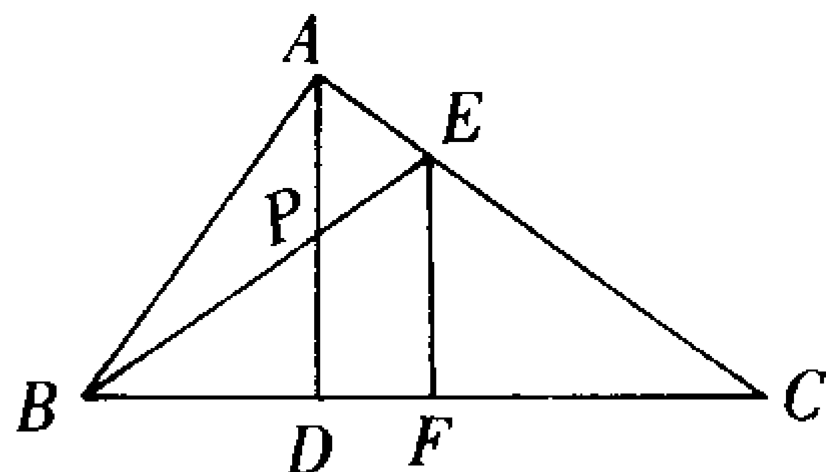
第七章　线段或角的计算

(一)线段的计算

1. 三角形中的线段计算

7·1　如图,在$\triangle ABC$中,$\angle A=90°$,$AD\perp BC$于D,P为AD中点,BP交AC于E,$EF\perp BC$于F,$AE=3$,$EC=12$.求:EF之长.

(中国湖北省黄冈地区数学竞赛,1990年)



[解]　延长FE、BA交于H点,

由　$AD/\!/HF$,且P为AD中点,

得　$HE=EF$.

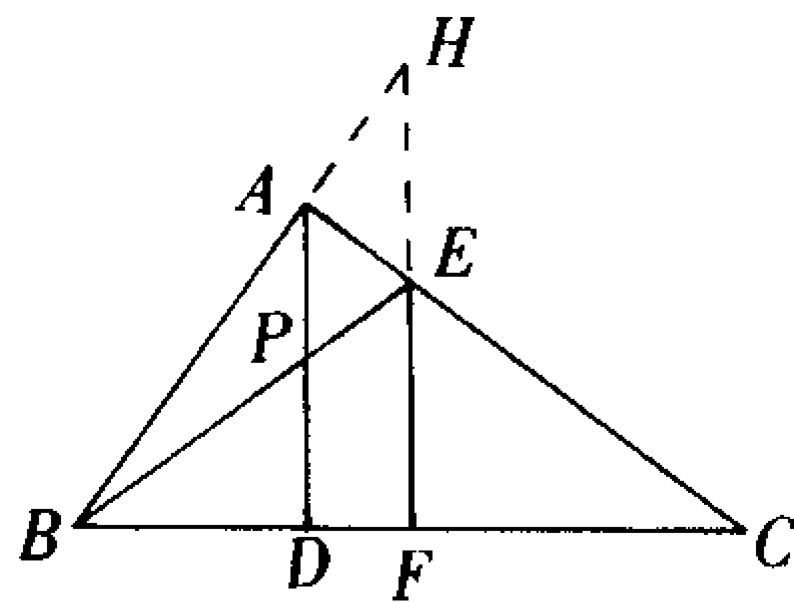
又∵　$\angle HAC=90°$,$\angle EFC=90°$,

∴　H、A、F、C共圆.

有　$HE\cdot EF=AE\cdot EC$.

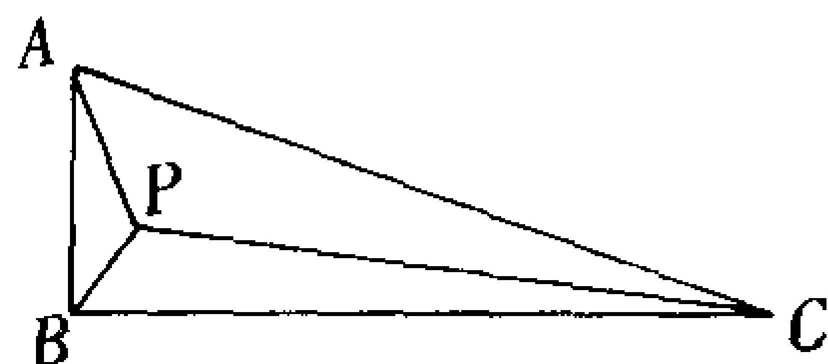
即　$EF^2=AE\cdot EC=3\times12=36$.

∴　$EF=6$.



7·2　P是直角三角形ABC内一点,$\angle B=90°$,$PA=10$,$PB=6$,$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$.求:$PC$.

(第5届美国数学邀请赛,1987年)



[解] 由已知可得

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$.

由余弦定理

$$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos\angle APB$$
$$=PA^2+PB^2+PA\cdot PB$$
$$=10^2+6^2+10\times 6=196.$$

同理 $BC^2=PB^2+PC^2+PB\cdot PC=36+PC^2+6PC$.

$CA^2=PC^2+PA^2+PC\cdot PA=PC^2+100+10PC$.

又由勾股定理 $CA^2=AB^2+BC^2$,

有 $PC^2+100+10PC=196+36+PC^2+6PC$,

$\therefore\quad PC=33$.

7·3 $\triangle ABC$ 的三个角成等差数列,面积为$10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$,周长为20cm,求:该三角形三边长.

(中国福建省福州市数学竞赛,1962年)

[证] 不妨设A、B、C成等差数列,则$B=\dfrac{\pi}{3}$.

而 $$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3},$$

由 $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{s-b}$, 求得 $b=7$,

$\therefore\quad a+c=2s-b=13.$ ①

又$\because$ $\Delta=\dfrac{1}{2}ac\sin B$,

$\therefore\quad ac=\dfrac{2\Delta}{\sin B}=40.$ ②

根据①,②解得 $\begin{cases}a=5\\c=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=8\\c=5.\end{cases}$

$\therefore$ 这三角形三边的长分别是5cm、7cm、8cm.

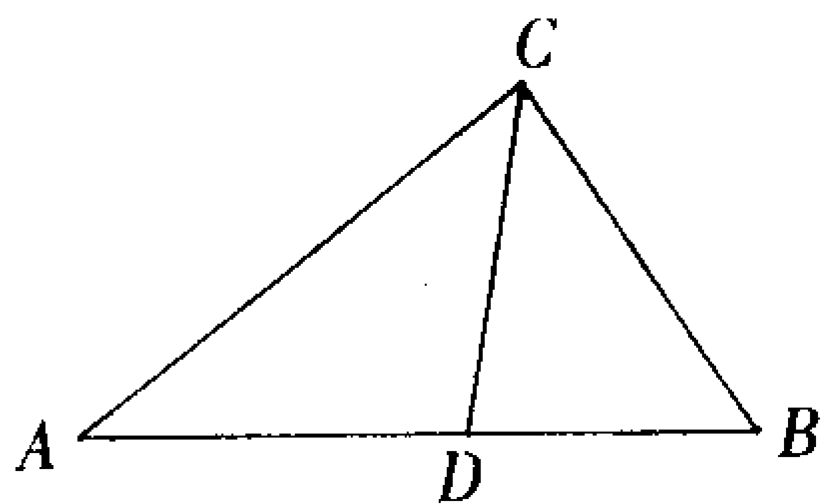
7·4 三角形三边的长是相继整数,最大角是最小角的2倍.求:三边的长.

(中国福建省福州市数学竞赛,1964年)

[解1] 设A为最小角,C为最大角.则$C=2A$.

又设 $AC=x$，

则 $AB=x+1$，$BC=x-1$.



作$\angle ACB$的平分线AD,则

$\angle CDB=2\angle A=\angle C$.

于是 $\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，

$\therefore\quad BD=\dfrac{BC^2}{AB}=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

而 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{BC}$，$\therefore\quad \dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC+BC}{BC}$，

即 $\dfrac{x+1}{\dfrac{(x-1)^2}{x+1}}=\dfrac{2x-1}{x-1}$，

化简得 $x^2-5x=0$，有 $x_1=5$，$x_2=0$(舍去).

故 三边长为4、5、6.

[解2] 设三边长分别为x、$x+1$、$x+2$,三个角为α、$180°-3\alpha$、2α,则由正弦定理得

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{x+1}{\sin(180°-3\alpha)}=\frac{x+2}{\sin2\alpha}.$$

由 $\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{x+2}{2\sin\alpha\cos\alpha}$，得 $\cos\alpha=\dfrac{(x+2)}{2x}$；

由 $\dfrac{2x+1}{2\sin2\alpha\cos\alpha}=\dfrac{x+2}{\sin2\alpha}$，得 $\cos\alpha=\dfrac{2x+1}{2(x+2)}$.

$\therefore\quad \dfrac{2x+1}{2(x+2)}=\dfrac{x+2}{2x}$，

化简得 $x^2-3x-4=0$，

$\therefore\quad x_1=4$，$x_2=-1$(舍去).

故 三边长为4、5、6.

[解3] 如解2设,由正弦定理得

$\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{x+2}{\sin2\alpha}$，$\therefore\quad \cos\alpha=\dfrac{x+2}{2x}$.

由余弦定理得

$$x^2=(x+1)^2+(x+2)^2-2\cdot(x+1)(x+2)\cdot\frac{x+2}{2x},$$

化简得 $x^2-3x-4=0$.

以下同解 2.

7·5　三角形的最长边与次长边之和是 12，而面积的数值是这两边夹角正弦值的 $17\frac{1}{2}$ 倍，一个内角是 120°，求：这三角形的三边的长.

（中国四川省数学竞赛，1978 年）

[解]　设最长边、次长边、短边分别为 x、y、z，长边与次长边夹角为 θ，则有：

$$\begin{cases} x+y=12, & ① \\ \frac{1}{2}xy\sin\theta=17\frac{1}{2}\sin\theta, & ② \\ x^2=y^2+z^2-2yz\cos120°. & ③ \end{cases}$$

由①，②解得　$x=7$，$y=5$.

把 $x=7$，$y=5$ 代入③，得　$7^2=5^2+z^2-2\times5z\cos120°$，

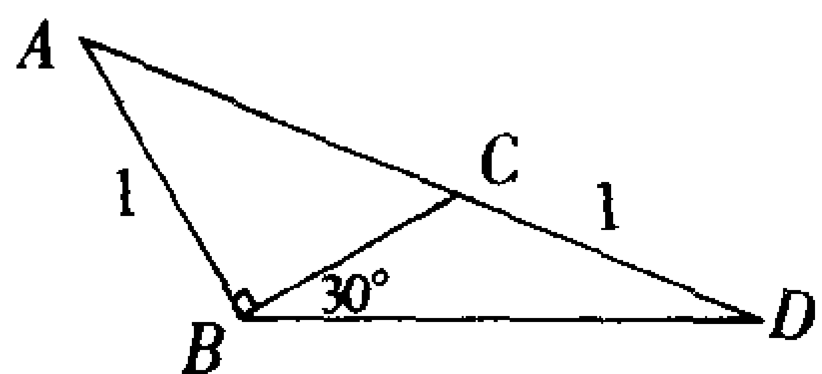
即　$z^2+5z-24=0$.

解得　$z=3$，$z=-8$（舍去）.

故最长边为 7，次长边为 5，短边为 3.

7·6　如图，$AB=CD=1$，$\angle ABC=90°$，$\angle CBD=30°$，求：AC.

（第 18 届加拿大数学奥林匹克，1986 年）



[解 1]　设 $AC=x$，$BD=y$，由勾股定理可得 $BC=\sqrt{x^2-1}$.

又　$\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

在△ABD 中，由余弦定理可得

$(1+x)^2=1+y^2-2\times1\times y\cos120°=1+y^2+y$.

即　$x^2+2x=y^2+y$.　①

在△CBD 中，由余弦定理可得

$$y^2=1+(\sqrt{x^2-1})^2-2\times1\times\sqrt{x^2-1}\cdot\left(-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

$$=x^2+2x-\frac{2}{x}.\qquad ②$$

由①、②可得

$y^2+\frac{2}{x}=y^2+y$，∴　$y=\frac{2}{x}$.

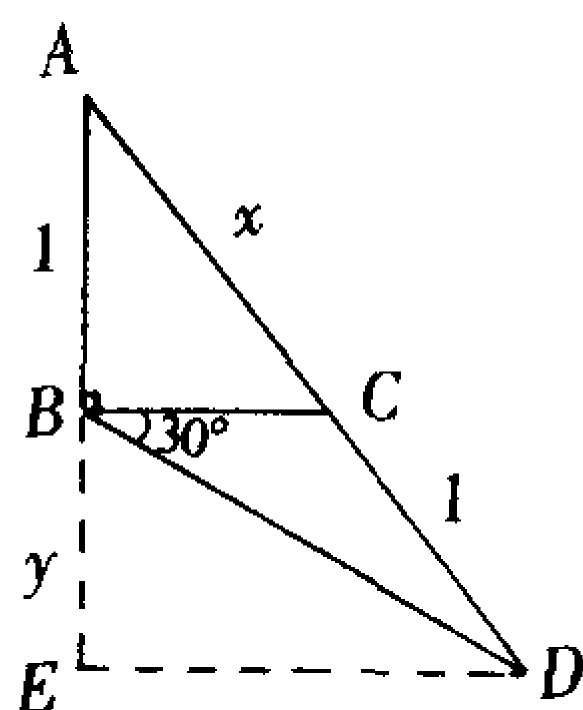
代入①得　$x^2+2x=\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}$，

即　$x^4+2x^3=4+2x$，

或　　$x^3(x+2)=2(x+2)$.

∵　$x>0$，∴　$x+2\neq0$，于是　$AC=x=\sqrt[3]{2}$.

[解2]　作 $DE/\!/BC$ 交 AB 的延长线于 E，



设　$AC=x$，$BE=y$，由　$\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CD}$.

有　$\frac{1}{y}=\frac{x}{1}$，或　$y=\frac{1}{x}$.

由　$\angle BDE=\angle CBD=30°$.

有　$DE=BE\text{ctg}30°=\sqrt{3}y=\frac{\sqrt{3}}{x}$.

再由勾股定理得　$AE^2+DE^2=AD^2$.

∴　$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2=(1+x)^2$，

故　$(x+2)(x^3-2)=0$.

由　$x>0,x+2>0$　可得　$x^3-2=0$，

∴　$AC=x=\sqrt[3]{2}$.

7·7　在△ABC 中，$\angle B$ 的平分线交边 AC 于 P，$\angle A$ 的平分线交边 BC 于 Q，如果过点 P、Q、C 的圆也过△ABC 的内心 R，且 $PQ=1$，求：PR 和 RQ 的长.

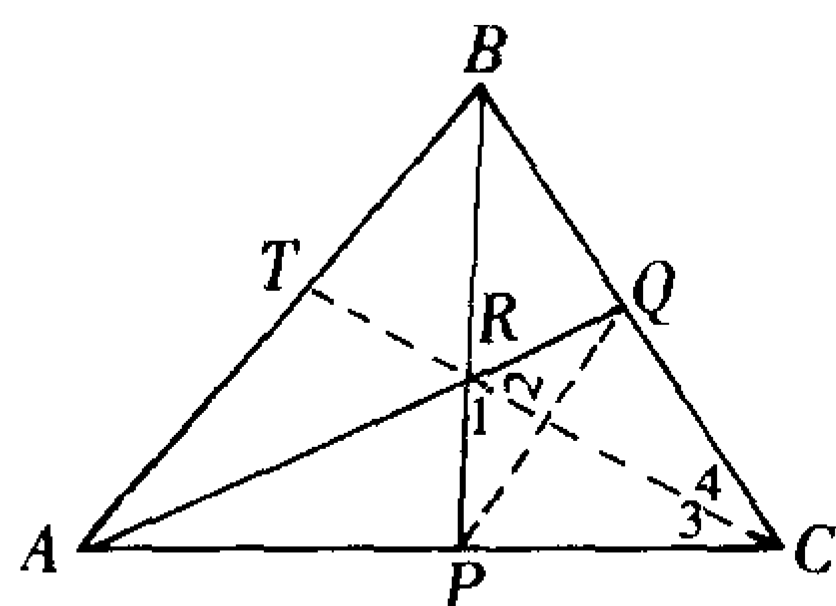
（意大利数学奥林匹克，1990 年）

[解]　连结 CR，并延长交 AB 于 T，则

$$\angle PRQ=\angle1+\angle2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)+\left(\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)+\angle C.$$

∵　P、C、Q、R 四点共圆，

∴　$\angle PQR+\angle C$



$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)+2\angle C$$
$$=180^\circ.$$

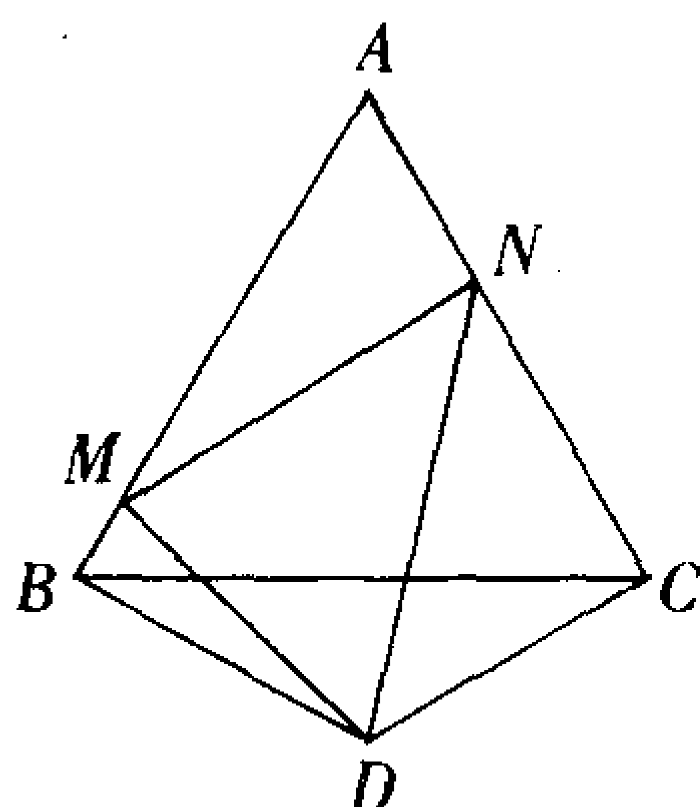
$\therefore\quad \frac{3}{2}\angle C=90^\circ,\ \angle C=60^\circ.$

$\therefore\quad \angle 3=\angle 4=30^\circ.$

设圆 PQR 的半径为 r，由正弦定理有

$PQ=2r\sin60^\circ,\ PR=2r\sin30^\circ=RQ.$

$\because\quad PQ=1,\ \therefore\quad r=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \therefore\quad PR=RQ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

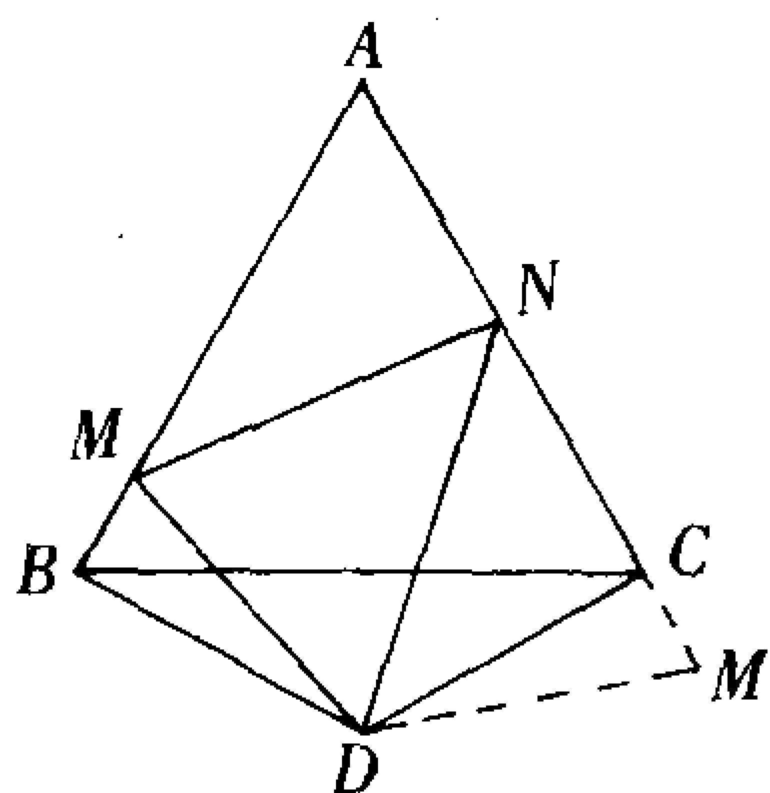


7·8　如图，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，$\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC=120^\circ$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60° 角，角的两边分别交 AB 于 M，交 AC 于 N，连结 MN，形成一个 $\triangle AMN$，求：$\triangle AMN$ 的周长.

（中国北京市数学竞赛，1991 年）

［解］　由题设可得 $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$.

在 AC 的延长线上截取 $CM_1=BM$，连 DM_1，则有 $\triangle BDM\cong\triangle CDM_1$.



显然　$\angle MDM_1=120^\circ$,

又　$\angle NDM_1=60^\circ$,

在 $\triangle MDN$ 与 $\triangle M_1DN$ 中，$MD=M_1D$，$\angle MDN=\angle NDM_1=60^\circ,\ DN=DN.$

$\therefore\quad \triangle MDN\cong\triangle M_1DN$,

故　$MN=M_1N.$

记 $\triangle AMN$ 周长为 l，则

$$\begin{aligned}l&=AM+MN+AN\\&=AM+AN+NM_1\\&=AM+AM_1=(AB-BM)+(AC+CM_1)\\&=AB+AC=2.\end{aligned}$$

7·9　已知:一个直角三角形的边长都是整数,并且周长的数值恰好等于面积的数值.求:这个直角三角形的三边长.

(中国福建省福州市数学竞赛,1978 年)

[**解**]　设这直角三角形的直角边长为 a、b,斜边长为 c.则有

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{ab}{2}, & ① \\ a^2+b^2=c^2. & ② \end{cases}$$

由①得　$c=\dfrac{ab}{2}-a-b$,代入②得

$$a^2+b^2=\left(\frac{ab}{2}-a-b\right)^2,$$

化简得　$\dfrac{ab}{4}(ab-4a-4b+8)=0$,

$\because$　$ab\neq$,$\therefore$　$ab-4a-4b+8=0$.

解得　$a=\dfrac{4b-8}{b-4}=4+\dfrac{8}{b-4}$.

$\because$　a 为整数,故 $b-4$ 必须是 8 的因数,而 8 的因数仅有 ±1,±2,±4,±8;

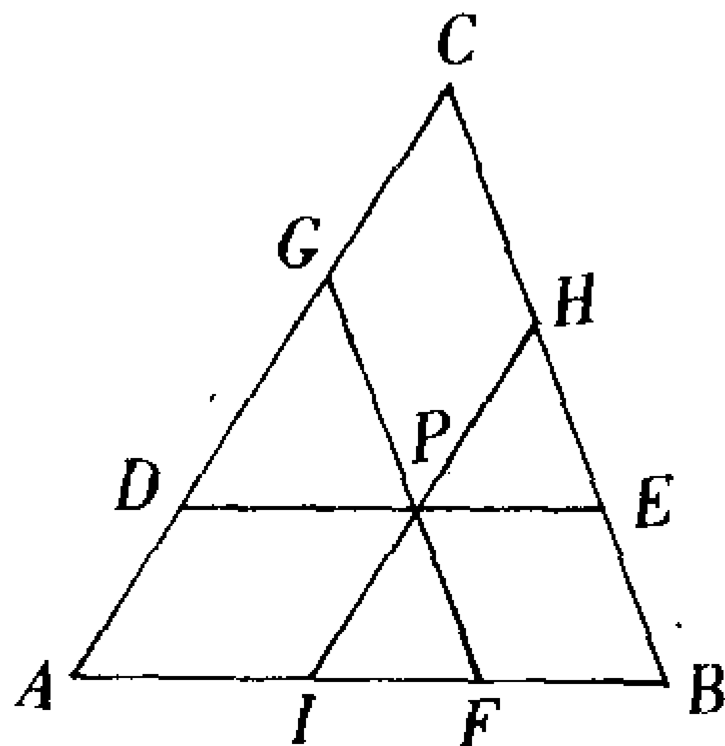
又$\because$　a 是正数,故 $4+\dfrac{8}{b-4}$必须大于 0.

而 b 为正数,$\therefore$　b 只能取 5、6、8、12,相应地解得 a 为 12、8、6、5,c 为 13、10、10、13.

$\therefore$　这个直角三角形的三边长为　5、12、13 或 6、8、10.

7·10　如图所示,在$\triangle ABC$ 中,$AB=425$,$BC=450$,$CA=510$,P 在$\triangle ABC$ 的内部,DE、FG、HI 都过 P 点,且长度都为 d,分别平行于 AB、BC、CA.求 d.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)



[**解**]　如图,四边形 $BFPE$、$CGPH$、$ADPI$ 都是平行四边形,则

$$\begin{aligned} EH&=BC-(BE+HC)\\ &=BC-(PF+PG)\\ &=BC-GF=450-d. \end{aligned}$$

同理　$GD=510-d$.

$\because$ $\triangle PEH \backsim \triangle ABC$. $\therefore$ $\dfrac{PE}{AB}=\dfrac{EH}{BC}$,

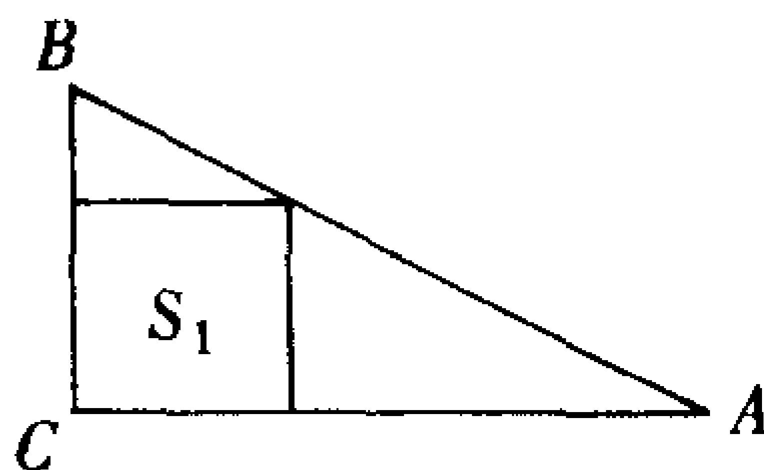
有 $\dfrac{PE}{425}=\dfrac{450-d}{450}$. 即 $PE=425-\dfrac{17}{18}d$.

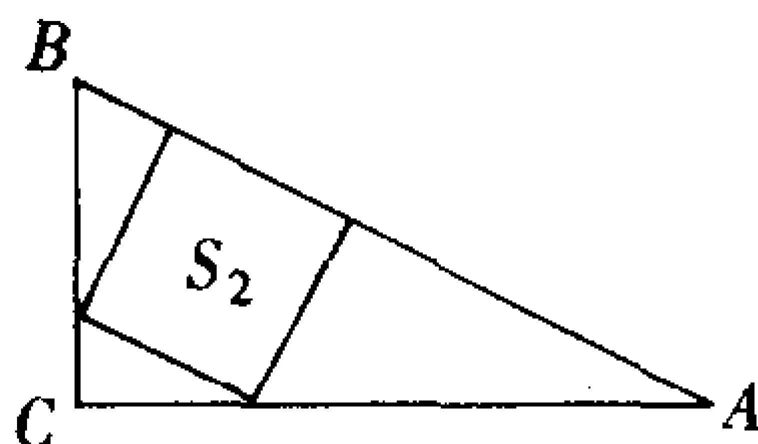
$$PD=d-PE=\frac{35}{18}d-425.$$

又$\because$ $\triangle PDG \backsim \triangle BAC$. $\therefore$ $\dfrac{PD}{AB}=\dfrac{DG}{AC}$.

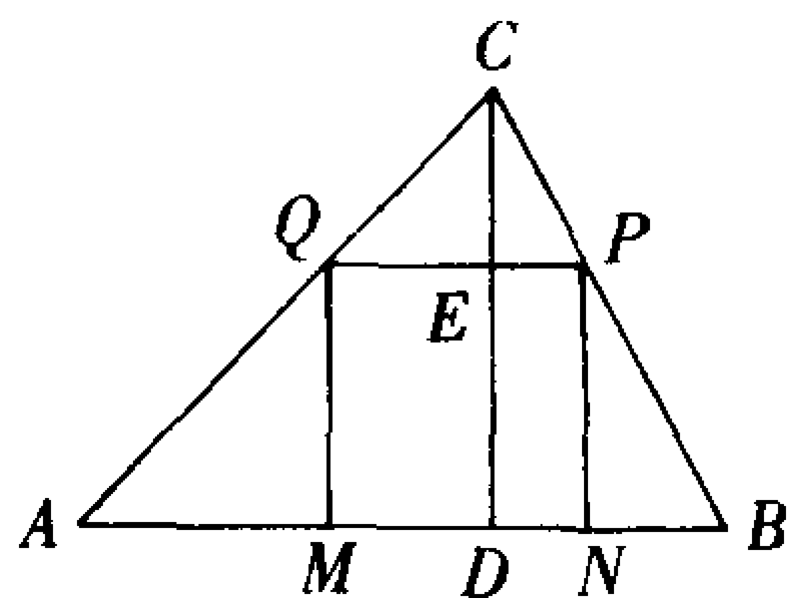
有 $\dfrac{\frac{35}{18}d-425}{425}=\dfrac{510-d}{510}$. 得 $d=306$.

7·11 如图所示，S_1 和 S_2 是直角三角形 ABC 的两个内接正方形，已知 S_1 的面积为 441，S_2 的面积为 440，求：$AC+BC$ 的值.





（第 5 届美国数学邀请赛，1987 年）



[解 1] 首先计算任意三角形内接正方形的边长.

设正方形 $MNPQ$ 内接于$\triangle ABC$，M、N 在 AB 上，P 在 BC 上，Q 在 AC 上.

又设 $AB=c$，AB 上的高 $CD=h$，CD 交 PQ 于 E，正方形的边长为 x.

由$\triangle CPQ \backsim \triangle CBA$ 可得

$\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{PQ}{AB}$，即 $\dfrac{h-x}{h}=\dfrac{x}{c}$，

解得 $x=\dfrac{ch}{c+h}$.

在本题中，设 $AC=b$，$AB=a$，则

$$S_1=441=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2. \qquad ①$$

且 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$，AB 上的高 $h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

又 $$S_2=440=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)^2 \qquad ②$$

设 $ab=m$，$a+b=n$，

于是 $a^2+b^2=n^2-2m$.

则①式化为 $m=21n$. ③

②式化为 $$\left(\frac{m}{\sqrt{n^2-2m}+\dfrac{m}{\sqrt{n^2-2m}}}\right)^2=440,$$

即 $$\frac{m^2(n^2-2m)}{n^4-2mn^2+m^2}=440. \qquad ④$$

将③式代入④式 $\dfrac{441n^2(n^2-42n)}{n^4-42n^2+441n^2}=440$，

则 $441n^2-441\times42n=440n^2-440\times42n+440\times441$.

解得 $n=462$，$n=-420$(舍去).

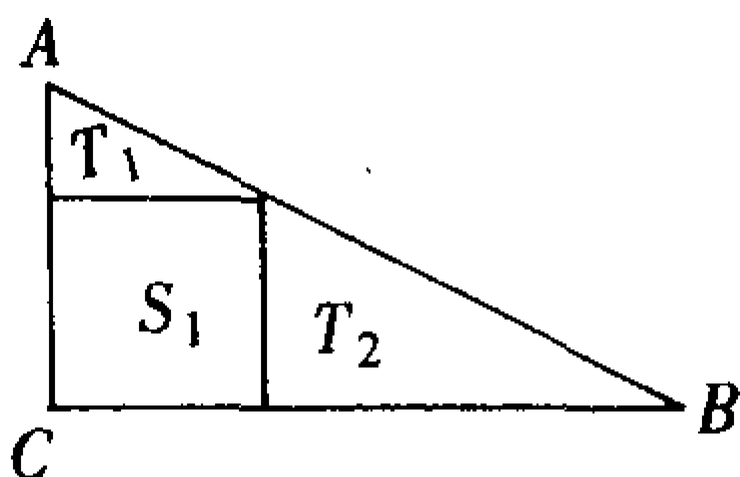
所以 $n=a+b=AC+BC=462$.

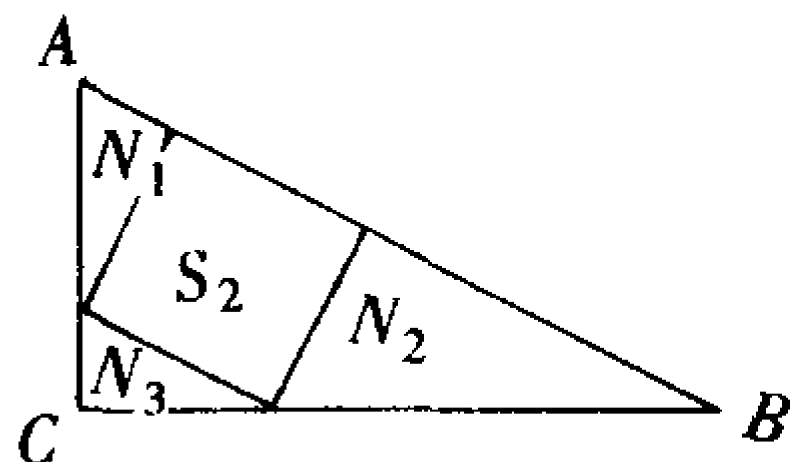
[解 2] 如图，设 $a=BC$，$b=AC$.

又设 T_1、T_2、N_1、N_2、N_3 表示图中各三角形的面积.

由相似三角形面积比等于相似比的平方可推出

$$\frac{N_1}{T_1}=\frac{N_2}{T_2}=\frac{440}{441},$$





$$S_{\triangle ABC}=N_1+N_2+N_3+S_2$$
$$=\frac{440}{441}(T_1+T_2+441)N_3$$
$$=\frac{440}{441}S_{\triangle ABC}+N_3.$$

$\therefore\quad N_3=\frac{1}{441}S_{\triangle ABC}.$

又由 N_3 所对应的三角形的斜边 $=\sqrt{S_2}=\sqrt{440}$,

$\therefore\quad \left(\frac{\sqrt{440}}{AB}\right)^2=\frac{N_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{441}$,

故 $\frac{440}{AB^2}=\frac{1}{441}$, 即 $AB=21\sqrt{440}$. ①

设 N_3 对应三角形斜边上的高为 h_1,$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高为 h,则

$$\left(\frac{h_1}{h}\right)^2=\frac{N_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{441},$$

有 $h_1=\frac{1}{21}h$.

又 $h=h_1+\sqrt{440}=\frac{1}{21}h+\sqrt{440}$.

则 $h=\frac{21}{20}\sqrt{440}$ ②

由①和②得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 21^2\times 22=\frac{1}{2}ab$.

即 $ab=21^2\times 22$. ③

由① $AB^2=a^2+b^2=21^2\times 440=(a+b)^2-2ab$

把③代入得 $21^2\times 440=(a+b)^2-2\times 21^2\times 22$,

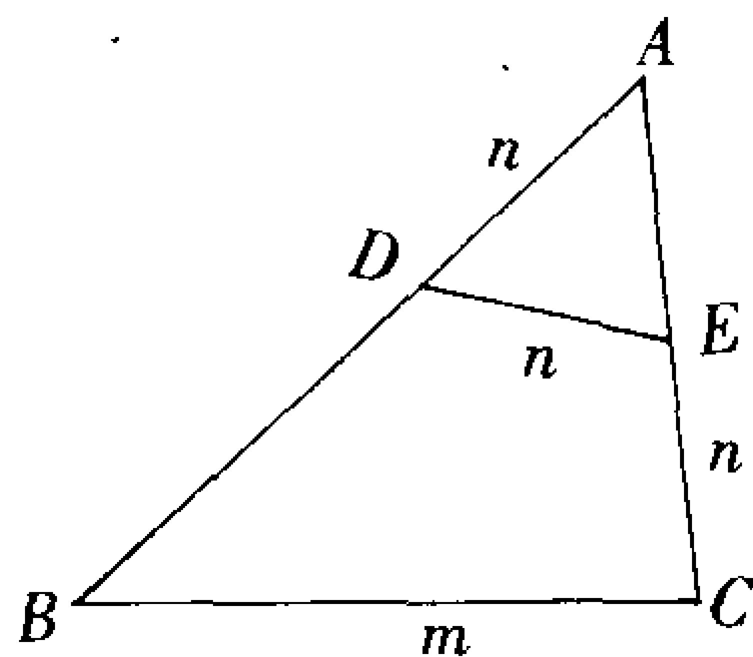
$\therefore\quad a+b=21\times 22=462$,

故 $AC+BC=462$.

7·12 在$\triangle ABC$ 中,$AB=33$ 厘米,$AC=21$ 厘米,$BC=m$ 厘米,m 为整数,又在 AB 上可找到D,在 AC 上可找到E,使 $AD=DE=EC=n$ 厘米,n 为整数,问 m 可取哪些值?

(瑞士数学奥林匹克,1983 年)

[解] 在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理



$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{33^2+21^2-m^2}{2\times33\times21}=\frac{1530-m^2}{2\times7\times3^2\times11}.$$

在$\triangle ADE$中,由余弦定理

$$\cos A=\frac{AD^2+AE^2-DE^2}{2AD\cdot AE}=\frac{n^2+(21-n)^2-n^2}{2n(21-n)}=\frac{21-n}{2n}.$$

从而有 $\dfrac{1530-m^2}{2\times7\times3^2\times11}=\dfrac{21-n}{2n}$

即 $n(2223-m^2)=3^3\times7^2\times11$.

由于m、n是正整数,所以n是$3^3\times7^2\times11$的约数.

$\because$ $EC<AC$, $AD+DE>AE$,

$\therefore$ $7<n<21$. 这时n只能取9或11.

当$n=9$时, $m^2=2223-3\times7^2\times11=606$.

由于606不是完全平方数,所以此时无解.

当$n=11$时, $m^2=2223-3^3\times7^2=900$, 得 $m=30$.

所以,m只能取30.

7·13 一个三角形的三条边长及一条高是4个相继整数,并且这条高将原三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数.求这个三角形,并证明这样的三角形是惟一的.

(第25届加拿大数学奥林匹克,1993年)

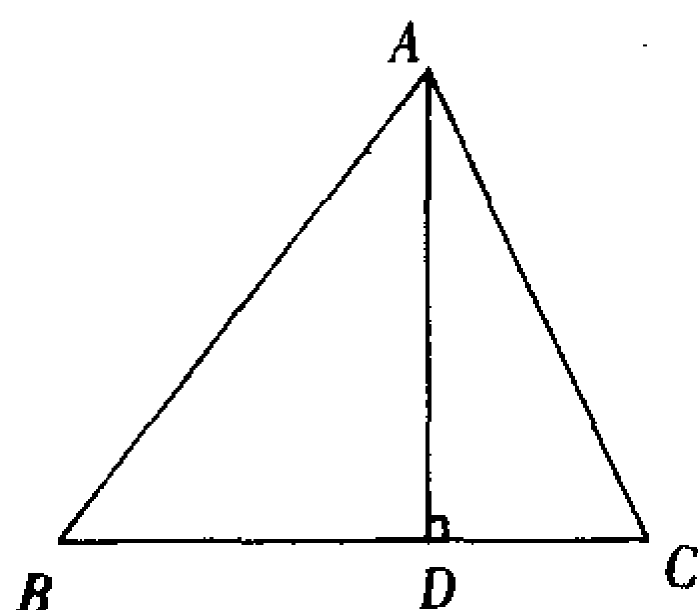
[解] 设此三角形为$\triangle ABC$,高为AD.四个相继整数为n、$n+1$、$n+2$、$n+3$.

不妨设 $AC<AB$, 则 $AD<AC<AB$.

$\therefore$ $AD=n$ 或 $n+1$.

若 $AD=n+1$. 这时 $AC=n+2$, $AB=n+3$, $BC=n$.

由勾股定理,有



$BD=\sqrt{(n+3)^2-(n+1)^2}=2\sqrt{n+2}$,

$BD=\sqrt{(n+2)^2-(n+1)^2}=\sqrt{2n+3}$.

由题意,$2\sqrt{n+2}$, $\sqrt{2n+3}$是整数,

且由 $BC=BD+CD$ 得

$$n=2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+3}.$$

$$\because \quad n^2-4<n^2=(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+3})^2$$
$$<(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+4})^2$$
$$=(2+\sqrt{2})^2(n+2)$$
$$<12(n+2)$$

$\therefore \quad n-2<12, \quad n<14$.

由$\sqrt{n+2}$是整数得 $n=2$ 或 7. 这时 $\sqrt{2n+3}=\sqrt{7}$或$\sqrt{17}$,不是整数,因而不合题意.

若 $AD=n$,这时

$$BD\leqslant\sqrt{(n+3)^2-n^2}=\sqrt{6n+9},$$

$$CD\leqslant\sqrt{(n+2)^2-n^2}=2\sqrt{n+1}.$$

$\therefore \quad n+1\leqslant BC\leqslant\sqrt{6n+9}+2\sqrt{n+1}<5\sqrt{n+1}$,

则 $n<24$.

(1)若$BC=n+1$, 则 $AC=n+2$, $AB=n+3$, 这时

$$BD=\sqrt{6n+9}, \quad CD=2\sqrt{n+1}.$$

然而,小于 24 且使得$\sqrt{6n+9}$和$\sqrt{n+1}$均为整数的 n 不存在.

(2)若$BC=n+2$,则 $AC=n+1$, $AB=n+3$, 这时

$$BD=\sqrt{6n+9}, \quad CD=\sqrt{2n+1}.$$

小于 24 且使得$\sqrt{6n+9}$和$\sqrt{2n+1}$均为整数的 n 只有一个,即 $n=12$,从而 $AC=13$, $BC=14$, $AB=15$.

(3)若$BC=n+3$, 则 $AC=n+1$, $AB=n+2$, 这时

$$BD=2\sqrt{n+1}, \quad CD=\sqrt{2n+1}.$$

然而,小于 24 且使得$2\sqrt{n+1}$, $\sqrt{2n+1}$均为整数的 n 不存在.

所以,满足题意的三角形只有一个,三边边长为 13、14、15.

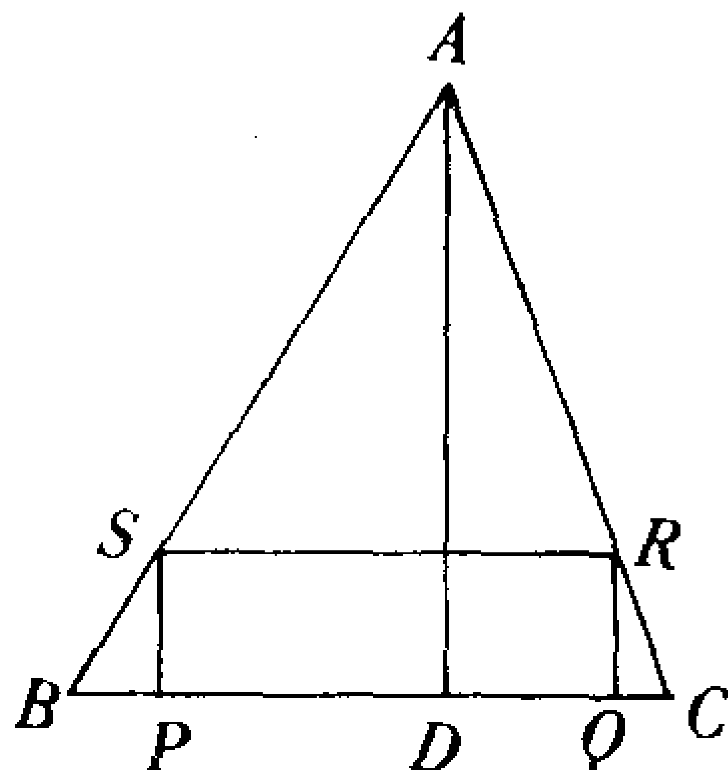
7·14 如图,$\triangle ABC$ 的面积是其内接矩形 $PQRS$ 面积的 3 倍,并且边 BC 和高 AD 的值是有理数,问矩形 $PQRS$ 的周长的值,在什么情

况下是有理数？在什么情况下是无理数？

（中国广州、武汉、福州初中数学竞赛，1985 年）

[解] 设 $BC=a, AD=h, PQ=x, PS=y$，

则 $\dfrac{h-y}{h}=\dfrac{x}{a}$.



从而 $hx+ay=ah$. ①

又∵ $xy=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{6}ah$，

∴ $hx\cdot ay=\dfrac{1}{6}a^2h^2$， ②

解由①、②组成的方程组，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{3}}a, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\mp1}{2\sqrt{3}}h. \end{cases}$$

矩形 $PQRS$ 的周长为

$$2(x+y)=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}}a+\frac{\sqrt{3}\mp1}{\sqrt{3}}h=a+h\pm\frac{a-h}{\sqrt{3}}.$$

当 $a=h$ 时，矩形 $PQRS$ 的周长的值为有理数；

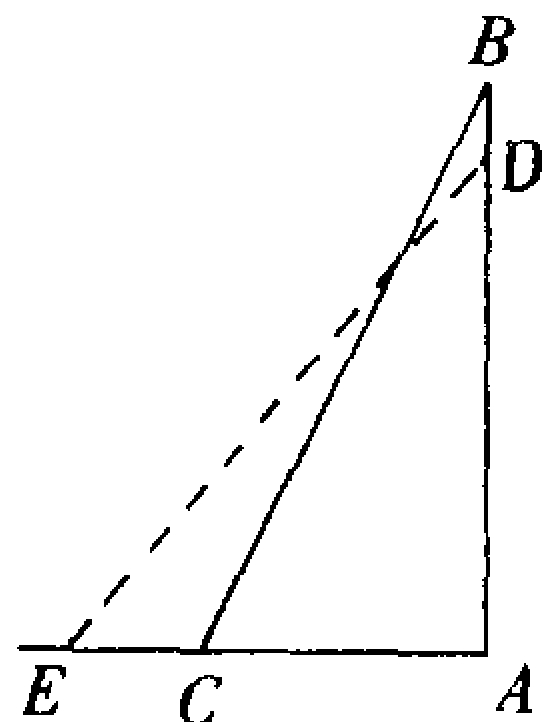
当 $a\neq h$ 时，矩形 $PQRS$ 的周长的值为无理数.

7·15 有一直立标杆，它的上部被风吹折，杆顶着地，离杆脚 20 分米，修好后又被风吹断，因新断处比前低 5 分米，故杆顶着地处比前次远 10 分米，求：标杆的高.

（中国浙江省宁波市数学竞赛，1984 年）

[解] 标杆的高 $h=AD+DE=AB+BC$.

∵ $BD=5$(分米)，$AC=20$(分米)，$CE=10$(分米).



由勾股定理有

$$AD^2+AE^2=DE^2,\quad AB^2+AC^2=BC^2.$$

又∵ $DE=5+BC$，

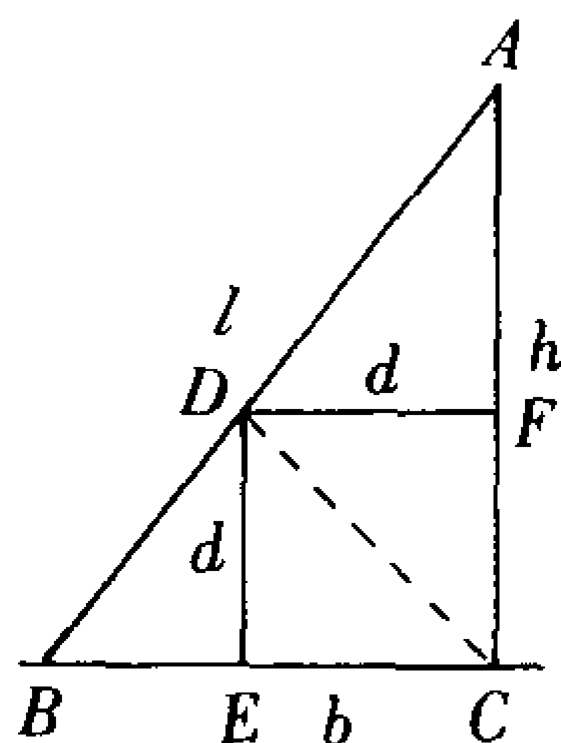
∴ $\begin{cases} AD^2+30^2=(5+BC)^2, \\ (AD+5)^2+20^2=BC^2. \end{cases}$

解得　$AD+BC=45$.

因而　$h=45+5=50$(分米).

7·16　长为 l 的梯子靠在竖直的墙上,梯子上有一档,距水平地面及墙的距离均为 d.求梯子靠墙点距地面的高 h.答案用 l 和 d 的显式表示.

(英国数学奥林匹克,1991 年)



[解]　设梯子为 AB,靠墙点为 A,靠地点为 B,AC 为墙高.

设　$BC=b$, 又　$AB=l$, $AC=h$, $DE=DF=d$.

$\therefore \quad b^2+h^2=l^2.$　①

连 CD,则　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$,

即　$bh=d(b+h)$.　②

由①、②　$b^2+h^2=(b+h)^2-2bh$

$=(b+h)^2-2d(b+h)$

$=l^2$.

即　$(b+h)^2-2d(b+h)-l^2=0$,

则　$b+h=d+\sqrt{l^2+d^2}$,

又　$bh=d(b+h)=d^2+d\sqrt{l^2+d^2}$.

所以 b 和 h 是关于 l 的方程

$$t^2-(d+\sqrt{l^2+d^2})t+(d^2+d\sqrt{l^2+d^2})=0$$

的两个根,解得

$$h=\frac{d+\sqrt{l^2+d^2}\pm\sqrt{l^2-2d^2-2d\sqrt{l^2+d^2}}}{2}.$$

7·17　两个滑冰者李力和白娜位于平面冰面上的 A、B 两点,A 与 B 相距 100 米,如果李力从 A 出发以 8 米/秒的速度沿着一条与 AB 成 60°角的直线滑行,同时白娜以 7 米/秒的速度从 B 出发沿着与李力相遇的最短路线滑行,那么在相遇时,李力滑行了多远?

(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

[解]　设 t 秒后两人在 C 点相遇,则$\triangle ABC$ 的三边为

$AB=100$, $AC=8t$, $BC=7t$.

由余弦定理得

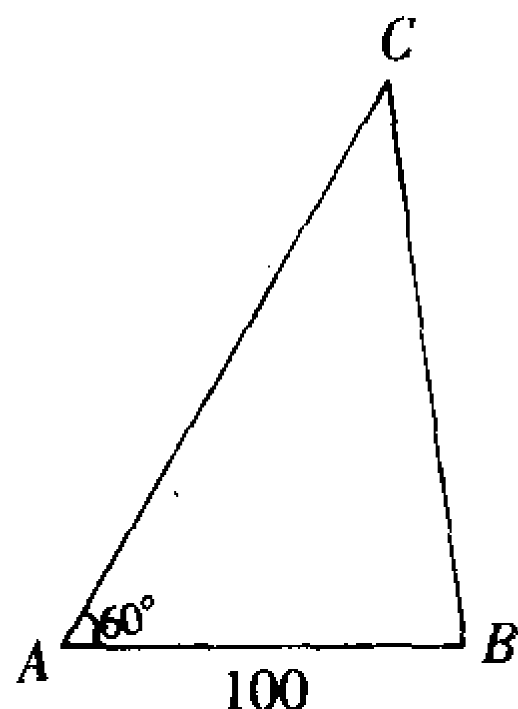
$(7t)^2=100^2+(8t)^2-2\times100\times8t\times\cos60^\circ$,

即　$3t^2-160t+2000=0$.

得　$t_1=20$,　$t_2=\frac{100}{3}$.

因为相遇时间尽可能短,所以 $t=20$,因此 $AC=8t=160$.

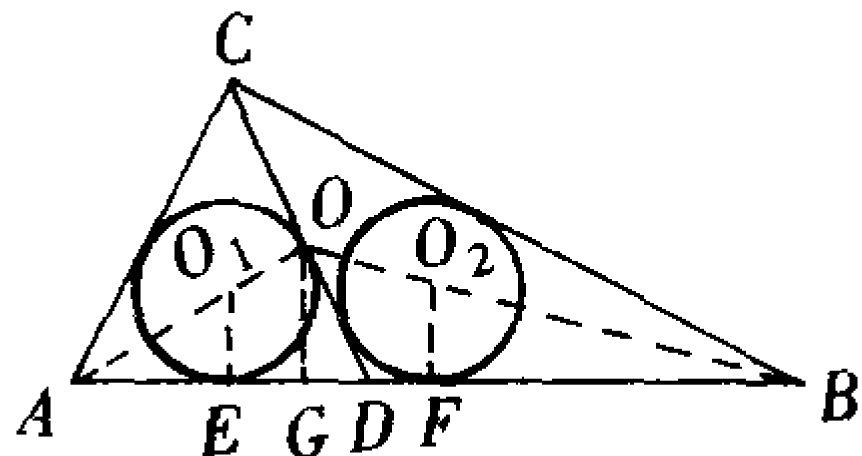
李力滑行了 160 米.



7·18　过 Rt△ABC 的直角顶点 C,作直线 CD 交 AB 于 D,使△ABC 被分成的两个三角形有相等的内切圆,设 $AC=b$, $BC=a$,试求 CD 的长.

(中国辽宁省沈阳市数学竞赛,1990 年)

[解]　如图,设 AO_1 交 BO_2 于 O,过 O 作 $OG\perp BC$ 于 G.



令　$CD=x$, $AD=y$, $AB=c$,

$BD=c-y$.

由　$\frac{AE}{AG}=\frac{BF}{BG}$,

$AE=\frac{1}{2}(b+y-x)$,

$BF=(a+c-y-x)$,

$AB=\frac{1}{2}(b+c-a)$,　$BG=(a+c-b)$.

得　$(b-a)x+cy=b^2$　①

由　$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{AC+CD+AD}{BC+CD+DB}=\frac{AD}{BD}$,

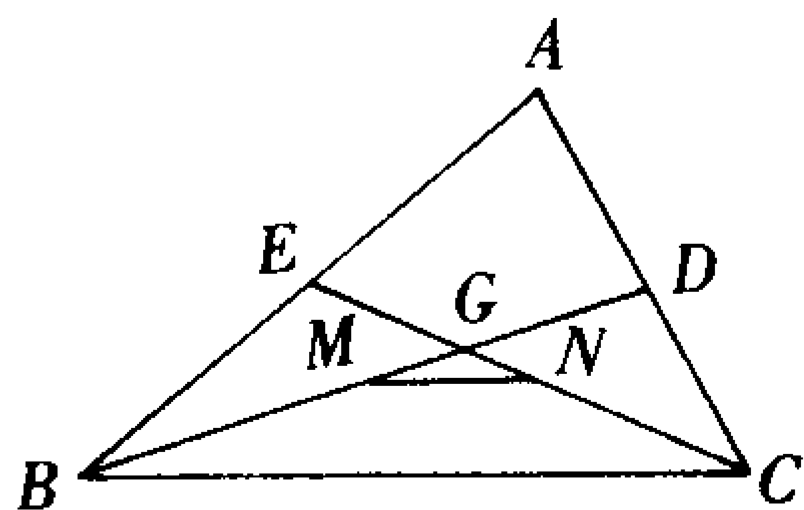
得　$\frac{b+x+y}{a+c+x-y}=\frac{y}{c-y}$.　②

由①、②消去 y,得　$x=\sqrt{\frac{1}{2}ab}$.

即　$CD=\sqrt{\frac{1}{2}ab}$.

7·19　设△ABC 中两中线 BD、CE 的中点分别是 M、N,求:MN 与 BC 两线段的长度之比.

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1957 年)



［解］ 设 BD、CE 相交于 G，则

$$BG=2GD, CG=2GE.$$

但 M、N 分别是 BD、CE 的中点，

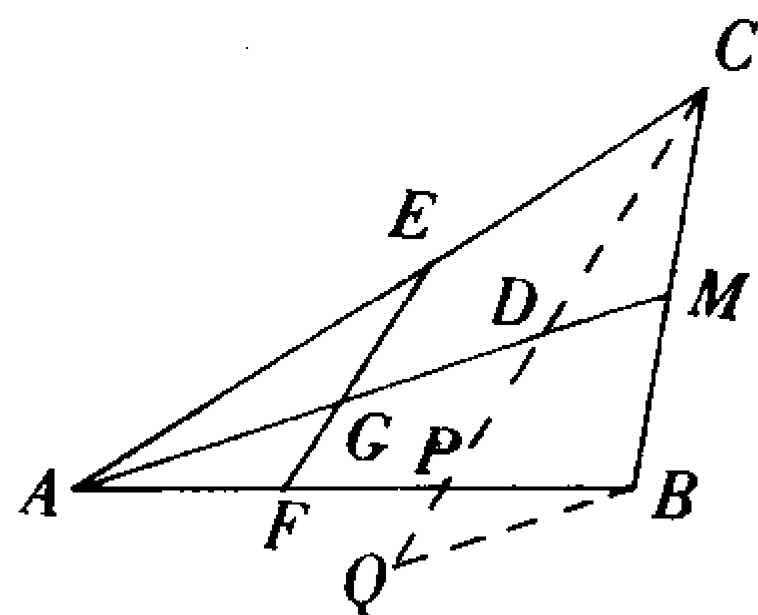
$$\therefore \quad \frac{GM}{BG}=\frac{GN}{CG}=\frac{1}{4}.$$

又 $\triangle GMN \backsim \triangle GBC$，

故 $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{GM}{BG}=\dfrac{1}{4}$.

7·20 在$\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=16$，M 为边 BC 的中点，点 E、F 分别在边 AC 与 AB 上，直线 EF 与 AM 相交于 G. 若 $AE=2AF$，求：比值 $\dfrac{EG}{GF}$.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）



［解］ 如图，过 C 作 $CQ /\!/ EF$，交 AM 于 D，交 AB 于 P，交过 B 点平行于 AM 的直线于 Q.

于是 $\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{CD}{DP}$.

由 $AC=16$ 得 $AP=8$，

从而 $BP=4$.

又由 $\triangle BQP \backsim \triangle ADP$ 可得

$$\frac{PQ}{PD}=\frac{BP}{AD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

又由 M 是 CB 的中点可得

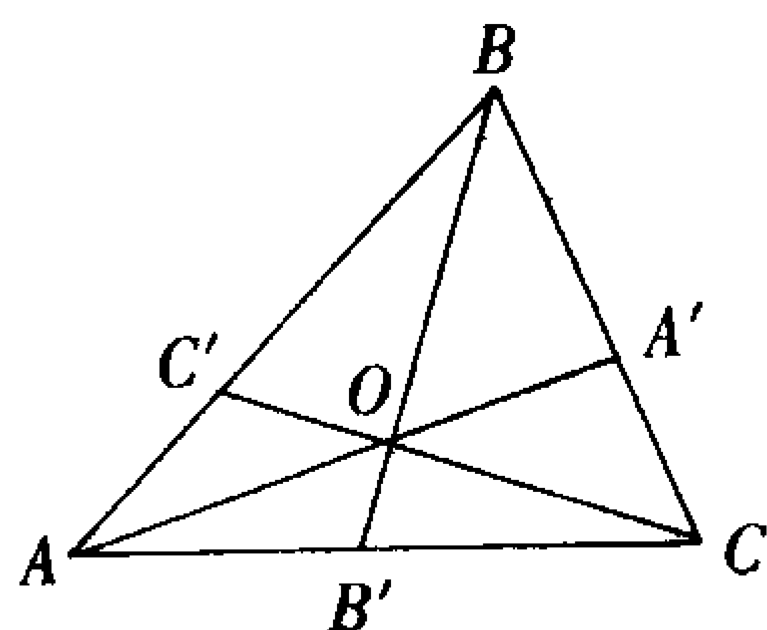
$$CD=DQ=\frac{3}{2}PD.$$

$$\therefore \quad \frac{EG}{GF}=\frac{CD}{PD}=\frac{3}{2}.$$

7·21 已知：在$\triangle ABC$ 中，A'、B'、C' 分别在 BC、AC 和 AB 上，AA'、BB' 和 CC' 相交于一点 O，并且 $\dfrac{AO}{OA'}+\dfrac{BO}{OB'}+\dfrac{CO}{OC'}=92$. 试求：$\dfrac{AO}{OA'}\cdot\dfrac{BO}{OB'}\cdot\dfrac{CO}{OC'}$ 的值.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

[解 1]　因为$\triangle AOB$和$\triangle A'OB$等高，$\triangle AOC$和$\triangle A'OC$等高，则其面积之比等于底的比，即



$$\frac{AO}{OA'}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle A'OB}}=\frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle COA'}}$$
$$=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COA}}{S_{\triangle A'OB}+S_{\triangle COA'}}$$
$$=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COA}}{S_{\triangle BOC}}$$
$$=\frac{y+z}{x}.$$

其中　$x=S_{\triangle BOC}$，$y=S_{\triangle COA}$，$z=S_{\triangle AOB}$.

类似地有

$$\frac{BO}{OB'}=\frac{x+z}{y},\ \frac{CO}{OC'}=\frac{x+y}{z}.$$

$$\therefore\ \frac{AO}{OA'}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CO}{OC'}$$
$$=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$
$$=\frac{yz^2+y^2z+xz^2+x^2z+xy^2+x^2y+2xyz}{xyz}$$
$$=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+2$$
$$=\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}+2$$
$$=92+2=94.$$

[解 2]　$\because\ \frac{OA'}{AA'}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}},\ \frac{OB'}{BB'}=\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle ABC}},\ \frac{OC'}{CC'}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}},$

$$\therefore\ \frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1. \qquad ①$$

$$\because\ 92=\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}$$
$$=\frac{AA'-OA'}{OA'}+\frac{BB'-OB'}{OB'}+\frac{CC'-OC'}{OC'},$$

$\therefore \quad \dfrac{AA'}{OA'}+\dfrac{BB'}{OB'}+\dfrac{CC'}{OC'}=95.$ ②

设 $\dfrac{AA'}{OA'}=x$，$\dfrac{BB'}{OB'}=y$，$\dfrac{CC'}{OC'}=z$，于是①和②式化为

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1,$ ③

$x+y+z=95.$ ④

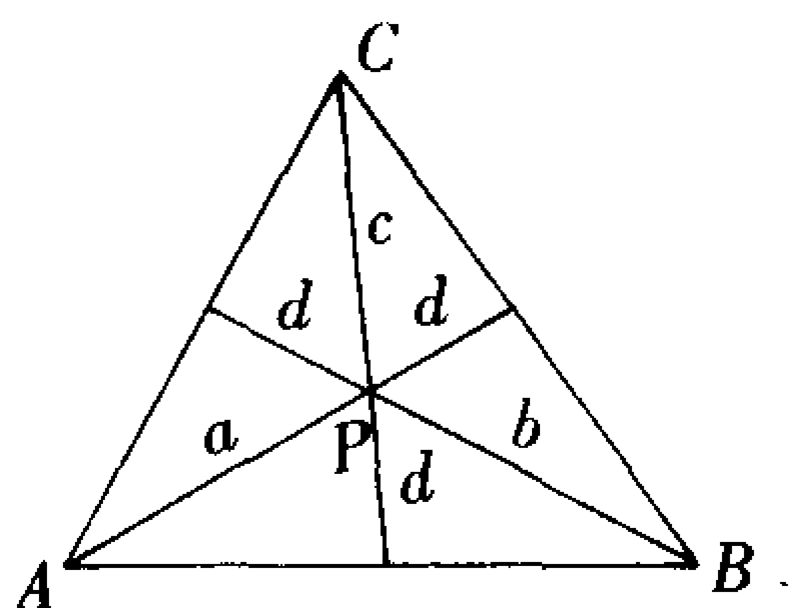
由③有 $\quad xyz=yz+zx+xy.$ ⑤

由⑤和④得到

$$\begin{aligned}&\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CO}{OC'}\\&=(x-1)(y-1)(z-1)\\&=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1\\&=x+y+z-1=95-1=94.\end{aligned}$$

7·22 令 P 是△ABC 的一个内点，延长 AP、BP、CP 与对边相交，图中 a、b、c、d 为各段线段之长. 已知：$a+b+c=43$，$d=3$，求：abc 等于多少？

（第 6 届美国数学邀请赛，1988 年）



［解］ 由于△PBC 和△ABC 的底 BC 相同，所以有

$$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{d}{a+d}=\frac{3}{a+3},$$

$$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{d}{b+d}=\frac{3}{b+3},$$

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{d}{c+d}=\frac{3}{c+3}.$$

三式相加并注意到

$$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \quad \frac{3}{a+3}+\frac{3}{b+3}+\frac{3}{c+3}=1.$$

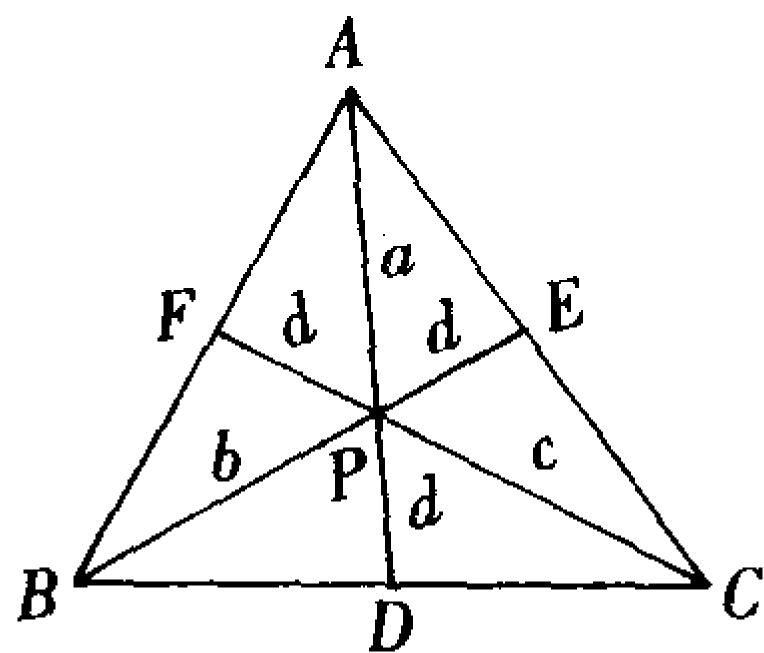
即 $\quad 3[(b+3)(c+3)+(a+3)(c+3)+(a+3)(b+3)]$

$=(a+3)(b+3)(c+3).$

展开并整理得

$$abc=54+9(a+b+c)=54+9\times 43=441.$$

［解 2］ 记 AP、BP、CP 分别交对边的交点为 D、E、F. 直线 BDC 与 $\triangle AFP$ 的三边延长线都相交，直线 AEC 与 $\triangle BPF$ 的三边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有



$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FC}{CP}\cdot\frac{PD}{DA}=1,$$

$$\frac{BA}{AF}\cdot\frac{FC}{CP}\cdot\frac{PE}{EB}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{FB}{AB}=\frac{c+d}{c}\cdot\frac{d}{a+d},\quad \frac{AF}{AB}=\frac{c+d}{c}\cdot\frac{d}{b+d}.$$

$$\therefore\quad \frac{c+d}{c}\left(\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}\right)=\frac{FB}{AB}+\frac{AF}{AB}=1.$$

$$\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}=\frac{c}{c+d}.$$

$\because\quad d=3,$

$\therefore\quad 3(b+3)(c+3)+3(a+3)(c+3)=c(a+3)(b+3).$

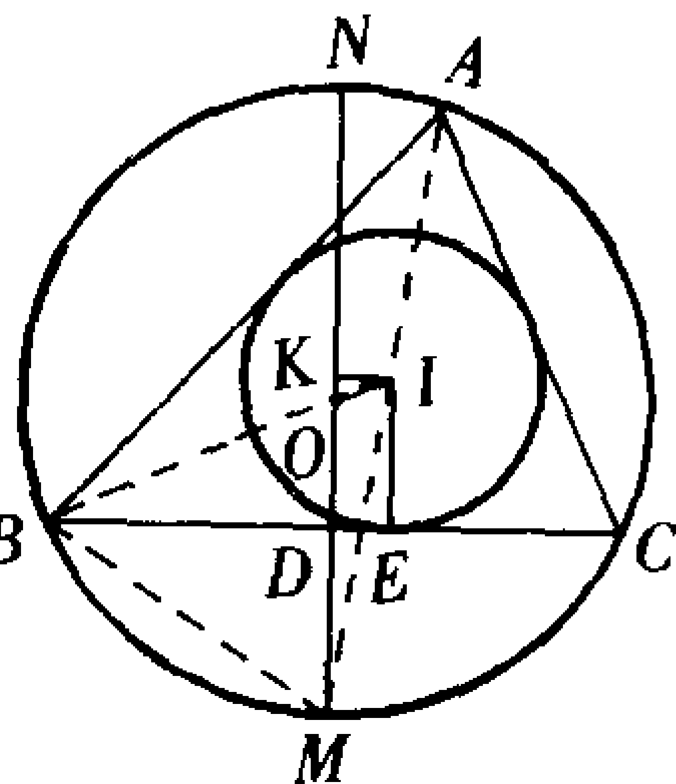
两边展开并整理，得到

$$abc=9(a+b+c)+54=441.$$

7·23 已知：$\triangle ABC$ 为等腰三角形，R 是它的外接圆半径，r 是它的内切圆半径，证明：这两圆的圆心间的距离为 $d=\sqrt{R(R-2r)}$.

（第 4 届国际数学奥林匹克，1962 年）

［证 1］ 本题的结论对任意的三角形（不一定是等腰三角形）都成立，这个结论被称为欧拉公式. 我们对一般情况给予证明.



设外心为 O，内心为 I，$\overset{\frown}{BC}$的中点为 M，外接圆 O 的直径 MN 交 BC 于 D.

过内心 I 作 $IE\perp BC$ 于 E，$IK\perp MN$ 于 K.

$$\begin{aligned}\because\quad \angle MIB&=\angle MAB+\angle ABI\\&=\angle MAC+\angle IBE\\&=\angle MBC+\angle IBE=\angle MBI.\end{aligned}$$

于是 $MB=MI$.

又由于 $\triangle MBN$ 为直角三角形，所以由射影定理

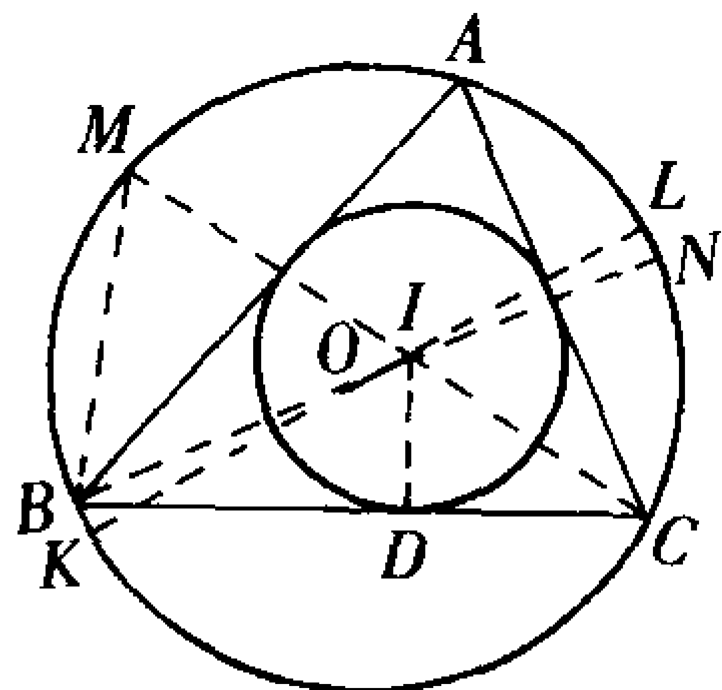
$MB^2 = MD \cdot MN$.

又　$MK = MI \cdot \cos\angle IMD$.

下面用余弦定理计算　$IO = d$.

$$\begin{aligned} d^2 &= MI^2 + MO^2 - 2MI \cdot MO \cdot \cos\angle IMD \\ &= MI^2 + R^2 - 2MK \cdot R = MB^2 + R^2 - 2MK \cdot R \\ &= MD \cdot MN + R^2 - 2MK \cdot R = MD \cdot 2R + R^2 - 2MK \cdot R \\ &= R^2 - 2R(MK - MD) = R^2 - 2R \cdot DK \\ &= R^2 - 2Rr. \end{aligned}$$

即　$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.



[证 2]　连直线 OI 交圆 O 于 K、L 两点. 连 CI，延长 CI 交圆 O 于 M，连 BI，延长 BI 交圆 O 于 N.

则由相交弦定理：

$$KI \cdot IL = CI \cdot IM. \qquad ①$$

又　$$\begin{aligned} KI \cdot IL &= (KO + OI)(OL - OI) \\ &= (R + d)(R - d) \\ &= R^2 - d^2. \end{aligned} \qquad ②$$

过 I 作 $ID \perp BC$ 于 D，则 $ID = r$.　$CI = \dfrac{r}{\sin\dfrac{c}{2}}$.

连 BM，由证 1 可得　$IM = BM$.

$\therefore$　$IM = BM = 2R\sin\angle BCM = 2R \cdot \sin\dfrac{c}{2}$.

于是　$$CI \cdot IM = \frac{r}{\sin\frac{c}{2}} \cdot 2R\sin\frac{c}{2} = 2Rr. \qquad ③$$

由①，②，③可得　$R^2 - d^2 = 2Rr$.

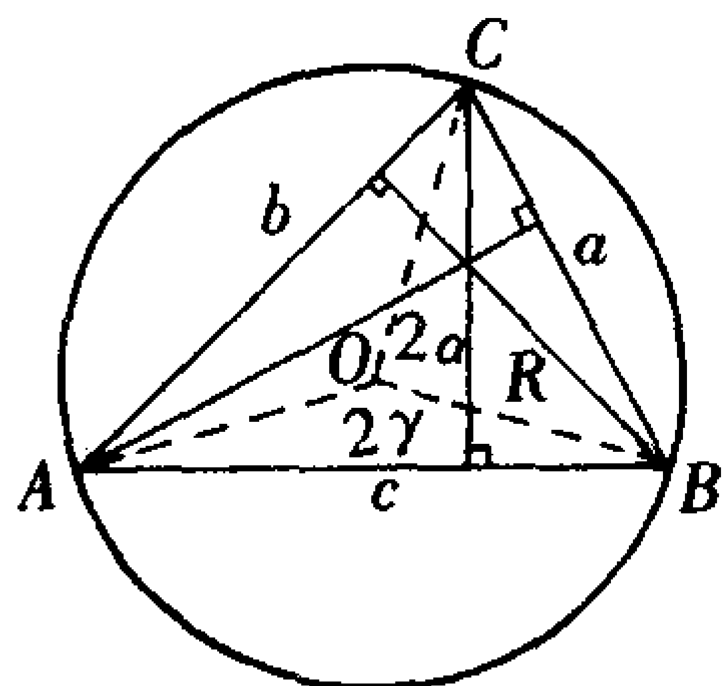
即　$d = \sqrt{R(R - 2r)}$.

7·24　求满足下列条件的三角形三条边长之比：

$\dfrac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha} = \dfrac{P}{9R}$，其中 a、b、c 是边长，α、β、γ 依次是边 a、b、c 的对角，P 是三角形的周长，R 是三角形外接圆的半径.

（保加利亚数学奥林匹克，1968 年）

［解］　设 h_a、h_b、h_c 是满足题中条件的三角形三边上的高，S 是它的面积，则



$$a\sin\beta = h_c,\quad b\sin\gamma = h_a,$$
$$c\sin\alpha = h_b.$$

于是题中等式化为

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{h_a + h_b + h_c} = \frac{P}{9R}.$$

即 $P(h_a + h_b + h_c)$

$$= 9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma).$$

另一方面，由正弦定理及

$$S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

可得

$$9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$$
$$= 9R(2R\sin\alpha\cos\alpha + 2R\sin\beta\cos\beta + 2R\sin\gamma\cos\gamma)$$
$$= 9R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 18S'.$$

而 $P(h_a + h_b + h_c) = (a + b + c)(h_a + h_b + h_c)$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{abch_ah_bh_c} = 9\sqrt[3]{ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c}$$
$$= 9\sqrt[3]{(2S)^3} = 18S.$$

又 $18S = 9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$.

于是题设中的条件相当于上面不等式中等号成立的情形. 又当且仅当 $a = b = c$，$h_a = h_b = h_c$，即三角形是等边三角形时等式成立.

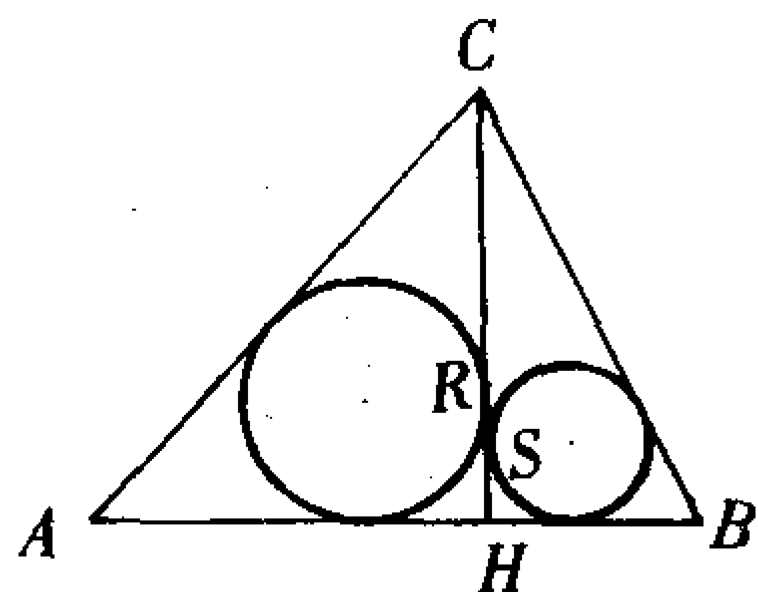
因此，所求三边之比为　1∶1∶1.

7·25　设 CH 是△ABC 的高，△ACH 和△BCH 的内切圆分别与 CH 相切于点 R 和 S，如果 $AB = 1995$，$AC = 1994$，$BC = 1993$. 那么，RS 可表示为$\frac{m}{n}$，其中 m 和 n 是互素的正整数. 求 $m + n$.

（第 11 届美国数学邀请赛，1993 年）

［解］　由三角形内切圆性质得

$$HR = \frac{AH + CH - AC}{2},$$
$$HS = \frac{BH + CH - BC}{2}.$$



$\therefore \quad RS = HR - HS$

$= \dfrac{(AH - BH) + (BC - AC)}{2}.$

由勾股定理有

$AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2,$

则 $\quad AH^2 - BH^2 = AC^2 - BC^2,$

即 $\quad (AH - BH)(AH + BH)$

$= AC^2 - BC^2,$

$$\therefore \quad AH - BH = \frac{AC^2 - BC^2}{AB} = \frac{1994 + 1993}{1995}.$$

$$RS = \frac{\dfrac{1994 + 1993}{1995} + (-1)}{2} = \frac{1994 + 1993 - 1995}{2 \times 1995} = \frac{332}{665}.$$

于是 $\quad m = 332, \ n = 665,$

则 $\quad m + n = 997.$

2. 多边形与圆中的线段计算

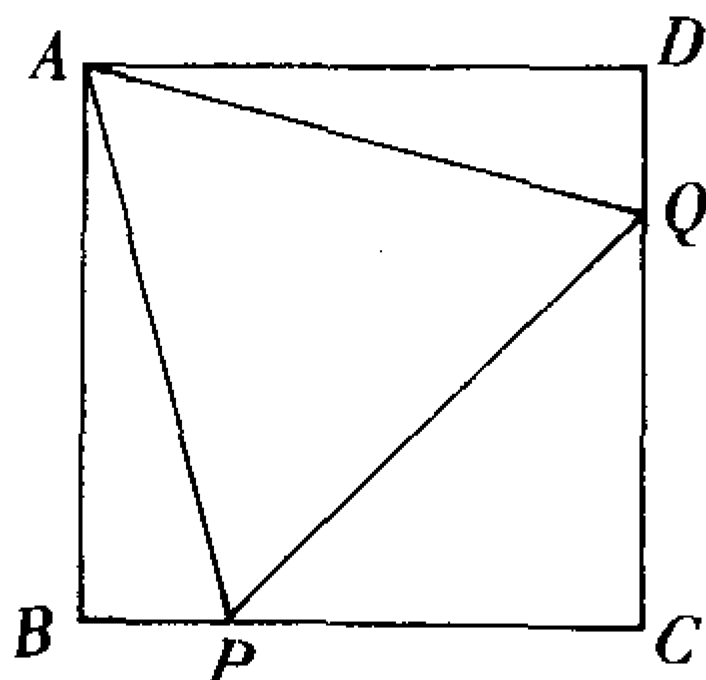
7·26 已知:平行四边形 $ABCD$ 的边长都为 5cm,又它的一个内角 $\angle BAD$ 为直角,P、Q 分别在 BC、CD 上,且$\triangle APQ$ 是正三角形,求这个正三角形的边长.

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1984 年)

[解] 由$\angle BAD = 90°$知

$\angle D = 180° - \angle BAD = 90°.$

同理 $\quad \angle B = 90°.$



在 Rt$\triangle ADQ$ 与 Rt$\triangle ABP$ 中,

$\because \quad AD = AB = 5\text{cm}, \ AP = AQ.$

$\therefore \quad \triangle ADQ \cong \triangle ABP. \quad \therefore \quad BP = DQ.$

设 $\quad AQ = x\text{cm}, \ DQ = y\text{cm},$

则由勾股定理得

$5^2 + y^2 = x^2,$

$(5 - y)^2 + (5 - y)^2 = x^2.$

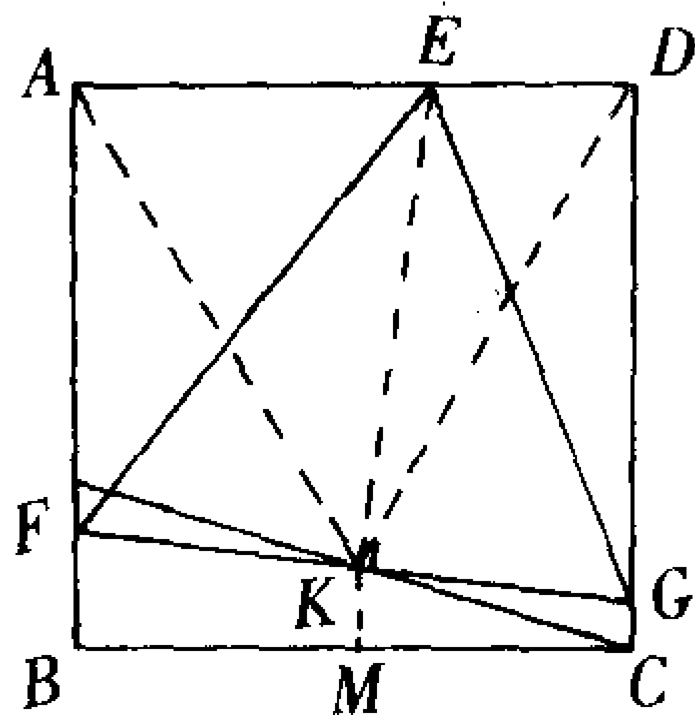
消去 x,得 $\quad y^2 - 20y + 25 = 0.$

故　$y=10-5\sqrt{3}$.

∴　$x=\sqrt{5^2+(10-5\sqrt{3})^2}=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\mathrm{cm})$.

7·27　已知：一个正三角形的三个顶点在一个正方形的边上移动．如果这个内接正三角形的最大面积是3，求：正方形的边长．

（中国黑龙江省哈尔滨市数学竞赛，1992年）



［解］　设正方形$ABCD$的边长为a，因为正三角形的三个顶点只能在正方形的三条边上，不失一般性，不妨设内接正三角形的三个顶点E、F、G分别在AD、AB、CD上．

取FG的中点K，连EK，则$EK\perp FG$，再连DK、AK．

∵　A、F、K、E四点共圆，

∴　$\angle EAK=\angle EFK=60°$.

又∵　D、G、K、E四点共圆，

∴　$\angle EDK=\angle EGK=60°$.

故$\triangle ADK$是以AD为边的正三角形，K为一个定点（K在BC的垂直平分线上，且与BC的距离为$KM=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$．这说明正$\triangle EFG$的一边$FG$必过定点$K$．

$\triangle EFG$的面积S的大小由边长GF确定，当G移动至与C重合时，延长CK交AB于H，这时边长GF取得最大值．

$$CH=\sqrt{BC^2+BH^2}=\sqrt{a^2+\left[2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\right]^2}$$

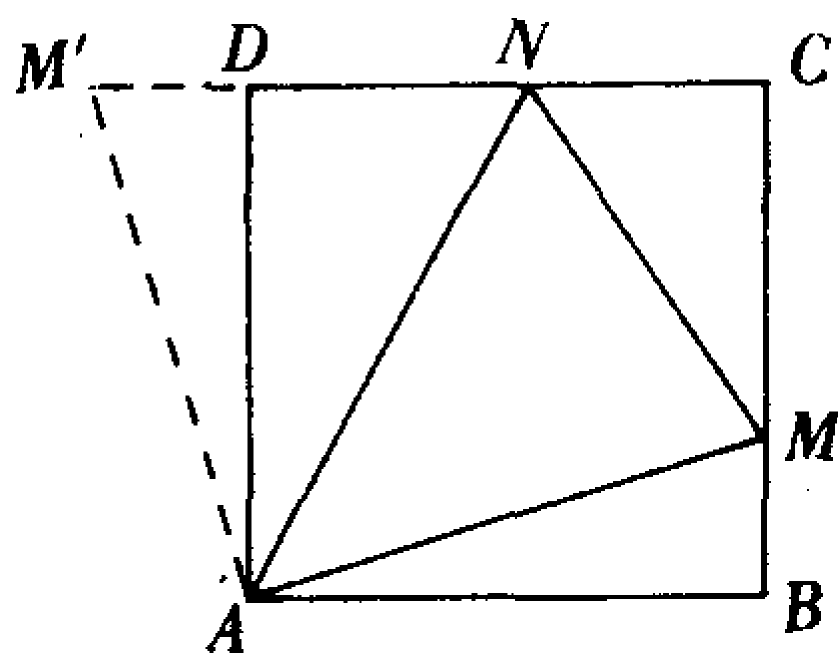
$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a.$$

由　$S_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2a^2=(2\sqrt{3}-3)a^2=3$,

∴　$a=\sqrt{2\sqrt{3}+3}$.

7·28　如图，已知：点M、N分别在正方形$ABCD$的边BC、CD上，$\triangle MCN$的周长等于正方形$ABCD$周长的一半，求：$\angle MAN$．

（祖冲之杯初中数学邀请赛，1991年）



［解］ 将△ABM绕A点逆时针方向旋转90°，边AB落在AD上，M点到M'点，

因为$\angle ADM'=\angle ABM=90°$，

则有$\angle NDM'=\angle NDA+\angle ADM'$
$=180°$，

即N、D、M'在一条直线上.

在$\triangle ANM'$与$\triangle ANM$中，

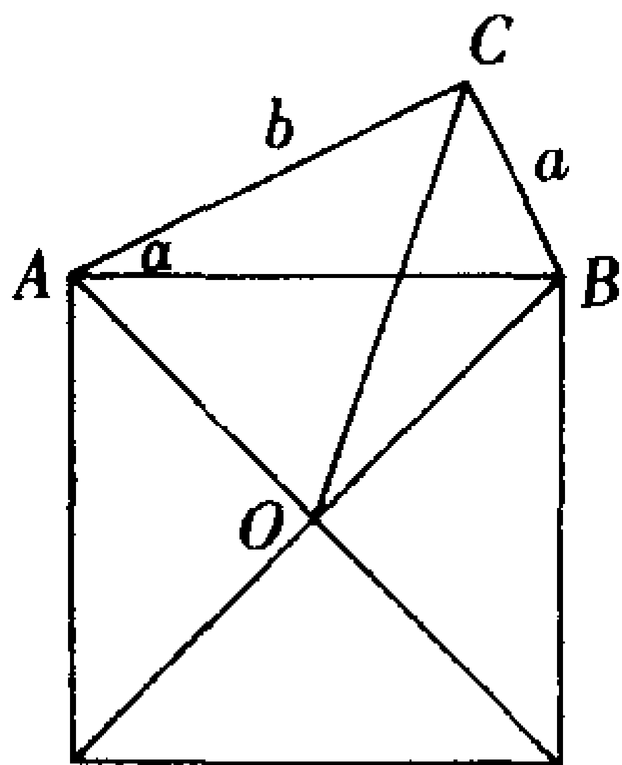
$AM'=AM$，$AN=AN$，

∵ $\triangle NMC$周长＝正方形$ABCD$周长的一半$=BC+CD$，

及 $MN=BM+ND=M'N$，

∴ $\triangle ANM'\cong\triangle ANM$.

故 $\angle MAN=\angle NAM'=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$.



7·29 直角三角形的直角边长分别为a和b，以斜边为一边向三角形外作一正方形.求:直角顶点到正方形的中心的距离.

（基辅数学奥林匹克，1970年）

［解1］ 如图，设$\angle CAB=\alpha$，则由余弦定理知

$$CO^2=b^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2)-2b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}\right)\cos(\alpha+45°)$$
$$=\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2-\sqrt{2}b(\sqrt{a^2+b^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}(b-a)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2-b(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab=\frac{1}{2}(a+b)^2.$$

∴ $CO=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

［解2］ ∵ $\angle ACB=90°=\angle AOB$，

∴ A、O、B、C四点共圆.

由托勒密定理有 $CO\cdot AB=AC\cdot OB+BC\cdot OA$.

$\because \quad AO=BO=\frac{\sqrt{2}}{2}AB,$

$\therefore \quad CO=\frac{\sqrt{2}}{2}(AC+BC)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$

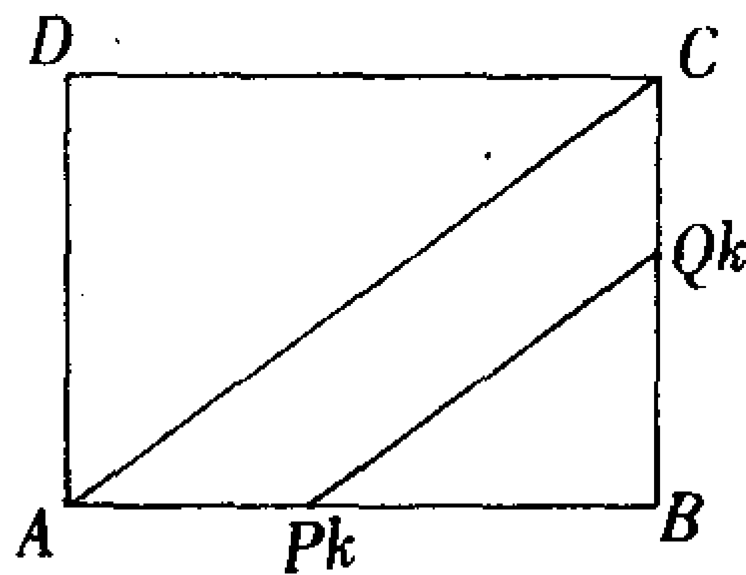
7·30 矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$CB=3$，点 $A=P_0,P_1,\cdots,P_{168}=B$，把 AB 分成 168 个相等的小段，点 $C=Q_0,Q_1,\cdots,Q_{168}=B$，把 CB 分成 168 个相等的小段，作线段 R_kQ_k，$1\leqslant k\leqslant 167$，在 AD、CD 上同样重复上述过程，再引对角线 AC，求：这 335 条线段长度之和.

（第 9 届美国数学邀请赛，1991 年）

［解］ 由题设可知 $P_kQ_k /\!/ AC$，

$\therefore \quad \triangle BP_kQ_k \backsim \triangle BAC$，则

$$\frac{P_kQ_k}{AC}=\frac{168-k}{168},$$



又 $AC=\sqrt{AB^2+CB^2}=5$，则

$$\sum_{k=1}^{167}P_kQ_k=\frac{5}{168}\sum_{k=1}^{167}(168-k)=\frac{167}{2}\times 5.$$

$\therefore$ 所求 335 条线段之和为

$$2\sum_{k=1}^{167}P_kQ_k+AC=\frac{167}{2}\times 5\times 2+5=840.$$

7·31 菱形 $PQRS$ 内接于矩形 $ABCD$，使得 P、Q、R、S 为 AB、BC、CD、DA 的点，已知：$PB=15$，$BQ=20$，$PR=30$，$QS=40$，记 $\frac{m}{n}$ 为矩形 $ABCD$ 的周长，$\frac{m}{n}$ 是既约分数，求：$m+n$.

（第 9 届美国数学邀请赛，1991 年）

［解］ 设矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=x$，$AD=y$，

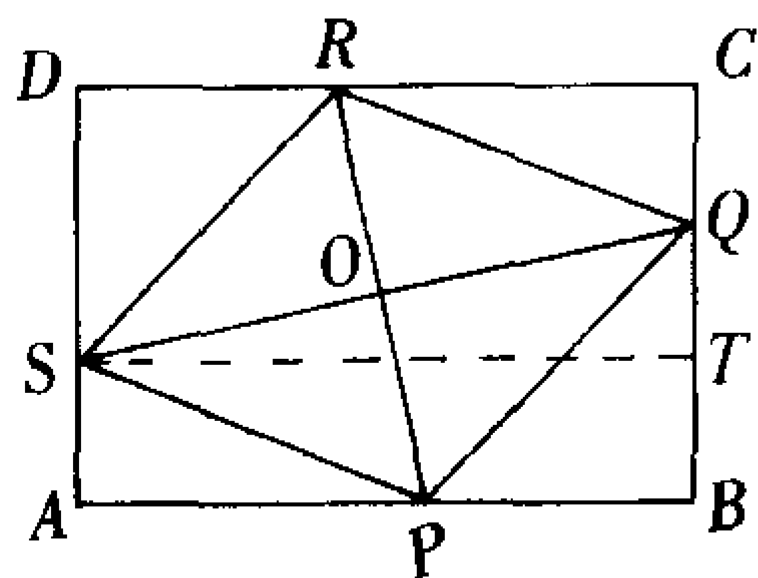
由对称性 $SD=BQ=20$，$RD=PB=15$.

$\therefore \quad AQ=x-20$，$RA=y-15$.

由勾股定理得

$$PQ=\sqrt{PB^2+BQ^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25.$$

$\therefore \quad PQ=PS=SR=RQ=25,$



再由 $PR=30$，$QS=40$ 得

$$PO=15,\ OQ=20.$$

由面积公式可得

$$S_{四边形ABCD}=xy$$

$$=6\times\frac{1}{2}\times15\times20+2\times\frac{1}{2}(y-15)(x-20).$$

即 $xy=900+xy-15x-20y+300$，

或 $3x+4y=240$. ①

又由勾股定理得 $PS^2=CP^2+CS^2$，

即 $(y-15)^2+(x-20)^2=25^2$，

或 $x^2+y^2-40x-30y=0$. ②

作 $ST\perp BC$ 于 T，则 $ST^2=SQ^2-QT^2$，

$\therefore$ $y^2=1600-(40-x)^2$.

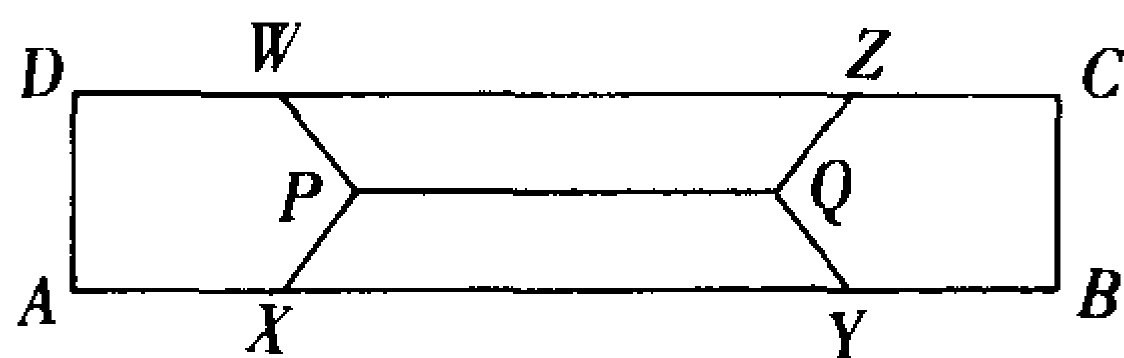
有 $x^2+y^2=80x$. ③

由②、③得 $3y=4x$，代入①得

$$\begin{cases}x=\dfrac{144}{5},\\ y=\dfrac{192}{5}\end{cases}.$$

从而矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(x+y)=2\left(\dfrac{144}{5}+\dfrac{192}{5}\right)=\dfrac{672}{5}$.

于是 $m=672$，$n=5$，$m+n=677$.



7·32 如图所示，矩形 $ABCD$ 被5条线段分成4个等积的部分，且 $XY=YB+BC+CZ=ZW=WD+DA+AX$，$PQ\parallel AB$. 若 $BC=19\text{cm}$，$PQ=87\text{cm}$，求：AB 的长度(用 cm 表示).

(第5届美国数学邀请赛，1987年)

[**解**] 因为梯形 $XYQP$ 和梯形 $ZWPQ$ 等积，

又因为 $XY=WZ$，$PQ=PQ$，

所以这两个梯形的高相等，且都等于$\frac{BC}{2}$.

由已知　$XY=YB+BC+CZ=ZW=WD+DA+AX$，

则　XY 为矩形 $ABCD$ 的周长的$\frac{1}{4}$，即

$$XY=\frac{AB+BC}{2},$$

又由　$\frac{PQ+XY}{2}\cdot\frac{BC}{2}=\frac{1}{4}AB\cdot BC$

可得　$PQ+XY=AB$.

即　$PQ+\frac{AB+BC}{2}=AB$,

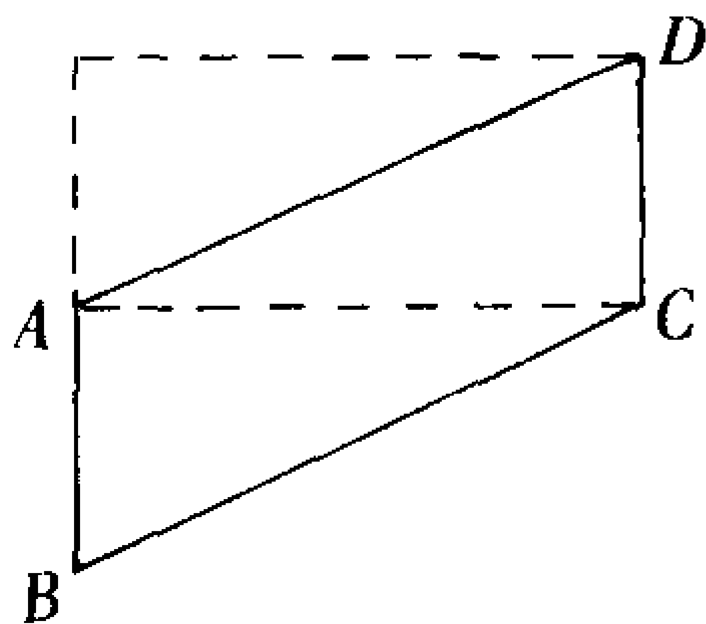
从而　$AB=2PQ+BC=2\times 87+19=193(\text{cm})$.

7·33　在一个面积为32cm^2的平面凸四边形中，两条对边和一条对角线的长度之和为 16cm，试确定另一条对角线的所有可能长度.

（第 18 届国际数学奥林匹克，1976 年）

［解］　设凸四边形的面积为 S，则

$S=32\text{cm}^2$.



并且，不失一般性，设

$AC+AB+CD=16\text{cm}$.

则　$2S=AB\cdot AC\cdot\sin\angle CAB+CD\cdot AC\cdot\sin\angle ACD$

$\leqslant AB\cdot AC+CD\cdot AC$

$=AC(AB+CD)$.　①

当且仅当$\angle CAB=\angle ACD=90°$时，取等号.

又　$AC(AB+CD)\leqslant\left(\frac{AC+AB+CD}{2}\right)^2=64$.　②

当且仅当 $AC=AB+CD=8\text{cm}$ 时取等号.

由①、②可得　$2S\leqslant 64$　∴　$S\leqslant 32$.

另一方面，由已知 $S=32$.

因此该四边形仅当$\angle CAB=\angle ACD=90°$及 $AC=8\text{cm}$ 时，即上述不等式取等号时才能满足条件.

由此可得 $AB/\!/CD$，进一步由勾股定理可得

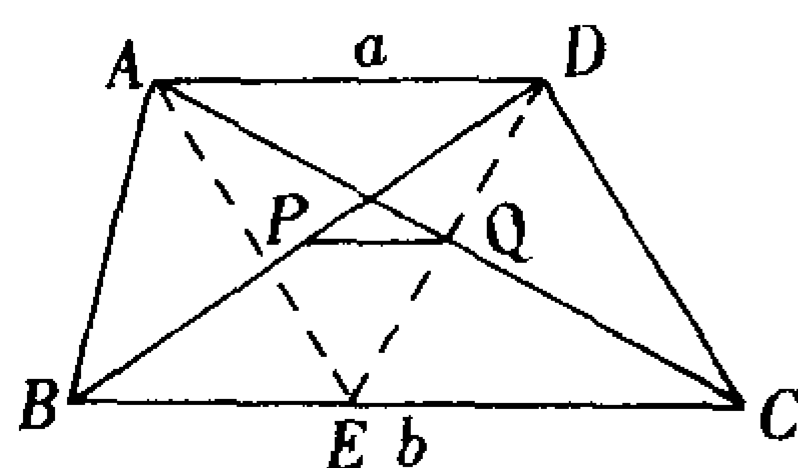
$BD^2=(AB+CD)^2+AC^2=64+64=128.$

$\therefore \quad BD=8\sqrt{2}(\mathrm{cm}).$

这就是另一条对角线惟一可能的长度.

7·34 梯形的两底分别为 a 和 b,求连接梯形两对角线的中点所得的线段的长.

(基辅数学奥林匹克,1953 年)



[解] 在梯形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$AD=a$,$BC=b$.

设 P、Q 分别是 BD、AC 的中点,连 PQ.在 CB 上截取 $EC=AD$,连 AE、DE.如图.

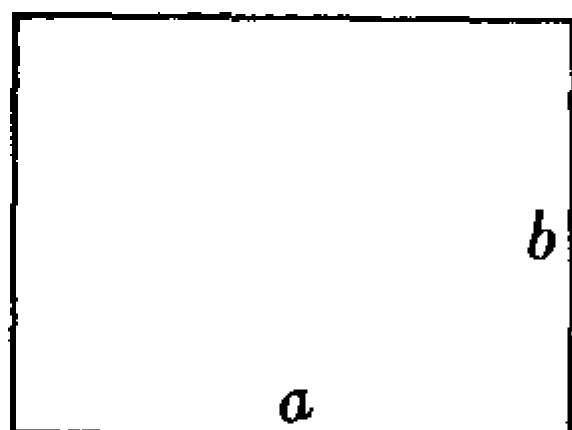
$\because \quad AD \mathrel{\underline{/\!/}} EC,$

$\therefore$ $ADCE$ 是平行四边形,AC、DE 互相平分于 Q 点.

在$\triangle BDE$ 中, $PQ=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(BC-EC)=\frac{1}{2}(b-a).$

7·35 有 24 个面积为 S 的全等小矩形,若将它们拼成一个与小矩形相似的大矩形,则小矩形边长各是多少?

(中国北京市数学竞赛,1980 年)



[解] 设小矩形边长分别为 a、$b(a>b)$,则大矩形边长分别为 $\sqrt{24}a$ 和 $\sqrt{24}b$.

再设大矩形长边包含小矩形长、短边分别有 x_1、x_2 个;大矩形短边包含小矩形长、短边分别为 y_1、y_2 个.依题意有

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=\sqrt{24}a, & ① \\ ay_1+by_2=\sqrt{24}b. & ② \end{cases}$$

两方程两边皆除以 b,可解得

$$\frac{a}{b}=\frac{x_2}{\sqrt{24}-x_1}=\frac{\sqrt{24}-y_2}{y_1},$$

故 $\quad x_1y_2+24-x_2y_1=\sqrt{24}(x_1+y_2) \qquad ③$

$\because$ ③式左边是整数,知 $\quad x_1+y_2=0.$

又 $\quad x_1, y_2$ 非负,知 $x_1=y_2=0$,代入①、②、③

得 $x_2=\sqrt{24}\dfrac{a}{b}, y_1=\sqrt{24}\dfrac{b}{a}$，则 $x_2y_1=24$.

∵ $a>b$，$x_2>y_1$，

故 y_1 只能取 1,2,3,4;相应地 x_2 只能取 24,12,8,6.

又 $ab=s$ 及 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{24}}{y_1}$,故可解得 a、b 的四组解：

$y_{11}=1$ 时，$a=\sqrt[4]{24}\sqrt{s}$，$b=\sqrt[4]{\dfrac{1}{24}}\sqrt{s}$；

$y_{12}=2$ 时，$a=\sqrt[4]{6}\sqrt{s}$，$b=\sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}\sqrt{s}$；

$y_{13}=3$ 时，$a=\sqrt[4]{\dfrac{8}{3}}\sqrt{s}$，$b=\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}\sqrt{s}$；

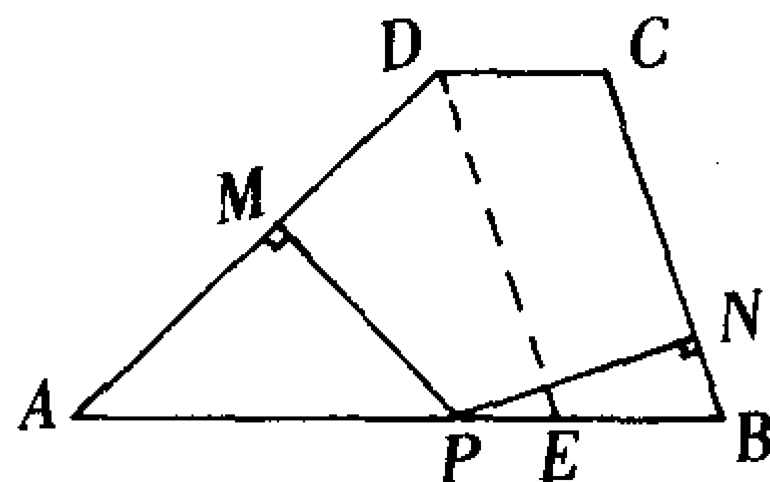
$y_{14}=4$ 时，$a=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\sqrt{s}$，$b=\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\sqrt{s}$.

7·36 在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，且 $AB=92$，$BC=50$，$CD=19$，$AD=70$，圆心 P 在 AB 上的圆与 BC、AD 边都相切，如果 $AP=\dfrac{m}{n}$，其中 m、n 是互素的正整数，求：$m+n$.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

[解] 过 D 作 $DE/\!/BC$ 交 AB 于 E，则在△ADE 中，由正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin AEP}=\frac{DE}{AD}=\frac{BC}{AD}=\frac{50}{70}=\frac{5}{7},$$



即 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{5}{7}$.

过 P 作 $PM\perp AD$ 于 M，$PN\perp BC$ 于 N.

因为圆 P 与 AD、BC 相切，则 $PM=PN$.

由 $PM=PA\cdot\sin A$，$PN=PB\cdot\sin B$

可得 $PA\sin A=PB\sin B$.

设 $PA=x$，则 $PB=92-x$，

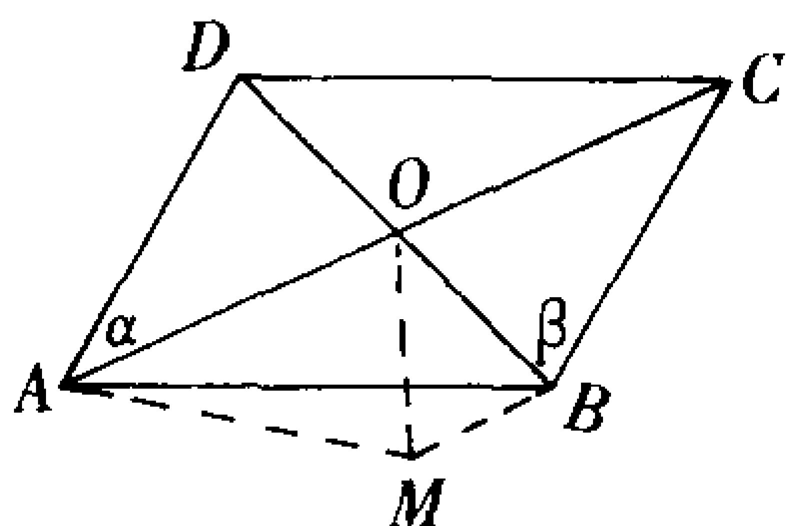
有 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{92-x}{x}=\dfrac{5}{7}$，

解得 $x=\dfrac{161}{3}$.

由 $(3,161)=1$ 知 $m=161$，$n=3$. 于是 $m+n=164$.

7·37 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB \neq BC$，已知对角线长度之比 $AC:BD=k$，设射线 AM 和射线 AD 关于直线 AC 为对称，射线 BM 和射线 BC 关于直线 BD 为对称，M 为射线 AM 和 BM 的交点. 求：$\frac{AM}{BM}$.

（第 16 届全苏数学奥林匹克，1982 年）



[解] 有 $AB>AD$，和 $AB<AD$ 两种情况，所画的图不全一样，解答过程也有所差异，我们只就 $AB>AD$ 的情况给出解答.

连结 OM，则 $\angle MAO=\angle DAO$，$\angle MBO=\angle CBO$.

设 $\angle DAO=\alpha$，$\angle CBO=\beta$，

则 $\angle ADO=\beta$，$\angle AOB=\alpha+\beta$.

$$\angle AMB=2\pi-\angle MAO-\angle MBO-\angle AOB=2\pi-2\alpha-2\beta.$$

注意到 O 到 AD 和 AM，BC 和 BM，AD 和 BC 等距离表明 O 到 AM 和 BM 等距，即 MO 是 $\angle AMB$ 的平分线.

所以 $\angle AMO=\frac{1}{2}\angle AMB=\pi-\alpha-\beta=\angle AOD$.

类似地 $\angle BMO=\angle BOC$.

于是 $\triangle AOD \backsim \triangle AOM$，$\triangle BOC \backsim \triangle BOM$.

由此得 $\frac{AM}{AO}=\frac{AO}{AD}$，$\frac{BM}{BO}=\frac{BO}{BC}$，因而 $\frac{AM}{BM}=\frac{AO^2}{BO^2}=k^2$.

7·38 梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，又 $\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，点 M 在边 AB 上且使 $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{2}$，点 N 在边 CD 上使线段 MN 把梯形分成面积比为3:1的两部分. 求：$\frac{CN}{ND}$ 的值.

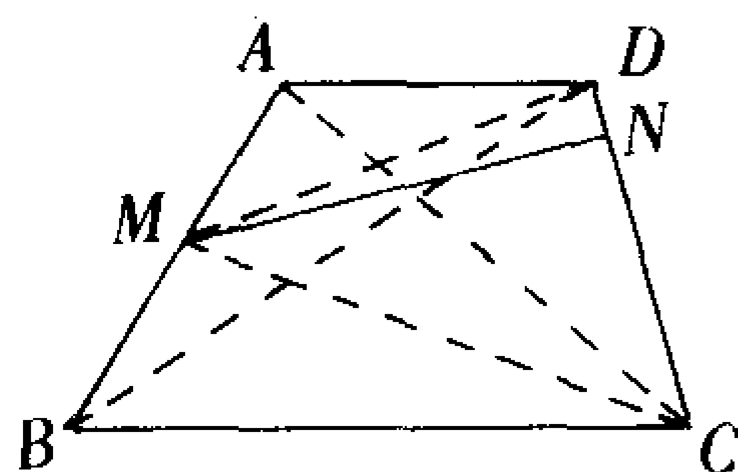
（中国上海市数学竞赛，1996 年）

[解] $\because$ $\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{5}$，$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{梯形}}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{梯形}}=\frac{4}{15}>\frac{1}{4}$，

故 $S_{四边形MBCN}:S_{四边形AMND}=3:1$.

同法得 $\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{梯形}}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.



于是 $\frac{CN}{ND}=\frac{S_{\triangle MCN}}{S_{\triangle MDN}}=\frac{\frac{3}{4}S_{梯形}-S_{\triangle MBC}}{\frac{1}{4}S_{梯形}-S_{\triangle MAD}}$

$=\frac{29}{3}$.

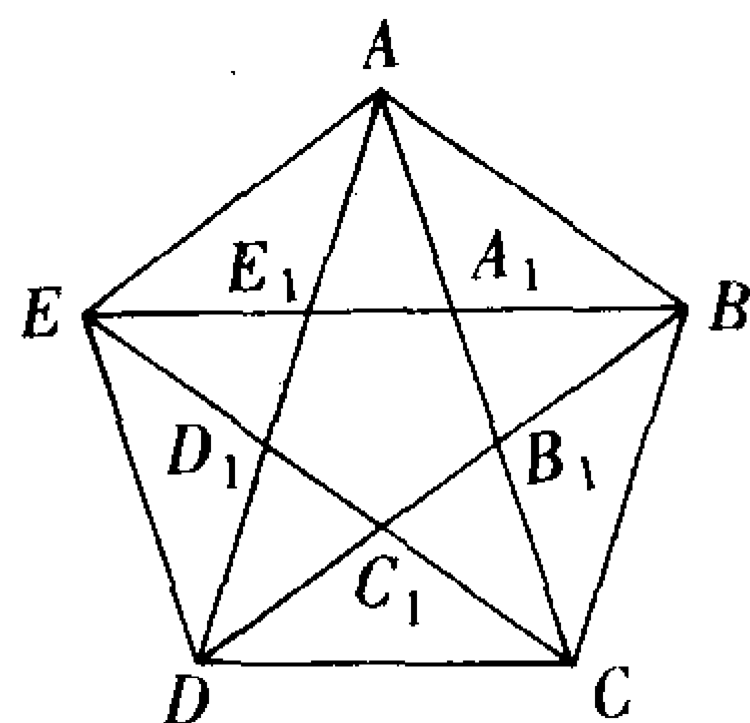
7·39 凸五边形 $ABCDE$ 的对角线相交构成一个五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$,与一个五角星形.

(1)求这个星形的以 A、B、C、D、E 为顶点的各个角之和.

(2)当 $ABCDE$ 为正五边形时,求五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积与五边形 $ABCDE$ 的面积之比.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1970 年)

[**解**] (1)五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的内角和为



$$(5-2)\times180^\circ=3\times180^\circ,$$

十边形 $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ 的内角之和为

$$3\times180^\circ+5\times180^\circ=8\times180^\circ.$$

由于对五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的每个顶点,它的内角和以该点为顶点的十边形的内角之和恰好是 360°,因此以 A、B、C、D、E 为顶点的五角星形的五个角之和为

$$\angle A_1BB_1+\angle B_1CC_1+\angle C_1DD_1+\angle D_1EE_1+\angle E_1AA_1$$
$$=8\times180^\circ+3\times180^\circ-5\times360^\circ=180^\circ$$

(2)如果五边形 $ABCDE$ 为正五边形,由对称性

$$AA_1=AE_1=EE_1,\ AC\parallel ED.$$

因此 $\angle AA_1E=\angle A_1ED=\angle CEA=\angle EAA_1$,

即 $\triangle AEA_1$ 是等腰三角形.

记 $AE=a$, $A_1E_1=x$. 由 $\triangle A_1AE_1\backsim\triangle A_1EA$

$\therefore\ \frac{AA_1}{A_1E_1}=\frac{A_1E}{AA_1}$, 即 $\frac{a-x}{x}=\frac{a}{a-x}$.

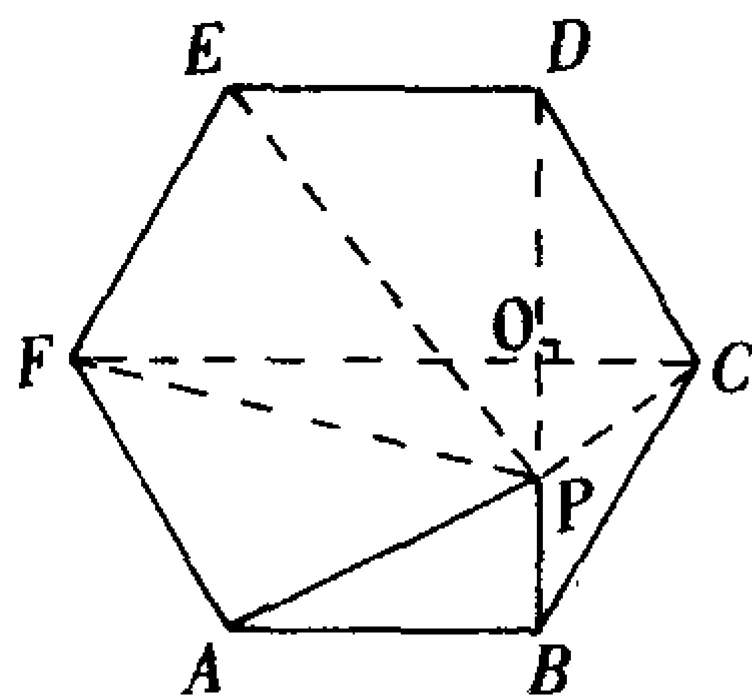
或　$x^2-3ax+a^2=0$.

由 $x<a$　得　$\frac{x}{a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore\quad \frac{S_{五边形A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{五边形ABCDE}}=\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

7·40　在一个边长为1的正六边形内部有一点 P,已知 P 到某两个顶点的距离分别是$\frac{13}{12}$及$\frac{5}{12}$,求:P 到其余四个顶点的距离.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)



[解]　因正六边形 $ABCDEF$ 的边长是1,所以对角线长是$\sqrt{3}$或 2,它们都大于$\frac{13}{12}+\frac{5}{12}=1.5$.故与 P 相距$\frac{13}{12}$和$\frac{5}{12}$的这两个顶点一定是相邻的顶点.设这两点为 A、B,$PA=\frac{13}{12}$,$PB=\frac{5}{12}$.

又$\because\quad \left(\frac{5}{12}\right)^2+1^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2$,

$\therefore\quad \angle ABP=90^\circ$, 知 P 在对角线BD 上.

$\therefore\quad PD=BO-PB=\sqrt{3}-\frac{5}{12}$, 且　$PQ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}$.

$\therefore\quad PE=\sqrt{PD^2+DE^2}=\frac{\sqrt{601-120\sqrt{3}}}{12}$,

且　$PC=\sqrt{PQ^2+QC^2}=\frac{\sqrt{169-60\sqrt{3}}}{12}$,

及　$PF=\sqrt{PQ^2+QF^2}=\frac{\sqrt{457-60\sqrt{3}}}{12}$.

7·41　如果边长顺次为 25、39、52 与 60 的四边形内接于一圆,那么此圆的周长为多少?

(中国初中数学竞赛,1995 年)

[解 1]　设 $ABCD$ 为圆内接四边形,且 $AB=25$, $BC=39$, $CD=$

$52, DA=60$. 由圆内接四边形性质，$\angle A=180^\circ-\angle C$.

连结 BD. 由余弦定理

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle A$$
$$=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cos\angle C,$$

即 $25^2+60^2-2\times25\times60\times\cos\angle A$

$$=39^2+52^2+2\times39\times52\times\cos\angle A.$$

解得 $\cos\angle A=\dfrac{25^2+60^2-39^2-52^2}{2(25\times60+39\times52)}=\dfrac{625+3600-1521-2704}{2(25\times60+39\times52)}$
$=0$.

故 $\angle A=90^\circ$，BD 为圆的直径.

$BD=\sqrt{25^2+60^2}=\sqrt{4225}=65$. 故圆周长为 65π.

[解 2] 四边的长分解因数如下：

$BC=39=3\times13$，$CD=52=4\times13$，

$AB=25=5\times5$，$DA=60=12\times5$.

由此看出$\triangle BAD$、$\triangle BCD$ 均为直角三角形($3^2+4^2=5^2, 5^2+12^2=13^2$，因而$\angle A$、$\angle C$ 均为直角). 此时

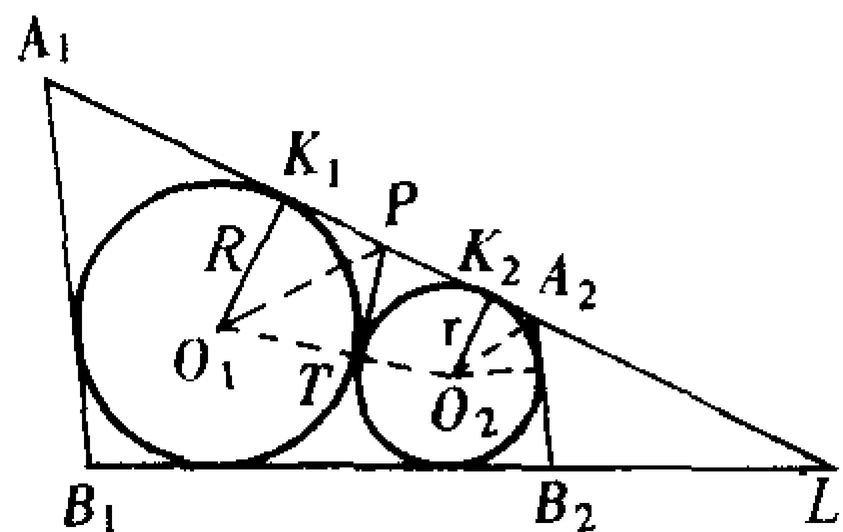
$$BD=2R=\sqrt{25^2+60^2}=65.$$

故圆周长为 65π.

7·42 已知:半径为 R 和 r 的两个圆彼此外切，作不同的梯形，使得每个圆切梯形的两腰和一个底. 求:梯形腰最小可能的长度.

（第 8 届全苏数学奥林匹克，1974 年）

[证] 设 O_1 和 O_2 是圆心，T 是切点，K_1K_2 是一条外公切线. $K_1O_1=R$，$K_2O_2=r$.



P 是内公切线 PT 同外公切线的交点. 有 $K_1P=TP=PK_2$.

A_1B_1、A_2B_2 分别是梯形上、下底.

由 $\triangle O_1K_1P\backsim\triangle PK_2O_2$ 得

$K_1P\cdot PK_2=Rr$ ①

由 $\triangle A_1K_1O_1\backsim\triangle A_2K_2O_2$ 得 $A_1K_1\cdot K_2A_2=Rr$， ②

由① 注意到 $K_1P=PT=PK_2$，可得 $K_1P=PK_2=\sqrt{Rr}$.

由② $A_1K+K_2A_2\geqslant 2\sqrt{A_1K_2\cdot K_2A_2}=2\sqrt{Rr}$.

如果使 $K_2A_2=\sqrt{Rr}$ 的点 A_2 在 K_2 和 L 之间，则梯形的最短腰的长度等于

$$A_1K_1+K_1K_2+K_2A_2=4\sqrt{Rr}.$$

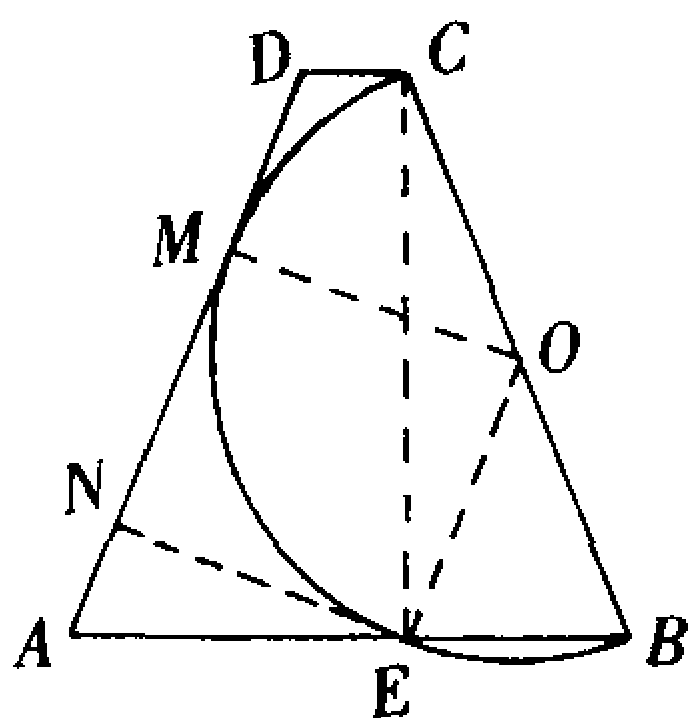
如果 $A_2K_2\geqslant K_2L$，即 $\sqrt{Rr}\geqslant\sqrt{Rr}\cdot\sqrt{\frac{2r}{R-r}}=q$，$R\geqslant 3r$，

那么 $A_1A_2>2\sqrt{Rr}+q+\frac{Rr}{q}=\frac{\sqrt{Rr}(R+r)^2}{2r(R-r)}$.

于是，如果 $3r>R$，那么腰的最小长等于 $4\sqrt{Rr}$. 如果 $3r\leqslant R$，具有最短腰的梯形不存在，此时腰长大于 $\frac{\sqrt{Rr}(R+r)^2}{2r(R-r)}$.

7·43 以一底角为 67.5°的等腰梯形 $ABCD$ 的一腰 BC 为直径作圆，交大底 AB 于 E，且恰与另一腰 AD 相切于 M，求：$BE:AE$.

（中国北京市数学竞赛，1981 年）



［解 1］ 如图 $ABCD$ 为题设梯形，以 BC 为直径的圆 O 切 DA 于 M，且与 AB 交于 E. 连 CE，则 $\angle CEB=90°$.

连 OE、OM，且设⊙O 半径为 r.

则 $CO=BO=OE=OM=r$,

$BE=2r\cos 67.5°$,

且 $\angle OEB=\angle OBE=67.5°$,

∴ $AD/\!/OE$.

过 E 作 $EN\perp AD$ 于 N,

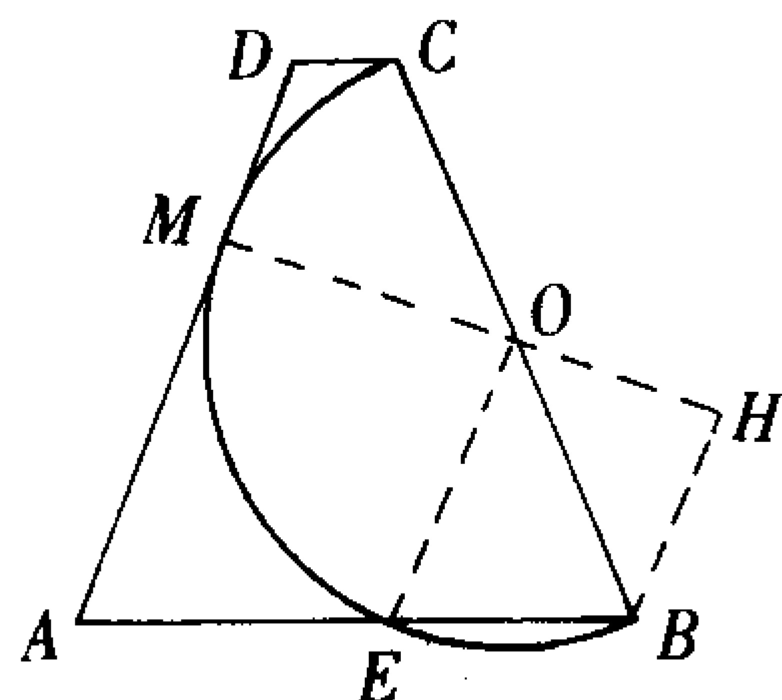
则 $EN=OM=r$.

在 Rt△ENA 中，$AE=r\csc 67.5°$,

$$\therefore\ \frac{BE}{AE}=\frac{2r\cos 67.5°}{r\csc 67.5°}$$
$$=2\sin 67.5°\cos 67.5°=\sin 135°$$
$$=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

［解 2］ 作 $BH\perp MO$，交 MO 的延长线于 H.

易证 $\angle EOB=45°$，且 $AM /\!/ EO /\!/ BH$，

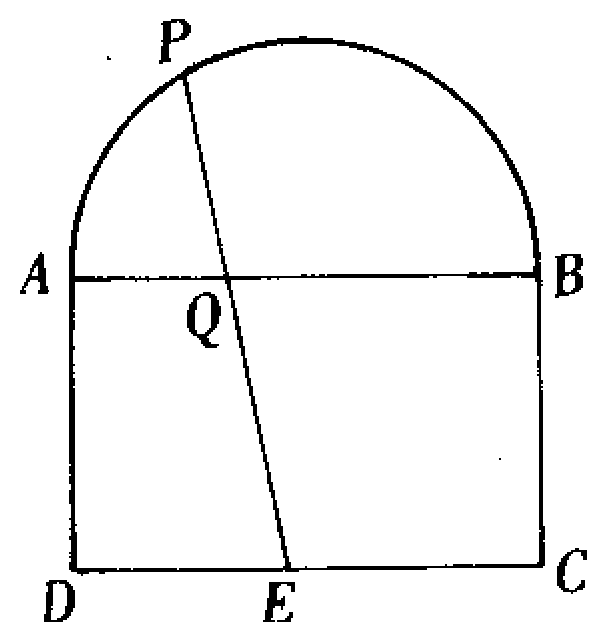


$\therefore$ $\angle EOH=90°$，且 $\angle HOB=45°$.

故 $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}OB=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，

$\therefore$ $\frac{BE}{AE}=\frac{OH}{OM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7·44 右图上半部分是以 $AB=2$ 为直径的半圆，下半部分是矩形 $ABCD$. 点 P 分$\overset{\frown}{AB}$为两部分比$\overset{\frown}{AP}:\overset{\frown}{PB}=1:2$，点 Q 分线段 AB 为两部分比 $AQ:QB=1:2$，延长 PQ 交 DC 于 E，又 PE 分图形为两部分面积比是 1:2. 求：DE 长.



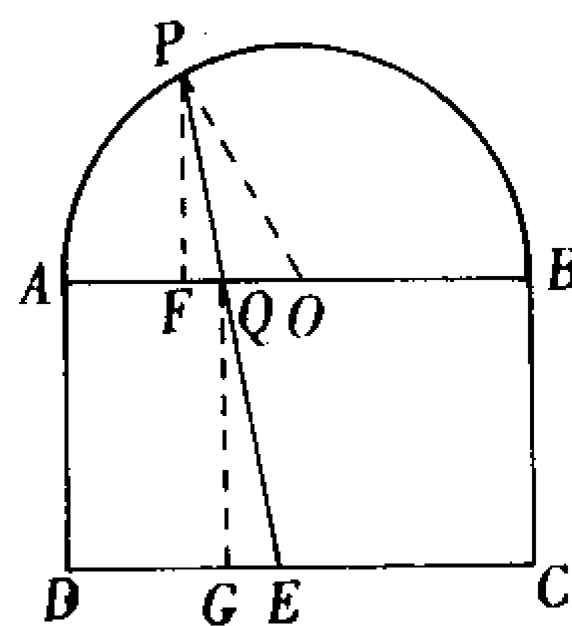
（中国北京市数学竞赛，1983 年）

[解] 设 O 为半圆圆心，连 OP，则$\angle AOP=60°$.

作 $PF\perp AB$ 于 F，$QG\perp DC$ 于 G.

则 $\triangle PFQ\sim\triangle QGE$.

又 $PF=OP\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，



$FO=OP\cos 60°=\frac{1}{2}$，

$QF=\frac{1}{3}AB-AF=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

$OQ=OF-QF=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，

且$\because$ $QG:GE=PF:FQ=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{6}$，

$\therefore$ $QG=3\sqrt{3}GE$.

$\because$ $AQ=\frac{1}{3}AB=\frac{2}{3}$，$\therefore$ $S_{矩形AQGD}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$.

又 $\angle AOP=60°$，$\therefore$ $S_{扇形AOP}=\frac{1}{3}S_{半圆O}$.

$\therefore$ $S_{图形DAPE}=\frac{1}{3}S_{整个图形}=S_{矩形AQGD}+S_{扇形AOP}$.

$\therefore\quad S_{\triangle QGE}=S_{\triangle OPQ}$，即 $\dfrac{1}{2}QG\cdot GE=\dfrac{1}{2}\triangle QPF$.

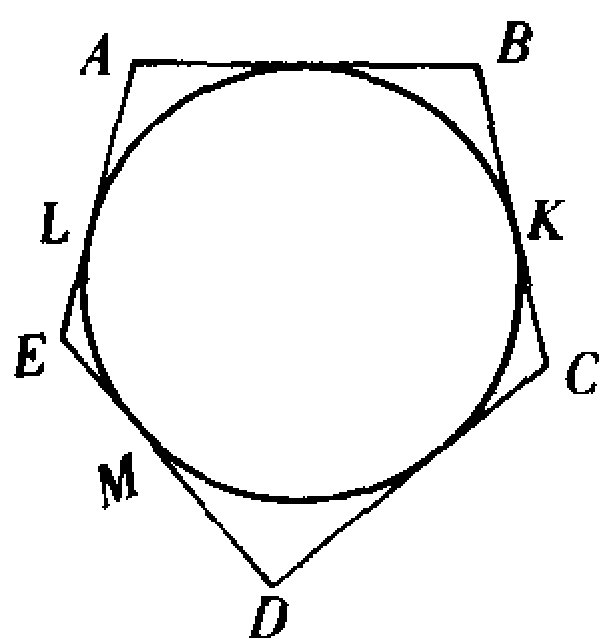
$\therefore\quad \dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}GE\cdot GE=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $GE=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

$\therefore\quad AD=QG=3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

故 $DE=DG+GE=AQ+GE=\dfrac{1}{6}(4+\sqrt{2})$.

7·45 作圆的外切五边形 $ABCDE$，现知其边长皆为整数且 $AB=CD=1$. 又圆周与边 BC 相切于点 K. 试求线段 BK 之长.

（莫斯科数学奥林匹克，1970 年）



［解］ 假若 L 和 M 为 AE 和 DE 与圆周的切点.（如图）则

$EL-BK=(AE-AL)-(AB-AL)=AE-1$ 是整数，

$EM-KC=(ED-DM)-(DC-DM)=DE-1$ 也是整数.

不失一般性，设 $KC\geqslant BK$. 将两式相减

$$(EL-BK)-(EM-KC)=(AE-1)-(ED-1)$$

即 $KC-BK=AE-ED$ 也是整数

$BK+AL=AB=1,\quad BK<1$

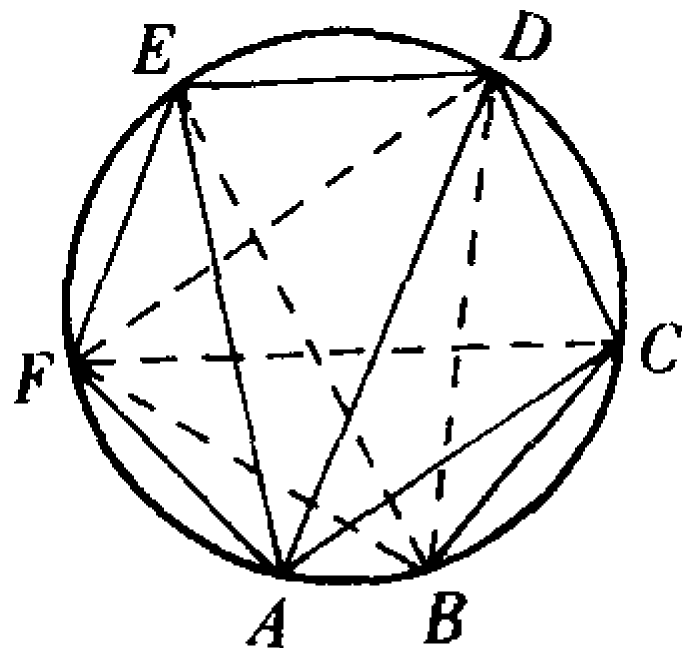
$KC+DM=CD=1,\quad KC<1.$

$\therefore\quad KC-BK<1.$

故 $KC-BK=0$， 即 $BK=KC=0.5$.

7·46 一个六边形内接于一个圆，其中五条边的边长为 81，第六条边记为 AB，其长为 31. 求从 A 点出发的三条对角线的长的和.

（第 9 届美国数学邀请赛，1991 年）



［解］ 记从 A 出发的三条对角线 $AC=x$，$AD=y$，$AE=z$.

则由等弧所对的弦相等得

$BD=DF=z,\quad BE=CF=y,$

$BF=x.$

在四边形 $ABDE$ 中，由托勒密（ptolemy）定

理有

$$AD\cdot BE=AB\cdot DE+BD\cdot AE,$$

即 $y^2=31\times81+z^2.$ ①

同理,在四边形 $ABCF$ 中, $x^2=31y+81^2,$ ②

在四边形 $ACDF$ 中, $y^2=xz+81^2,$ ③

在四边形 $ADEF$ 中, $z^2=81y+81^2.$ ④

③-④得

$$y^2-z^2=xz-81y.$$

代入①得 $31\times81=xz-81y.$

代入③得 $y^2-81^2=81\times31+81y.$

解得 $y_1=144,\quad y_2=-63$(舍去).

把 $y=144$ 代入①得

$$z^2=y^2-31\times81=144^2-31\times81=81\times225,$$

故 $z=9\times15=135.$

把 $y=144$ 代入②得

$$x^2=31\times144+81^2=(3\times35)^2=105^2,$$

$\therefore\quad x=105.$

$\therefore\quad x+y+z=105+144+135=384.$

即从 A 出发的三条对角线之和等于 384.

7·47 正 12 边形内接于半径为 12 的圆,此 12 边形的所有边长和对角线长的和可以写成形式 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, 这里 a、b、c、d 为正整数,求:$a+b+c+d$.

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解] 设正 12 边形为 $A_1A_2\cdots A_{12}$,半径 $R=12$,如图.

$$\because\quad A_1A_2=2R\sin15^\circ=2\times12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=b(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

所以所有边长之和为 $72(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

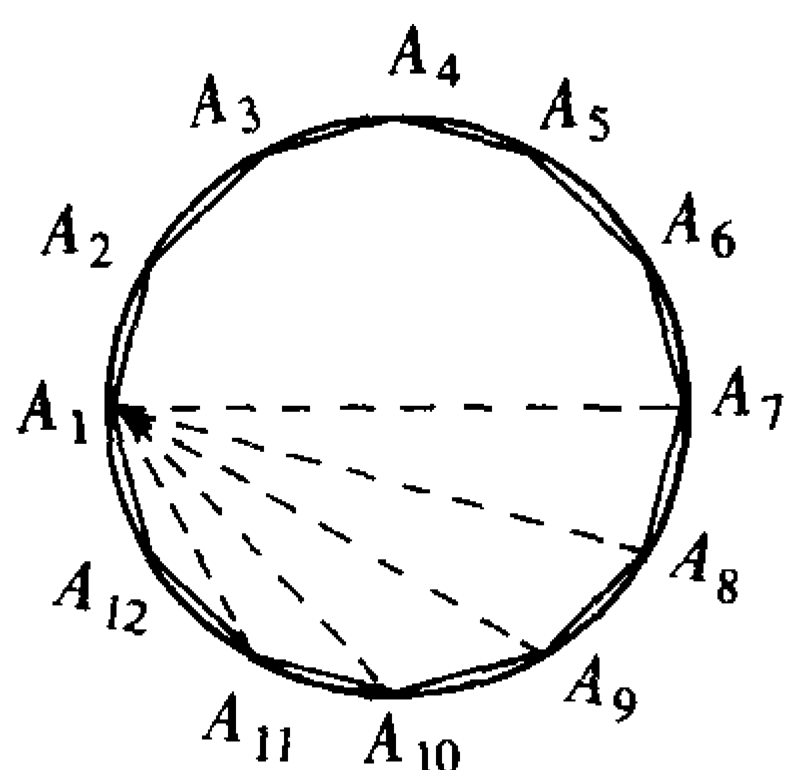
下面求对角线的长.

$$A_1A_3=2R\sin30^\circ=12.$$

这样的对角线共有 12 条,其和为 144.

$$A_1A_4=2R\sin45^\circ=12\sqrt{2}.$$

这样的对角线共有 12 条,其和为$144\sqrt{2}$.



$$A_1A_5=2R\sin 60^\circ=12\sqrt{3}.$$

这样的对角线共有 12 条，其和为 $144\sqrt{3}$.

$$A_1A_6=2R\sin 75^\circ=6(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

这样的对角线共有 12 条，其和为 $72(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

$$A_1A_7=2R=24.$$

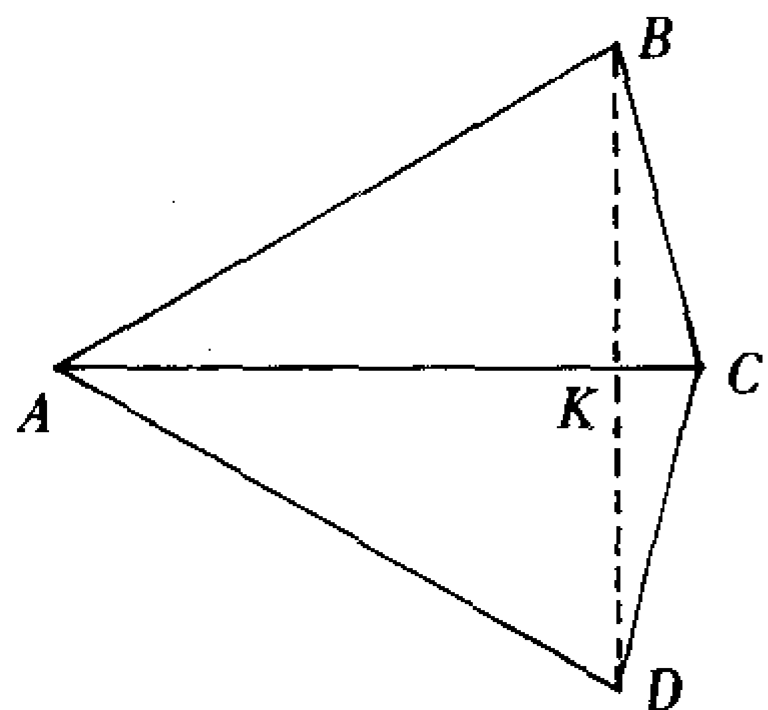
这样的对角线只有 6 条，其和为 144.

于是正 12 边形所有对角线与所有边长的总和为

$$144+72(\sqrt{6}-\sqrt{2})+144\sqrt{2}+144\sqrt{3}+72(\sqrt{6}+\sqrt{2})+144$$
$$=288+144\sqrt{2}+144\sqrt{3}+144\sqrt{6}$$
$$=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}.$$
$$\therefore\quad a+b+c+d=288+144+144+144=720.$$

7·48　在凸多边形中，有多少条长度等于最长的对角线的边？

（第 4 届全苏数学奥林匹克，1970 年）



［解］　在凸多边形中，长度等于最长对角线的边最多有两条，理由如下：

如图，$AB=AC=AD$，$BD<AC$，则 AC 是最长的对角线，恰有两条边 AB、AD 等于 AC.

我们再证，等于最长对角线的边不能多于两条.

假设凸多边形中等于最长对角线的边多于两条，我们可以选取其中不相邻的两条边（这是可能的，因为有对角线的多边形至少是四边形）AB 和 CD. 如果对角线 AC、BD 相交于 K，

$$\text{则}\quad AC+BD=(AK+KC)+(BK+KD)$$
$$=(AK+BK)+(CK+DK)$$
$$>AB+CD=2AB.$$

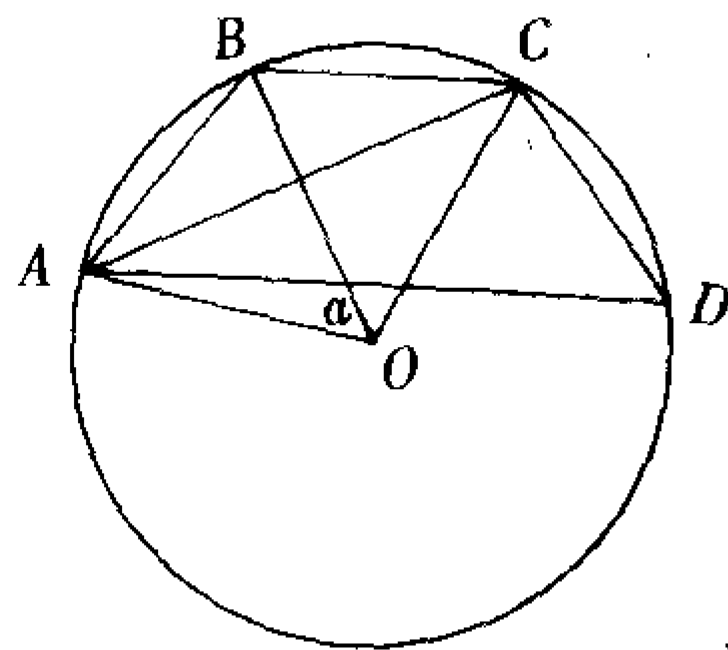
所以对角线 AC、BD 中至少有一个大于 AB 边. 与 AB 是等于最长对角线的假设相矛盾.

7·49 设正多边形的依次相邻的四个顶点为 A、B、C、D 且满足 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$. 求:正多边形的边数.

(英国数学奥林匹克,1966 年)

[解] 设正多边形的外接圆 O 的半径为 R.

记 $\alpha=\angle AOB$, 则 $0<\alpha<120°$.



$$AB=2R\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$AC=2R\sin\alpha,$$
$$AD=2R\sin\frac{3\alpha}{2}.$$

由已知可得 $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

$$\therefore\quad 0=\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}-\left(\sin\alpha+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos2\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos2\alpha\right)-\left(\cos\alpha+\cos\frac{5\alpha}{2}\right)\right]$$
$$=\cos\frac{7\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{3\alpha}{4}\right)$$
$$=2\cos\frac{7\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

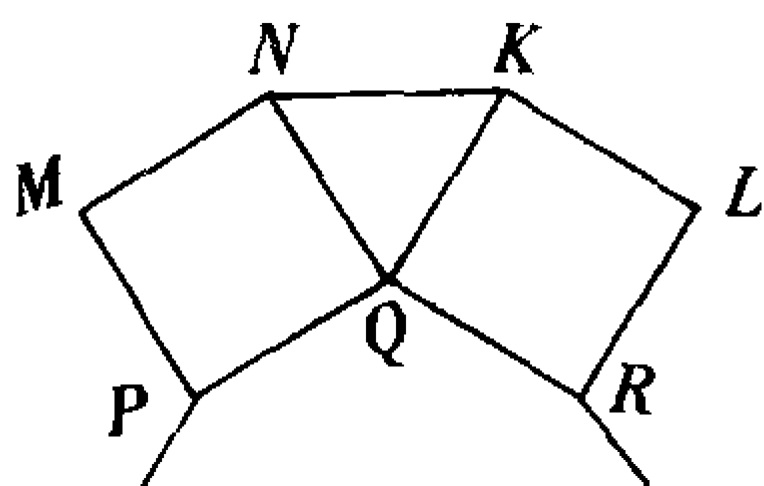
因此 $\cos\frac{7\alpha}{4}=0$, 或 $\sin\frac{\alpha}{4}=0$, 或 $\sin\frac{\alpha}{2}=0$.

得 $\frac{7\alpha}{4}=90°$, 故 $\alpha=\frac{360°}{7}$.

于是所论多边形为正七边形.

7·50 在正 n 边形的外部以它的边为边作正方形,已知:这些正方形的边与正 n 边形不同的顶点组成正 $2n$ 边形,当 n 为怎样的值时,这才有可能?

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)



［解］ 因为 MN、NK、KL 为正 $2n$ 边形的边，

$\because$ $MN=NK=KL$，

$\because$ $MN=NK=NQ=KL=KQ$，

故 $\triangle NKQ$ 为正三角形，

$\therefore$ $\angle NQK=60^\circ$， $\angle PQR=120^\circ$.

又因为 P、Q、R，均为正 n 边形的顶点，

所以已知正 n 边形为正六边形.

7·51 如图，PA、PB 是$\odot O$ 的两条切线，PEC 是$\odot O$ 的一条割线，D 是 PC 与 AB 的交点. 若 $PE=2$，又 $CD=1$，求：DE 的长.

（中国理科试验班招生试题，1997 年）

［解］ 设 $DE=x$，又设 PC 交$\odot O$ 于 E，连结 AC、CB、BE 和 EA.

$\because$ $\triangle AEP\backsim\triangle ACP$， $\triangle PEB\backsim\triangle BCP$，

$$\therefore \quad \frac{AE}{AC}=\frac{AP}{CP}=\frac{PE}{AP}=\frac{BP}{CP}=\frac{EB}{BC},$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{AC}\cdot\frac{BE}{BC}=\frac{AP}{CP}\cdot\frac{PE}{AP}=\frac{PE}{CP}=\frac{2}{x+3}.$$

又$\because$ $\angle ACB+\angle AEB=180^\circ$，

$$\therefore \quad \frac{AE}{AC}\cdot\frac{BE}{BC}=\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE}{CD}=\frac{x}{1}.$$

由上两式有 $\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x}{1}$， 即 $x^2+3x-2=0$，

解得 $x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ （已舍去负值）.

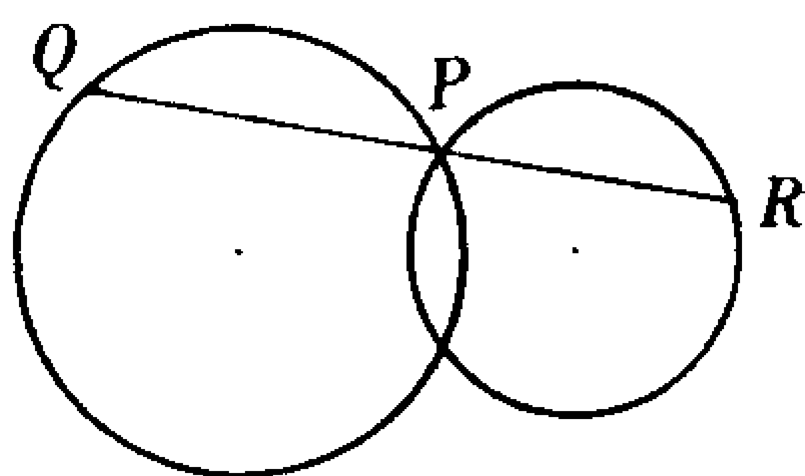
7·52 如图，两圆的半径分别为 8 和 6，两个圆心的距离为 12，过两圆交点之一的直线被两圆截出相等的弦 QP 和 PR，求：QP 长度的平方.

（第 1 届美国数学邀请赛，1983 年）

［解］ 如图，作 $O_1M\perp QR$ 于 M，$O_2N\perp QR$ 于 N.

由已知 $QP=PR$，则

$$QM=MP=PN=NR=\frac{1}{2}QP.$$



设 $QM=x$，则

$$O_1M=\sqrt{O_1Q^2-x^2}=\sqrt{64-x^2},$$

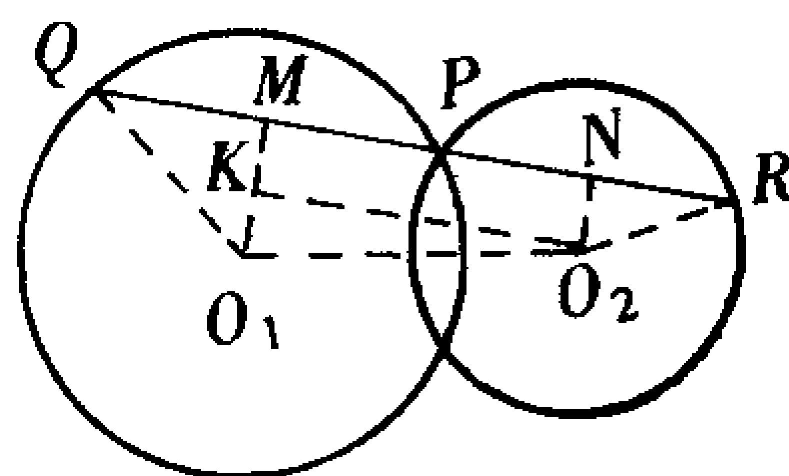
$$O_2N=\sqrt{O_2R^2-x^2}=\sqrt{36-x^2},$$

$\because\quad O_1O_2{}^2=O_1K^2+O_2K^2$

$\qquad\qquad=(O_1M-O_2N)^2+(2QM)^2,$

$\therefore\quad 144=(\sqrt{64-x^2}-\sqrt{36-x^2})^2$

$\qquad\qquad+(2x)^2,$



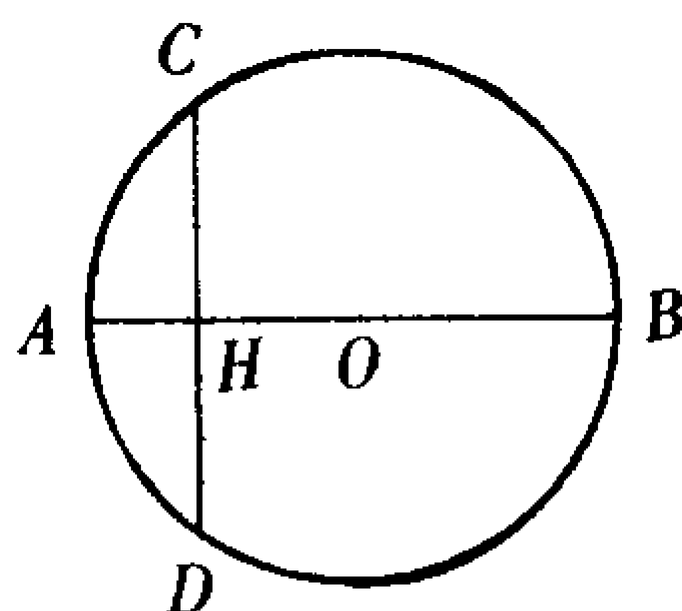
整理得

$$x^2-22=\sqrt{(64-x^2)(36-x^2)}\ ,$$

$\therefore\qquad 4x^2=130.$

故 $\qquad PQ^2=130.$

7·53 如图，一个圆的直径 AB 的长度是一个十进制的两位整数，把两个数码颠倒一下，就是与直径 AB 垂直的弦 CD 的长度，从交点 H 到圆心 O 的距离是一个正的有理数，求：AB 的长度.



（第 1 届美国数学邀请赛，1983 年）

［解］ 设 $AB=10x+y$，$x\in\{1,2,\cdots,9\}$，$y\in\{0,1,\cdots,9\}$.

则 $\quad CD=10y+x$. 由勾股定理

$$OH^2=OC^2-CH^2=\left(\frac{10x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{10y+x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{9}{4}\times11(x^2-y^2)\ .$$

由于 OH 是一个有理数，而 $\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ 是一个有理平方数，则 $11(x^2-y^2)$ 也是一个完全平方数.设

$$11(x^2-y^2)=(11k)^2,$$

则 $\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y)=11k^2.$

$\therefore\quad x+y\geqslant x-y,\quad 0<x+y\leqslant18,\quad 0<x-y<8,$

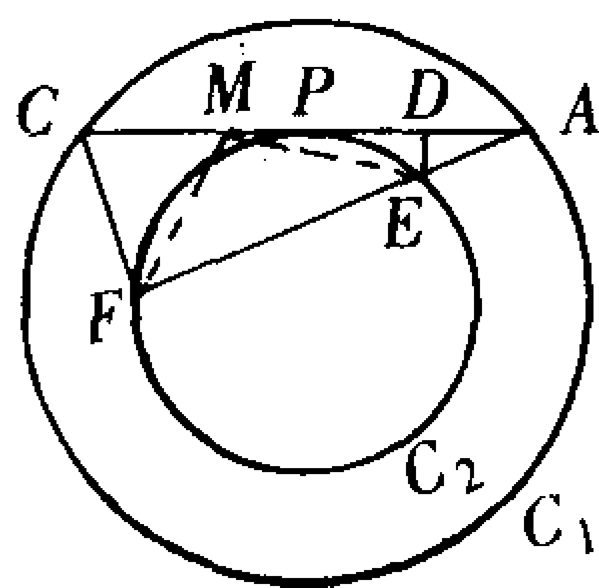
$$\therefore \quad \begin{cases} x+y=11, \\ x-y=1. \end{cases}$$

解得　$x=6$，$y=5$.

于是所求 AB 的长度为 65.

7·54　已知：$\odot C_1$ 和 $\odot C_2$ 是两个同心圆（OC_2 在 $\odot C_1$ 内），点 A 为 C_1 上任意一点，过 A 引 C_2 的切线 AB（$B \in \odot C_2$），交 $\odot C_1$ 于另一点 C. 取 AB 的中点 D，过 A 引一条直线交 $\odot C_2$ 于点 E 和 F，使得 DE 和 CF 的中垂线交于 AB 上的一点 M. 求：$\dfrac{AM}{MC}$ 的值且证明之.

（美国数学奥林匹克，1988 年）



［解］　由题设及圆的性质有

$$AE \cdot AF = AB^2 = 2AD \cdot AB$$
$$= AD \cdot 2AB = AD \cdot AC,$$

$\therefore$　C、D、E、F 四点共圆.

连 ME、MF. 且由题设知点 D、E、F 在以 M 为圆心，MD 为半径的圆上，有　$MC=MD$.

$$\therefore \quad \frac{AM}{MC}=\frac{5}{3}.$$

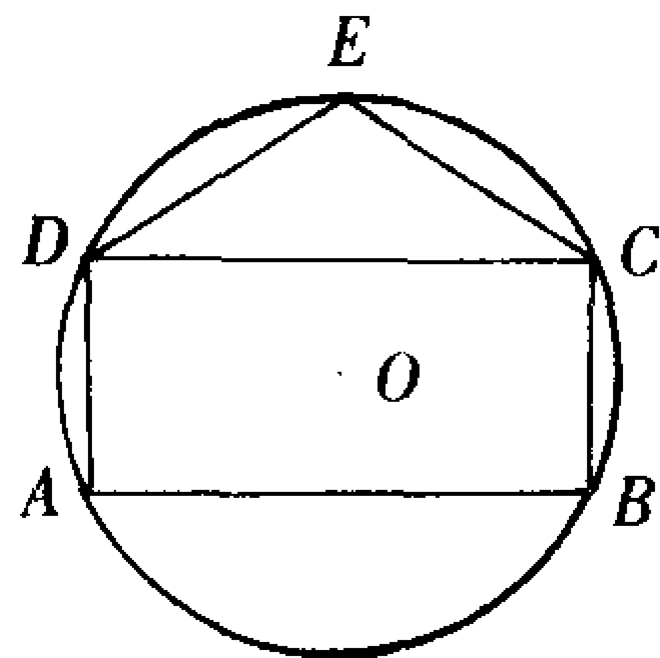
7·55　如图，单位圆有一内接矩形（底为 b，高为 h），以及一个等腰三角形（底为 b），问 h 为什么值时，矩形和三角形的面积相等？

（第 47 届美国普特南数学竞赛，1986 年）

［解］　设等腰三角形 CDE 的底边 CD 上的高为 h_1.

连 OE 交 CD 于 F，则　$OF=\dfrac{h}{2}$，

又　$\dfrac{h}{2}+h_1=1$.　$\therefore$　$h_1=1-\dfrac{h}{2}$.



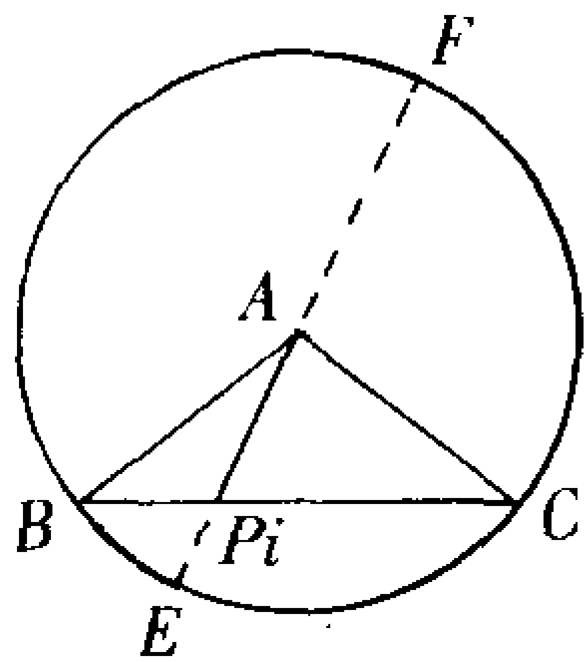
由题设　$S_{矩形ABCD}=S_{\triangle CDE}$，

有　$bh=\dfrac{1}{2}bh_1$.

$\therefore$　$2h=h_1=1-\dfrac{h}{2}$，得　$h=\dfrac{2}{5}$.

即　$h=\dfrac{2}{5}$时，矩形和等腰三角形的面积相等.

7·56 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$，BC 边有 100 个不同的点，$P_1,P_2,\cdots,P_{100}$. 记 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot CP_i$ $(i=1,2,\cdots,100)$，求：$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$ 的值.



（中国初中数学联赛，1990 年）

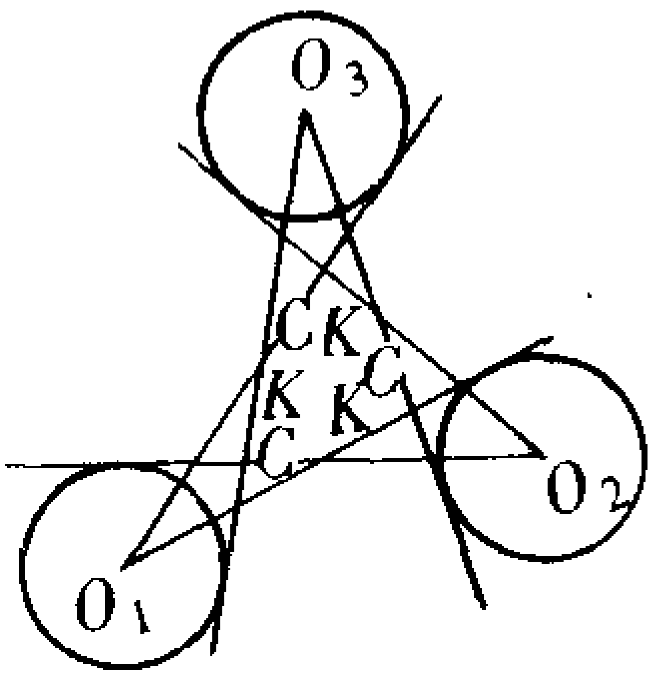
［解］ 以 A 为圆心，α 为半径，作圆 A，延长 P_iA 交圆 A 于 E、F 两点，则

$$\begin{aligned}BP_i\cdot P_iC&=EP_i\cdot P_iF\\&=(AE-AP_i)(AF+AP_i)\\&=(2-AP_i)(2+AP_i)\\&=4-AP_i^2.\end{aligned}$$

$\therefore\quad m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=4,$

故 $\quad m_1+m_2+\cdots+m_{100}=4\times100=400.$

7·57 如图，三个半径相等的圆互不相交，它们的圆心 O_1、O_2、O_3 不共线. 分别过每个圆的圆心作另外两圆的两条切线，它们围成一个凸六边形. 把该六边形的相邻两边分别涂以红蓝两色(其中 K 代表红色，C 代表蓝色). 求证：红色边长之和等于蓝色边长之和.



（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

［证］ 如图所示，因三圆直径相等，故有

$X_1O_2=O_1Y_2,\quad Y_1O_3=O_2Z_2,\quad Z_1O_1=O_3X_2.$

即 $\quad X_1A+AB+BO_2=O_1B+BC+CY_2,$

$Y_1C+CD+DO_3=O_2D+DE+EZ_2,$

$Z_1E+EF+FO_1=O_3F+FA+AX_2.$

将各等式相加，再将以下关系代入：

$X_1A=AX_2$，$Y_1C=CY_2$，$Z_1E=EZ_2$(一点到圆的两切线长相等)，

$BO_2=O_1B$，$DO_3=O_2D$，$FO_1=O_3F$(因为这些圆的半径相等)，这样可有

$AB+CD+EF=BC+DE+FA.$

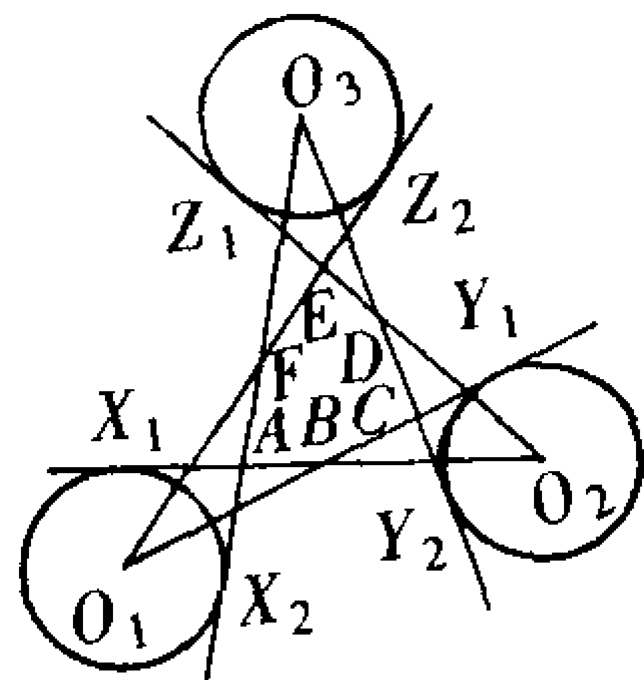


图 1

注 (1)如图 2 所示，同理可证.

(2)如图 1 和图 2 所示，等式 $AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot$

$DE \cdot FA$ 成立,这等价于直线 AD、BE 与 CF 交于一点.

几何卷

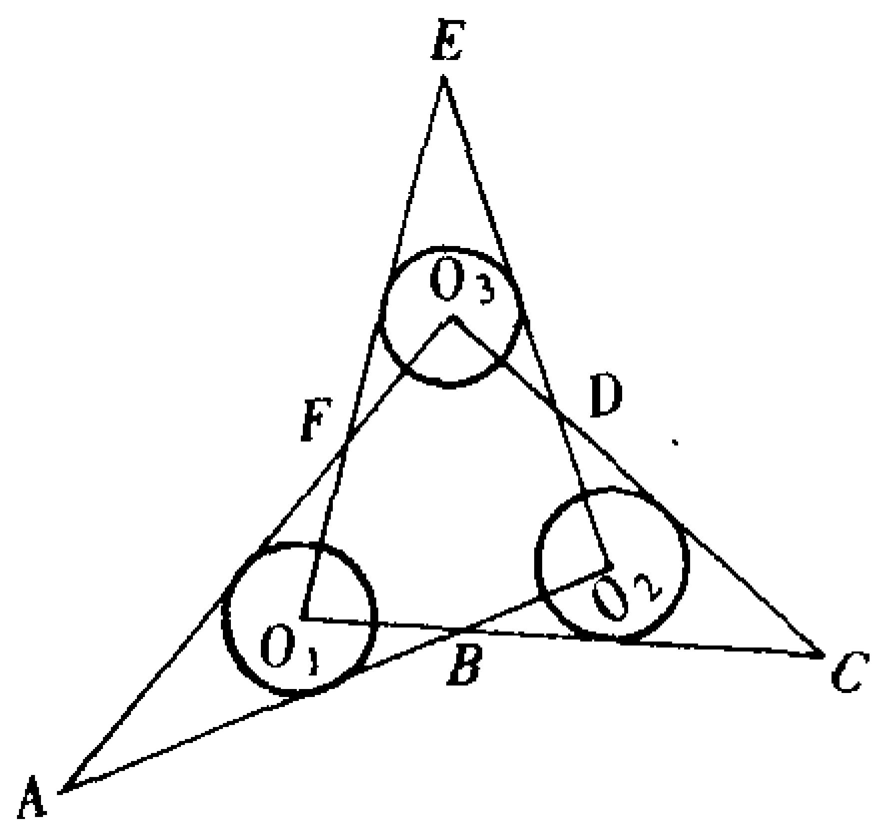


图 2

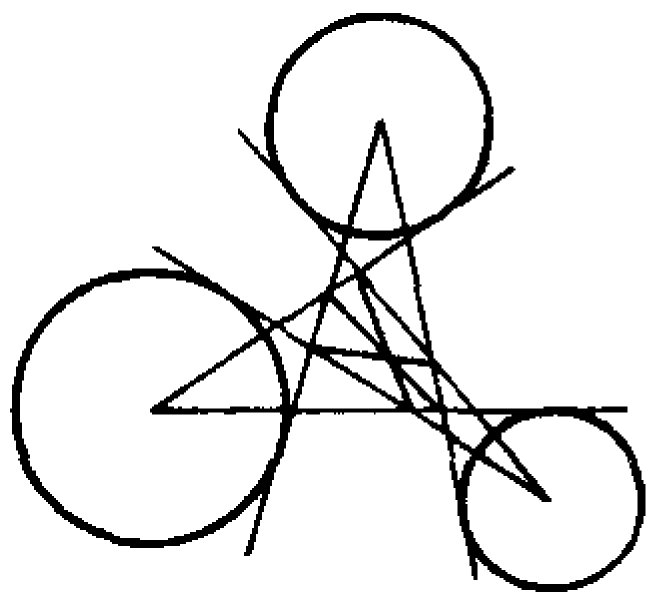
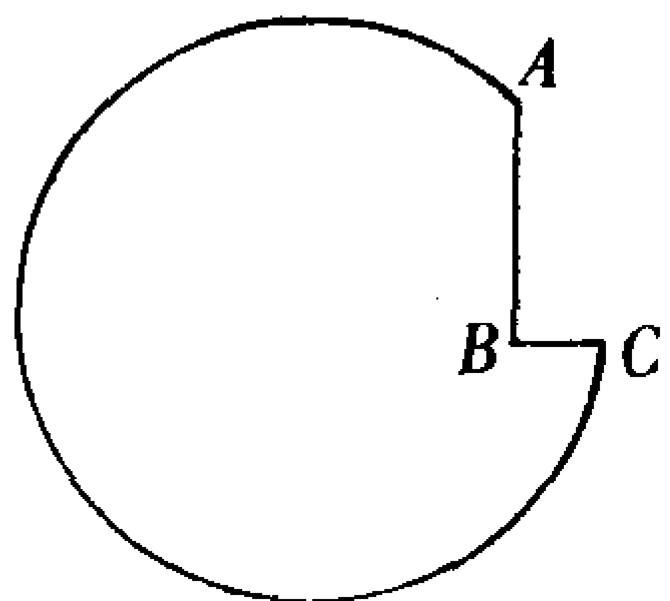


图 3

(3)即使三圆不等,上述结论依然成立(见图 3).



7·58 一个机器零件的形状是一个有缺口的圆(如图),这个圆的半径是 $\sqrt{50}$ cm,AB 的长度是 6cm,BC 的长度是 2cm,$\angle ABC$ 是直角.求:B 与圆心的距离(以厘米为单位)的平方.

(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

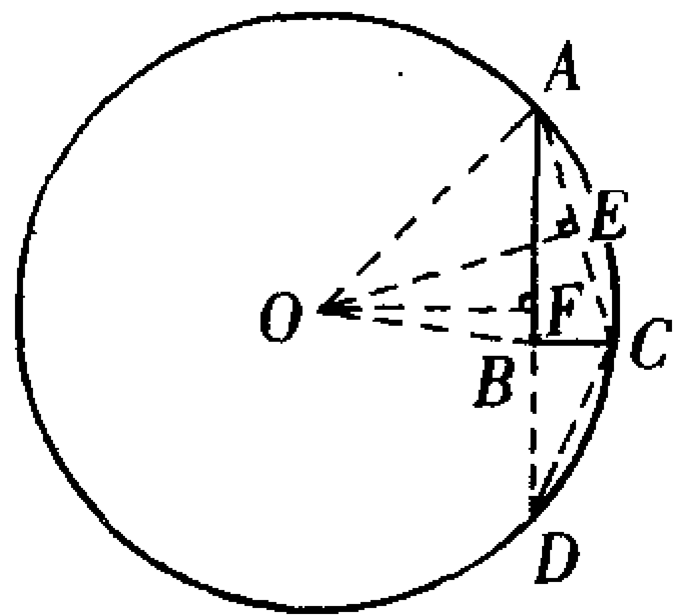
[解] 如图,补成一个圆 O.

连 AC,延长 AB 交圆 O 于 D,连 OA、OB.作 $OE \perp AC$,垂足为 E,作 $OF \perp AB$,垂足为 F.连 CD.

因为 $AB=6$,$BC=2$,$\angle ABC$ 为直角,由勾股定理得

$$AC=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40},$$

$$AE=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\sqrt{10}.$$



于是

$$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}$$
$$=\sqrt{50-10}=\sqrt{40}.$$

$$\operatorname{tg}\angle AOE=\frac{AE}{OE}=\frac{1}{2}.$$

又 $\angle BDC$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 的度数 $=\angle ADE$ 的度数.

$\therefore\quad \angle BDC=\angle AOE,\quad \operatorname{tg}\angle BDC=\frac{1}{2}.$

由 $BC=2$ 得 $BD=4$.

$\therefore\quad AD=AB+BD=6+4=10.$

又 $\quad DF=\frac{1}{2}AD=5.$

$\therefore\quad BF=DF-BD=5-4=1.$

且 $OF^2=OA^2-AF^2=50-25=25.$

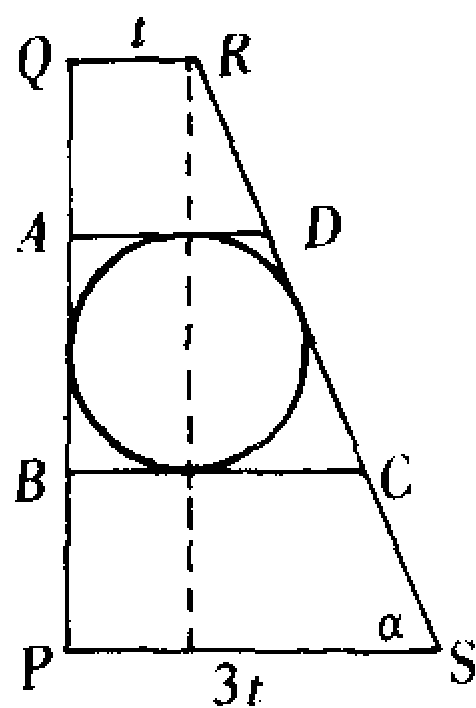
及 $OB^2=OF^2+BF^2=25+1=26.$

$\therefore$ B 与圆心的距离的平方为 26cm^2.

7·59 简尼与肯尼各沿着相距为200英尺的两条平行的路朝同一方向行走，肯尼每秒走3英尺，简尼每秒走1英尺，一座直径为100英尺的圆形高楼坐落在这两条路的正中间，在高楼第一次挡住简尼与肯尼之间的视线时，他们相距200英尺，经过 t 秒它们又能互相看见，如果将 t 写成既约分数，那么分子与分母的和是多少？

（第11届美国数学邀请赛，1993年）

［解］ 令 P、Q 分别为简尼与肯尼在第一次被高楼挡住时的位置，R、S 是他们又能互相看见的位置，则



$QS=t,\quad PR=3t.$

设 $\angle PRS=\alpha$，则

$$\sin\alpha=\frac{200}{\sqrt{(3t-t)^2+200^2)}}=\frac{100}{\sqrt{t^2+10000}}.$$

由于圆外切四边形的对边和相等，则

$$AD+BC=AB+CD.$$

又由于圆心距 AD 和 BC 相等，并且距 PR 和 QS 也相等，则有

$$AD+BC=PR+QS=t+3t=4t.$$

又 AB 为圆的直径，则 $AB=100$.

则 $\quad CD=\frac{100}{\sin\alpha},\quad$ 从而 $\quad 4t=100+\frac{100}{\sin\alpha},$

即 $\quad 4t-100=\sqrt{t^2+10000},$

或 $\quad 15t^2-800t=0,$

$\because \quad t \neq 0, \quad \therefore \quad t=\dfrac{800}{15}=\dfrac{160}{3}.$

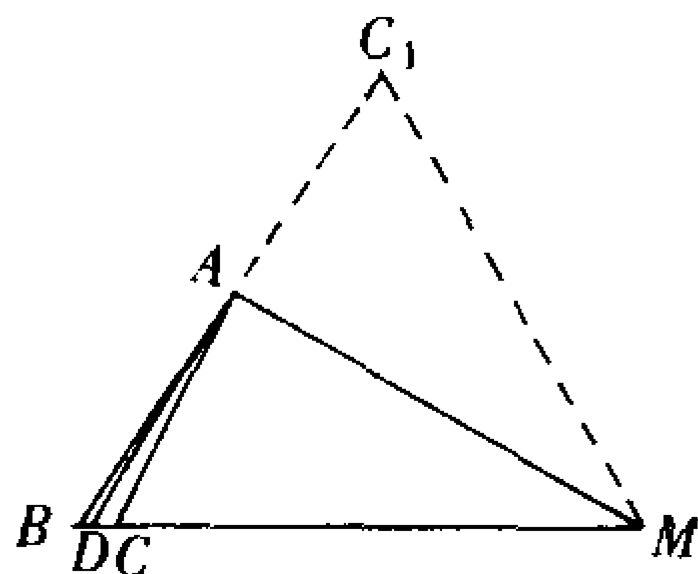
所以,所求分子和分母之和为 163.

(二)角的计算

1. 三角形中的角的计算

7·60　在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=5.25°$,AD是$\angle BAC$的平分线,过A作DA的垂线交直线BC于点M.若$BM=BA+AC$.试求:$\angle ABC$和$\angle ACB$的度数.

(中国北京市数学竞赛,1991 年)



[解]　分两种情况讨论计算:

(1)过A作AD的垂线交BC延长线于点M,延长BA到C_1,使$AC_1=AC$.

则　$BC_1=BM$,从而$\angle AC_1M=\angle BMC_1$.

又 AM为$\angle CAC_1$的平分线,则有

$$\triangle ACM \cong \triangle AC_1M.$$

在$\triangle BC_1M$中,

$$\begin{aligned}\angle B&=180°-2\angle AC_1M=180°-2\angle ACM\\&=180°-2(\angle B+5.25°)=180°-2\angle B-10.5°,\end{aligned}$$

所以　$\angle B=56.5°$.

因此　$\angle ACB=180°-5.25°-56.5°=118.25°$.

(2)如下页图,过A作DA的垂线交CB延长线于点M.

延长BA到C_1,使$AC_1=AC$.

连CC_1,则　$\angle MAD=90°$,

$$\angle MAC=90°+\frac{1}{2}\times 5.25°=92.625°.$$

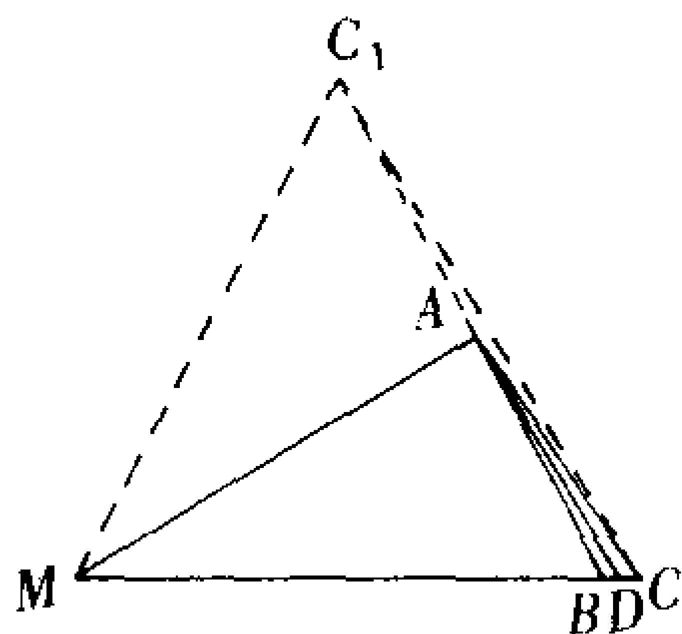
又　$\angle CAC_1=180°-5.25°=174.75°$,

故　$\angle MAC_1=360°-174.75°-92.625°$

$= 92.625°$.

即 $\angle MAC_1 = \angle MAC$.

$\therefore$ $\triangle MAC_1 \cong \triangle MAC$. 从而 $\angle MC_1A = \angle MCA = \angle BCA$.



又 $BC_1 = BA + AC_1 = AB + AC = BM$,

$\therefore$ $\angle MC_1A = \angle C_1MB$.

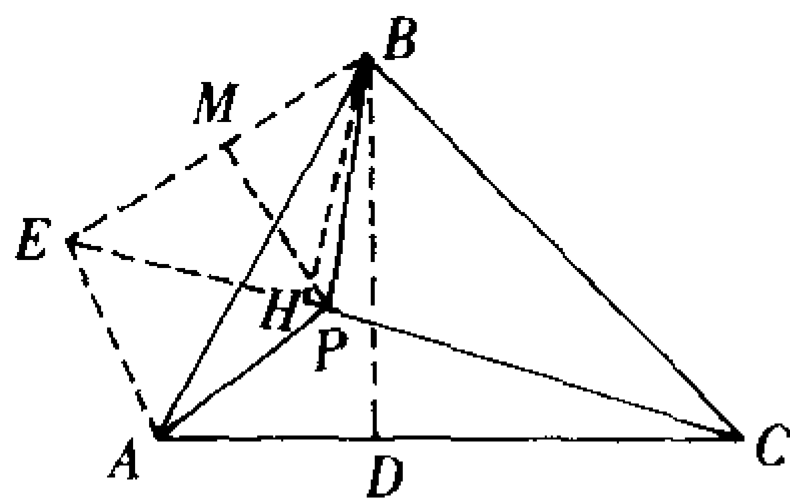
在$\triangle MCC_1$中, $3\angle ACB + 5.25° = 180°$,得 $\angle ACB = 58.25°$.

$\therefore$ $\angle ABC = 180° - 58.25° - 5.25° = 116.5°$.

7·61 在$\triangle ABC$中,$\angle BAC = 60°$,$\angle ACB = 45°$.(1)求:这个三角形的三边之比 $AB:BC:AC$.(2)设 P 为$\triangle ABC$内一点,且 $PA = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $PB = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $PC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$.求:$\angle APB$,$\angle BPC$,$\angle CPA$.

(中国武汉、重庆、广州、洛阳、福州初中数学联赛,1990年)

[解] (1)如图,作 AC 边上的高 BD,使 $AD = x$.



在Rt$\triangle ADB$中,因为$\angle BAD = 60°$,知 $AB = 2x$, $BD = \sqrt{3}x$.

在Rt$\triangle BDC$中, $\angle DCB = 45°$, 有 $DC = BD = \sqrt{3}x$, $BC = \sqrt{6}x$.

于是 $AC = AD + DC = (1 + \sqrt{3})x$.

$\therefore$ $AB:BC:AC = 2:\sqrt{6}:(1 + \sqrt{3})$.

(2)如图,作$\triangle AEB \backsim \triangle APC$,使

$$\frac{AE}{AP} = \frac{EB}{PC} = \frac{BA}{CA}.$$

即 $$\frac{AE}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{EB}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}.$$

于是 $AE = 2\sqrt{2}$, $BE = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

在$\triangle PAE$与$\triangle CAB$中, $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{3}}$,

又 $\angle PAE = \angle BAE + \angle PAB = \angle CAP + \angle PAB = \angle CAB$.

从而 $\triangle PAE \backsim \triangle CAB$. 有 $\angle APE = \angle ACB = 45°$,

且 $\dfrac{PE}{AE}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. $\quad\therefore\quad PE=2\sqrt{3}$.

在$\triangle PEB$中,由 $PB=BE=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$,$PE=2\sqrt{3}$,得 PE 边上的高

$$BH=\sqrt{BP^2-\left(\frac{PE}{2}\right)^2}=3+2\sqrt{3}.$$

于是 BE 边上的高

$$PM=\frac{PE\cdot BH}{BE}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}=\frac{PB}{2}.$$

$\therefore\quad \angle PBE=30^\circ$.

从而 $\quad \angle BPE=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle PBE)=75^\circ$,

$\quad\quad \angle APB=\angle APE+\angle BPE=120^\circ$

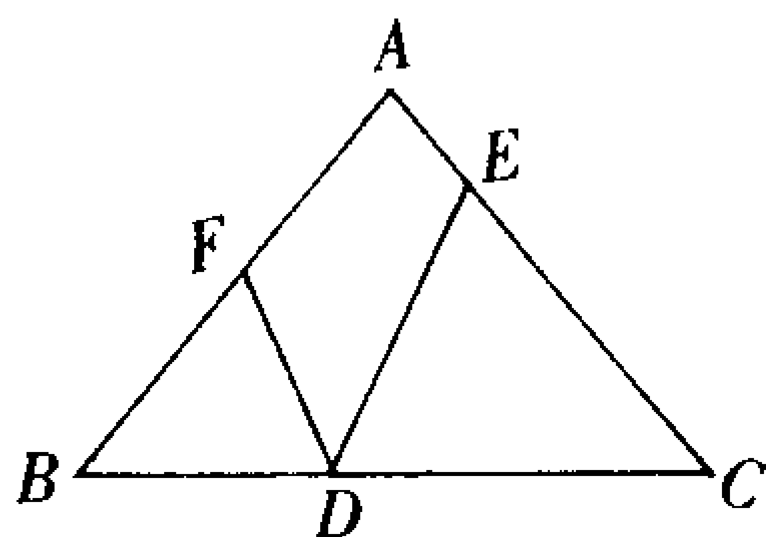
又 $\quad \angle AEP=180^\circ-\angle APE-\angle PAE=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$,

故 $\quad \angle APC=\angle AEB=\angle AEP+\angle PEB=75^\circ+75^\circ=150^\circ$.

$\therefore\quad \angle BPC=360^\circ-(\angle APB+\angle CPA)=90^\circ$.

7·62 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle CAB=80^\circ$.若 D、E、F 分别在边 BC、AC、AB 上,$CE=CD$,$BF=BD$.求:$\angle EDF$ 的度数.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)



[解] $\because\quad AB=AC$,$\angle CAB=80^\circ$,

$\therefore\quad \angle B=\angle C=\dfrac{180^\circ-80^\circ}{2}=50^\circ$.

又$\because\quad CE=CD,\quad BF=BD$,

$\therefore\quad \angle BDF=\angle CDE=\dfrac{180^\circ-50^\circ}{2}=65^\circ$.

$\therefore\quad \angle EDF=180^\circ-2\times65^\circ=50^\circ$.

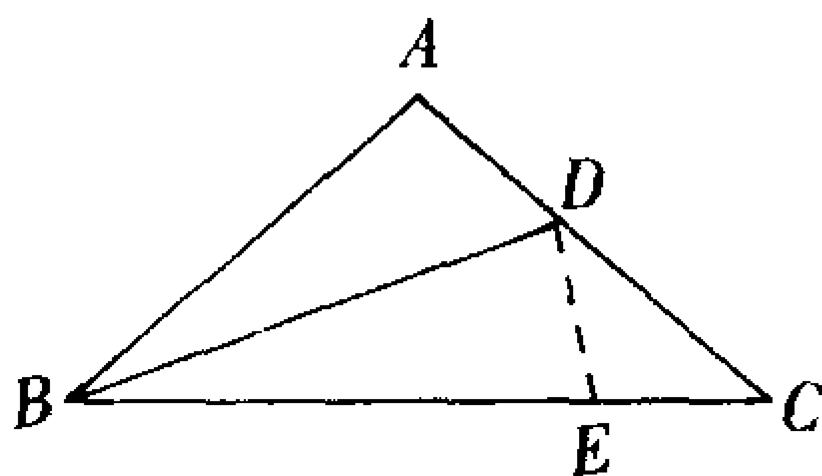
7·63 设$\triangle ABC$是一个等腰三角形,其中 $AB=AC$.又$\angle B$ 的平分线交 AC 于 D,且 $BC=BD+AD$.求:$\angle A$.

(加拿大数学奥林匹克,1996 年)

[解 1] 在 BC 上取点 E,使 $BE=BD$,于是 $AD=EC$.设$\angle ABC=2x$.

如图,由题设知 $\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{AD}{DC}$,

且 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{CA}{CB}$,



∴ $\triangle CED\backsim\triangle CAB$,

∴ $\angle CDE=\angle DCE=\angle ABC=2x$.

∴ $\angle BDE=\angle BED=4x$, 知 $9x=180°$,

故 $x=20°$, 从而 $\angle A=180°-4x=100°$.

[解 2] 由正弦定理在$\triangle ABD$ 和$\triangle BDC$ 中:

$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$, 且 $1+\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

∴ $1+\dfrac{\sin x}{\sin 4x}=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$,

即 $\sin 2x(\sin 4x+\sin x)=\sin 2x(\sin 5x+\sin x)$

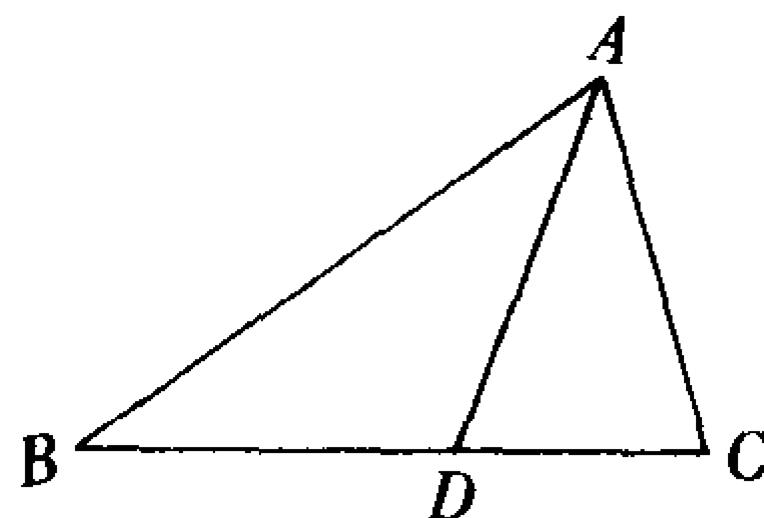
∵ $0<2x<90°$, ∴ $5x-90°=90°-4x$,

∴ $x=20°$, 得 $\angle A=100°$.

7·64 如图,在$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 上的点,$AD=BD=AC$,$\angle BAC=69°$,求:$\angle BAD$ 的度数.

(中国贵州省贵阳市数学竞赛,1991 年)

[解] ∵ $AD=BD=AC$,



∴ $\angle BAD=\angle ABD$,

$\angle ADC=\angle ACD$.

又∵ $\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD$

$=2\angle BAD$,

且 $\angle ADC=\angle ACD=\dfrac{180°-\angle DAC}{2}$

∴ $2\angle BAD=\dfrac{180°-\angle DAC}{2}$

$4\angle BAD=180°-\angle DAC=180°-(69°-\angle BAD)$

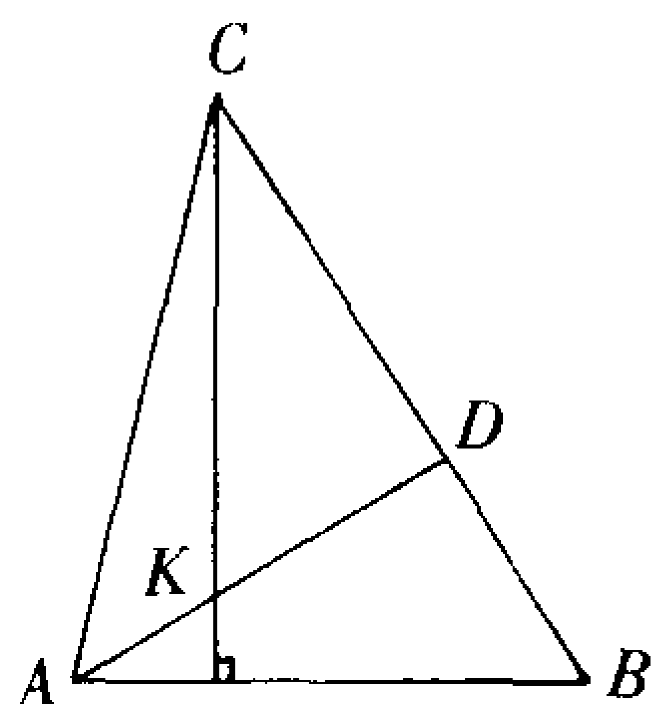
$=111°+\angle BAD$

即 $3\angle BAD=111°$, ∴ $\angle BAD=37°$.

7·65 设$\triangle ABC$ 的垂心为K,已知 $CK=AB$,求:$\angle ACB$.

(基辅数学奥林匹克,1970 年)

[解] 作 $AD\perp BC$ 于D,则 AD 过点K.



∵ $CK=AB$， $\angle CKD=\angle B$，

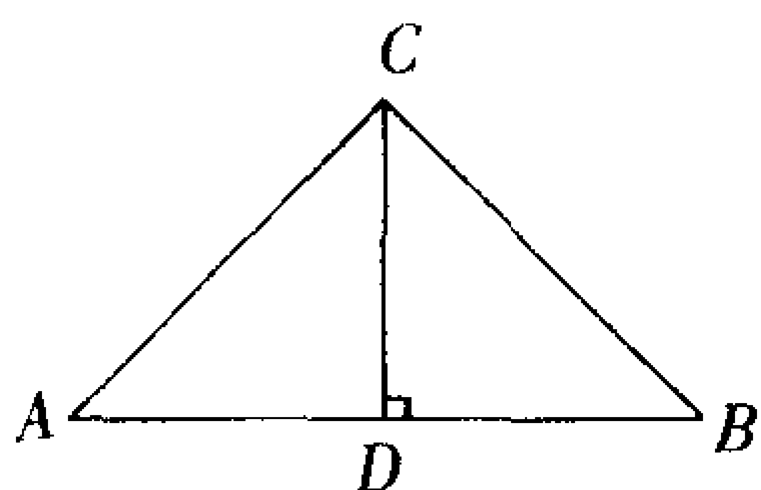
∴ $\text{Rt}\triangle CKD\cong\text{Rt}\triangle ABD$， $CD=AD$.

故 $\angle ACD=45°$.

7·66 在直角三角形中，三高之积为三边之积的一半，求：三角形的三个角.

（基辅数学奥林匹克，1973年）

[解] 设在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，如图. CD为AB边上的高，记h_a（其余类同）.



∵ $h_ah_bh_c=\dfrac{1}{2}abc$，

又 $h_a=a$， $h_b=b$，

∴ $h_c=\dfrac{1}{2}c$， 又 $m_c=\dfrac{1}{2}c$，

∴ h_c、m_c 重合，

故 $AC=BC$， 则 $\angle A=\angle B=45°$.

7·67 $\triangle ABC$的边AB和BC上的高线（分别）不短于边长，试求该三角形的各个角度数.

（第27届莫斯科数学奥林匹克，1964年）

[解] 设AD、CE是AB和BC上的高. 如图1，记h_a、h_c.

则 $AD\leqslant AB$， $CE\leqslant BC$.

但已知 $AD\geqslant BC$， $CE\geqslant AB$，

∴ D、B、E 重合（如图2）.

又已知 $AD=h_a\geqslant BC=h_c=CE$，

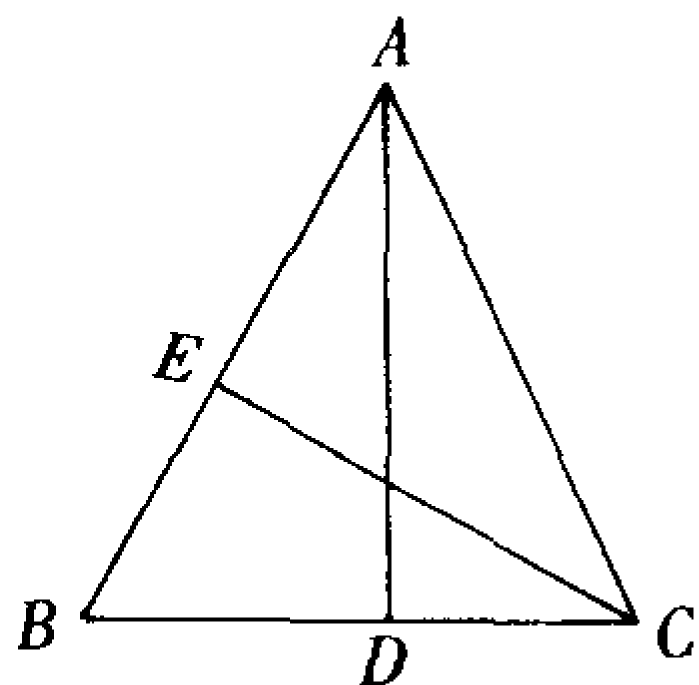


图1

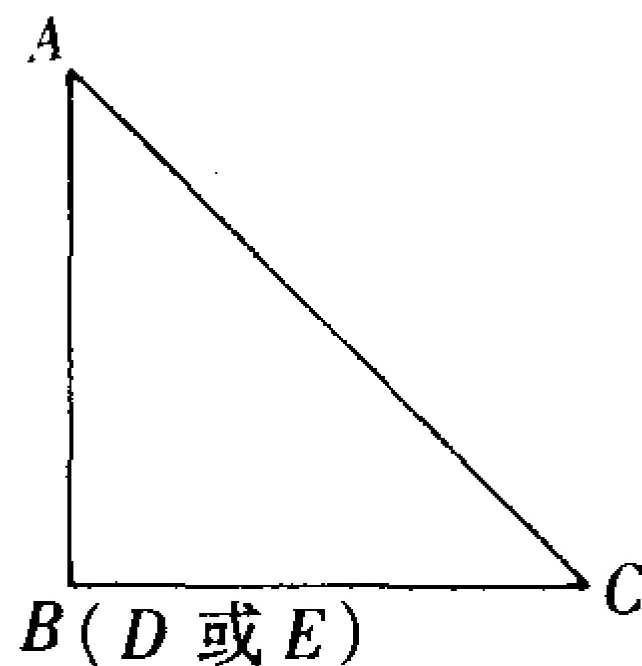


图2

且　　$CE=h_c \geqslant AB=h_a=AD$,

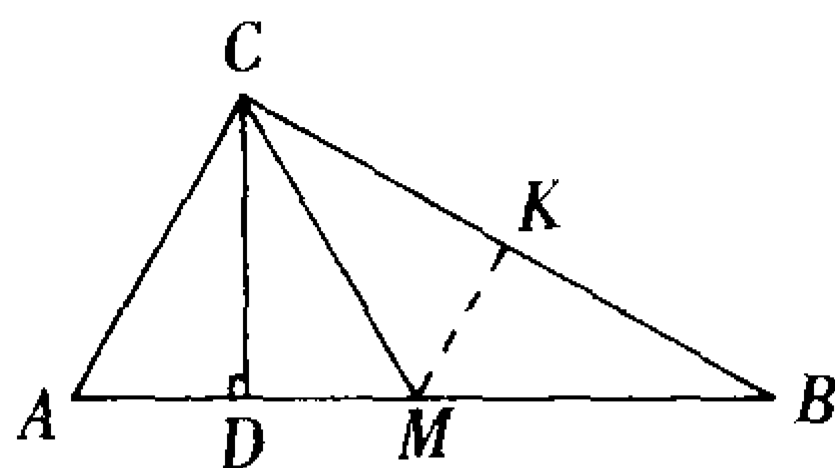
∴　$h_a=h_c=BC=AB$.

故　$\angle B=90°$，　$\angle A=\angle C=45°$.

7·68　设从三角形的一个顶点引出的中线与高三等分此顶角，计算此三角形各角的度数.

（基辅数学奥林匹克，1939 年）

［解］　设 CD 是 $\triangle ABC$ 的高，CM 为它的中线. 如图.



过 M 点作 $MK \perp BC$ 于 K，则由已知条件得

$\text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle MDC \cong \text{Rt}\triangle MKC$.

∵　CM 是中线，

∴　$MB=2DM=2MK$.

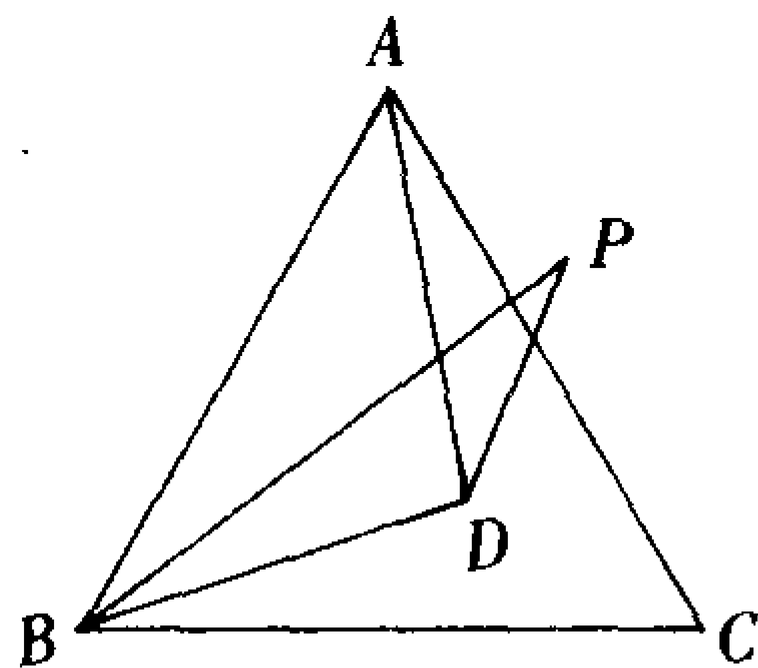
从而在 $\text{Rt}\triangle MKB$ 中，$\angle KBM=30°$，

则有　$\angle DCB=60°$.

∴　$\angle ACB=90°$.

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形，它的两个锐角分别为 30° 与 60°.

7·69　D 为正 $\triangle ABC$ 内一点，$DB=DA$，$BP=AB$，$\angle DBP=\angle DBC$. 求：$\angle BPD$ 的度数.



（中国北京市数学竞赛，1983 年）

［解］　连 DC，在 $\triangle BPD$ 与 $\triangle BCD$ 中，

∵　$BP=AB=BC$,

且　$\angle PBD=\angle CBD$，$BD=BD$,

∴　$\triangle BPD \cong \triangle BCD$,

则　$\angle BPD=\angle BCD$.

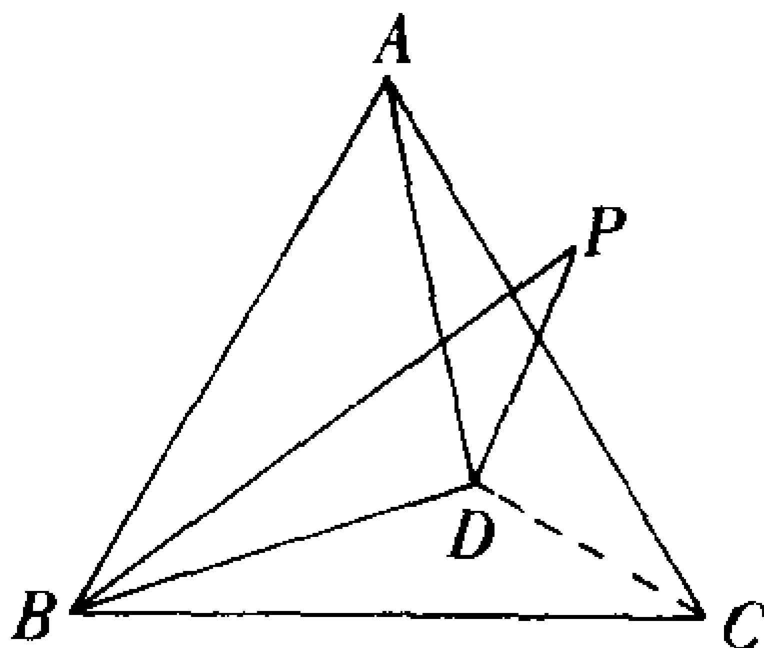
又　$AC=BC, AD=BD, DC=DC$,

∴　$\triangle ACD \cong \triangle BCD$,

则　$\angle ACD=\angle BCD$.

但　$2\angle BCD=\angle ACD+\angle BCD=\angle ACB=60°$,

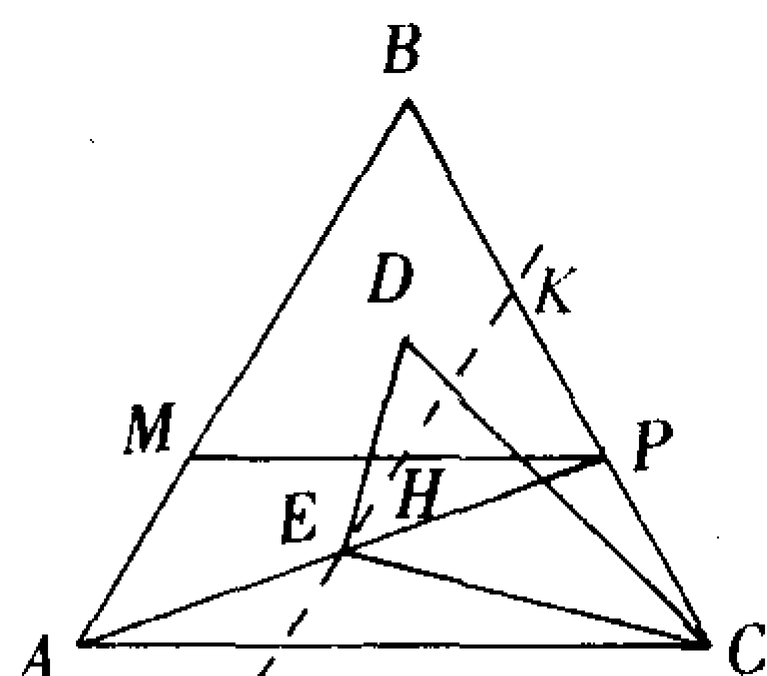
∴　$\angle BCD=30°$，　则　$\angle BPD=30°$.



7·70　已知：正 $\triangle ABC$，平行于 AC 的直

线分别交 AB、BC 于 M、P，又 D 是 $\triangle PMB$ 的中心，E 是线段 AP 的中点. 试计算 $\triangle DEC$ 的各角度数.

（第 14 届全苏数学奥林匹克，1980 年）



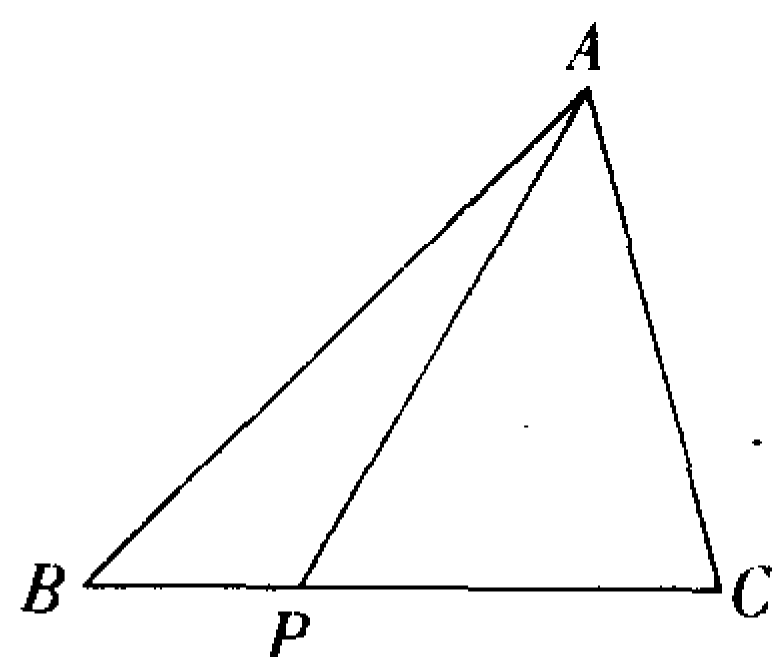
［解］ 我们考虑以 D 为中心，旋转 60° 且位似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似旋转变换，旋转的方向使 P 变到 MP 的中点 H（如图），此时，B 点受到 PB 的中点 K 处，直线 PB 变为直线 HK，它是 $\triangle BMP$ 的中位线，交 AP 于 E.

又 $BC:BP=BA:BM=KE:KH$，

所以在上述位似旋转下，C 点变为 E 点.

因此 $\angle EDC=60^\circ$，$DE=\frac{DC}{2}$.

易知 $\angle DEC=90^\circ$，从而 $\angle DCE=30^\circ$.



7·71 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取一点 P，使得 $PC=2BP$，设 $\angle ABC=45^\circ$，$\angle APC=60^\circ$. 求：$\angle ACB$ 的度数.

（前民主德国数学奥林匹克，1964 年）

［解］ 设 C_1 是 C 点关于直线 PA 的对称点，则

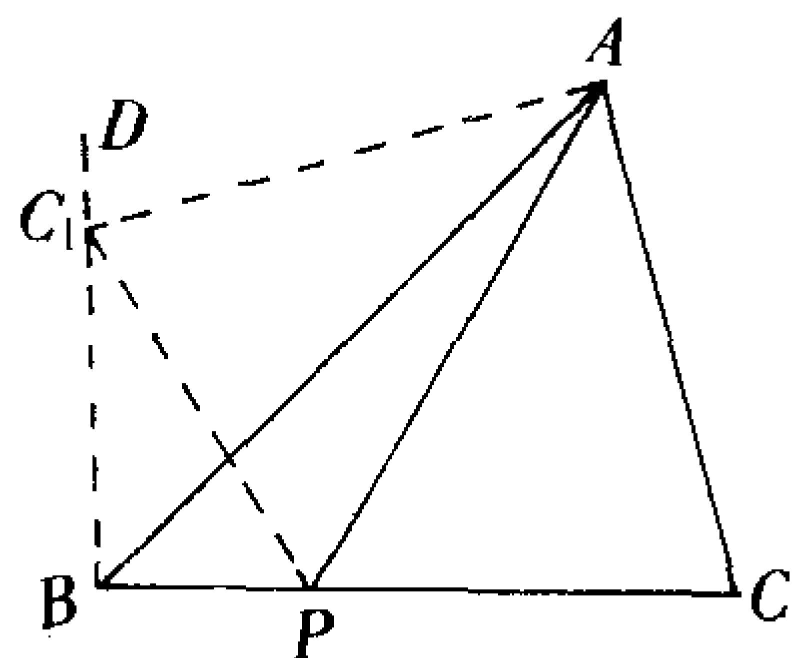
$PC=PC_1$，$PC_1=2BP$.

$\angle C_1PA=\angle CPA=60^\circ$，$\angle BPC_1=60^\circ$，$\angle ACB=\angle AC_1P$.

$\therefore$ PA 是 $\angle C_1PC$ 的平分线.

连 C_1B，由 $PC_1=2BP$，$\angle BPC_1=60^\circ$ 可得

$\angle C_1BP=90^\circ$，$\angle BC_1P=30^\circ$.



从而 BA 是 $\angle C_1BC$ 的平分线.

由于 A 是 BA 与 PA 的交点，则 A 到 PC、PC_1 及 BC_1 的距离相等，从而 AC_1 是 $\angle PC_1D$ 的平分线. 从而

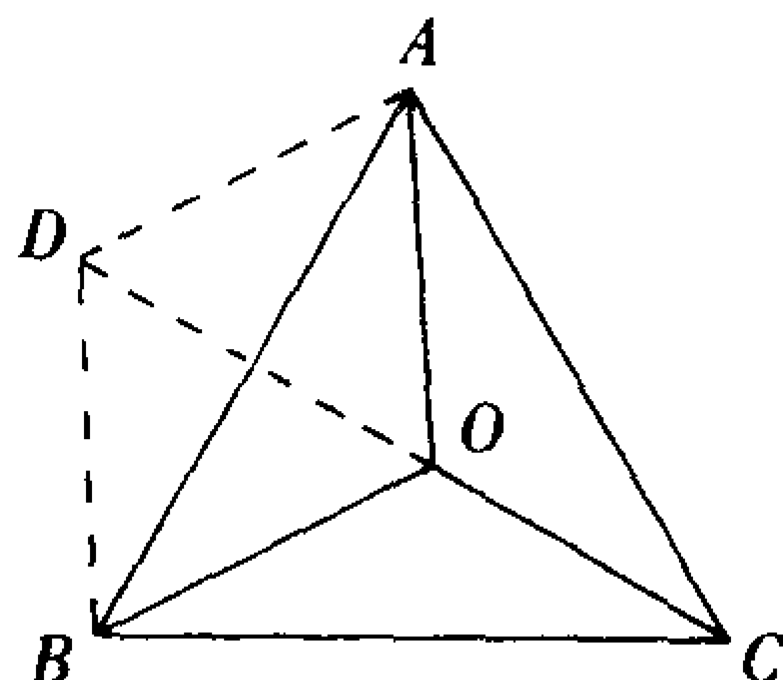
$$\angle ACB=\angle AC_1P=\frac{1}{2}\angle PC_1D$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ.$$

7·72 在正$\triangle ABC$内部有一点O,已知$\angle AOB=113^\circ$,$\angle BOC=123^\circ$.若一个三角形的边长等于OA、OB、OC,试求:这个三角形的各角度数.

(莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[解] 以AO为一边作等边$\triangle ADO$,连BD(如图).



$\because$ $AD=AO$, $AB=AC$,

$\angle DAB=60^\circ-\angle BAO=\angle OAC$,

$\therefore$ $\triangle ADB\cong\triangle AOC$, $DB=OC$.

又 $OD=OA$,

则 $\triangle ODB$的三边的长恰等于OA、OB、OC,

$\angle DOB=113^\circ-60^\circ=53^\circ$,

$\angle ODB=\angle ADB-\angle ADO=\angle AOC-60^\circ=124^\circ-60^\circ=64^\circ$,

$\angle OBD=180^\circ-53^\circ-64^\circ=63^\circ$.

7·73 在$\triangle ABC$的边BC与AC上各取一点D与E,使得$\angle BAD=50^\circ$,$\angle ABE=30^\circ$.设$\angle ABC=\angle ACB=50^\circ$.求:$\angle BED$的度数.

(英国数学奥林匹克,1970年)

[解] 设O为直线AD与BE的交点,则

$\angle AOB=180^\circ-30^\circ-50^\circ=100^\circ$,

$\angle BDA=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$,

$\angle CBE=50^\circ-30^\circ=20^\circ$,

$\angle AEB=\angle CBE+\angle ECB=70^\circ$.

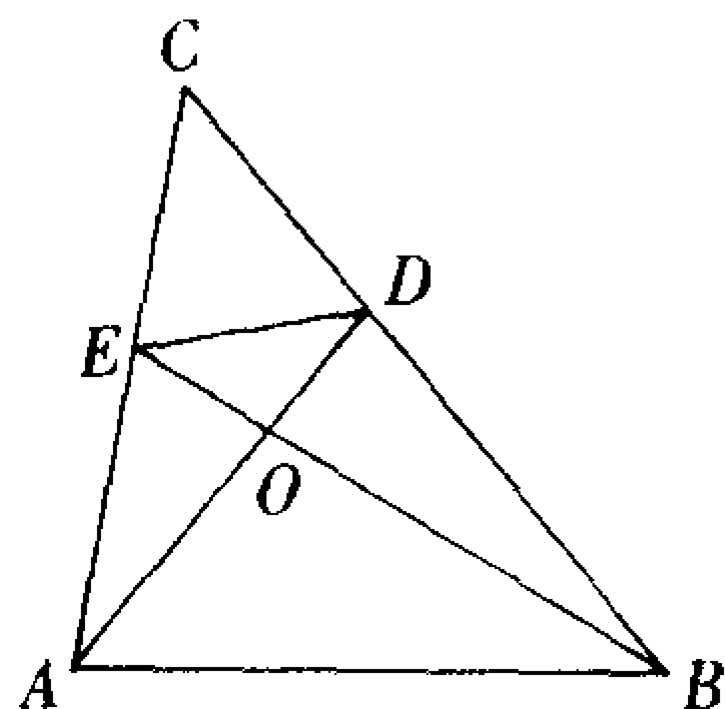
$\angle CAD=180^\circ-\angle ACB-\angle ABC-\angle BAD=30^\circ$.

由正弦定理得

$\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{\sin20^\circ}{\sin80^\circ}$, $\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{\sin50^\circ}{\sin30^\circ}$,

$\dfrac{OA}{OE}=\dfrac{\sin70^\circ}{\sin30^\circ}$.

$\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{OD}{OB}\cdot\dfrac{OB}{OA}\cdot\dfrac{OA}{OE}$



第七章 线段或角的计算

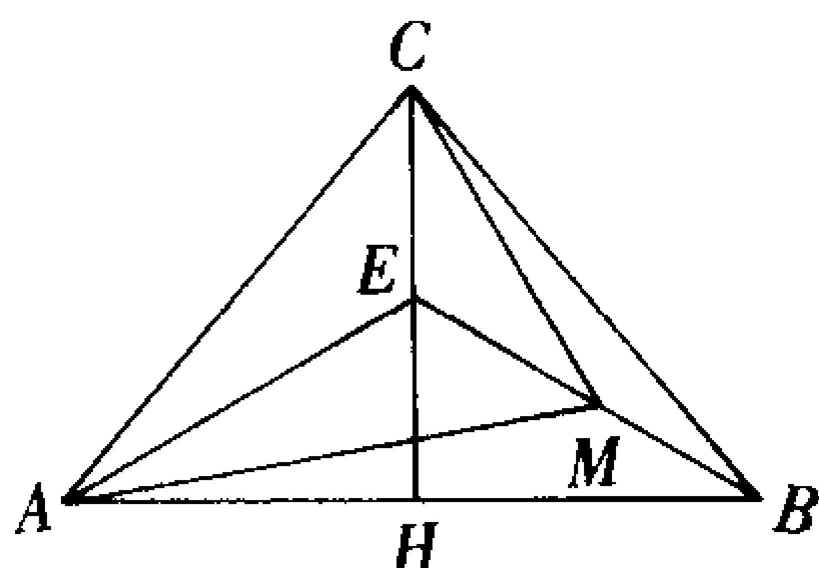
$$=\frac{\sin20^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ}{\sin80^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin30^\circ}$$
$$=\frac{4\sin20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos20^\circ}{\sin80^\circ}$$
$$=\frac{2\sin40^\circ\cdot\cos40^\circ}{\sin80^\circ}$$
$$=1.$$

即 $OD=OE$,

且 $\angle BED=\angle ODE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle EOD)=40^\circ$.

7·74 在$\triangle ABC$内取一点M,使得$\angle MBA=30^\circ$,$\angle MAB=10^\circ$.设$\angle ACB=80^\circ$,$AC=BC$,求:$\angle AMC$的度数.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1983年)



[解] 设$\triangle ABC$的高CH与直线BM交于点E,则$AE=BE$.

且 $\angle EAM=\angle EAB-\angle MAB=30^\circ-10^\circ=20^\circ$.

又 $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=40^\circ$.

又 $\angle EAC=\angle CAH-\angle EAB=(90^\circ-40^\circ)-30^\circ=20^\circ$.

且 $\angle AME=\angle MAB+\angle MBA=10^\circ+30^\circ=40^\circ$.

在$\triangle AME$和$\triangle ACE$中,由

$\angle ACE=\angle AME=40^\circ$, $\angle CAE=\angle MAE=20^\circ$, $AE=AE$

得 $\triangle AME\cong\triangle ACE$.

$\therefore$ $AM=AC$,

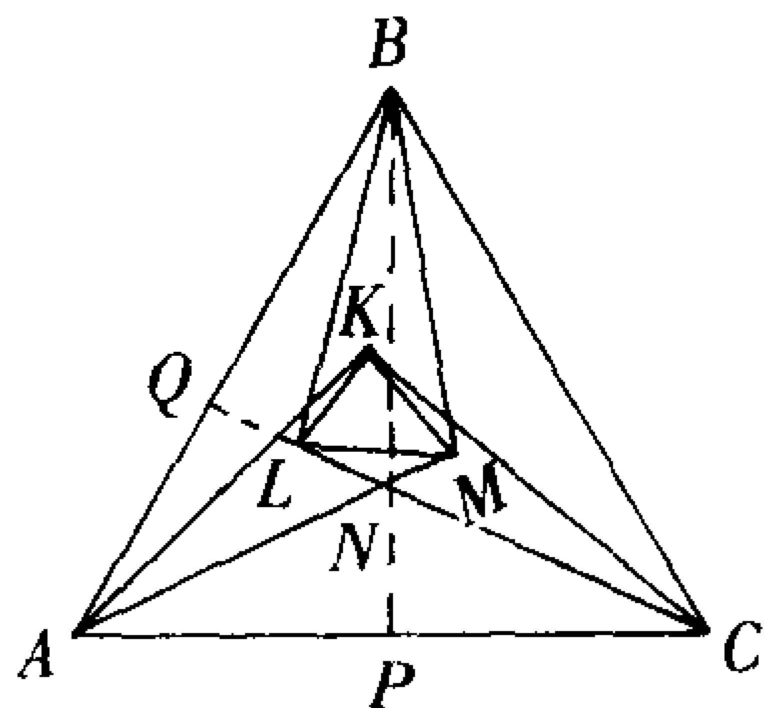
故 $\angle AMC=\angle ACM=\frac{180^\circ-\angle CAM}{2}=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$.

7·75 在等边$\triangle ABC$内取点K、L、M,使得$\angle KAB=\angle LBA=15^\circ$,$\angle MBC=\angle KCB=20^\circ$,$\angle LCA=\angle MAC=25^\circ$.求:$\triangle KLM$的三个内角值.

(第20届国际数学奥林匹克候选题,1979年)

[解] 记$\alpha=20^\circ$,$\beta=25^\circ$,$\gamma=15^\circ$.则

$\alpha,\beta,\gamma<30°,\alpha+\beta+\gamma=60°$.



$\angle KAM=60°-\angle MAC-\angle KAB=\alpha$,

同理　$\angle LBM=\beta$, $\angle KCL=\gamma$.

设线段 AM 与 CL 交于点 N，直线 BN 与边 AC 交于点 P，直线 CL 与边 AB 交于点 Q.

由于$\angle NAC=\angle NCA=\beta$，则 $AN=NC$，

又由于 $AB=BC$，则 PN 为$\angle ANC$ 的平分线，因此 PB 也是$\angle LNM$ 的平分线.

在$\angle LNM$ 内部且在$\triangle LMN$ 外面取一点 B'，使它与直线 LN、LM 与 MN 距离相等. 则点 B'一定在直线 NB 上，也在$\angle NLM$ 与$\angle LMN$ 的外角的平分线上. 因此

$$\begin{aligned}\angle LB'M&=180°-\angle B'LM-\angle B'ML\\&=180°-\frac{180°-\angle NLM}{2}-\frac{180°-\angle NML}{2}\\&=\frac{\angle NLM+\angle NML}{2}=\frac{180°-\angle LNM}{2}\\&=\frac{\angle NAC+\angle NCA}{2}=\beta=\angle LBM.\end{aligned}$$

因此 B'与 B 重合. 且

$$\begin{aligned}\angle BLM&=\angle BLQ=180°-\angle CQB-\angle ABL\\&=\angle ABC+\angle BCQ-\angle ABL\\&=60°+\alpha+\gamma-\gamma=60°+\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because\quad \angle BLC&=180°-\angle LBC-\angle LCB\\&=180°-(\beta+\alpha)-(\alpha+\gamma)\\&=120°-\alpha.\end{aligned}$$

注意到 $\alpha<30°$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle MLC&=\angle BLC-\angle BLM=120°-\alpha-(60°+\alpha)\\&=60°-2\alpha.\end{aligned}$$

则　$\angle KLB=60°-2\alpha$.

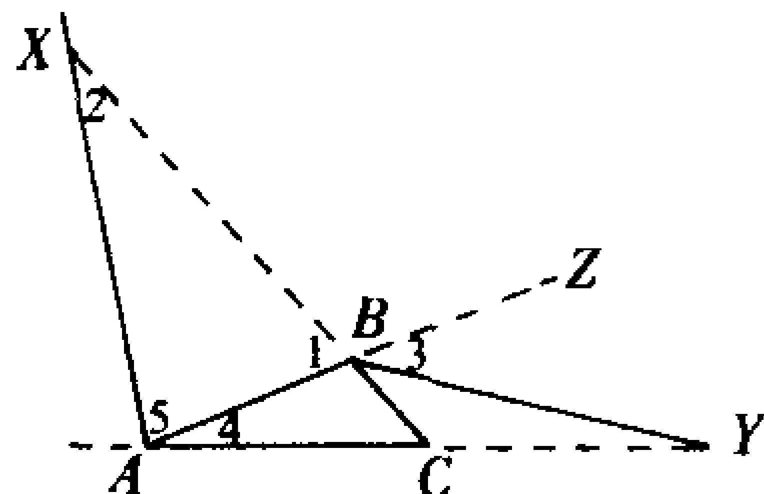
于是有　$\angle KLM=\angle BLC-\angle KLB-\angle MLC$
$$\begin{aligned}&=(120°-\alpha)-(60°-2\alpha)-(60°-2\alpha)\\&=3\alpha.\end{aligned}$$

即 $\angle KLM=3\alpha=60^\circ$.

同理 $\angle LKM=3\beta=75^\circ$, $\angle KML=3\gamma=45^\circ$.

7·76 设$\triangle ABC$中,$\angle A<\angle C<90^\circ<\angle B$,$\angle A$和$\angle B$的外角平分线(从顶角到对边延长线上)之长都等于$AB$.试求$\angle A$的度数.

(第26届美国普特南数学竞赛,1965年)



[解] 如图,设$\angle A$的外角平分线交直线CB于X,$\angle B$的外角平分线交直线AC于Y.由于$\angle B>\angle C$,$\angle A<\angle C$可知B在C和X之间,C在A和Y之间.

由BY是外角平分线可知 $\angle 1=2\angle 3$,
由 $AX=AB$, $BY=AB$ 可知

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=2\angle 4$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=4\angle 4$.

在$\triangle ABX$中,由 $\angle 5=\dfrac{180^\circ-\angle 4}{2}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle 4$ 及

$\angle 1+\angle 2+\angle 5=180^\circ$

可得 $90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle 4+8\angle 4=180^\circ$,

于是 $\angle 4=12^\circ$, 即 $\angle A$的度数为12°.

7·77 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线分别与边AC和AB相交于点D和E.如果$\angle BDE=24^\circ$,$\angle CED=18^\circ$,试求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

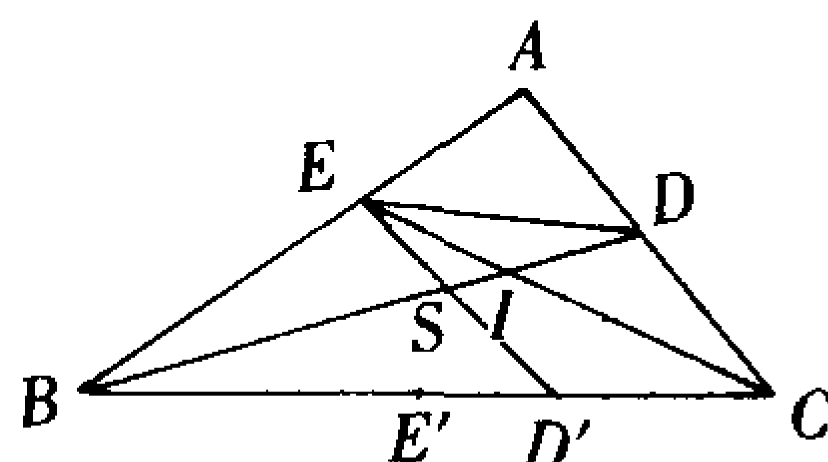
(第33届国际数学奥林匹克预选题,1992年)

[解] 设BD和CE的交点为I,

则 $\angle IBC+\angle ICB=\angle IDE+\angle IED=24^\circ+18^\circ=42^\circ$.

于是 $\angle B+\angle C=2\times 42^\circ=84^\circ$,

$\therefore$ $\angle A=180^\circ-84^\circ=96^\circ$.



在边BC上取两点D'、E',使它们分别是D、E关于角平分线CE和BD的对称点,设ED'与BD的交点为S,有

$\angle ESB=\angle SED+\angle SDE=18^\circ\times 2+24^\circ=60^\circ$.

$\angle E'SD' = 180^\circ - 2\angle ESB = 60^\circ = \angle ESB = \angle E'SB$.

又 $\angle E'DD' = \angle EDD' - \angle EDE' = (90^\circ - 18^\circ) - 24^\circ \times 2$

$= 24^\circ = \angle SDE'$.

因此,E'是$\triangle SDD'$的旁切圆的圆心,于是

$\angle DD'C = \angle SD'E'$.

$\therefore \quad \angle DD'C = \frac{1}{2}(\angle DD'C + \angle SD'E')$

$= \frac{1}{2}(\angle DED' + \angle EDD')$

$= 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$,

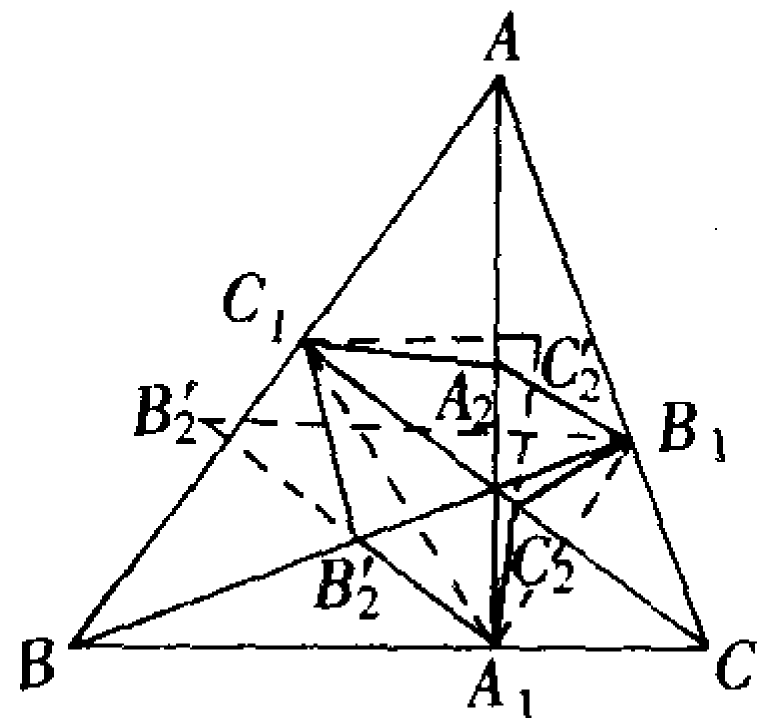
又 $\angle ACB = 180^\circ - 2\angle DD'C = 72^\circ$.

$\therefore \quad \angle ABC = 180^\circ - 96^\circ - 72^\circ = 12^\circ$.

7·78 锐角$\triangle ABC$的三条高AA_1、BB_1、CC_1的中点分别为A_2、B_2、C_2.试求$\angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 + \angle A_2C_1B_2$.

(第21届全俄数学奥林匹克,1996年)

[解] 先来求$\angle B_2A_1C_2$.



连A_1B_1、A_1C_1.延长A_1B_2至B_2',使$B_2B_2' = A_1B_2$,连B_1B_2'.延长A_1C_2至C_2',使$C_2C_2' = A_1C_2$,连C_1C_2'.易知

$\angle C_2'C_1A_1 = \angle C_1A_1B = \angle B_2'B_1A_1 = \angle B_1A_1C = \angle A$,

$B_1B_2' = A_1B$, $\quad C_1C_2' = A_1C$.

$\because \quad \triangle BA_1C_1 \backsim \triangle B_1A_1C$,

有 $\frac{BA_1}{C_1A_1} = \frac{B_1A_1}{CA_1}$,

$\therefore \quad \frac{C_1C_2'}{C_1A_1} = \frac{B_1A_1}{B_1B_2'}$, 故 $\triangle C_1AC_2' \backsim \triangle B_1B_2'A_1$.

有 $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2A_1B_1 + \angle C_2A_1C_1 - \angle B_1A_1C_1$

$= \angle B_2A_1B_1 + \angle A_1B_2'B_1 - (180^\circ - 2\angle A)$

$= (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - 2\angle A)$

$= \angle A$.

同理 $\angle C_2B_1A_2 = \angle B$, $\quad \angle A_2C_1B_2 = \angle C$.

$\therefore\quad \angle B_2A_1C_2+\angle C_2B_1A_2+\angle A_2C_1B_2=180^\circ.$

7·79　若三角形两角之和为 n°，且最大角比最小角大 24°，求：n 的范围.

（中国北京市数学竞赛，1981 年）

［解］　设三角形三内角分别为 α、β、γ，且　$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$．又　$\alpha-\gamma=24$.

(1)若 $\beta+\gamma=n$，　则　$\alpha=180-n$，

从而　$\gamma=156-n$，　$\beta=n-\gamma=2n-156$.

则　$180-n\geqslant 2n-156\geqslant 156-n$

$\therefore\quad 104\leqslant n\leqslant 112$.

(2)若 $\alpha+\gamma=n$，　则　$\beta=180-n$，　从而　$\alpha+\gamma=n$.

解得　$\alpha=\dfrac{n+24}{2}$，　$\gamma=\dfrac{n-24}{2}$.

则　$\dfrac{n-24}{2}\leqslant 180-n\leqslant\dfrac{n+24}{2}$.

$\therefore\quad 112\leqslant n\leqslant 128$.

(3)若　$\alpha+\beta=n$，　则　$\gamma=180-n$，

从而　$\alpha=204-n$，$\beta=n-\alpha=2n-204$.

则　$108-n\leqslant 2n-204\leqslant 204-n$，

$\therefore\quad 128\leqslant n\leqslant 136$.

综上　　$104\leqslant n\leqslant 136$.

7·80　已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的高，$BC+AD-AB-AC=0$. 求：$\angle BAC$ 的取值范围.

（中国国家集训队选拔考试，1989 年）

［解 1］　设 $AB=x+y$，$BC=y+z$，$CA=z+x$，于是 $AD=AB+AC-BC=2x$. 由三角形面积公式有

$$x(y+z)=\frac{1}{2}BC\cdot AD=S_{\triangle ABC}=\sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

解得　$x=\dfrac{(y+z)yz}{y^2+z^2+yz}$.　　①

设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，则 $\angle IAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，内切圆半径

$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{x+y+z}.\qquad ②$$

由①和②便有

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)=\frac{r}{x}=\frac{S_{\triangle ABC}}{x(x+y+z)}=\sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{(y+z)\left(\frac{yz}{y^2+z^2+yz}+1\right)\frac{(y+z)yz}{y^2+z^2+yz}}}$$

$$=\frac{y^2+z^2+yz}{(y+z)^2}=1-\frac{yz}{(y+z)^2}. \quad ③$$

因为 $yz\leqslant\frac{1}{4}(y+z)^2$，其中等号当且仅当 $y=z$ 时成立，

又因 $\frac{yz}{(y+z)^2}>0$ 且当 y 固定而 $z\to 0$ 时，$\frac{yz}{(y+z)^2}\longrightarrow 0$，

所以 $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)$的取值范围为$\left[\frac{3}{4},1\right)$.

故知$\frac{1}{2}\angle BAC$ 的取值范围为$\left[\operatorname{arctg}\frac{3}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

所以$\angle BAC$ 的取值范围为$\left[2\operatorname{arctg}\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

[解 2] 取以 BC 为 x 轴，BC 中点 O 为原点，$OC=1$ 的直角坐标系. 设 $AB+AC=2a$ 为定值，于是有

$$2<BC+AD\leqslant 2+\sqrt{a^2-1}.$$

若存在$\triangle ABC$ 使 $AB+AC=BC+AD$，则必有

$$2<2a\leqslant 2+\sqrt{a^2-1}.$$

解得 $1<a\leqslant\frac{5}{3}$.

另一方面，$AD=AB+AC-BC=2(a-1)$.

又因 点 A 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ 上，故有

$$x^2=a^2\left(1-\frac{(2a-2)^2}{a^2-1}\right),$$

$$x=a\sqrt{1-\frac{4(a-1)}{a+1}}.$$

由此及三角公式可得

$$\text{tg}\angle BAC=\text{tg}(\angle BAD+\angle DAC)=\frac{\text{tg}\angle BAD+\text{tg}\angle DAC}{1-\text{tg}\angle BAD\text{tg}\angle DAC}$$

$$=\frac{\dfrac{1+x}{AD}+\dfrac{1-x}{AD}}{1-\dfrac{1+x}{AD}\,\dfrac{1-x}{AD}}=\frac{2AD}{AD^2-(1-x^2)}$$

$$=\frac{4(a-1)}{4(a-1)^2-1+a^2\left(1-\dfrac{4(a-1)}{a+1}\right)}$$

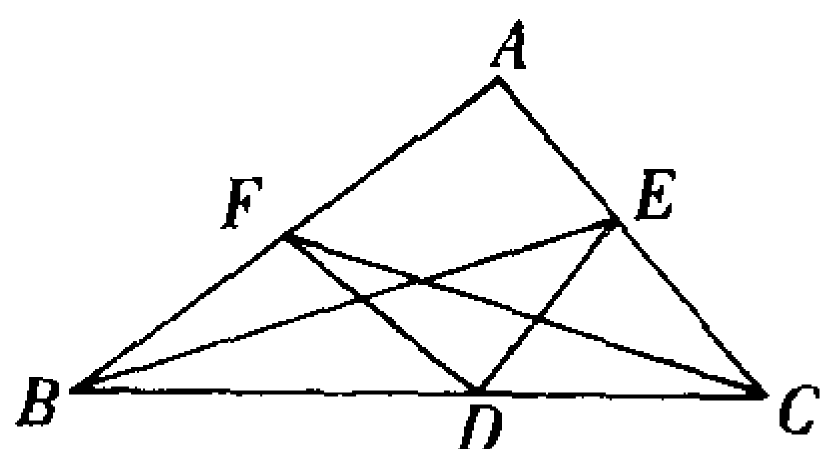
$$=\frac{4(a+1)}{(a+3)(a-1)}.$$

当 $a\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$ 时，$\text{arctg}\dfrac{24}{7}\leqslant\angle BAC<\dfrac{\pi}{2}$，

且充满这一区间，故知$\angle BAC$的取值范围为$\left[\text{arctg}\dfrac{24}{7},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7·81 AD、BE与CF为$\triangle ABC$的内角平分线，D、E、F在边上，如果$\angle EDF=90^\circ$，求：$\angle BAC$的所有可能的值.

（第16届美国数学奥林匹克，1987年）



［证1］ 如图，设$\angle EDA=\alpha$，$\angle ADF=\beta$，$\angle CDE=\gamma$，$\angle BDF=\delta$，$\angle AED=\theta$，则

$$\alpha+\beta=90^\circ,\quad \gamma+\delta=90^\circ.$$

在$\triangle AED$和$\triangle CDE$中，由正弦定理得

$$\frac{AE}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$\frac{EC}{CD}=\frac{\sin\gamma}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\gamma}{\sin\theta}.$$

$$\therefore\ \frac{AE}{EC}=\frac{AD\cdot\sin\alpha}{CD\cdot\sin\gamma}.$$

又 BE为$\angle ABC$的平分线，

$\therefore\ \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}$. 于是可得 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD\cdot\sin\alpha}{CD\cdot\sin\gamma}$，

同理可得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD\cdot\sin\beta}{BD\cdot\sin\delta}=\frac{AD\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}{BD\cdot\sin(90^\circ-\gamma)}=\frac{AD\cdot\cos\alpha}{BD\cdot\cos\gamma}.$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AC}=\frac{BD\cdot\sin\alpha\cos\gamma}{CD\cdot\sin\gamma\cos\alpha}.\qquad ①$$

又∵ AD 为$\angle BAC$的平分线， ∴ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$， ②

比较①,②式得 $\sin\alpha\cos\gamma=\cos\alpha\sin\gamma$，

即 $\sin(\alpha-\gamma)=0$,有 $\alpha=\gamma$.

从而可得 DE 是$\angle ADC$的平分线．则有 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DC}$，

又由正弦定理 $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}$，

$$\because\quad \frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC},\quad \therefore\quad \frac{AB}{BC}=\frac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

$$又\because\quad \frac{AB}{BC}=\frac{\sin C}{\sin A},\quad \therefore\quad \frac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}}=\frac{\sin C}{\sin A}.$$

于是 $\sin\dfrac{A}{2}=\sin A$， $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，

于是 $A=120^\circ$,即$\angle BAC$的所有可能的值只有 120°.

[证 2] 由塞瓦定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1.\quad \therefore\quad \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{AD}.$$

由正弦定理有

$$\frac{AF}{AD}=\frac{\sin\beta}{\sin\angle AFD},\quad \frac{BF}{BD}=\frac{\sin\delta}{\sin\angle BFD},$$

$$\frac{CE}{CD}=\frac{\sin\gamma}{\sin\angle CED},\quad \frac{AE}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\angle AED}.$$

$$\therefore\quad \frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{\sin\beta}{\sin\delta},\quad \frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

$\because\quad \alpha+\beta=90^\circ,\quad \gamma+\delta=90^\circ$,

$$\therefore\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.\quad \therefore\quad \mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha.$$

∴ $\alpha=\gamma$,即 DE 平分$\angle ADC$.

∴ 点 E 为$\triangle ABD$的旁心.

∴ AE 为$\triangle ABD$ 的$\angle BAD$ 的外角平分线.

∴ $\angle BAD=\angle DAC=180°-\angle BAC=60°$.

∴ $\angle BAC=120°$, 即 $\angle BAC$ 只能取惟一的值是 $120°$.

7·82 设$\triangle ABC$ 的三内角 A、B、C 成等差数列,三条边长 a、b、c 之倒数也成等差数列,试求 A、B、C 的度数.

(中国高中数学联赛,1979 年)

[解] 设等差数列 A、B、C 的公差为d,

则 $A=B+d$, $C=B+d$.

∵ $\pi=A+B+C=(B-d)+B+(B+d)=3B$ ∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

又∵ $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列, ∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$,

即 $bc+ba=2ac$.

再应用正弦定理,得 $\sin B\sin C+\sin B\sin A=2\sin A\sin C$.

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\right]$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right)$

或 $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos d=\cos 2d-\cos\frac{2}{3}\pi$

∴ $4\cos^2 d-3\cos d-1=0$

解得 $\cos d=1$ 或 $-\frac{1}{4}$.

∵ $d<\frac{\pi}{2}$, ∴ $\cos d\neq-\frac{1}{4}$,

由 $\cos d=1$, ∴ $d=0$, 故 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

7·83 三角形的边长构成公差为 d 的等差数列,三角形的面积等于 S.求三角形的边长和角.再对 $d=1,S=6$ 这个特殊情况,求解本题.

(匈牙利数学奥林匹克,1894 年)

[解] 设三角形的三边长为

$$a=b-d,\ b,\ c=b+d,\ 0\leqslant d<b.$$

并设三角形的半周长为 p,则

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}b.$$

$$p-a=\frac{b}{2}+d,\quad p-b=\frac{b}{2},\quad p-c=\frac{b}{2}-d.$$

由海伦公式得

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4}-d^2\right).$$

把它看作是关于 b^2 的二次方程,解得

$$b^2=2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right).$$

即 $b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)}$.

由于 $0\leqslant d<b$, 则 a 和 b 所对的角 A 和 B 一定是钝角,

由 $S=\frac{bc\sin A}{2}$, $S=\frac{ac\sin B}{2}$

得 $\sin A=\frac{2S}{bc}$, $\sin B=\frac{2S}{ac}$.

于是三角形的边和角为

$$b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)},\quad a=b-d,\quad c=b+d.$$

$$A=\arcsin\frac{2S}{bc},\quad B=\arcsin\frac{2S}{ac},\quad C=\pi-(A+B).$$

当 $d=1$, $S=6$ 时,代入上式得

$$b=4,\quad a=3,\quad c=5.$$

$$A=\arcsin\frac{3}{5},\quad B=\arcsin\frac{4}{5},\quad C=90^\circ.$$

7·84 在一个非钝角$\triangle ABC$中,$AB>AC$,$\angle B=45^\circ$,O 和 I 分别是$\triangle ABC$的外心和内心,且$\sqrt{2}\ OI=AB-AC$.求:$\sin A$.

(中国数学奥林匹克,1998 年)

[解 1] 由已知条件及 Euler 公式得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2=OI^2=R^2-2Rr. \qquad ①$$

再由熟知的几何关系得

$$r=\frac{c+a-b}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{c+a-b}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b).\qquad ②$$

由①和②及正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin B}=\frac{a}{\sin C}=2R$ 得

$$1-2(\sin C-\sin B)^2=2(\sin A+\sin C-\sin B)(\sqrt{2}-1).$$

$\because\ \angle B=\frac{\pi}{4},\ \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sin C=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\angle A\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A+\cos A).$$

$\therefore\ 2\sin A\cos A-(2-\sqrt{2})\sin A-\sqrt{2}\cos A+\sqrt{2}-1=0$,

$$(\sqrt{2}\sin A-1)(\sqrt{2}\cos A-\sqrt{2}+1)=0.$$

于是 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 对于后者,这时

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}.$$

总之,或 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

(严格地说,还应验证这两个值都满足条件.)

[解2] 过点 I 作 $H_C\perp AB, H_B\perp AC, H_A\perp BC, OD\perp BC$,其中 I_C、I_B、I_A,D 均为垂足,D 为 BC 中点.

则由题设得

$$\sqrt{2}\ OI=AB-AC=(AI_C+I_CB)-(AI_B+I_BC)$$

$$=I_CB-I_BC=I_AB-I_AC$$

(由 $AB>AC$ 知 $I_AB>I_AC$,且点 D 在线段 I_AB 上).

又$\because\ I_AB=\frac{1}{2}BC+I_AD,\quad I_AC=\frac{1}{2}BC-I_AD$,

$\therefore\ \sqrt{2}\ OI=2I_AD$, 即 $OI=\sqrt{2}I_AD$. ①

由①知,OI 与 BC 的夹角必为$\frac{\pi}{4}$,又因 $\angle B=\frac{\pi}{4}$,

所以,或 $OI\perp AB$,或 $OI/\!/AB$.

下面来分别讨论之.

(1)当 $OI \perp AB$ 时,点 I_C 恰为 AB 边的中点,这时 $AI_C = BI_C$,

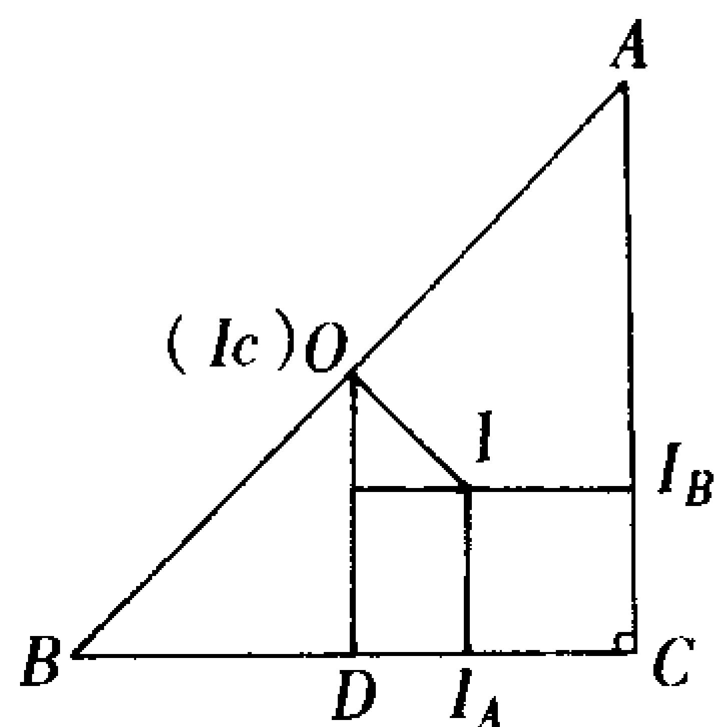


图 1

即 $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

$= \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$.

于是 $AC = BC$.

从而 $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{\pi}{2}$,

点 O 与 I_C 重合,如图 1.

(2)当 $OI // AB$ 时,点 O 到 AB 的距离恰好等于$\triangle ABC$ 的内切圆的半径 r,

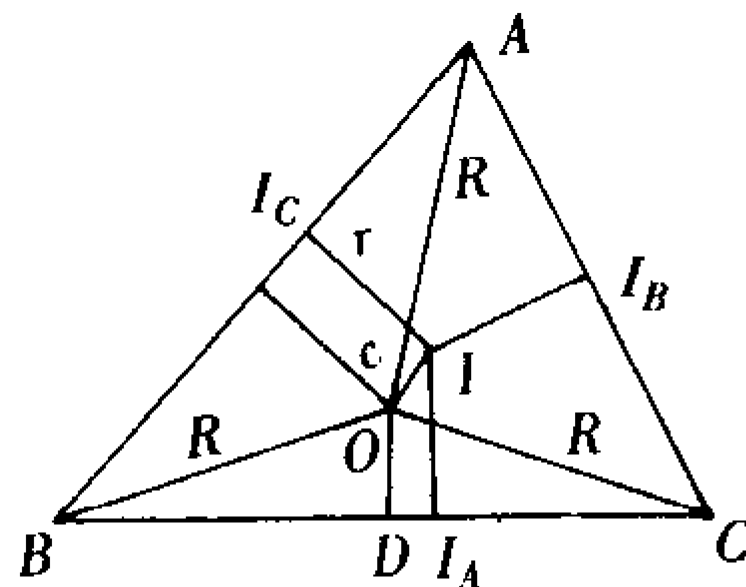


图 2

即 $R\cos C = r = 4R\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

所以,

$$
\begin{aligned}
\cos C &= 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
&= 2\sin \frac{\pi}{8}\left(2\sin \frac{A}{2}\ \sin \frac{C}{2}\right) \\
&= 2\sin \frac{\pi}{8}\left(-\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2}\right) \\
&= 2\sin \frac{\pi}{8}\left(-\sin \frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \angle C\right)\right) \\
&= \cos \frac{\pi}{4} - 1 + 2\sin \frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \angle C\right) \\
&= \cos \frac{\pi}{4} - 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) + \sin\left(\angle C - \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

两边消去 $\cos C$,得 $\sin\left(\angle C - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \quad 0 < \angle C - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ (因为$\angle B = \frac{\pi}{4}$),

$\therefore \quad \angle C - \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

即 $\angle C=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

又 $\angle A=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

于是 $\sin A=\cos\left[\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, 如图 2.

总之，或 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

7·85 若直角△ABC 的两个锐角 A、B 的正弦是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.(1)求实数 p、q 应满足的条件;(2)若 p、q 满足上述条件,方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是否等于某直角三角形两锐角的正弦值?

(中国江苏省数学竞赛,1996 年)

[解] (1)设 A、B 为某直角三角形两个锐角. $\sin A$、$\sin B$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根,则有

$\Delta=p^2-4q\geqslant 0$. ①

$\sin A+\sin B=-p$, $\sin A\sin B=q$.

∵ $\sin A>0$, $\sin B>0$, ∴ $p<0$, $q>0$.

∵ $\sin B=\cos A$, ∴ $\sin A+\cos A=-p$, $\sin A\cos A=q$.

∴ $p^2=(-p)^2=(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A=1+2q$,

即 $p^2-2q=1$.

由①有 $1-2q=p^2-4q\geqslant 0$, 则 $q\leqslant\frac{1}{2}$.

故所求条件是 $p<0$, $0<q\leqslant\frac{1}{2}$, $p^2-2q=1$. ②

(2)设条件②成立,则 $p^2-4q=1-2p\geqslant 0$,故方程有两个实根

$$\alpha=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p-\sqrt{1-2q}}{2},$$

$$\beta=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p+\sqrt{1-2q}}{2}.$$

由②有　$-p=\sqrt{1+2q}$，

∵　$-\sqrt{1-2q}\leqslant\sqrt{1-2q}<\sqrt{1+2q}=-p$，

∴　$0<-p-\sqrt{1-2q}\leqslant-p+\sqrt{1-2q}$，　③

∴　$\beta\geqslant\alpha>0$.

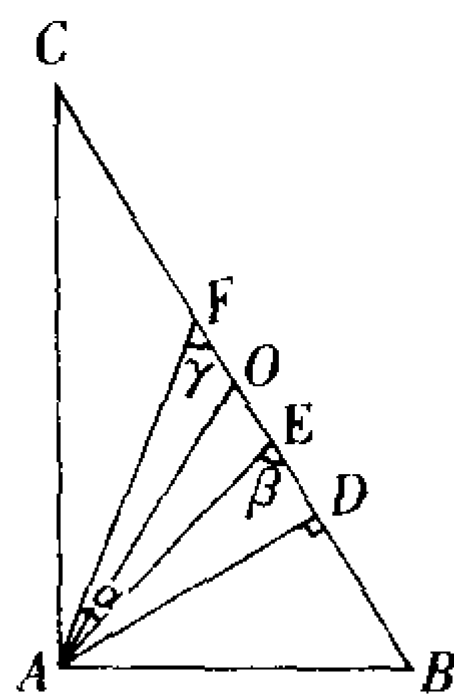
又∵　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q=1$，

∴　$0<\alpha\leqslant\beta<1$.　∴　α、β为直角三角形两个锐角的正弦.

7·86　已知：直角△ABC，将斜边 BC n 等分，n 是奇数，从顶点 A 向含有斜边中点的等分线段的两端引射线，所成的角为 α，斜边为 a，斜边上的高为 h，求证：$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{4nh}{(n^2-1)a}$.

（第 2 届国际数学奥林匹克，1960 年）

[证 1]　设 EF 为斜边 BC 上包含中点 O 的一个等分线段.



作 $AD\perp BC$ 于 D. 连 AE、AO、AF.

则 $AO=\dfrac{1}{2}a$，　$EF=\dfrac{a}{n}$，　$\angle EAF=\alpha$，

$AD=h$.

设　$\angle AEB=\beta$，　$\angle AFB=\gamma$.　则　$\alpha=\beta-\gamma$，所以

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(\beta-\gamma)=\frac{\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\gamma}{1+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}.\quad①$$

下面用 a、h、n 表示 $\mathrm{tg}\beta$，$\mathrm{tg}\gamma$.

在 Rt△AOD 中，

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\frac{\sqrt{a^2-4h^2}}{2}.$$

又因为 n 是奇数，则 O 是 EF 的中点，所以

$$OE=\frac{EF}{2}=\frac{a}{2n},$$

$$DE=OD-OE=\frac{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}{2n}.$$

$$DF=OD+OF=\frac{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}{2}.$$

在 Rt△ADE 中，

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{AD}{DE}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a},\tag{②}$$

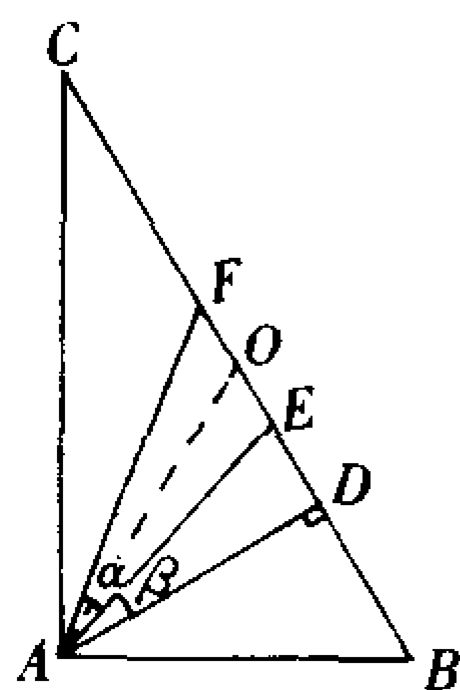
在 Rt△ADF 中,

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{AD}{DF}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}.\tag{③}$$

将②、③代入①得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}-\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}}{1+\dfrac{2nh\cdot 2nh}{(n\sqrt{a^2-4h^2}-a)(n\sqrt{a^2-4h^2}+a)}}$$

$$=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$



［证 2］ 设 EF 为斜边 BC 上包含中点 O 的一个等分线段,AD 为 BC 上的高,则

$$AD=h,\ EF=\frac{a}{n},\ \angle EAF=\alpha,\ AD=\frac{1}{2}a.$$

设 $\angle DAE=\beta$, $DE=x$. 于是 $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{x}{h}$.

又 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{DF}{AD}=\dfrac{DE+EF}{AD}$

$$=\frac{x+\dfrac{a}{n}}{h}=\frac{nx+a}{nh}.$$

另一方面 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{x}{h}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{x}{h}}=\dfrac{h\operatorname{tg}\alpha+x}{h-x\operatorname{tg}\alpha}$.

$\therefore\ \dfrac{h\operatorname{tg}\alpha+x}{h-x\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{nx+a}{nh}$.

解得 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{ah}{nh^2+ax+nx^2}$.

由射影定理 $AD^2=BD\cdot DC$,

即 $h^2=(BE-x)(CE+x)$

$$=\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n}-x\right)\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{a}{n}+x\right)$$

$$=\frac{(n^2-1)}{4n^2}a^2-\frac{ax+nx^2}{n}.$$

于是可得 $ax+nx^2=\frac{(n^2-1)}{4n}a^2-nh^2.$

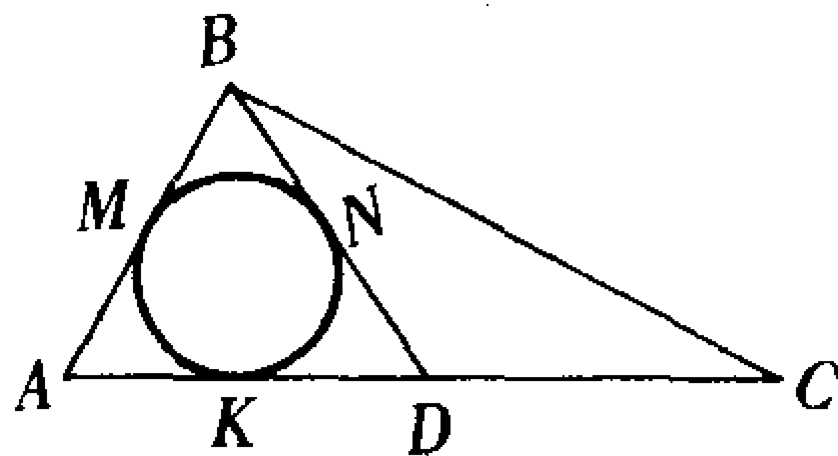
即 $nh^2+ax+nx^2=\frac{n^2-1}{4n}a^2.$

从而有 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{ah}{\frac{n^2-1}{4n}a^2}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$

7·87 过直角△ABC 的直角顶点 B 作中线 BD. 设 K 是三角形 ABD 的边 AD 与其内切圆的切点. 如果已知点 K 把线段 AD 分成两个相等的部分,求:△ABC 的各个角.

(第 18 届莫斯科数学奥林匹克,1955 年;基辅数学奥林匹克,1961 年)

[解] 设△ABD 的内切圆分别切 AB、BD、AD 于 M、N、K. 如图.



$\because$ $AB=AM+MB=AK+BN$

$=KD+BN.$

$=DN+BN=BD$

$=\frac{1}{2}AC=AD,$

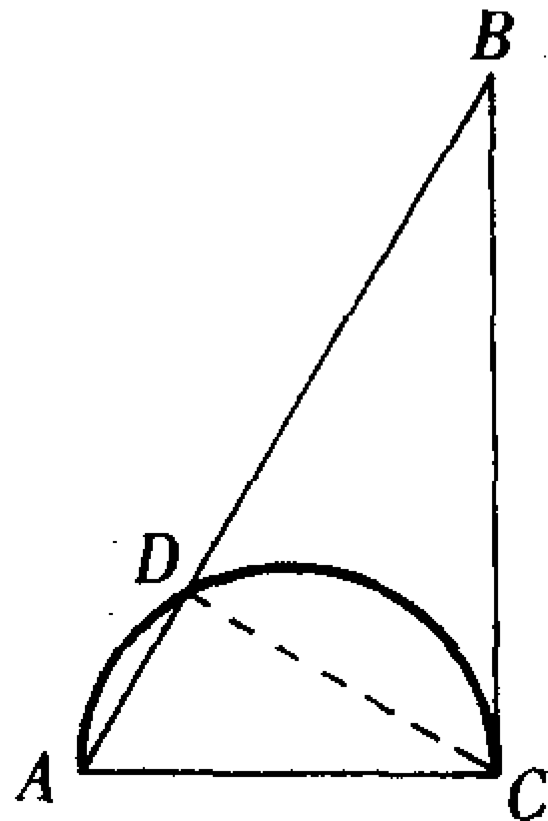
$\therefore$ △ABD 是等边三角形.

$\angle A=60^\circ$, $\angle C=30^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$.

7·88 以直角三角形的一条直角边为直径的圆将斜边分成 1:3,求:这三角形的内角度数.

(基辅数学奥林匹克,1962 年)

[解] 在△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,以 AC 为直径作圆交 AB 于点 D(如图).



则 $\angle ADC=90^\circ$.

$\because$ $AD:DB=1:3$,

$\therefore$ 可设 $AD=x$, $DB=3x$,

由 $AC^2=AD\cdot AB=4x^2$,

有 $AC=2x$.

$\therefore \quad \angle ACD=30^\circ=\angle B,\ \angle A=60^\circ$.

7·89 以线段 AB 为直径作一个半圆,圆心为 O,C 是半圆周上的点,且 $OC^2=AC\cdot BC$,求:$\angle CAB$ 的度数.

(中国初中数学联赛,1995 年)

[解] 作 $CD\perp AB$,垂足为 D. 由条件

$$AC\cdot BC=OC^2=\frac{1}{4}AB^2,$$

另一方面,由面积公式,

$$AC\cdot BC=CD\cdot AB,$$

因此 $CD\cdot AB=\frac{1}{4}AB^2$. 即 $CD=\frac{1}{4}AB$,

从而 $CD=\frac{1}{2}OC$.

不防设 D 在线段 AO 上,则 $\angle COD=30^\circ$.

因$\triangle COB$ 是等腰三角形且$\angle COD$ 是它的一个外角,

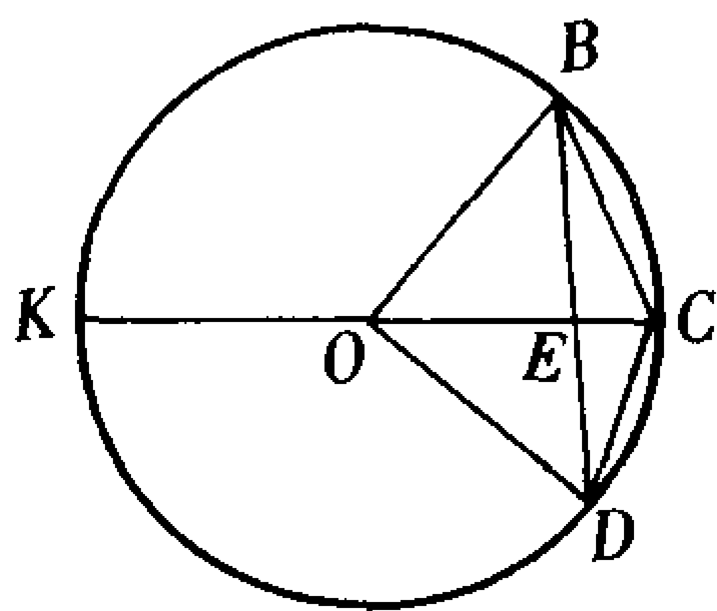
故 $\angle CBA=15^\circ$, 从而 $\angle CAB=75^\circ$.

如果 D 在线段 OB 上,则根据同样的讨论得$\angle CAB=15^\circ$.

故 $\angle CAB=75^\circ$或 15°.

7·90 在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAC=50^\circ$,$\angle CAD=40^\circ$,$\angle CBD=20^\circ$,$\angle BDC=25^\circ$,试求:两条对角线所夹的锐角的度数.

(前苏联教委推荐试题,1988 年)



[解 1] 考察$\triangle BCD$ 的外接圆,O 为圆心. 于是有

$$\angle BOC=2\angle BDC=50^\circ=\angle BAC,$$

$$\angle COD=2\angle CBD=40^\circ=\angle CAD.$$

下面来证明点 O 与 A 重合.

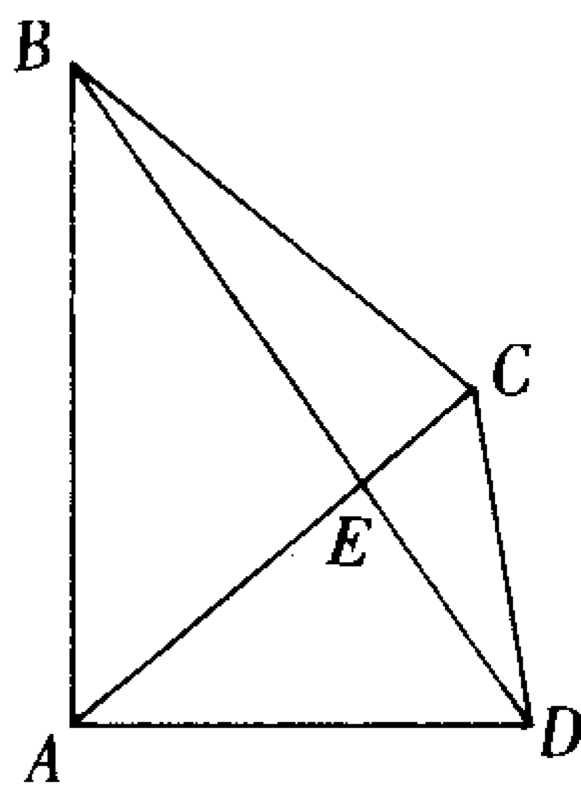
众所周知,以给定的线段为底边,以给定的角度 α 为顶角的三角形的顶点的轨迹是两段圆弧,二者关于底边所在的直线对称. 由于点 A 和 O 都在$\angle BCD$ 的内部,所以我们在以 BC(CD)为底边所张成的两段弧中选出位于$\angle BCD$ 之内部的那一段. 所选的两段弧至多有两个交点,其中之一是点 C,于是另一个就既是 A 又是O,所以点 O 与A 重合.

设 E 是对角线的交点，K 是线段 CO 的延长线与⊙O 的交点. 于是

$$\angle KCD=\frac{1}{2}\angle KOD=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ.$$

$$\begin{aligned}\angle CED&=180^\circ-\angle CDE-\angle ECD\\&=180^\circ-25^\circ-70^\circ=85^\circ.\end{aligned}$$

[解 2]　证对角线交点为 E.



$\because$　$\angle CBD=20^\circ,\angle BDC=25^\circ$,

$\therefore$　$\angle BCD=180^\circ-20^\circ-25^\circ=135^\circ$.

$\therefore$　$\angle ABC+\angle ADC=360^\circ-90^\circ-135^\circ$

$=135^\circ$.

以下简记　$\angle B=\angle ABC$，$\angle D=\angle ADC$.

由正弦定理有

$BC:AC=\sin50^\circ:\sin B$,

$CD:AC=\sin40^\circ:\sin D$.

$\therefore$　$BC=\dfrac{AC\cdot\sin50^\circ}{\sin B}$，$CD=\dfrac{AC\cdot\sin40^\circ}{\sin D}$.

由此及正弦定理又有

$$\frac{\sin50^\circ\cdot\sin D}{\sin B\cdot\sin40^\circ}=\frac{BC}{DC}=\frac{\sin25^\circ}{\sin20^\circ}.$$

化简依次得到

$$\begin{aligned}\sin D\sin65^\circ=\sin B\sin70^\circ&=\sin(135^\circ-D)\sin70^\circ\\&=\sin135^\circ\cos D\sin70^\circ-\cos135^\circ\sin D\sin70^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin70^\circ\cos D+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin70^\circ\sin D.\end{aligned}$$

$\because$　$\sin65^\circ=\sin(45^\circ+20^\circ)=\sin45^\circ\cos20^\circ+\cos45^\circ\sin20^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin70^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos70^\circ.$$

将此代入上式，得到

$$\sin D\cos70^\circ=\sin70^\circ\cos D,\ \mathrm{tg}D=\mathrm{tg}70^\circ.$$

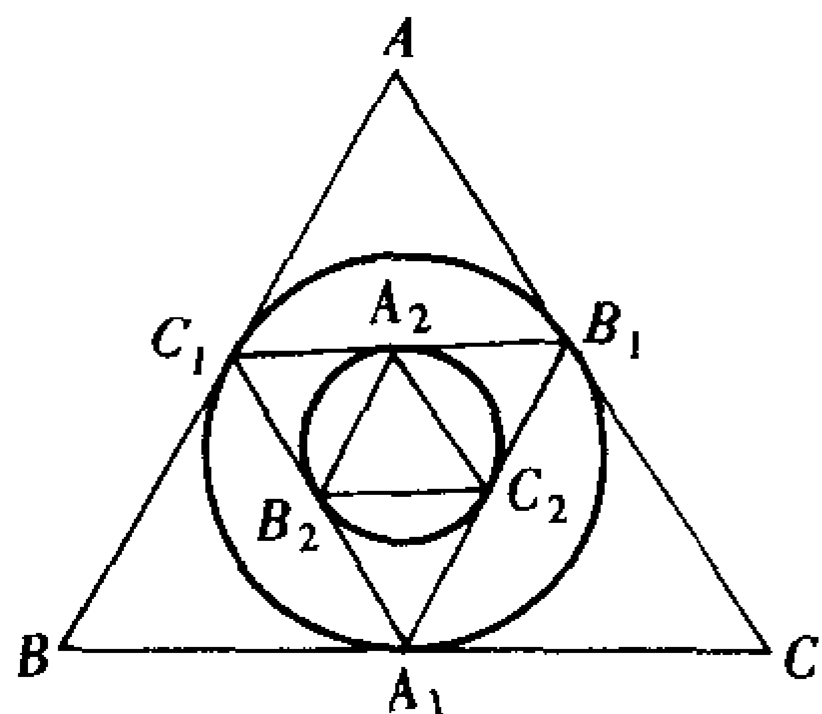
$\therefore$　$D=70^\circ$.

$\therefore$　$\angle ACD=180^\circ-40^\circ-70^\circ=70^\circ$.

$\therefore$　$\angle CED=180^\circ-70^\circ-25^\circ=85^\circ$.

7·91 作三角形的内切圆，以三边上的切点作为第二个三角形的顶点．再作第二个三角形的内切圆，再以它三边上的切点作为第三个三角形的顶点．现在第三个三角形的各内角分别与第一个三角形的相等．试求：这些内角的度数．

（莫斯科数学奥林匹克，1957 年）



［解］ 作$\triangle ABC$的内切圆，设切点分别为 A_1、B_1、C_1．再作$\triangle A_1B_1C_1$的内切圆，设切点分别为 A_2、B_2、C_2．如图．

设 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$，

则 $\angle A_1=\angle AB_1C_1 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{B_1C_1}$.

但 $\angle AB_1C_1=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$,

$\therefore\ \angle A_1=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$.

同理 $\angle B_1=90^\circ-\frac{1}{2}\beta$，$\angle C_1=90^\circ-\frac{1}{2}\gamma$.

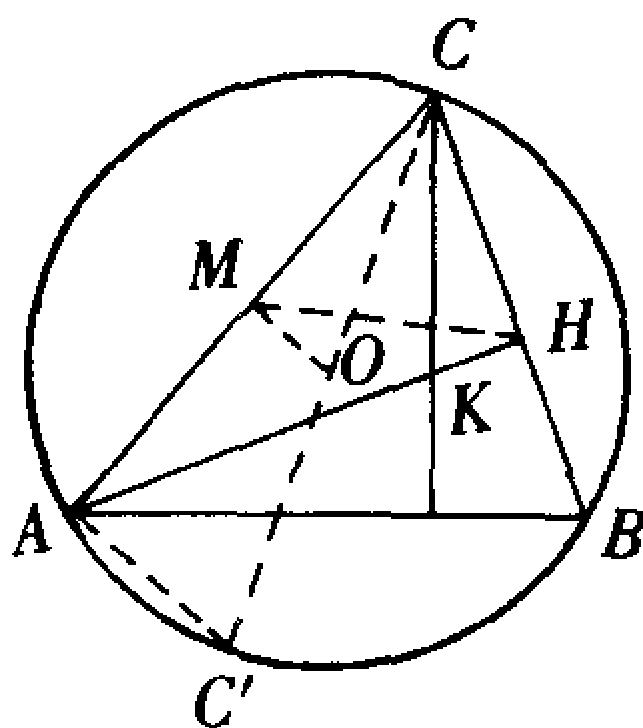
$$\angle A_2=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A_1=90^\circ-\frac{1}{2}\left(90^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)=45^\circ+\frac{1}{4}\alpha.$$

但已知 $\angle A=\angle A_2$，即 $\alpha=45^\circ+\frac{1}{4}\alpha$，

$\therefore\ \alpha=60^\circ$.

同理可求得 $\beta=\gamma=60^\circ$.

故 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$.



7·92 设$\triangle ABC$的顶点C到垂心的距离等于外接圆的半径，求：$\angle C$.

（基辅数学奥林匹克，1970 年）

［解］ 设$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，K是垂心．CC'为$\odot O$的直径（如图）．

$\because\ \angle ABC=\angle AC'C$,

$\therefore\ \angle KCB=\angle ACC'$.

设 AH 是 BC 边上的高，M 是 AC 的中点．

则

$$MH = MC,\ CK = CO.$$

∴ $Rt\triangle CMO \cong Rt\triangle CHK$,

有 $MC = CH$.

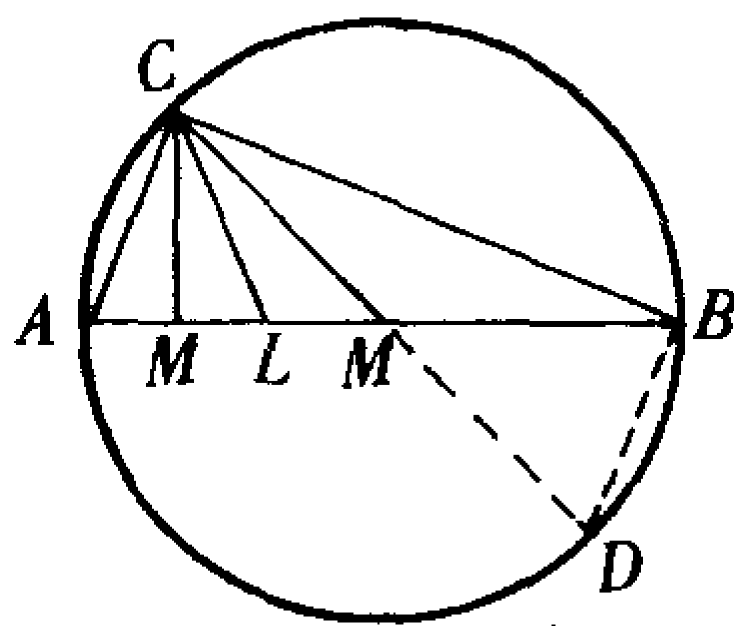
即 $\triangle CMH$ 是正三角形.

故 $\angle C = 60°$.

7·93 从三角形的同一顶点出发的角平分线,中线和高,把这个角四等分,求:这个三角形的各个角的度数.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)

[解] 设$\triangle ABC$是这样的三角形,从顶点C所引的高CH,角平分线CL和中线CM把$\angle ACB$分成四等分(如图),即



$\angle ACH = \angle HCL = \angle LCM = \angle MCB = \alpha$.

设$\odot O(R)$是$\triangle ABC$的外接圆,延长CM与$\odot O$交于D,则

$\angle CDB = \angle CAB = \angle CAH = 90° - \alpha$.

∵ $\angle CBD = 180° - (\angle CDB + \angle BCD) = 180° - (90° - \alpha) - \alpha$
$= 90°$.

∴ CD是$\odot O$的直径,M即圆心O.

又∵ $AM = BM = \dfrac{1}{2}AB = CM = R$,

∴ $\angle ACB = 4\alpha = 90°$, $\alpha = 22°30'$.

因此,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB = 90°$,$\angle ABC = 22°30'$,$\angle CAB = 67°30'$.

7·94 $\triangle ABC$的内心为K、AB、AC的中点为C_1和B_1,直线C_1K交AC于B_2,直线B_1K交AB于C_2,若$\triangle AB_2C_2$的面积与$\triangle ABC$的面积相等,求:$\angle CAB$的度数.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解] 设内切圆K切AB于E,EE'为$\odot K$的直径,点F与点E关于C_1对称.

我们首先证明C、E'、F三点共线.

设直线CE'交AB于F',过E'作AB的平行线交CA、CB于A'、

B',则$\triangle CA'B' \backsim \triangle CAB$.

设相似比为 λ. 由于$\odot K$ 为$\triangle CA'B'$的旁切圆,$E'B'=\lambda(s-a)$,所以 $F'B=s-a=AE$,其中 s 为$\triangle ABC$ 的半周长.

于是 AB 的中点C_1 也是 EF'的中点,从而 F 和F'重合,即 C、E'、F 共线.

由 $KE=KE'$, $C_1E=C_1F$, 则 $CF /\!/ B_2C_1$, $\therefore$ $\dfrac{AB_2}{AC_1}=\dfrac{AC}{AF}$.

同理 $\dfrac{AC_2}{AB_1}=\dfrac{AB}{AG}$. 这里 G 在AC 上,定义与 F 类似.

由已知$\triangle AB_2C_2$ 和$\triangle ABC$ 的面积相等,则

$$\frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AC_2\cdot AB_2}{AC\cdot AB}=\frac{AC_1\cdot AB_1}{AF\cdot AG}=1.$$

$\because$ $AB_1=\dfrac{b}{2}$, $AC_1=\dfrac{c}{2}$, $AF=s-b$, $AG=s-c$,

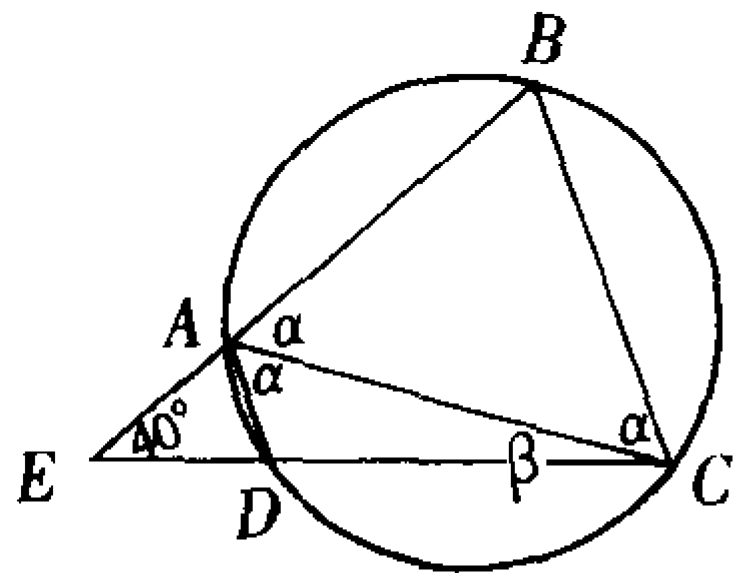
$\therefore$ $\dfrac{bc}{4(s-b)(s-c)}=1$,

故 $(a-b+c)(a-c+b)=bc$.

即 $a^2=b^2+c^2-bc$. 于是 $\angle CAB=60^\circ$.

7·95 E 为圆外一点,直线 EAB 与直线 EDC 的交角为 40°,若 $AB=BC=CD$,求:$\angle ACD$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)



[解] 如图,设$\angle ACB=\alpha$,$\angle ACD=\beta$.

$\because$ $AB=BC$,

$\therefore$ $\angle BCA=\angle BAC=\alpha$,

又$\because$ $CD=BC$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$,$\angle DAC=\angle CAB=\alpha$.

又$\because$ $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$,

且 $\angle E$ 的度数$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD})$的度数,

则有 $\begin{cases}3\alpha+\beta=180^\circ,\\ \alpha-\beta=40^\circ.\end{cases}$

解得 $\beta=15^\circ$, 即 $\angle ACD=15^\circ$.

7·96 一个三角形的内切圆及三个旁切圆的半径为一个等比数列的连续4 项，求：这个三角形的最大角.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年）

[解] 设$\angle C$为最大角，且设内切圆，旁切圆半径为r、r_a、r_b、r_c.

由题设有 $r_a r_b = r r_c$. 容易求得

$$r_a = (s-b)\text{ctg}\frac{C}{2} = (s-c)\text{ctg}\frac{B}{2},$$

$$r_b = (s-a)\text{ctg}\frac{C}{2} = (s-c)\text{ctg}\frac{A}{2},$$

$$r_c = (s-a)\text{ctg}\frac{B}{2} = (s-b)\text{ctg}\frac{A}{2},$$

$$r = (s-c)\text{tg}\frac{C}{2},$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 于是有

$$(s-a)(s-c)\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2} = (s-a)(s-c)\text{ctg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2},$$

即 $$\text{ctg}\frac{C}{2} = \text{tg}\frac{C}{2},$$

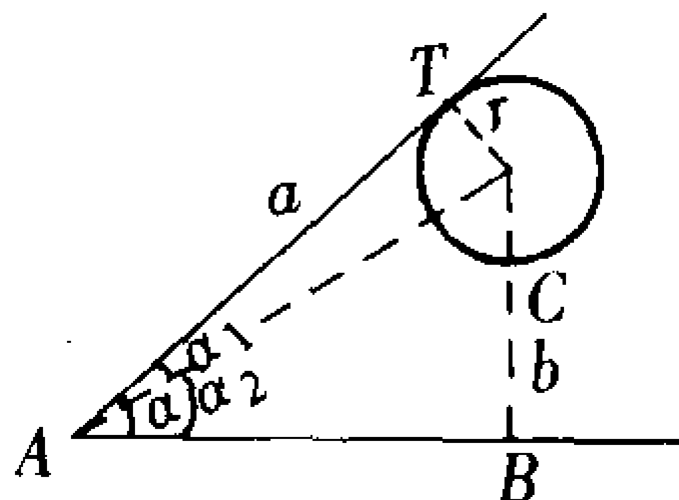
或 $$\text{tg}\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \text{tg}\frac{C}{2}.$$

由于 $0^\circ < 90^\circ - \frac{C}{2} < 90^\circ$，$0^\circ < \frac{C}{2} < 90^\circ$，

$\therefore$ $90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{C}{2}$，得 $C = 90^\circ$.

7·97 过点 A 有两条直线夹着一个锐角α，在这个夹角内有一个圆与一直线相切于 T，与另一直线不相交. 已知圆的半径为 r，AT 长为a，圆周与不相交的直线的最短距离为 b，求：$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\text{tg}\alpha$ 之值（在结果中分母不要开方号）.

（中国天津市数学竞赛，1957 年）



[解] 作 $OB\perp AB$，交圆于 C，则 $CB=b$.

连 OA、OT，则

$$OA = \sqrt{AT^2+OT^2} = \sqrt{a^2+r^2},$$

$$AB = \sqrt{OA^2-OB^2} = \sqrt{a^2-2br-b^2}.$$

设$\angle TAO=\alpha_1$，$\angle BAO=\alpha_2$，

$$\therefore\quad \sin\alpha_1=\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}},\ \cos\alpha_1\ \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}},$$

$$\sin\alpha_2=\frac{r+b}{\sqrt{a^2+r^2}},\ \cos\alpha_2=\frac{\sqrt{a^2-2br-b^2}}{\sqrt{a^2+r^2}}.$$

故 $$\sin\alpha=\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{ar+ab+r\sqrt{a^2-2br-b^2}}{a^2+r^2},$$

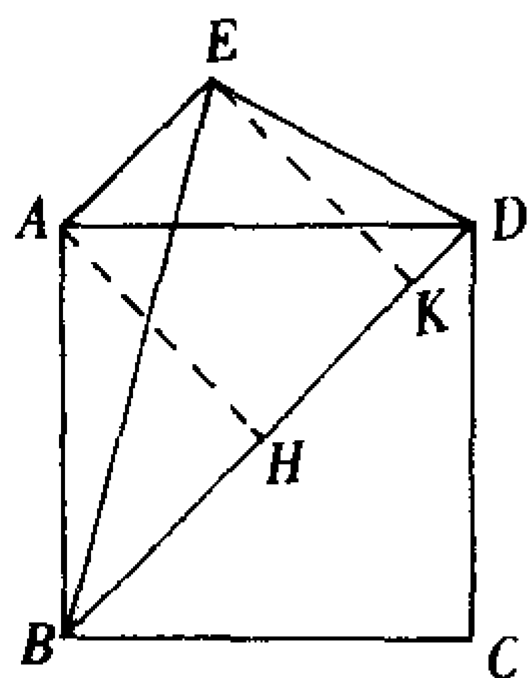
及 $$\cos\alpha=\cos(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{a\sqrt{a^2-2br-b^2}-br-r^2}{a^2+r^2},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{ar+(b+r)\sqrt{a^2-2br-b^2}}{a^2-(b+r)^2}.$$

2. 多边形及圆内角的计算及其他

7·98　如图，正方形$ABCD$的边长为1cm，$AE/\!/BD$，且$BE=BD$，求：(1)$\angle AED$的度数；(2)线段AB的长.

（中国中学生数理化接力赛，1986年）



［解］　分别过A、E作BD的垂线，垂足为H、K.

由$AE/\!/BD$，得$AH=EK$.

$\because\quad \angle ABD=45^\circ$

$\therefore\quad AH=BH=EK=\dfrac{\sqrt2}{2}$cm，

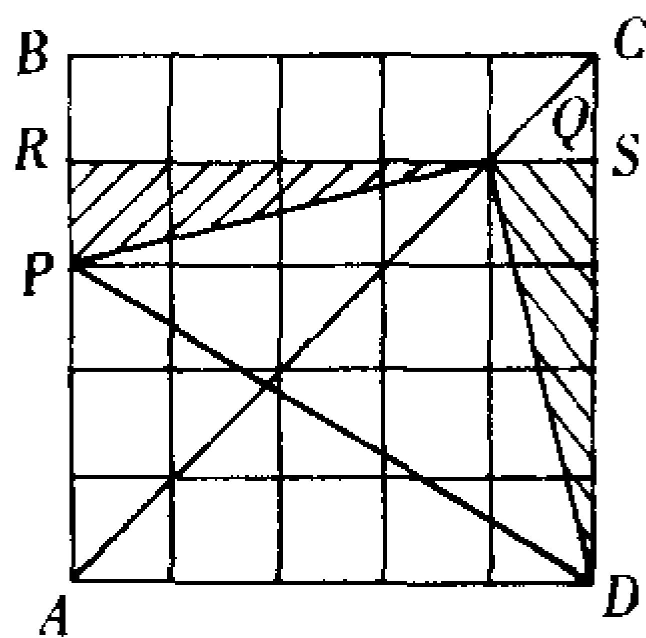
$\because\quad BD=BE=\sqrt2$cm，

$\therefore\quad EK=\dfrac12 BE$，$\angle EBK=30^\circ$.

$\therefore\quad \angle BDE=75^\circ$，$\angle AEK=105^\circ$，

$\therefore\quad BK=\sqrt{BE^2-EK^2}=\dfrac{\sqrt6}{2}$cm.

$\therefore \quad AE=HK=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\text{cm}.$



7·99 给定一个正方形 $ABCD$，在边 AB 和对角线 AC 上分别取点 P 和 Q，使 $AP:PB=3:2$，$AQ:QC=4:1$. 试求：$\triangle PQD$ 的各内角的大小.

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

［解］ 如图，把正方形分成 $5\times5=25$ 个小正方形.

容易证明 $\triangle PQR\cong\triangle SQD$.

于是 $\triangle PQD$ 为等腰直角三角形.

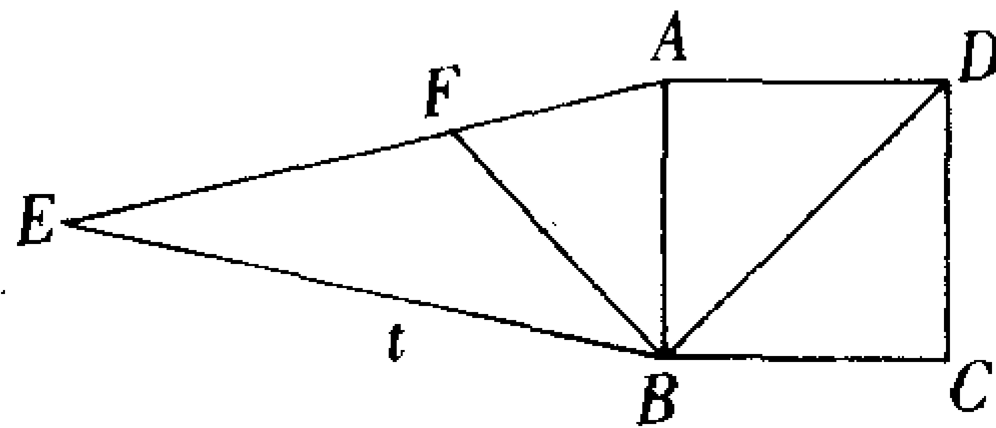
所以 三内角分别为 $45°, 45°, 90°$.

7·100 设$\triangle EAB$ 在正方形 $ABCD$ 的外侧，$EA=EB$，F 在 EA 上，$EF=AB$，$BF=BD$，求：$\angle AEB$.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

［解］ 如图. 设 $EF=AB=1$，

则 $BF=\sqrt{2}$.



设 $\angle AEB=2x$，$BE=t$，

则由余弦定理可得

$$2=BF^2=1+t^2-2t\cos2x. \quad ①$$

而由等腰三角形 AEB 易得

$$2t\sin x=AB=1. \quad ②$$

由①、②消去 t 得 $2=1+\dfrac{1}{4\sin^2x}-\dfrac{1-2\sin^2x}{\sin x}$，

即 $8\sin^3x-4\sin^2x-4\sin x+1=0$，

或 $(\sin x+1)(8\sin^3x-4\sin^2x-4\sin x+1)=0$，

由此可得 $(8\sin^4x-8\sin^2x+1)-(3\sin x-4\sin^3x)=0$，

即 $(1-8\sin^2x\cos^2x)-\sin3x=0$，

或 $(1-2\sin^22x)-\sin3x=0$，

有 $\cos4x-\sin3x=0$.

$$\text{从而可化为} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\sin3x. \quad ③$$

由于$\triangle AEB$ 为等腰三角形，且 $AB<AE$，则 $2x<\dfrac{\pi}{3}$，从而

$3x$ 为锐角.

又由 $x>0$ 及 $2x<\frac{\pi}{3}$ 可得 $-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}-4x<\frac{\pi}{2}$.

再由③可知$\frac{\pi}{2}-4x$ 也为锐角.于是 $\frac{\pi}{2}-4x=3x$,

$\therefore\ \angle AEB=2x=\frac{\pi}{7}$.

7·101 正方形 $ABCD$ 边长为 1,AB、AD 上各取一点 P、Q,使 $\triangle APQ$ 的周长为 2,求:$\angle PCQ$ 的度数.

(中国国家集训队选拔考试,1986 年)

[解] 延长 AD 到 R,使 $DR=PB$,连结 CR.于是有

$\triangle CRD\cong\triangle CPB$.

$\therefore\ CR=CP,\angle RCD=\angle PCB$.

$\because\ AD+AB=2=AQ+QP+PA$,

$\therefore\ PQ=DQ+PB=DQ+DR=RQ$.

$\therefore\ \triangle CRQ\cong\triangle CPQ$.

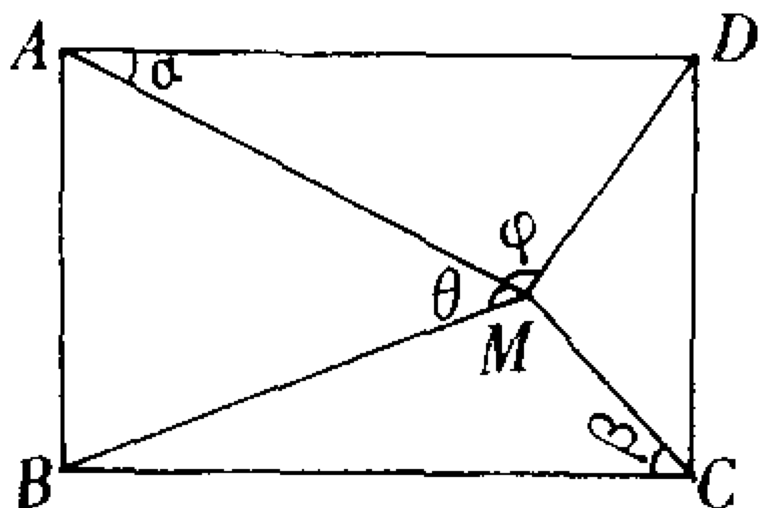
$\therefore\ \angle RCQ=\angle PCQ$.

$\because\ \angle RCQ+\angle PCQ=\angle RCD+\angle DCP=\angle PCB+\angle DCP=90^\circ$,

$\therefore\ \angle PCQ=45^\circ$.

7·102 在矩形 $ABCD$ 的内部取点 M,使得$\angle BMC+\angle AMD=180^\circ$.试求:$\angle BCM+\angle DAM$ 之值.

(前苏联教委推荐试题,1990 年)



[解 1] 记$\angle DAM=\alpha$,$\angle BCM=\beta$,$\angle AMD=\varphi$,$\angle AMB=\theta$,于是有

$\angle BMC=180^\circ-\varphi,\angle CMD=180^\circ-\theta$.

在$\triangle ABM$、$\triangle CDM$、$\triangle BCM$、$\triangle DAM$ 中应用正弦定理,得到

$$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BM}{\cos\alpha},\ \frac{CD}{\sin\theta}=\frac{DM}{\cos\beta},$$

$$\frac{BC}{\sin\varphi}=\frac{BM}{\sin\beta},\ \frac{AD}{\sin\varphi}=\frac{DM}{\sin\alpha}.$$

$\therefore\quad \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{DM}{BM}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$

$\therefore\quad \sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta\cos\beta.$

$\therefore\quad 0=\sin2\alpha-\sin2\beta=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta).$

由于 α 与 β 都是锐角.故或者 $\alpha=\beta$,或者 $\alpha+\beta=90^\circ$.当 $\alpha=\beta$ 时,$BM=DM$,这时 $ABCD$ 为正方形且 M 为中心.此时 $\alpha+\beta=90^\circ$,从而总有 $\alpha+\beta=90^\circ$.

[解 2]　过 M 作 $MN\,/\!/\,AB$ 并取 $MN=AB$,连结 AN、ND.于是四边形 $ABMN$ 和 $NMCD$ 都是平行四边形.

$\therefore\quad AN=BM,\ ND=MC,$

又$\because\quad AD=BC,$

$\therefore\quad \triangle NAD\cong\triangle MBC.$

$\therefore\quad \angle BMC=\angle AND,$

$\quad\quad \angle BCM=\angle ADN.$

$\because\quad \angle AND+\angle AMD=\angle BMC+\angle AMD=180^\circ,$

$\therefore\quad N$、A、M、D 四点共圆.

$\therefore\quad \angle AMN=\angle ADN=\angle BCM.$

$\because\quad \angle BAD=90^\circ,\ \therefore\quad MN\perp AD.$

$\therefore\quad \angle BCM+\angle DAM=\angle AMN+\angle DAM=90^\circ.$

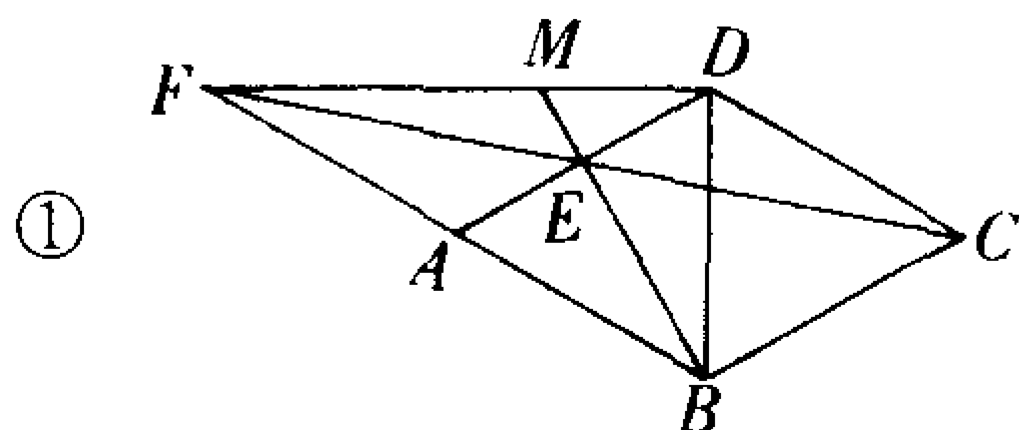
7·103　菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=60^\circ$,E 为直线 AD 上一点且 E 不同于 D,直线 CE 与 AB 交于 F,直线 DF 与 BE 交于 M,将 $\angle BMD$ 表为 E 在 AD 上的位置的函数.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解]　设 $AB=a,AE=x,AF=y,DF=z,BE=v$.

$\because\quad AE\,/\!/\,BC,$

$\therefore\quad \triangle AEF\backsim\triangle BCF,$



有 $\quad \dfrac{y}{y+a}=\dfrac{x}{a}.\qquad①$

在$\triangle FAD$ 中,由余弦定理得

$$z^2=y^2+a^2+ay.\quad ②$$

在$\triangle AEB$中,由余弦定理得

$$v^2=x^2+a^2-ax.\quad ③$$

由①、③消去x得

$$v^2=\frac{a^2}{(a+y)^2}[y^2+(a+y)^2-y(a+y)]$$

$$=\frac{a^2}{(a+y)^2}(y^2+a^2+ay)=\frac{a^2z^2}{(a+y)^2}.$$

$$\therefore\quad v=\frac{az}{a+y}.\quad ④$$

又由余弦定理得

$$\cos\angle ABE=\frac{v^2+a^2-x^2}{2va},\quad ⑤$$

$$\cos\angle ADF=\frac{z^2+a^2-y^2}{2za},\quad ⑥$$

有① $x=\dfrac{ay}{a+y}$, ⑦

将④、⑦代入⑤并利用②得

$$\cos\angle ABE=\frac{\dfrac{a^2z^2}{(a+y)^2}+a^2-\dfrac{a^2y^2}{(a+y)^2}}{2\cdot\dfrac{a^2z}{y+a}}$$

$$=\frac{z^2+(y+a)^2-y^2}{2(y+a)z}=\frac{y^2+3ay+2a^2}{2(y+a)z}$$

$$=\frac{2a+y}{2z}.$$

将②代入⑥得 $\cos\angle ADF=\dfrac{2a^2+ay}{2az}=\dfrac{2a+y}{2z}$.

于是 $\cos\angle ABE=\cos\angle ADF$.

因而 A、B、D、M共圆.

于是 $\angle DMB=\angle DAB=60^\circ$.

若E在DA延长线上仍可求出 $\angle DMB=60^\circ$.

若E在AD延长线上同法可求出 $\angle DMB=120^\circ$.

7·104 $ABCD$为平行四边形,E在线段BC的内部,如果$\triangle DEC$、

$\triangle BED$ 及$\triangle BAD$ 都是等腰三角形，求：$\angle DAB$ 可能取哪些值.

（第 19 届加拿大数学奥林匹克，1987 年）

［解］ 由 $ABCD$ 是平行四边形，则可设 $\angle A=\angle C=\alpha$，$\angle ADB=\angle DBC=\delta$，又设$\angle ABD=\varphi$，$\angle BDC=\tau$，$\angle EDC=\beta$，$\angle BED=\gamma$.

首先可以证明 α 为锐角.

否则，若$\triangle ABD$ 和$\triangle DEC$ 为等腰三角形，只能有 $AB=AD$，$CD=CE$，从而与 E 在BC 内部矛盾.

下面分几种情况讨论.

(1)若 $DC=CE$，则 $\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$，$\gamma=\pi-\beta=\dfrac{\pi+\alpha}{2}>\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $DE=BE$. $\tau=\delta=\dfrac{\pi-\gamma}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

又由 $CD/\!/AB$ 可得 $\varphi=\beta+\tau$，

$\therefore$ $\varphi=\dfrac{\pi-\alpha}{2}+\dfrac{\pi-\alpha}{4}=\dfrac{3(\pi-\alpha)}{4}$.

(i)若 $\alpha=\delta$，则 $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$.

(ii)若 $\alpha=\varphi$，则 $\alpha=\dfrac{3\pi}{7}$.

(2)若 $DC=DE$，则 $\gamma=\pi-\alpha>\dfrac{\pi}{2}$，

从而只有 $DE=BE$，

且 $\tau=\delta=\dfrac{\pi-\gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$，

及 $\varphi=\beta+\tau=\beta+\delta>\delta$.

再$\because$ $\triangle ADB$ 是等腰三角形，又 $\alpha\neq\delta$，$\therefore$ $\alpha=\varphi$.

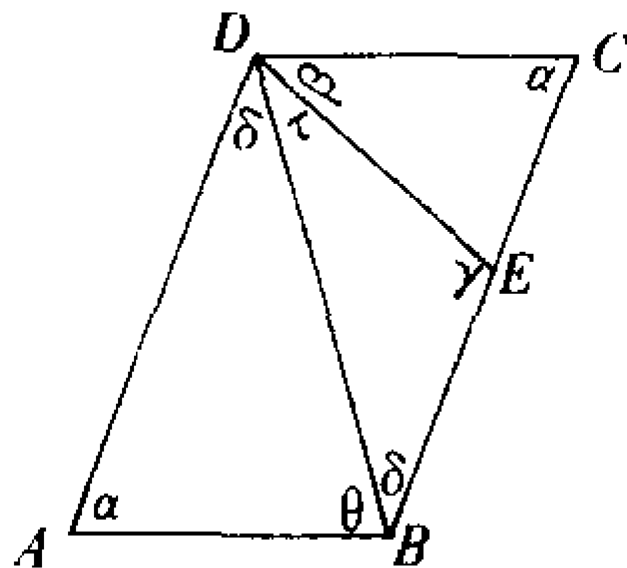
则 $\pi=\delta+\varphi+\alpha=\dfrac{5}{2}\alpha$. $\therefore$ $\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$.

(3)若 $CE=DE$，则 $\beta=\alpha$，$\gamma=2\alpha$.

(i)若 $\delta=\gamma=2\alpha$，则由于 $\varphi>\beta=\alpha$，

$\therefore$ $\varphi=\delta=2\alpha$.

故 $\pi=\alpha+\varphi+\delta=5\alpha$，$\alpha=\dfrac{\pi}{5}$.



(ii)若 $\tau=\delta$,则 $\delta=\frac{\pi-\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

$\therefore\quad \varphi=\beta+\delta=\alpha+\delta=\frac{\pi}{2}$,

则 $\quad \alpha=\delta=\frac{\pi}{4}$.

(iii)若 $\tau=\gamma=2\alpha$,则 $\varphi=\beta+\tau=3\alpha$,

$\therefore\quad \alpha=\delta$ 或 $\delta=\varphi$.

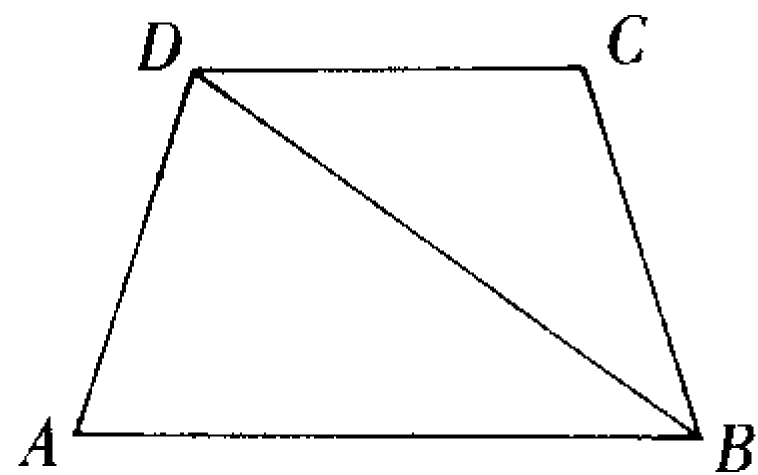
当 $\alpha=\delta$ 时, $\alpha=\pi-4\alpha$, $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

当 $\delta=\varphi$ 时, $3\alpha=\pi-4\alpha$, $\alpha=\frac{\pi}{7}$.

综上所述,$\angle DAB$ 的取值集合为 $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{7}\right\}$.

7·105 等腰梯形被对角线分为两个等腰三角形,试求等腰梯形的各角大小.

(莫斯科数学奥林匹克,1957 年)



[解] 设在四边形 $ABCD$ 中,$AB\,/\!/\,CD$, $AD=BC=CD$. $AB=BD$(如图).

设 $\angle ABD=x$, $\angle A=y$, 则

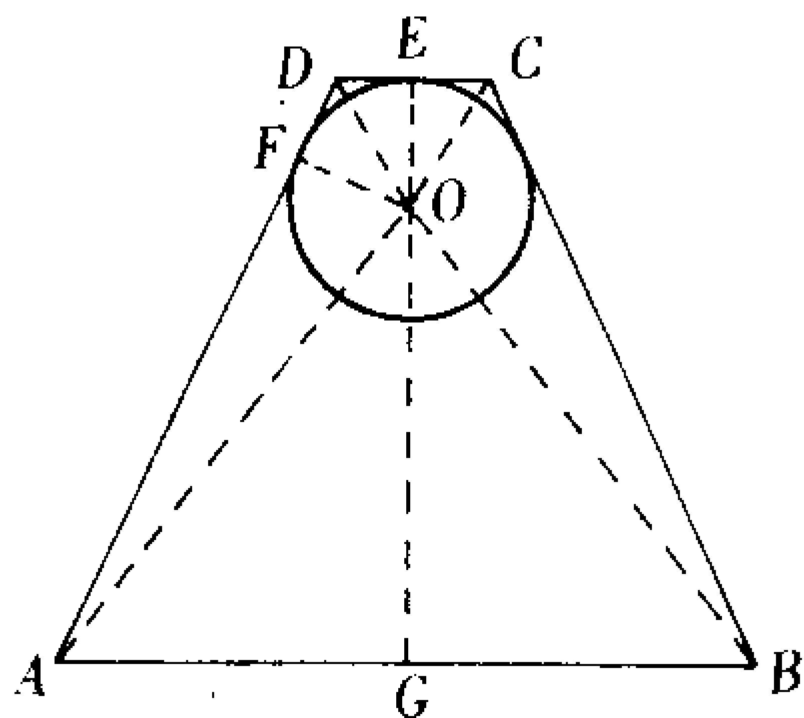
$$\begin{cases}x+2y=180°,\\3x+y=180°.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=36°,\\y=72°.\end{cases}$$

$\therefore\quad \angle A=\angle B=72°$,

$\angle C=\angle D=108°$.

7·106 在等腰梯形内,有一圆与梯形的上底和两腰都相切,已知梯形下底的长为 6,高为 5,圆的半径为 1,求:梯形的腰和下底夹角的余弦的值.

(中国北京市数学竞赛,1978 年)



[解 1] DC 的中点 E 和 AB 的中点 G 的连线 EG,就是等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴,OC、OD 分别为$\angle BCD$、$\angle ADC$ 的平分线.

$\because\quad \angle ADC=\angle BCD$,

$\therefore\quad \angle ODC=\angle OCD$.

于是　$OD=OC$.

故 O 在 EG 上.连结 OA,在直角三角形 AGO 中,

$$OG=EG-OE=4,\quad AG=\frac{1}{2}AB=3,$$

$\therefore$　$AO=\sqrt{AG^2+OG^2}=5$.

设　$\angle OAG=\alpha$, $\angle OAF=\beta$.

则　$\sin\alpha=\frac{OG}{AO}=\frac{4}{5}$,　　$\cos\alpha=\frac{AG}{AO}=\frac{3}{5}$.

在直角三角形 AOF 中,$OF=1$,

$\therefore$　$AF=\sqrt{AO^2-OF^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$.

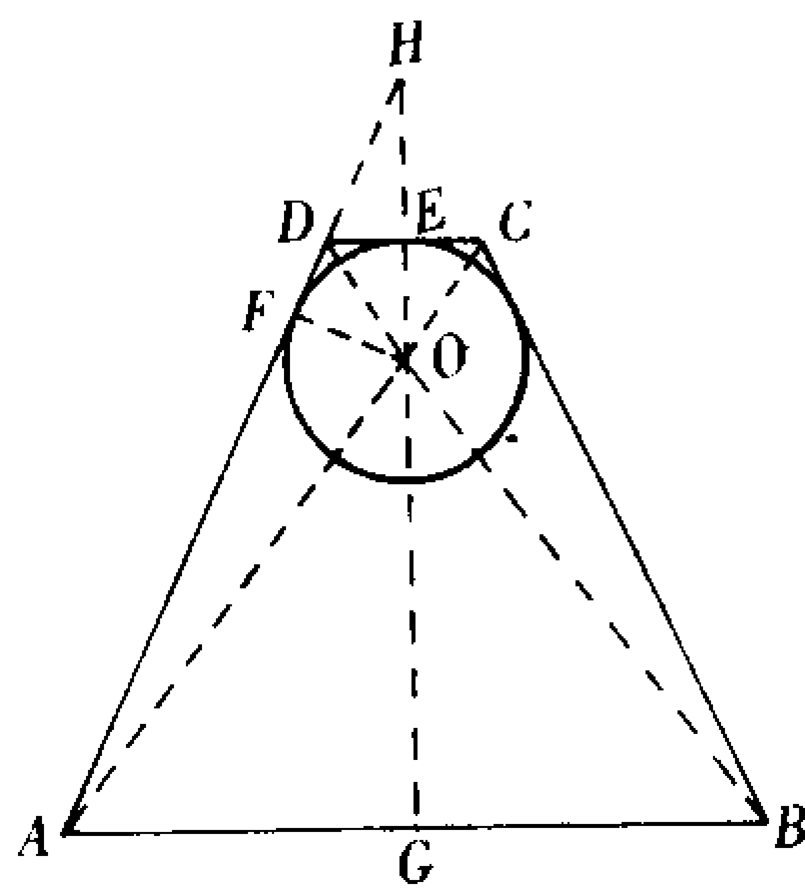
$$\sin\beta=\frac{OF}{AO}=\frac{1}{5},\quad \cos\beta=\frac{AF}{AO}=\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故　$\cos\angle DAB=\cos(\alpha+\beta)$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{6\sqrt{6}-4}{25}.$$

[解 2]　如图,延长 AD、GE 相交于 H.易得



$$\triangle HFO\backsim\triangle HGA,$$

$\therefore$　$\frac{HF}{FO}=\frac{HG}{GA}$.

令 $EH=x$, 则

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{1}=\frac{x+5}{3},$$

即　$8x^2+8x-25=0$, .

$\therefore$　$x=\frac{1}{8}(\sqrt{216}-4)$

$=\frac{1}{4}(3\sqrt{6}-2)$. (取正值)

于是　$\cos\angle DAB=\cos\angle HOF=\frac{FO}{HO}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}(3\sqrt{6}-2)+1}=\frac{6\sqrt{6}-4}{25}.$$

7·107　一直线与正六边形 $ABCDEF$ 相交，截出一个 $\triangle AKN$，其中 $AK+AN=AB$. 试求 $\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+\angle KFN$ 的度数.

（莫斯科数学竞赛，1995 年）

［解］　不妨设点 N 位于边 AB 上，点 K 位于边 AF 上. 由于 $AK+AN=AB$，故知 $FK=AN$.

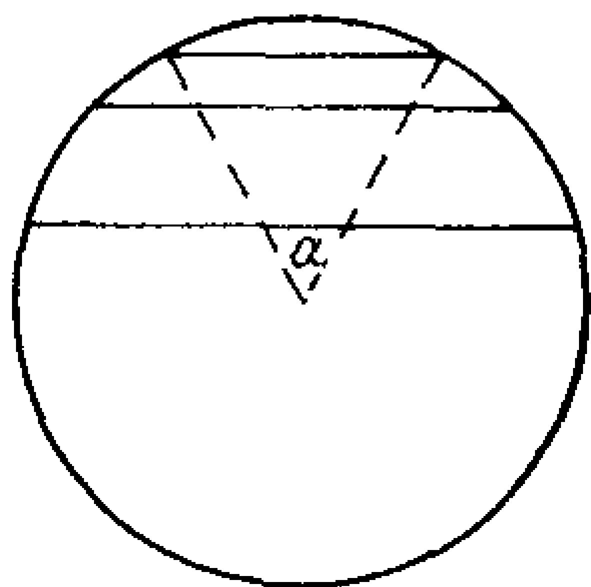
分别在边 BC、CD、DE、EF 上取点 P、R、S、T，使得 $FK=AN=BP=CR=DS=ET$（见图）. 于是，

$$\angle KBN=\angle TAK,\ \angle KCN=\angle SAT,$$
$$\angle KDN=\angle RAS,\ \angle KEN=\angle PAR,$$
$$\angle KFN=\angle NAP,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+\angle KFN\\ &=\angle KAN+\angle TAK+\angle SAT+\angle RAS+\angle PAR+\angle NAP\\ &=\angle KAN+\angle KAN\\ &=2\times120^\circ=240^\circ.\end{aligned}$$

7·108　在某一个圆中长度为 2、3、4 的平行弦分别对应于圆心角 α、β、$\alpha+\beta$，其中 $\alpha+\beta<\pi$. 如果把 $\cos\alpha$（这是一个正有理数）化成既约（最简）分数，问：分子与分母之和是多少？

（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）



［解 1］　设圆的半径为 r，由余弦定理得

$$4=r^2+r^2-2r\cdot r\cdot\cos\alpha,$$
$$9=r^2+r^2-2r\cdot r\cdot\cos\beta,$$
$$16=r^2+r^2-2r\cdot r\cdot\cos(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{r^2-2}{r^2}=1-\frac{2}{r^2},$$

有　$$\cos\beta=\frac{2r^2-9}{2r^2}=1-\frac{9}{2r^2},$$

及　$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{2r^2-16}{2r^2}=1-\dfrac{8}{r^2}$.

得　$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}$，$\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{4r^2-9}}{2r^2}$.

∵　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

∴　$1-\dfrac{8}{r^2}=\left(1-\dfrac{2}{r^2}\right)\left(1-\dfrac{9}{2r^2}\right)-\dfrac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}\cdot\dfrac{3\sqrt{4r^2-9}}{2r^2}$,

即　$r^2=2\sqrt{(r^2-1)(4r^2-9)}-6$,

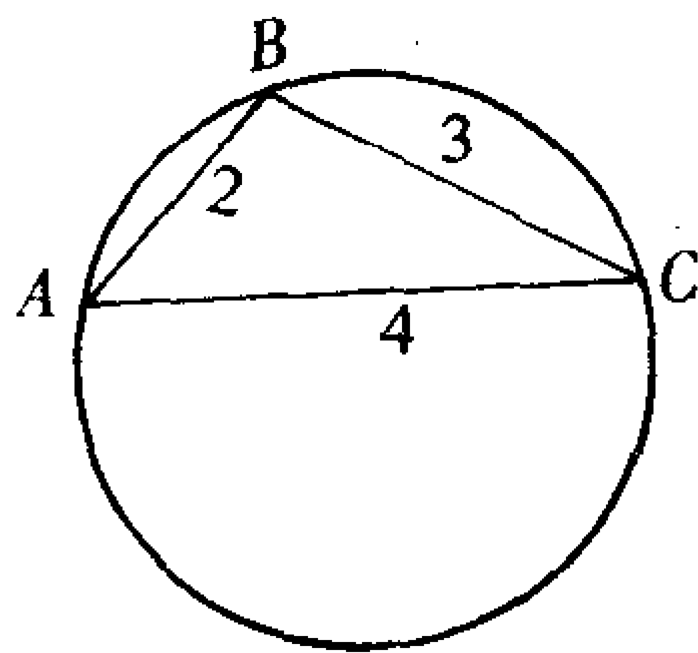
或　$15r^4-64r^2=0$,

由 $r^2\neq0$　得　$r^2=\dfrac{64}{15}$.

∴　$\cos\alpha=1-\dfrac{2}{r^2}=1-\dfrac{30}{64}=\dfrac{17}{32}$.

故　$\cos\alpha$ 的分子与分母之和为 $32+17=49$.

［解 2］　因为在同圆中等弦所对的圆心角相等，又注意到弦长为 2、3、4 的弦所对的圆心角分别为 α、β、$\alpha+\beta$，我们可以把平行弦这样移动：



如图，在圆上取 A、B、C 三点，使 $AB=2$，$BC=3$，由于$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角为 α、β，则$\overset{\frown}{AC}$所对的圆心角为 $\alpha+\beta$，于是弦 $AC=4$.

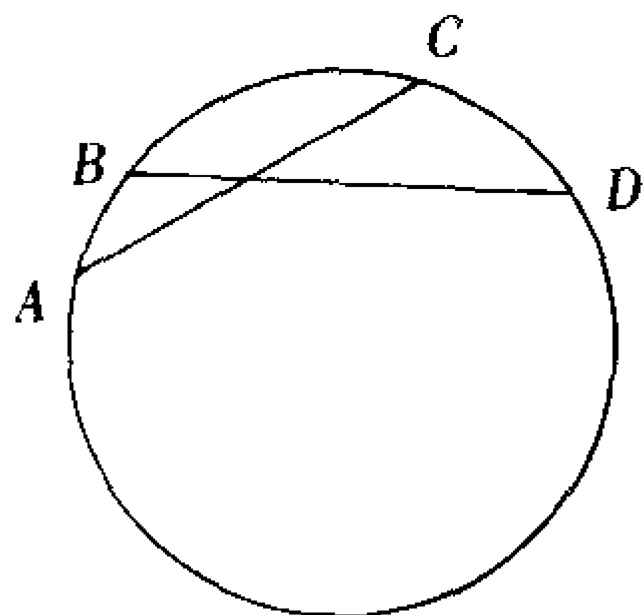
因为$\angle C=\dfrac{\alpha}{2}$，由余弦定理得

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{4^2+3^2-2^2}{2\times4\times3}=\frac{7}{8}.$$

于是由倍角公式有

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{17}{32}.$$

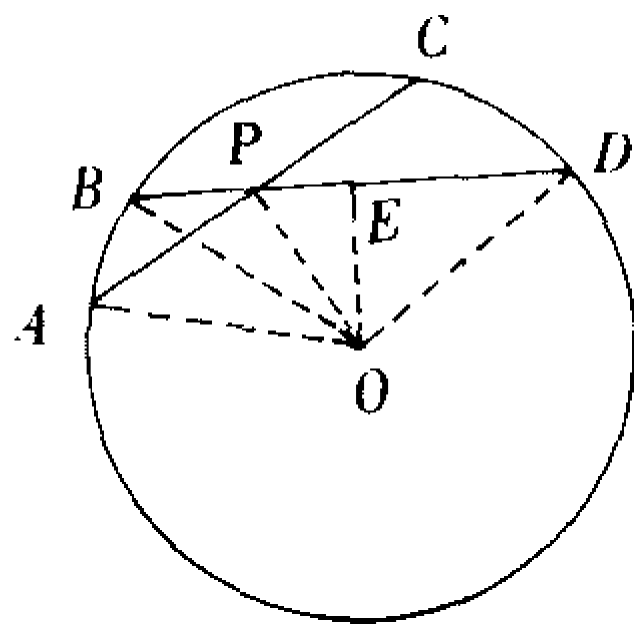
所以 $\cos\alpha$ 的分子与分母之和为 49.



7·109　如图，已知一个圆的两条相交的弦 AD 和 BC，其中 B 在 AD 的劣弧上. 设圆的半径是 5，$BC=6$，AD 被 BC 等分，又设从 A 出发的弦只有 AD 能被 BC 等分，这样可以知道 AB 劣

弧对应的正弦是一个有理数,如果把这个有理数化成最简分数$\frac{m}{n}$,求:mn.

(第1届美国数学邀请赛,1983年)



[**解**] 如图,设AD和BC相交于P,连OP、OA、OB、OC.

由 $AP=PD$ 得 $OP\perp AD$.

作 $OE\perp BC$于E,则 $BE=EC=3$.

设 $PA=PD=y$,$PE=x$,则

$BP=BE-PE=3-x$,

$PC=PE+EC=3+x$.

又由 $OB=5$,$BE=3$ 得 $OE=4$.

由相交弦定理 $AP\cdot PD=BP\cdot PC$,

$\therefore$ $y^2=(3+x)(3-x)=9-x^2$.

又因为P点惟一,则以OA为直径的圆与BC相切,于是由弦切角等于所夹弧上的圆周角得$\angle OPE=\angle A$.

$\because$ $\cos A=\dfrac{PA}{OA}=\dfrac{y}{5}$,

又 $\cos\angle OPE=\dfrac{PE}{OP}=\dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$,

得 $\dfrac{y}{5}=\dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$,即 $\dfrac{y^2}{25}=\dfrac{x^2}{16+x^2}$,

将 $y^2=9-x^2$ 代入 $\dfrac{9-x^2}{25}=\dfrac{x^2}{16+x^2}$,

$\therefore$ $x^4+32x^2-144=0$.

$x^2=4$,$x^2=-36$(舍去).

从而 $PE=x=2$,$CP=x+3=5$.

由$OC=CP=5$得 $\triangle COP$为等腰三角形.

$\angle CPO=\angle COP=\angle A$,

$\because$ $\angle A+\angle AOP=90^\circ$,$\therefore$ $\angle AOP+\angle COP=90^\circ$,

于是 $AO\perp OC$,从而 $\angle AOB+\angle BOC=90^\circ$.

$\therefore$ $\sin\angle AOB=\cos\angle BOC$.

由余弦定理　$\cos\angle BOC=\dfrac{OB^2+OC^2-BC^2}{2OB\cdot OC}=\dfrac{7}{25}$.

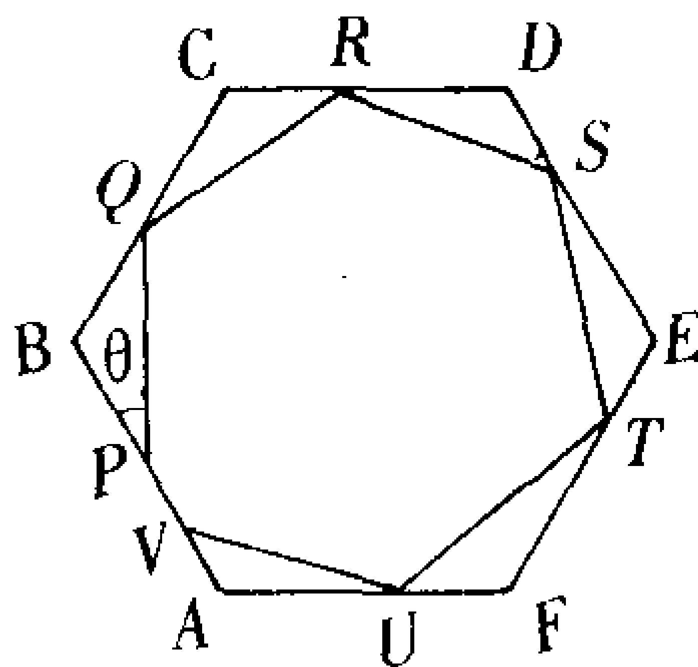
所以 $\sin\angle AOB=\dfrac{7}{25}$是有理数,即 AB 劣弧对应的正弦是一个有理数,从而　$\dfrac{m}{n}=\dfrac{7}{25}$.

$\therefore\quad mn=7\times25=175$.

7·110　一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$,一个球从 AB 的中点 P 击出,击中 BC 边上的某点 Q,并且依次碰击 CD、DE、EF、FA 各边,最后击中 AB 边上的某一点.设$\angle BPQ=\theta$,求:θ 的取值范围(提示:利用入射角等于反射角的原理).

(中国高中数学联赛,1981 年)

[解 1]　设球依次击中 CD、DE、EF、FA、AB 各边上的点 R、S、T、U、V(如图),根据入射角等于反射角的原理,



$\angle PQB=\angle RQC$, 又

$\angle B=\angle C=120°$,

因此　$\triangle PQB\backsim\triangle RQC$, 则　$\dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{CQ}{CR}$.

同理可依次推得

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}=\frac{DS}{DR}=\frac{ES}{ET}=\frac{FU}{FT}=\frac{AU}{AV}.$$

由等比定理得

$$\frac{BQ+CQ+DS+ES+FU+AU}{BP+CR+DR+ET+FT+AV}=\frac{BQ}{BP}$$

不失一般性,设正六边形的边长为 1,

令 $AV=t$,则上式变为:　$\dfrac{3}{2.5+t}=\dfrac{BQ}{BP}$

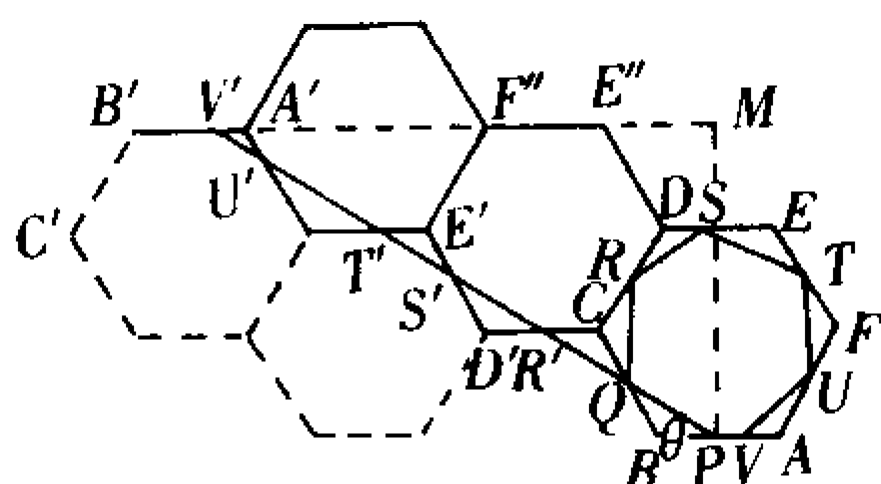
由正弦定理,得　$\dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(60°-\theta)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\theta-1}$.

$\therefore\quad \dfrac{3}{2.5+t}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\theta-1}$.

故　$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{8+2t}$.

由于　$0<t<1$，有　$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\text{tg}\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

因此，θ 取值范围是 $\text{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}}{10}\right)<\theta<\text{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.



[**解 2**]　如图，再作正六边形 $DCD'E'F''E''$，正六边形 $E'F'A'\cdots F''$，…….

延长 PQ 分别交 CD'、$D'E$、$E'F'$、$F'A'$、$A'B'$ 于 R'、S'、T'、U'、V' 各点.

设球击中 CD、DE、EF、FA、AB 各边的点分别是 R、S、T、U、V，由于入射角等于反射角，易证

$\triangle QCR'\cong\triangle QCR$，$\triangle R'D'S'\cong\triangle RDS$，$\triangle S'E'T'\cong\triangle SET$，

$\triangle T'F'U'\cong\triangle TFU$，$\triangle U'A'V'\cong\triangle UAV$.

球击中 CD 上 R 点相当于球击中 CD' 上 R' 点；击中 DE 上 S 点相当于击中 $D'E'$ 上 S' 点，依此类推.

因此，球行走的折线 $PQRSTUV$ 转化为直线 $PQR'S'T'U'V'$.

易证 B'、A'、F''、E'' 共线，设这一直线与 AB 的中垂线相交于 M，则有

$B'M /\!/ BA$，$B'M\perp MB$.

易证 B、D'、F'、B' 共线与 A、C、E'、A' 共线.

因为 $B'A' \overset{/\!/}{=} BA$，所以 $BB'A'A$ 是平行四边形.

若 PQ 延长后能与平行四边形内的线段 CD'、$D'E'$、$E'F'$、$F'A'$ 相交，并与 $A'B'$ 相交，则线段 PV' 应在平行四边形 $BB'A'A$ 的内部. 因此，必将有

$$\angle PB'M<\angle PV'M=\angle BPQ=\theta<\angle PA'M \qquad (*)$$

不失一般性，设正六边形边长为 1，则

$$B'M=5,\ A'M=4,\ PM=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{tg}\angle PB'M=\frac{MP}{B'M}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times 5}=\frac{3\sqrt{3}}{10},$$

$$\text{tg}\angle PA'M=\frac{MP}{A'M}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times 4}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

由(*)式有$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\mathrm{tg}\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8}$,因此,$\theta$取值范围是

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}}{10}\right)<\theta<\mathrm{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

7·111 弹子从半径为 R 的圆形弹子台距中心 a 处射出,碰撞台边两次后反射到出发点,试决定弹子的射击方向(弹子的大小不计).

(中国福建省福州市数学竞赛,1963年)

[解 1] 如图,设 O 为圆台中心,弹子从 A 处射出,经 B、C 反射后回到 A 处.

因反射角与入射角相等,故 BO、CO 平分 $\angle B$、$\angle C$.即 O 为$\triangle ABC$ 的内心.易证$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故 $AO\perp BC$,设垂足为 D.又设$\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,则

$$AO=a,\ BO=R,\ OD=r.$$

由角平分线性质得

$$\frac{a}{r}=\frac{AB}{BD}=\frac{\sqrt{AD^2+BD^2}}{BD}=\frac{\sqrt{(a+r)^2+(R^2-r^2)}}{\sqrt{R^2-r^2}},$$

解得 $r=\frac{\sqrt{R^4+8a^2R^2}-R^2}{4a}$.(已负根舍去)

以 r 为半径作弹子台的同心圆,过 A 引此圆的切线即弹子射击方向.

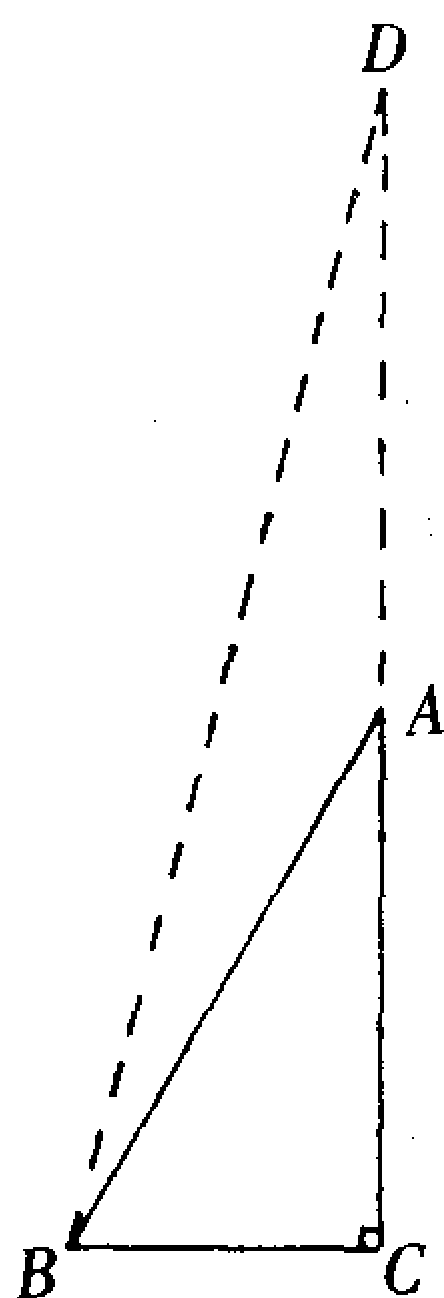
[解 2] 由解 1 知, $AO\perp BC$. 设 $\angle OAB=\alpha$, 则

$$\angle OBA=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha).$$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)}=\frac{R}{\sin\alpha}$,

即 $2a^2\sin^2\alpha+R^2\sin\alpha-R^2=0$,

得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{R^4+8a^2R^2}-R^2}{4a^2}$.



$$\therefore \quad \alpha=\arcsin\frac{\sqrt{R^4+8a^2R^2}-R^2}{4a^2}.$$

此即射击方向与 AO 的夹角.

7·112 用几何方法求 tg75°的值,且证明 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=45°$.

(中国福建省福州市数学竞赛,1962 年)

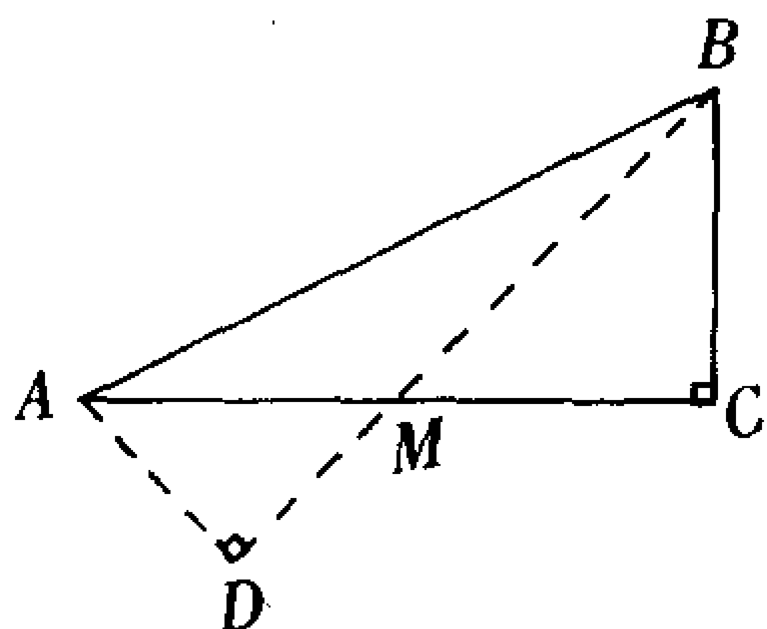
[解] 如图,作$\triangle ABC$ 使 $BC=1,\angle A=30°,\angle C=90°$,

则 $AB=2,\ AC=\sqrt{3}$.

延长 CA 到 D,使 $AD=AB$,

则 $\angle D=15°,\ \angle DBC=75°$,

$$\therefore \quad \operatorname{tg}75°=\frac{DC}{BC}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}.$$



[证 1] 作直角$\triangle ABC$,使 $BC=1,\ AC=2,\ \angle C=90°$,

则 $\angle BAC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

作 AC 边上的中线 BM,作 $AD\perp BM$,交 BM 的延长线于 D.

则$\triangle BCM$ 与$\triangle ADM$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore \quad \angle BMC=45°,\ AM=MC=1$,

$AD=DM=\frac{\sqrt{2}}{2},BM=\sqrt{2},BD=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

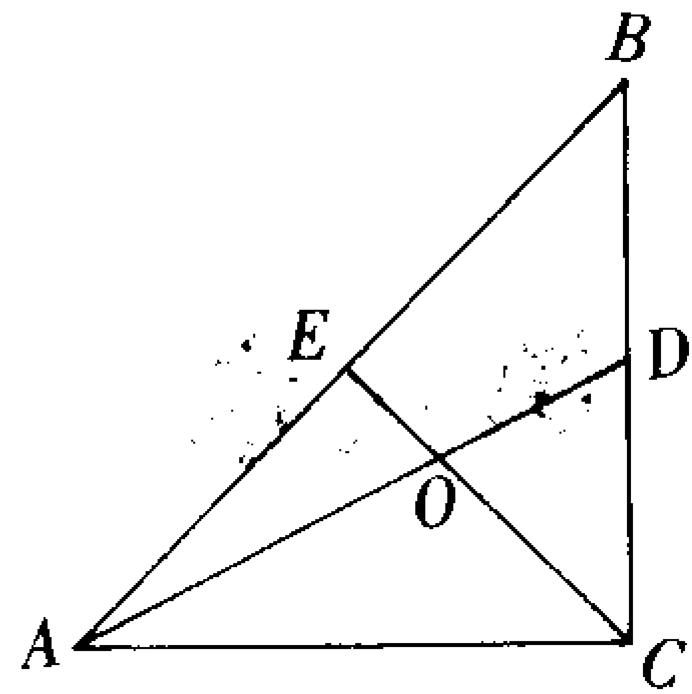
$\therefore \quad \angle ABD=\operatorname{arctg}\frac{AD}{BD}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

而 $\angle BMC=\angle BAC+\angle ABD=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

$\therefore \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=45°$.

[证 2] 作等腰直角三角形 $ACB,\angle C=90°,\angle A=\angle B=45°$,又作中线 AD、CE,相交于 O.

则　$CE=AE$，$CE\perp AB$.



由中线性质得　$OE=\frac{1}{3}CE=\frac{1}{3}AE$，

$\therefore$ $\mathrm{tg}\angle EAO=\frac{OE}{AE}=\frac{1}{3}$，

即　$\angle EAO=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$.

又$\because$　$CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore$　$\mathrm{tg}\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{1}{2}$，即　$\angle CAD=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$.

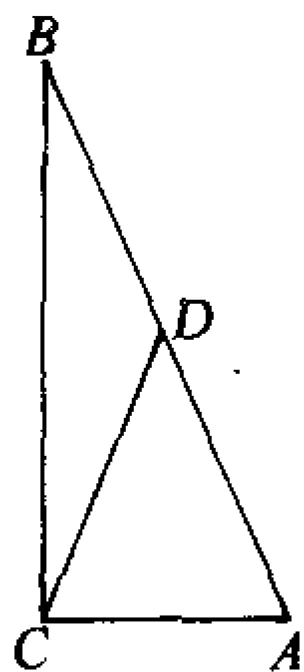
$\therefore$　$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}=\angle CAD+\angle EAO=45°$.

第八章　面积的等式与求值问题

(一)三角形面积

8·1　已知:直角三角形的周长为$2+\sqrt{6}$,斜边上的中线长为1,求:这个三角形的面积.

(中国北京市数学竞赛,1978年)



[解]　设$AB=c,AC=b,BC=a$,如图.

$\because\quad CD=1,\ \therefore\quad c=2.$

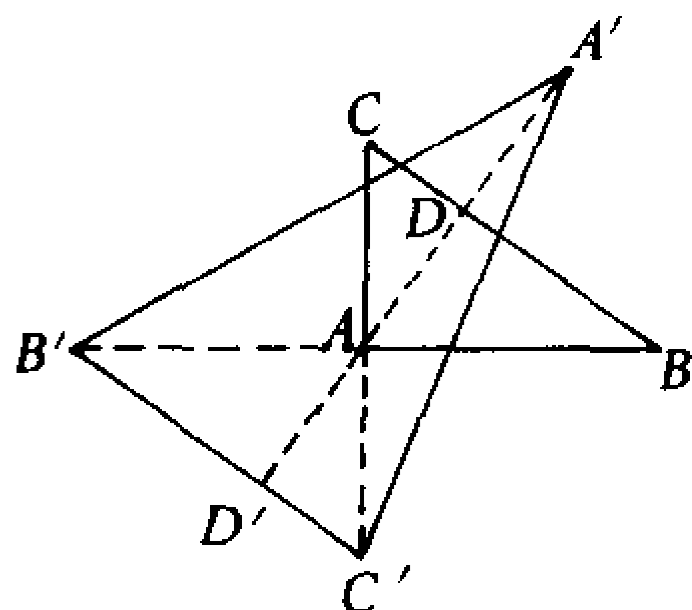
于是 $\begin{cases} a+b=\sqrt{6} & ① \\ a^2+b^2=4. & ② \end{cases}$

①^2−②得　$2ab=2,\ ab=1.$

故　$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}.$

8·2　$\triangle ABC$是面积等于1的直角三角形,A'、B'、C'分别是A、B、C关于各自对边的反射点.求:$\triangle A'B'C'$的面积.

(第21届加拿大数学奥林匹克,1989年)



[解]　设$\angle BAC=90°$,

如图,连AA',设直线AA'交BC于D,交$B'C'$于D'.

由对称性可得　$B'C' \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} BC$.

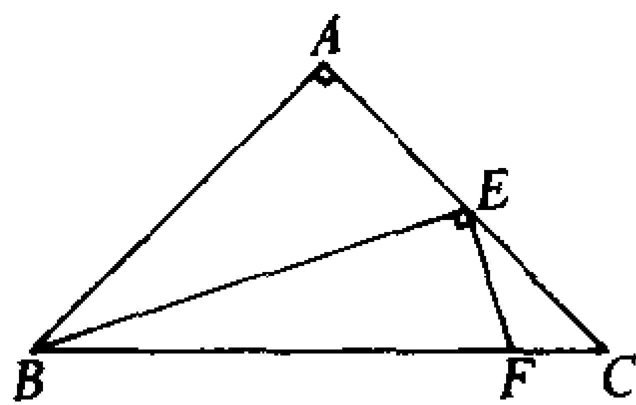
又由$AA'\perp BC$可得　$AA'\perp B'C'$.

且$A'D'=3AD$.

$\therefore \quad S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'D'\cdot B'C'=\frac{1}{2}\cdot 3AD\cdot BC=3S_{\triangle ABC}=3.$

8·3　如图，在等腰直角△ABC中，$AB=1$，$\angle A=90°$，点E为腰AC的中点，点F在底边BC上，且$EF\perp BE$. 求：△CEF的面积.

（中国初中数学联赛，1998年）



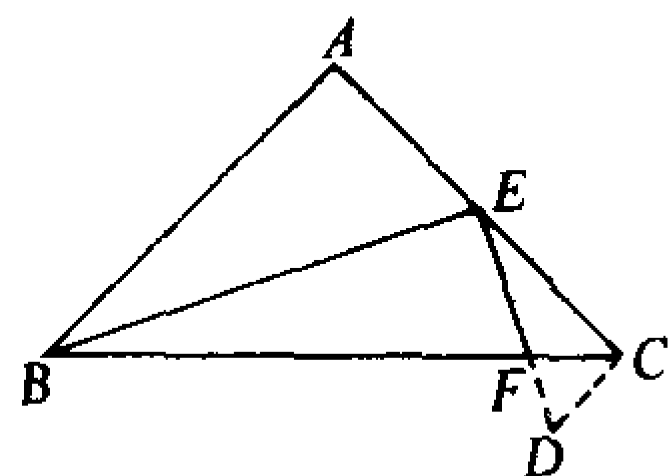
［证］　过C作$CD\perp CE$与EF延长线交于D.

$\because \quad \angle ABE+\angle AEB=90°$，

且　$\angle CED+\angle AEB=90°$，

$\therefore \quad \angle ABE=\angle CED$.

故　Rt△ABE∽Rt△CED，



$\therefore \quad \frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABE}}=\left(\frac{CE}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$，

且　$\frac{CE}{CD}=\frac{AB}{AE}=2$.

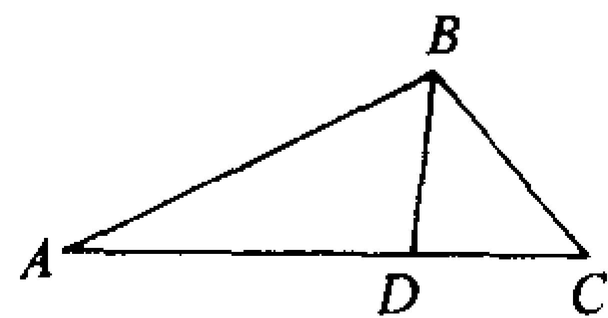
又　$\angle ECF=\angle DCF=45°$，则$CF$是$\angle DCF$的平分线，因而$F$到$CE$和$CD$的距离相等.

$\therefore \quad \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDF}}=\frac{CE}{CD}=2$，

故　$S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle CDE}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}S_{\triangle ABE}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{24}$.

8·4　如图，在△ABC中，$AB=7$，$BC=4$，又D是AC上一点，$BD=3$，且$\frac{AD}{DC}=2$，求：$S_{\triangle ABC}$.

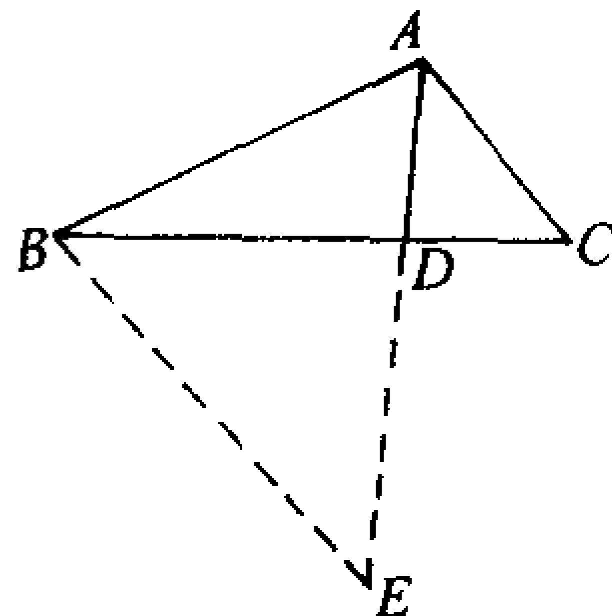
（中国理科试验班招生试题，1997年）



［解］　过A作$AE/\!/BC$交BD延长线于E，则

$$\frac{DE}{BD}=\frac{AD}{DC}=2,$$

$\therefore \quad DE=6，BE=9，AE=2BC=8.$

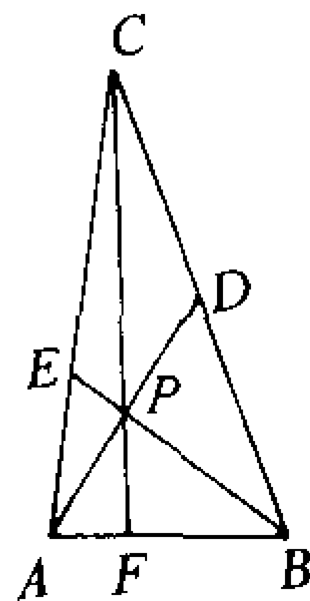


在△ABE中由海伦公式有（注意到$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=12$）

$S_{\triangle ABE}=\sqrt{12\times4\times3\times5}=12\sqrt{5}$.

又∵ $\angle BAE+\angle ABC=180^\circ$,

∴ $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABE}}=\dfrac{BC}{AE}=\dfrac{1}{2}$, ∴ $S_{\triangle ABC}=6\sqrt{5}$.



8·5 P 是$\triangle ABC$ 内的一点,连接 AP、BP、CP 并延长,分别与 BC、AC、AB 交于D、E、F 点,已知:$AP=6$,$BP=9$,$PD=6$,$PE=3$,$CF=20$.求:$\triangle ABC$ 的面积.

(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

[解 1] 在 PB 上取$PM=PE=3$,又由 $PA=PD=6$,则$\triangle PAE\cong\triangle PDM$.

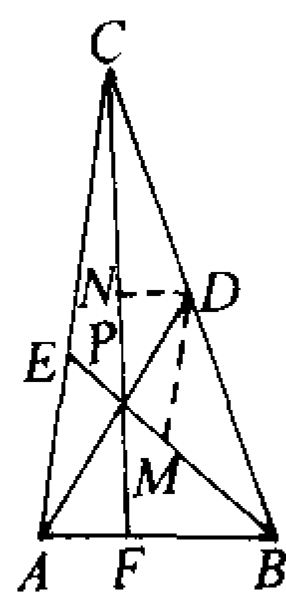
从而可证 $DM/\!/AC$.

∵ $BP=9$, 则 $BM=6$, M 是BE 的中点.

∴ D 是BC 中点.

过 D 作$DN/\!/AF$ 交PC 于N,则可证 $\triangle PFA\cong\triangle PND$.

又∵ N 是FC 中点,



∴ $PF=PN=\dfrac{1}{4}CF=5$. 从而 $PC=15$.

在$\triangle PBC$ 中, $PB=9$, $PC=15$, $PD=6$.

由三角形中线公式得

$$PD^2=\frac{2PB^2+2PC^2-BC^2}{4}$$

则 $36=\dfrac{2\times81+2\times225-BC^2}{4}$,

∴ $BC^2=2\times81+2\times225-4\times36=468$,

即 $BC=6\sqrt{13}$, $BD=3\sqrt{13}$.

由 $PB=9$, $PD=6$, $BD=3\sqrt{13}$ 可知 $BD^2=PB^2+PD^2$,

所以$\triangle PDB$ 是直角三角形,于是 $S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}PB\times PD=27$.

由 D 是BC 的中点,则 $S_{\triangle PDC}=S_{\triangle PBD}=27$.

又由 $PA=PD$, 则

$S_{\triangle PAC}=27=S_{\triangle PDC}$, $S_{\triangle PAB}=27=S_{\triangle PBD}$.

于是 $S_{\triangle ABC}=4\times27=108$.

[解 2] 由解 1,D 是BC 的中点,$PC=15$.

设 $CD=BD=x$，则$\triangle CPD$ 的半周长为$\frac{21+x}{2}$，$\triangle PDB$ 的半周长为$\frac{15+x}{2}$.

由 $S_{\triangle CPD}=S_{\triangle PDB}$ 及海伦公式得

$$\frac{21+x}{2}\left(\frac{21+x}{2}-15\right)\left(\frac{21+x}{2}-6\right)\left(\frac{21+x}{2}-x\right)$$
$$=\frac{15+x}{2}\left(\frac{15+x}{2}-9\right)\left(\frac{15+x}{2}-6\right)\left(\frac{15+x}{2}-x\right).$$

有 $(21+x)(x-9)(x+9)(21-x)$
$=(15+x)(15-x)(x+3)(x-3)$,

即 $(21^2-x^2)(x^2-9^2)=(15^2-x^2)(x^2-3^2)$.

由此解得 $x^2=13\times 9$.

$$S^2_{\triangle CPD}=\frac{1}{16}(21^2-x^2)(x^2-9^2)=18^2\times 3^2\times\frac{1}{4},$$

$\therefore$ $S_{\triangle CPD}=S_{\triangle APC}=27$,

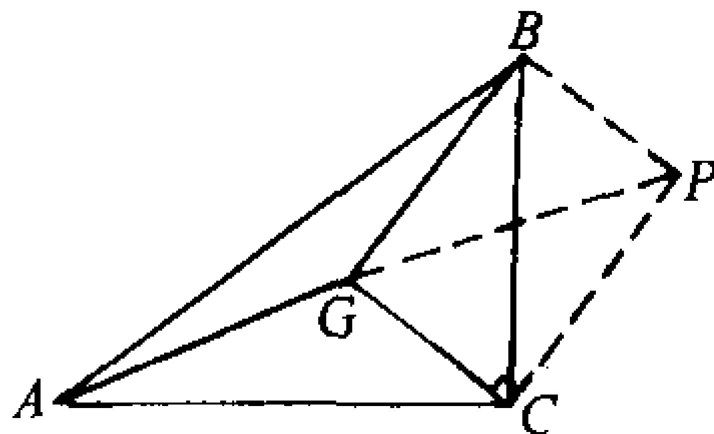
有 $S_{\triangle PDB}=27, S_{\triangle ABC}=4\times 27=108$.

8·6 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心，$GA=2\sqrt{3}$, $GB=2\sqrt{2}$, $GC=2$，求：$\triangle ABC$ 的面积.

（日本数学奥林匹克，1991 年）

[解] 延长 AG 到 P，使 $AG=GP$，连 PB、PC.

则四边形 $BPCG$ 是平行四边形.



$\because$ $GP=AG=2\sqrt{3}$,
$BP=GC=2$,
$BG=PC=2\sqrt{2}$.

又 $(2\sqrt{2})^2+2^2=(2\sqrt{3})^2$,

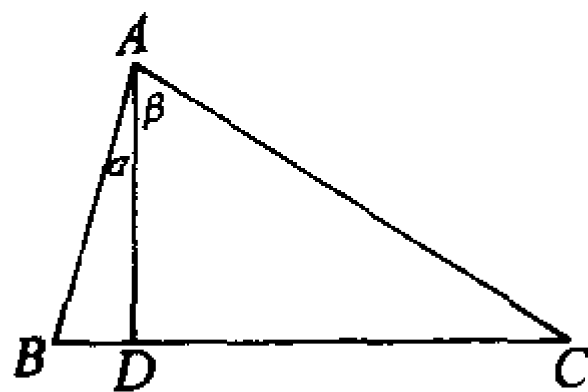
$\therefore$ $\triangle GBP$ 是以 GP 为斜边的直角三角形.

有 $S_{\triangle BGP}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BPG}=6\sqrt{2}$.

8·7 在$\triangle ABC$ 中，$\text{tg}\angle CAB=\frac{22}{7}$，从 A 引 BC 的垂线把 BC 分为长为 3 和 17 的两段，求：$\triangle ABC$ 的面积.

（第 6 届美国数学邀请赛，1988 年）



［解］ 如图,设 BC 的高 AD 的长为 x,$\angle BAD=\alpha,\angle DAC=\beta$.

则 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{x}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{17}{x}$

由已知 $\operatorname{tg}\angle CAB=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{22}{7}$

$$=\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{17}{x}}{1-\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{17}{x}},$$

有 $11x^2-70x-561=0$

$\therefore\quad x=11,\ x=-\dfrac{51}{11}$(舍去).

所以$\triangle ABC$ 的面积 S 为 $S=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}(17+3)\times 11=110$.

8·8 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,$BC:AC=3:5$,D、E、F 分别是BC、AB、CA 的中点.(1)试证在$\triangle DEF$ 的三边上存在这样的点 P,使得 $CP^2=\triangle ABC$ 的面积.(2)求出所有满足条件的点 P,并给出证明.

(中国广州、福州、重庆、武汉初中数学联赛,1986 年)

［证］ (1)不妨设 $BC=3a$,则 $AC=5a$,$AB=\sqrt{34}a$,从而$\triangle ABC$ 的面积$S=\dfrac{15}{2}a^2$

于是,对于满足条件的点 P,有 $CP=\sqrt{S}=\dfrac{1}{2}\sqrt{30}a$.

现在证明 以 C 为圆心,$\sqrt{S}$为半径的圆 C 与$\triangle DEF$ 的三边必有公共点.

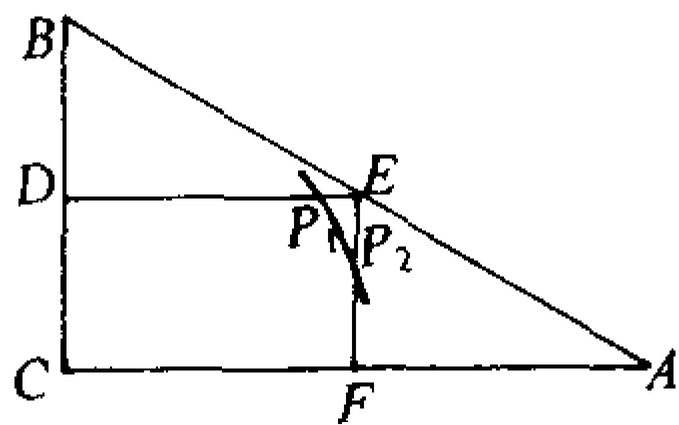
事实上,由于 $CE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{34}a>\sqrt{S}$,

且 $CD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{3}{2}a<\sqrt{S}$.

则 D 为圆C 内的点,而 E 为圆C 外的点,故圆 C 与线段DE 必相交于一点P_1,此时显然有 $CP_1^2=(\sqrt{S})^2=S$.满足条件.

(2)以 C 为圆心,$\sqrt{S}=\dfrac{1}{2}\sqrt{30}a$ 为半径的圆与线段DE、EF 顺次

交于 P_1、P_2，即为所求满足条件的所有点.



P_1 点的存在上面已证.

同理由于 $CF=\frac{5}{2}a<\sqrt{S}<CE$，可知圆 C 与线段 EF 交于一点 P_2，

另外由于 D、F 都是圆 C 内的点，故线段 EF 与圆 C 不相交.

由此可知△DEF 的三边上满足条件的点 P 有且仅有两个，如上图中 P_1、P_2 所示.

8·9 已知：α 是三角形的一个内角，并且这个三角形的某两边长是方程 $x^2-2^{\frac{5}{4}}x+(2^{\frac{3}{2}}-\sin\alpha-\cos\alpha)=0$ 的两根，求：这个三角形的面积.

（中国福建省福州市数学竞赛，1978 年）

[解] 由题意可知二次方程有实根，

$$\begin{aligned}\therefore\quad \Delta&=(-2^{\frac{5}{4}})^2-4(2^{\frac{3}{2}}-\sin\alpha-\cos\alpha)\\&=4(\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{2})\\&=4\sqrt{2}[\cos(\alpha-45^\circ)-1]\geqslant 0,\end{aligned}$$

由此得 $\cos(\alpha-45^\circ)\geqslant 1$，

但 $\cos(\alpha-45^\circ)\leqslant 1$，$\therefore$ $\cos(\alpha-45^\circ)=1$，

$\because$ α 是三角形内角，$\therefore$ $\alpha=45^\circ$.

于是 $\Delta=0$，方程有两等根 $x_1=x_2=2^{\frac{1}{4}}$.

故三角形有两边长都等于 $2^{\frac{1}{4}}$.

(1)若这两边是夹 α 角的两边，则

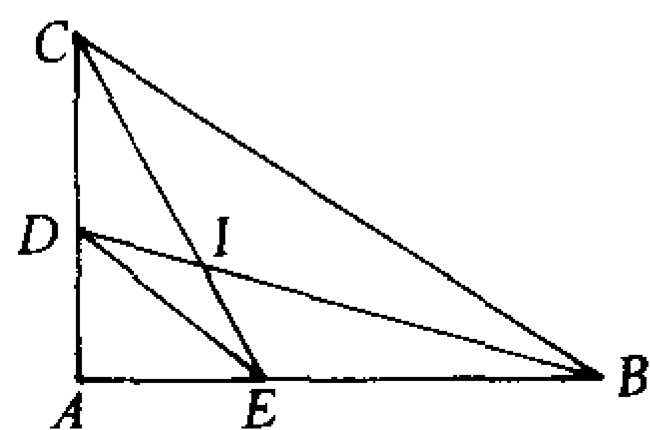
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}$；

(2)若 α 为其中某一边的对角，则这三角形为等腰直角三角形，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8·10 在直角△ABC($\angle A=90^\circ$)中，设 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线交于点 I，且分别交对边于 D 和 E，求证：$S_{四边形BCDE}=2S_{\triangle BIC}$.

（伊朗数学奥林匹克，1997 年）



[证] 设 $BC=a, AB=c, AC=b, p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,且设其内切圆半径为 r,

则 $r=p-a$.

$\because \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc=pr$,

$\therefore \quad bc=2pr=2p(p-a)$ ①

又 $S_{四边形BCDE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AED}$ ②

$\because \quad AE=\frac{bc}{a+b},\ AD=\frac{bc}{a+c}$,

$\therefore \quad S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c}$ 代入②式有

$$S_{四边形BCDE}=\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}\cdot\frac{(bc)^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{bc}{2}\left[1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\right]$$

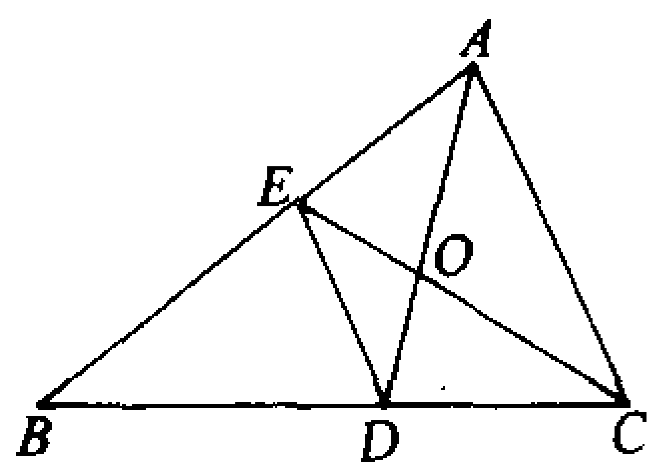
$$=\frac{bc}{2}\cdot\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{abcp}{(a+b)(a+c)} \quad ③$$

$\because \quad (a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc=2ap+2p(p-a)=2p^2$,

$\therefore \quad S_{四边形BCDE}=\frac{abc}{2p}$. 又由①有 $bc=2pr$,

因而有 $S_{四边形BCDE}=ar=2S_{\triangle BIC}$.

8·11 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle A=2\angle B$,AD为$\angle A$的平分线,$DE\parallel CA$,AD、CE相交于点O,令$\triangle AOC$,$\triangle DOE$,$\triangle BDE$的面积分别为S_1,S_2,S_3. 求证:



$$\left(\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_3}}\right)^2+1=\left(\frac{b}{c}+1\right)^2$$,其中 b,c 分别为$\angle B,\angle C$的对边.

(中国安徽省安庆市数学竞赛,1991 年)

[证] 令 $S_{\triangle AOE}=S_4$, $S_{\triangle COD}=S_5$,

因 $DE\parallel CA$, 有 $\frac{S_5}{S_2}=\frac{OC}{OE}$, $\triangle AOC\backsim\triangle DOE$,

则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{OC^2}{OE^2}$，即 $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\dfrac{OC}{OE}$.

$\therefore\quad \dfrac{S_5}{S_2}=\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$，$S_5=\sqrt{S_1S_2}$.

同理 $S_4=\sqrt{S_1S_2}$.

$\therefore\quad S_{\text{四边形}ACDE}=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

又 $\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，故 $\dfrac{S_2}{S_{\triangle BAC}}=\dfrac{BD^2}{BC^2}$，

即 $\dfrac{S_3'}{S_3+(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}=\dfrac{BD^2}{BC^2}$，

亦即 $\dfrac{S_3+(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}{S_3}=\dfrac{BC^2}{BD^2}=\left(\dfrac{BD+DC}{BD}\right)^2$

$=\left(1+\dfrac{DC}{BD}\right)^2$.

因 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，故有 $\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$，

$\therefore\quad 1+\dfrac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}{S_3}=\left(1+\dfrac{b}{c}\right)^2$，

即 $\dfrac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}{\sqrt{S_3}}+1=\left(\dfrac{b}{c}+1\right)^2$，

8·12 给定 $\triangle ABC$ 和点 O，分别将 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ 的重心记为 M_1、M_2、M_3. 求证：$S_{\triangle M_1M_2M_3}=\dfrac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

（莫斯科数学奥林匹克，1961 年）

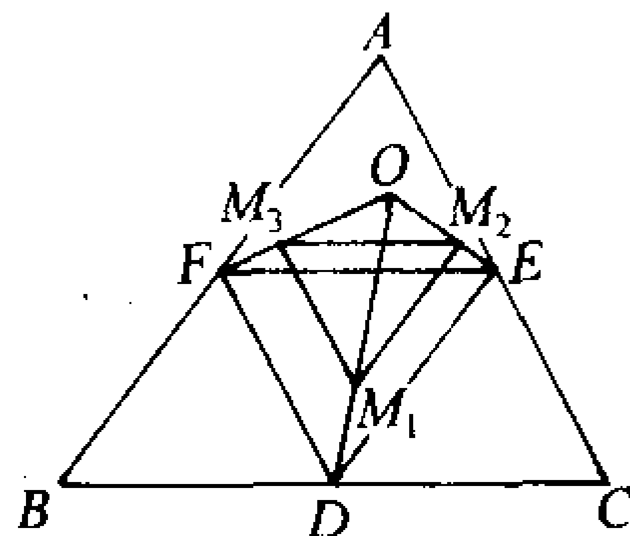
[证] 设 O、E、F 分别是 BC、CA、AB 的中点（如图）.

则 $\dfrac{OM_1}{OD}=\dfrac{OM_2}{OE}=\dfrac{OM_3}{OF}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\quad \triangle M_1M_2M_3\backsim\triangle DEF$.

但 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$，

$\therefore\quad \triangle M_1M_2M_3\backsim\triangle ABC$.



又 $\dfrac{M_1M_2}{DE}=\dfrac{OM_1}{OD}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

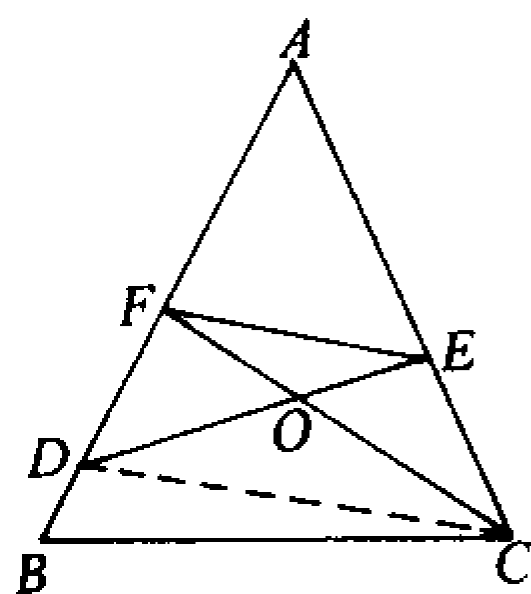
$$\therefore \quad \frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{3}.\quad \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|M_1M_2|^2}{|AB|^2}=\frac{1}{9}$$

故 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

8·13 如图,在$\triangle ABC$中,$S_{\triangle COE}=S_{\triangle DOF}$,且$\frac{AF}{FD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.求证:

(1)$\frac{CO}{FO}=\frac{AF}{FD}$;(2)$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle EOF}=\sqrt{5}+2$.

(中国四川省初中数学竞赛,1990年)



[证] (1)连接CD,则由 $S_{\triangle COE}=S_{\triangle DOF}$,

知 $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle CDF}$,有 $CD /\!/ EF$.

因此 $\triangle EOF \backsim \triangle DOC$,$\triangle AEF \backsim \triangle ACD$.

$$\text{故}\quad \frac{CO}{FO}=\frac{CD}{EF}=\frac{AD}{AF}=\frac{AF+FD}{AF}=1+\frac{FD}{AF}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{AF}{FD}.$$

(2)由 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{AE}{CE}=\frac{AF}{FD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$$S_{\triangle CEF}=S_{\triangle FOF}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle EOF}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}S_{\triangle EOF}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}S_{\triangle EOF}.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}S_{\triangle CEF}==\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}S_{\triangle EOF}$$

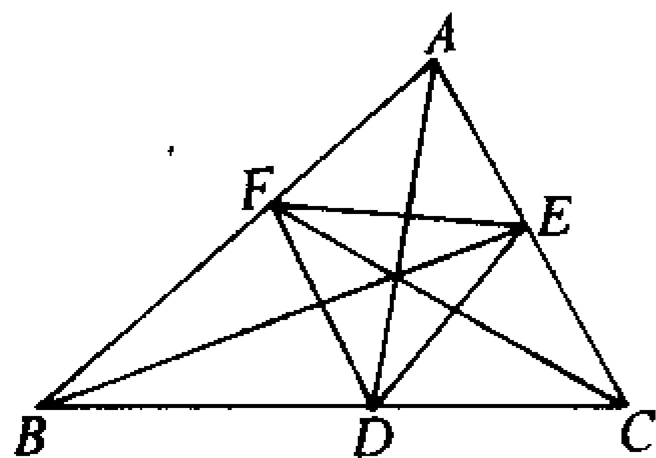
$$=(\sqrt{5}+2)S_{\triangle EOF}$$

故 $S_{\triangle AEF}:S_{\triangle EOF}=\sqrt{5}+2$.

8·14 若AD、BE、CF为$\triangle ABC$的三条内角平分线,求证:

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(中国上海市数学竞赛,1958年)



[证] 依题意,得

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a},\quad \therefore \quad \frac{AE}{AC}=\frac{c}{c+a},$$

即 $AE=\frac{bc}{c+a}$.

同理 $AF=\dfrac{bc}{a+b}$,

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\dfrac{bc}{a+b}\cdot\dfrac{bc}{a+c}}{bc}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

同理 $\dfrac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}$,

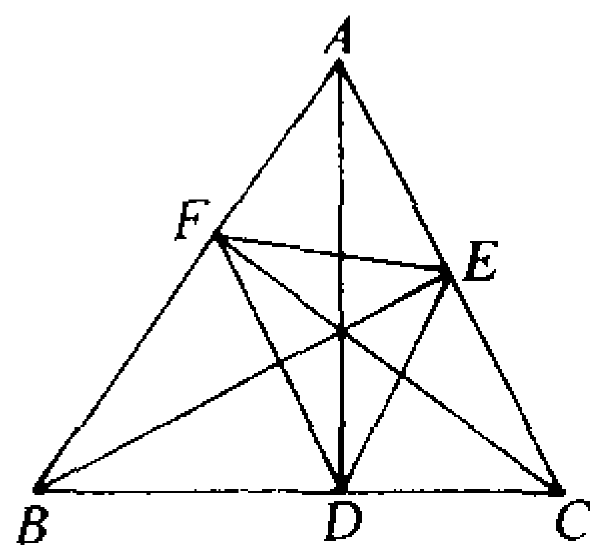
且 $\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}$.

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-\left(\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}\right)$$

$$=1-\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

8·15 设$\triangle DEF$是锐角$\triangle ABC$的垂足三角形(如图).



(1)求证:$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\cos^2 A$;

(2)求证:$\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=2\cos A\cos B\cos C$;

(3)当$\angle A$为直角时,上面两个结果有什么变化?

(4)当$\angle A$为钝角时,上面两个结果,又有什么变化?

(中国江苏省数学竞赛,1978年)

[解] (1)$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=\dfrac{AE}{AB}\cdot\dfrac{AF}{AC}=\cos A\cdot\cos A=\cos^2 A$;

(2)同理 $\dfrac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BAC}}=\cos^2 B$, $\dfrac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACB}}=\cos^2 C$.

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2 C$$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

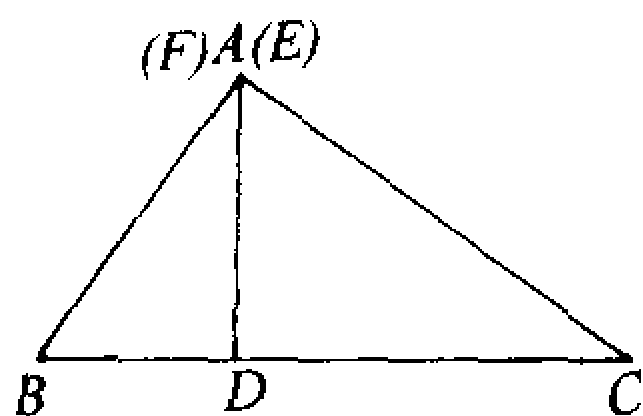
$=1+\cos C[-\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=1-2\cos A\cos B\cos C.$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle DCE})}{S_{\triangle ABC}}$$

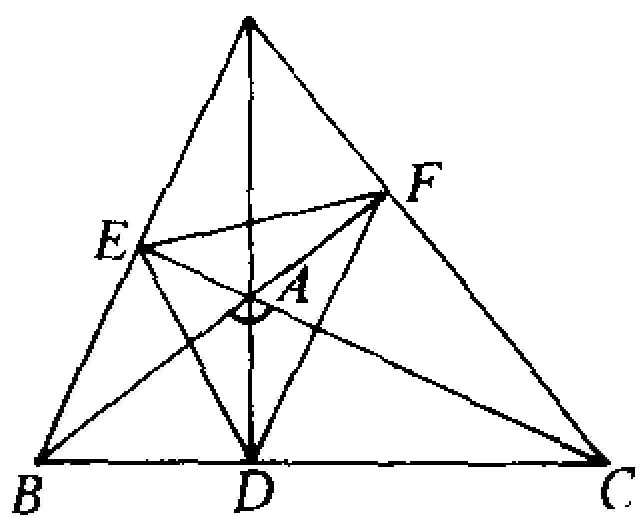
$=1-(1-2\cos A\cos B\cos C)$

$=2\cos A\cos B\cos C.$



(3)如图，当$\angle A$为直角时，两个垂足E、F都和A点重合，显然

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=0,\ \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=0,$$



(4)如图，$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\cos^2 A,$

而 $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$

$=\dfrac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}-S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}$

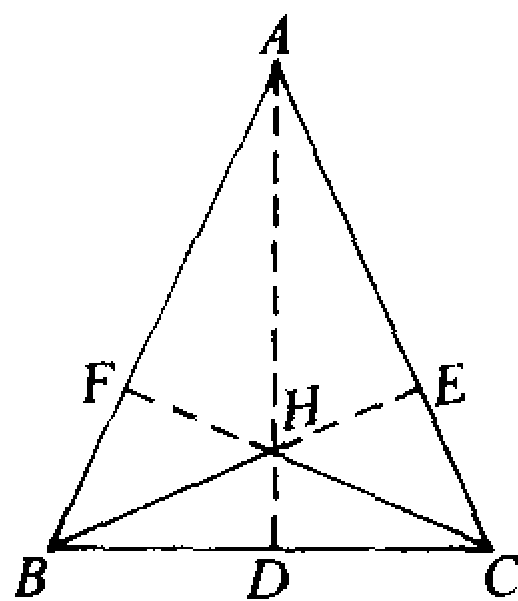
$=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1$

$=[1-2\cos A\cos B\cos C]-1$

$=-2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C.$

8·16 设H是等腰三角形ABC的垂心.在底边BC保持不变的情况下，让顶点A至底边BC的距离变小，这时乘积$S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}$的值变小，变大，还是不变？证明你的结论.

(中国初中数学联赛，1993年)



[解1] 不妨设角A是锐角.连结AH并延长交BC于D点，延长BH，CH，分别交AC，AB于E，F.

$\because\ \angle BHD=\angle AHE,\ \therefore\ \angle HBD=\angle HAE,$

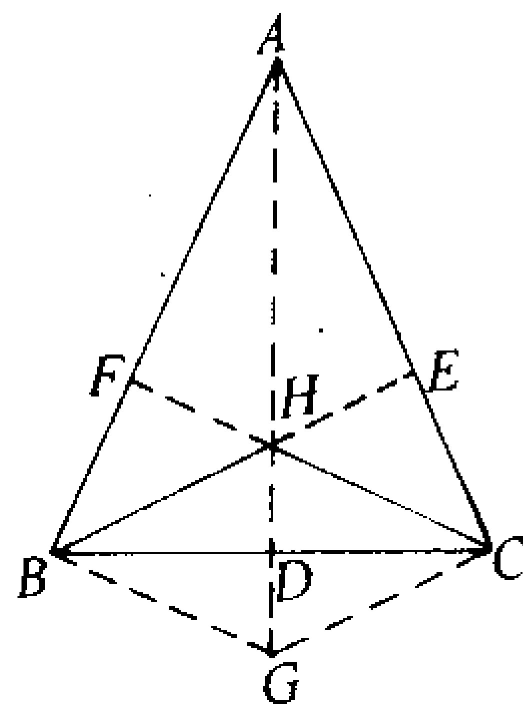
因此 $Rt\triangle BDH\backsim Rt\triangle ADC,\ \therefore\ \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DC}{HD}.$

又 $BD=DC=\dfrac{1}{2}BC,$

$\therefore \quad AD \cdot HD = BD \cdot DC = \frac{1}{4} BC^2.$

于是 $\quad S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC} = \left(\frac{1}{2} AD \cdot BC\right) \cdot \left(\frac{1}{2} HD \cdot BC\right) = \frac{1}{16} BC^4.$

当$\angle A \geqslant 90°$时，同理可证上式也成立. 由于 BC 是不变的，所以当 A 点至 BC 的距离变小时，乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}$保持不变.



[解 2] 作图如解 1，再延长 AD 至 G，使 $DG = DH$，并分别连结 BG、GC. 由$\triangle HBD \cong \triangle GBD$ 知

$\angle CBG = \angle CBH = \angle CAG.$

因而 A、B、G、C 四点共圆. 由相交弦定理，得

$$AD \cdot HD = AD \cdot DG = BD \cdot DC = \frac{1}{4} BC^2.$$

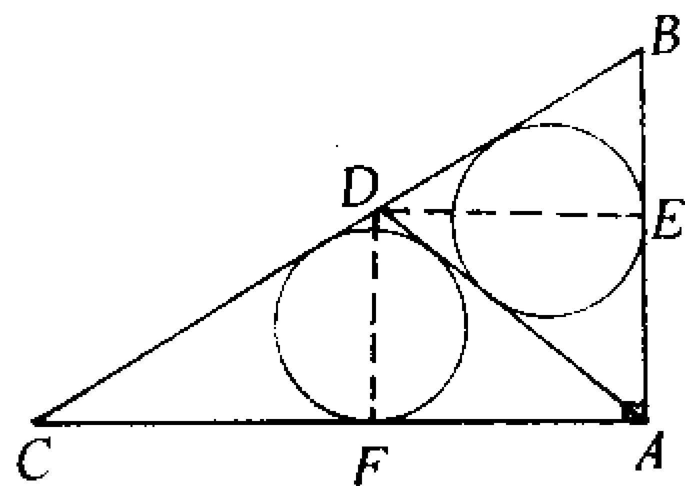
$$\therefore \quad S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC} = \left(\frac{1}{2} AD \cdot BC\right) \cdot \left(\frac{1}{2} HD \cdot BC\right) = \frac{1}{16} BC^4.$$

由于 BC 是不变的，所以当点 A 至 BC 的距离变小时，乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}$保持不变.

8·17 D 为 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的一点，且$\triangle ADB$ 与$\triangle ADC$ 的内切圆相等. 求证：$S_{\triangle ABC} = AD^2$.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证] 作 $DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F，设 $AB = c$，$AC = b$，$BD = n$，$CD = m$.



显然 $\quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc.$

由 $\quad \triangle BDE \backsim \triangle BCA$ 得 $\quad \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CA},$

即 $\quad DE = \frac{n}{n+m} b.$

同理 $\quad DF = \frac{n}{n+m} c.$

在$\triangle ADE$ 内，由勾股定理得

$$AD^2 = \frac{n^2 b^2 + m^2 c^2}{(n+m)^2}.$$

$\triangle ADB$ 和$\triangle ADC$ 的内切圆半径分别为

$$\frac{2S_{\triangle ADB}}{AD+c+n},\ \frac{2S_{\triangle ADC}}{AD+b+m}.$$

$\because$ $\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{n}{m}$，及两内切圆半径相等，则

$$\frac{n}{AD+c+n}=\frac{m}{AD+b+m},$$

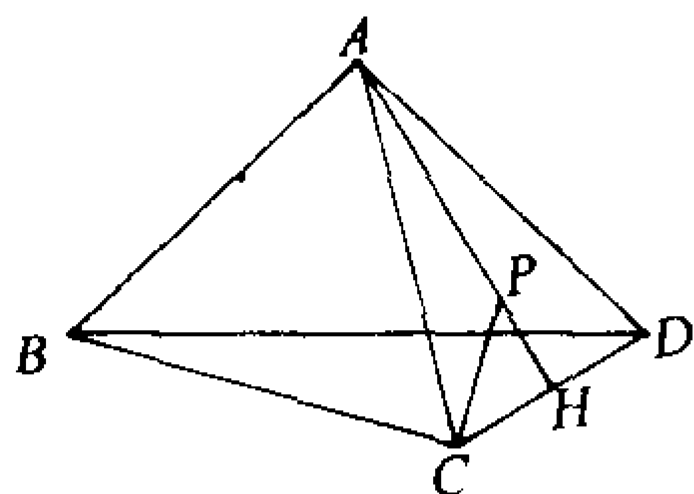
即 $AD(m-n)=nb-mc$.

若 $m=n$，则 $b=c$，且 $AD^2=\frac{1}{4}\cdot 2b^2=\frac{1}{2}bc=S_{\triangle ABC}$.

若 $m\neq n$，则 $\frac{n^2b^2+m^2c^2}{(n+m)^2}=\frac{(nb-mc)^2}{(m-n)^2}$.

化简得 $\frac{n^2b^2+m^2c^2}{(n+m)^2}=\frac{1}{2}bc$,

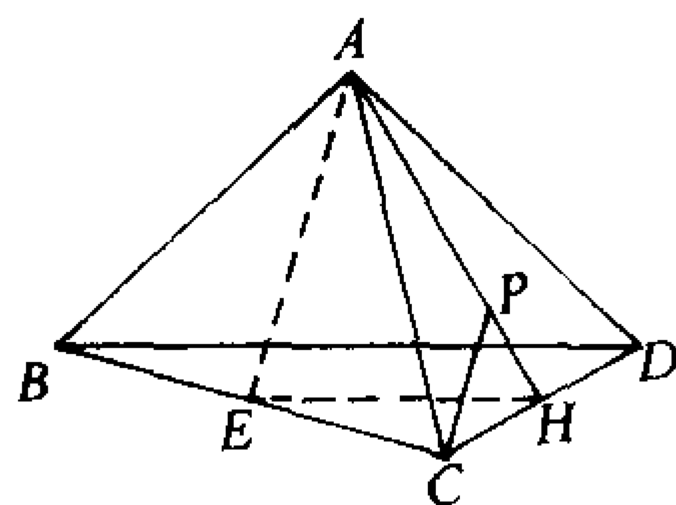
即 $AD^2=\frac{1}{2}bc=S_{\triangle ABC}$.



8·18 已知;如图，$AB=BC=CA=AD$，$AH\perp CD$ 于 H，$CP\perp BC$ 交 AH 于 P，求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AP\cdot BD$.

（中国初中数学联赛，1984 年）

[证 1] 作 $AE\perp BC$，交 BC 于 E，则 E 是 BC 的中点.又 H 是 CD 的中点，



$\therefore$ 连 EH 有 $EH\parallel BD$，$\therefore$ $\angle HEC=\angle DBC$.

$\because$ $AH\perp CD$，$AE\perp BC$，

$\therefore$ A、H、C、E 四点共圆.

$\therefore$ $\angle HAC=\angle HEC=\angle DBC$，

又 $\angle EAC=\angle EHC=\angle BDC=30°$，

$\angle PCA=90°-60°=30°$，

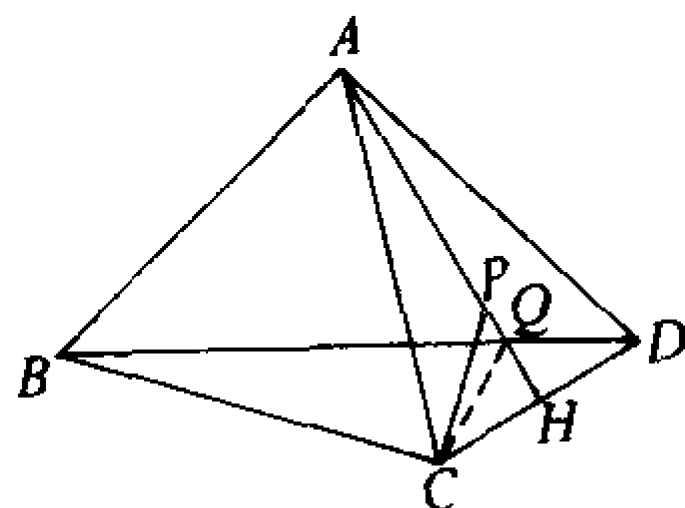
$\therefore$ $\angle PCA=\angle BDC$

$\therefore$ $\triangle ACP\backsim\triangle BDC$

$\therefore$ $AP\cdot BD=BC\cdot AC$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}AP\cdot BD.$

[证 2]　记 BD 与 AH 交于 Q



则由 $AC=AD$, $AH\perp CD$, 得 $\angle ACQ=\angle ADQ$,

$\because\quad AB=AD$,

$\therefore\quad \angle ADQ=\angle ABQ$,

$\angle ABQ=\angle ACQ$.

因此, A、B、C、Q 四点共圆.

$\therefore\quad \angle AQB=\angle ACB=60^{\circ}$, $\angle DQH=60^{\circ}$.

又$\because\quad \angle QHD=90^{\circ}$, $\therefore\quad \angle BDC=90^{\circ}-60^{\circ}=30^{\circ}$.

$\because\quad \angle ACP=90^{\circ}-60^{\circ}=30^{\circ}$, $\therefore\quad \angle ACP=\angle BDC$.　　①

又$\because\quad \angle APC=90^{\circ}+\angle PCH$(外角定理)

$\angle BCD=90^{\circ}+\angle PCH$,

$\therefore\quad \angle APC=\angle BCD$.　　②

由①、②得　$\triangle APC\backsim\triangle BCD$, $\therefore\quad AC:BD=AP:BC$.

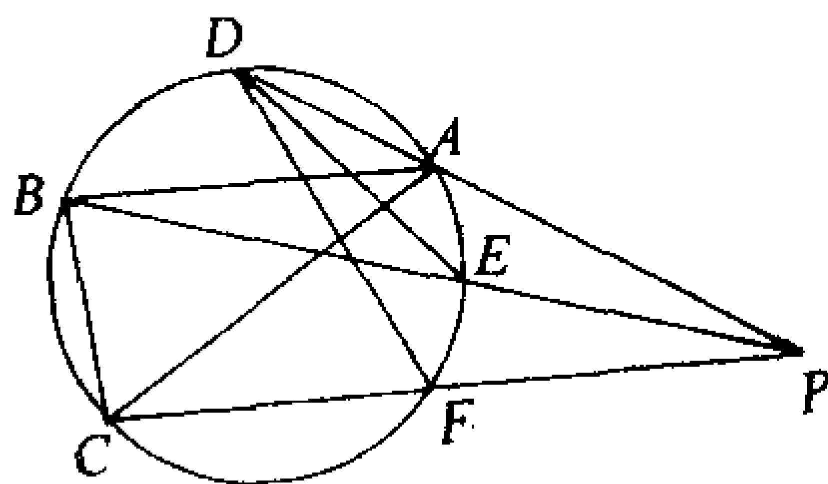
即　$BC^2=AC\cdot BC=AP\cdot BD$.

$\because\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2$, $\therefore\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}AP\cdot BD$.

8·19　如图, P 为 $\triangle ABC$ 外接圆外一点, 直线 PA、PB、PC 与外接圆交于 D、E、F. 求证: $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD\cdot PE\cdot PF}{PA\cdot PB\cdot PC}$.

(中国湖南省长沙市初中数学竞赛, 1991 年)

[证]　设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, 则 $\triangle DEF$ 的外接圆半径亦为 R.



$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$,

$S_{\triangle DEF}=\frac{DE\cdot EF\cdot FD}{4R}$.

由　$\angle ABP=\angle ABE=\angle ADE=\angle PDE$,

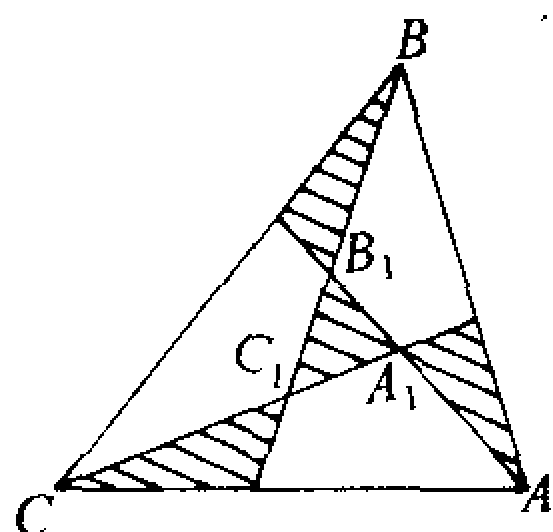
可得　$\triangle PAB\backsim\triangle PED$.

故　$\frac{AB}{ED}=\frac{PA}{PB}$.

同理，由 $\triangle PBC \backsim \triangle PEF$，可得 $\dfrac{BC}{FE}=\dfrac{PB}{PF}$.

由 $\triangle PCA \backsim \triangle PDF$，可得 $\dfrac{CA}{DF}=\dfrac{PC}{PD}$.

故 $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{DE\cdot EF\cdot FD}{AB\cdot BC\cdot CA}=\dfrac{PD\cdot PE\cdot PF}{PA\cdot PB\cdot PC}$.



8·20 若图中带斜线的四个三角形等积，求证图中不带斜线的三个四边形也等积. 又若一个三角形面积等于1，求：每个四边形的面积.

（第17届全苏数学奥林匹克，1983年）

［解］ 连结 AC_1 及 DB_1.

$\because \quad S_{\triangle ADA_1}=S_{\triangle A_1B_1C_1}$,

$\therefore \quad AC_1 /\!/ DB_1$.

则 $\dfrac{AA_1}{A_1B_1}=\dfrac{AC_1}{DB_1}=\dfrac{BC_1}{BB_1}=1+\dfrac{B_1C_1}{BB_1}$. ①

同理 $\dfrac{BB_1}{B_1C_1}=1+\dfrac{C_1A_1}{CC_1}$. ②

$\dfrac{CC_1}{C_1A_1}=1+\dfrac{A_1B_1}{AA_1}$ ③

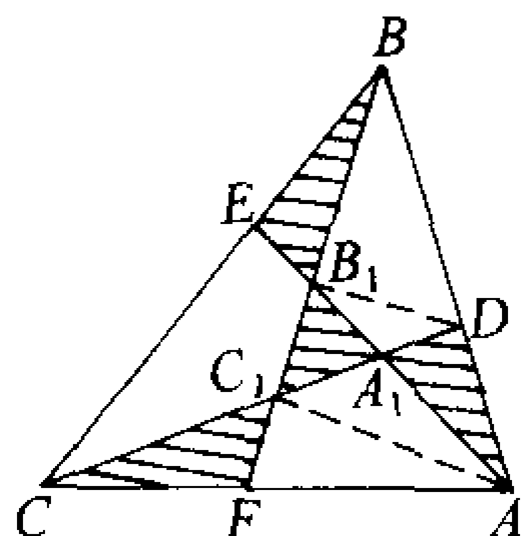
记 $\dfrac{AA_1}{A_1B_1}=a$，$\dfrac{BB_1}{B_1C_1}=b$，$\dfrac{CC_1}{C_1A_1}=c$，

于是①～③化为

$a=1+\dfrac{1}{b}$，$b=1+\dfrac{1}{c}$，$c=1+\dfrac{1}{a}$.

由此可得

$a^2-a-1=0$，$b^2-b-1=0$，$c^2-c-1=0$.



将负根舍去，解得 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BB_1}{B_1C_1}=b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

设四边形的面积为 x，于是有

$$\frac{2x+2}{x+2}=\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{AD}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore \quad (3-\sqrt{5})x=2(\sqrt{5}-1)$.

解得　$x=1+\sqrt{5}$，即四边形的面积为　$1+\sqrt{5}$.

8·21　在正△ABC 的边 BC、CA、AB 上有三点 A_1、B_1、C_1，使 $AC_1=2C_1B$，$BA_1=2A_1C$，$CB_1=2B_1A$. 求证：直线 AA_1、BB_1、CC_1 所围成的三角形的面积是△ABC 面积的 $\frac{1}{7}$.

（匈牙利数学奥林匹克，1942 年）

[证 1]　我们证明更一般的命题：

设△ABC 是任一三角形，在边 BC、CA 和 AB 上有三点 A_1、B_1 和 C_1，使

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\lambda.$$

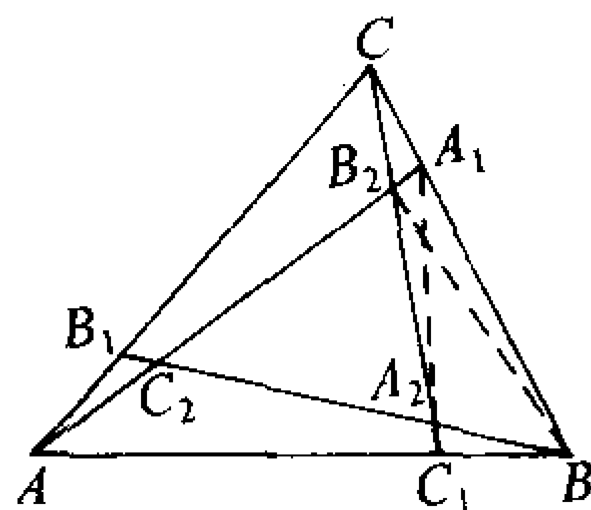
设线段 AA_1、BB_1、CC_1 所交得的三角形是△$A_2B_2C_2$，则

$$\frac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}.$$

由于同底三角形的面积比等于对应高的比，在△$C_1A_1B_2$ 和△BB_2A_1 中有相同的底，则它们的面积之比等于从 C_1 和 B 向边 A_2B_2 的高之比，而这个高的比等于

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC_1+C_1B}=\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

于是　$$\frac{S_{\triangle C_1A_1B_2}}{S_{\triangle BB_2A_1}}=\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$



又由三角形的高相同时，面积比等于底的比，

则　$$\frac{S_{\triangle BB_2A_1}}{S_{\triangle CB_2A_1}}=\frac{BA_1}{CA_1}=\lambda.$$

上述两个等式相乘得　$$\frac{S_{\triangle CB_2A_1}}{S_{\triangle C_1A_1B_2}}=\frac{\lambda+1}{\lambda^2}.$$

于是由△CB_2A_1 和△$C_1A_1B_2$ 的 A_1 到对边的高相同，可得

$$\frac{S_{\triangle CB_2A_1}}{S_{\triangle C_1A_1B_2}}=\frac{CB_2}{C_1B_2}=\frac{\lambda+1}{\lambda^2}.\quad\therefore\quad\frac{CB_2}{CC_1}=\frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1},$$

即 $\dfrac{S_{\triangle ACB_2}}{S_{\triangle ACC_1}}=\dfrac{CB_2}{CC_1}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}$.

再由 $\dfrac{S_{\triangle ACC_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AC_1}{AB}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$. 可得 $\dfrac{S_{\triangle ABC_2}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$.

即 $S_{\triangle ABC_2}=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}S_{\triangle ABC}$.

同理 $S_{\triangle BAC_2}=S_{\triangle CBA_2}=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}S_{\triangle ABC}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle A_2B_2C_2}&=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACB_2}-S_{\triangle BAC_2}-S_{\triangle CBA_2}\\&=\left(1-\frac{3\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}\right)S_{\triangle ABC}\\&=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

即 $\dfrac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}$.

当 $\lambda=2$ 即为本题.

[证 2] 直线 B_1C_2B 与 $\triangle AA_1C$ 相截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_2}{C_2A_1}\cdot\frac{A_1B}{CB}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{AC_2}{C_2A_1}=\frac{B_1A}{CB_1}=\frac{CB}{A_1B}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

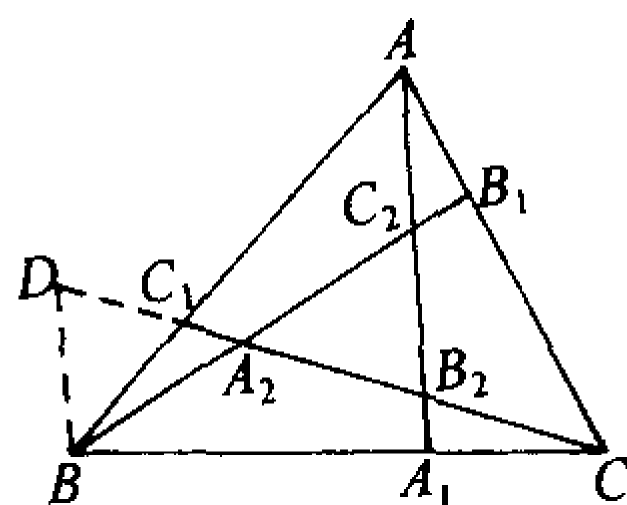
$$\therefore\quad AC_2=\frac{3}{4}C_2A_1=\frac{3}{7}AA.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle AC_2B_1}&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}S_{\triangle AA_1C}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}\end{aligned}$$

同理 $S_{\triangle A_2C_1B}=S_{\triangle CB_2A_1}=\dfrac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle A_2B_2C_2}&=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AA_1C}-S_{\triangle BCC_1}-S_{\triangle BB_1A}\\&\quad+S_{\triangle AC_2B_1}+S_{\triangle A_2C_1B}+S_{\triangle CB_2A_1}\\&=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

[证 3]　过 B 作 $BD \parallel A_1A$，交 CC_1 的延长线于点 D，于是有



$\triangle CB_2A_1 \backsim \triangle CDB$，$\triangle C_1DB \backsim \triangle C_1B_2A_1$.

$\because \quad CA_1 = \frac{1}{3}CB$，$C_1B = \frac{1}{2}AC_1$，

$\therefore \quad B_2A_1 = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AB_2 = \frac{1}{6}AB_2$

$= \frac{1}{7}AA_1$.

$\therefore \quad S_{\triangle B_2A_1C} = \frac{1}{7}S_{\triangle AA_1C} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore \quad S_{\triangle AB_2C} = S_{\triangle AA_1C} - S_{\triangle B_2A_1C} = \frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$.

同理　$S_{\triangle ABC_2} = S_{\triangle A_2BC} = \frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore \quad S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AB_2C} - S_{\triangle ABC_2} - S_{\triangle A_2BC}$

$= \left(1 - \frac{2}{7} \times 3\right)S_{\triangle ABC} = \frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$.

[证 4]　$\because \quad BC_1 = \frac{1}{2}C_1A$，$B_1C = \frac{2}{3}AC$，

$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{S_{\triangle CC_1B}}{S_{\triangle CC_1A}} = \frac{BC \cdot \sin\angle BCC_1}{AC \cdot \sin\angle ACC_1}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{BC \cdot \sin\angle BCA_2}{B_1C \cdot \sin\angle B_1CA_2} = \frac{2S_{\triangle A_2BC}}{3S_{\triangle A_2B_1C}}$.

$\therefore \quad S_{\triangle A_2BC} = \frac{3}{4}S_{\triangle A_2B_1C} = \frac{3}{7}S_{\triangle B_1BC} = \frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$.

同理　$S_{\triangle AB_2C} = S_{\triangle ABC_2} = \frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$.

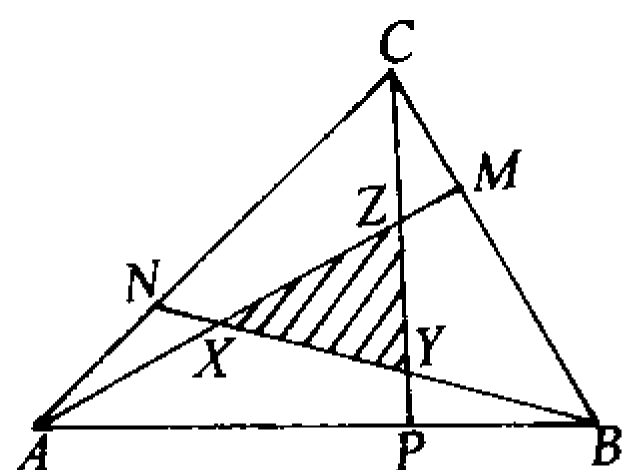
$\therefore \quad S_{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$.

注　此结论可推广，具体详见后一道问题.

8·22　在$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别取点 M、N、P，使适合 $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$，这里 k 是大于 1 的已知数. 连接线段 AM、BN、

CP,已知$\triangle ABC$的面积是S,求:直线AM、BN、CP所围成的三角形的面积.

(波兰数学奥林匹克,1951年)



[解] 设X、Y、Z是直线AM、BN、CP的交点.

因为等底三角形面积之比等于对应高的比,所以有

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S}=\frac{BM}{BC},\ \frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ABM}}=\frac{AX}{AM}.$$

于是 $\dfrac{S_{\triangle ABX}}{S}=\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{AX}{AM}.$ ①

$\because\ \dfrac{BM}{MC}=k,$

$\therefore\ \dfrac{BC}{BM}=\dfrac{BM+MC}{BM}=1+\dfrac{1}{k}=\dfrac{k+1}{k}.$

即 $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{k}{k+1}.$ ②

由梅涅劳斯定理有 $\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{CB}{BM}\cdot\dfrac{MX}{XA}=1.$

由 $\dfrac{AN}{CN}=\dfrac{1}{k}$,得 $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k}+1\right)\cdot\dfrac{MX}{XA}=1.$

即 $\dfrac{AX}{XM}=\dfrac{k+1}{k^2},$

$\therefore\ \dfrac{AX}{AM}=\dfrac{k+1}{k^2+k+1}.$ ③

把②、③代入①得 $S_{\triangle ABX}=\dfrac{k}{k^2+k+1}S.$

同理可得 $S_{\triangle BCY}=S_{\triangle CAZ}=S_{\triangle ABX}=\dfrac{k}{k^2+k+1}S.$

又 $S_{\triangle XYZ}=S-(S_{\triangle ABX}+S_{\triangle BCY}+S_{\triangle CAZ}),$

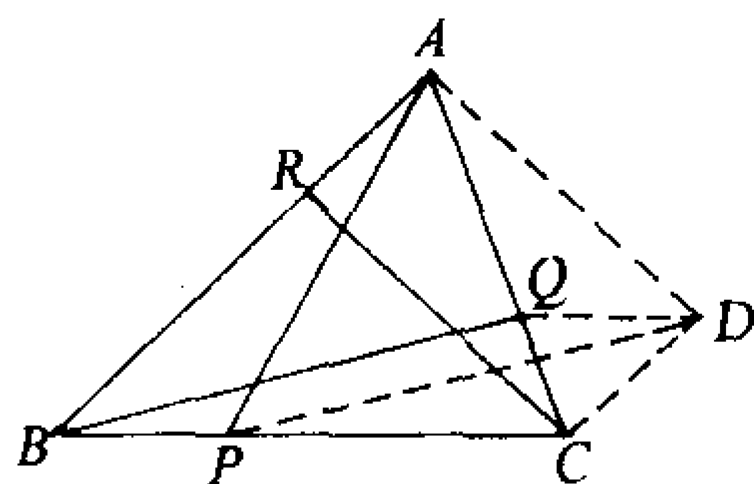
$\therefore\ S_{\triangle XYZ}=S-\dfrac{3k}{k^2+k+1}S=\dfrac{(k-1)^2}{k^2+k+1}S.$

8·23 $\triangle ABC$的边BC、CA、AB上的点P、Q、R分别内分各边为$\dfrac{t}{1-t}$,以线段AP、BQ、CR的长为边长的三角形的面积为k,$\triangle ABC$的

面积为L.求:$\frac{k}{L}$(用t表示).

(日本数学奥林匹克,1991年)

[解] 过A、C分别作RC、RA的平行线相交于D,则四边形$ARCD$为平行四边形.



连DP、DQ.则由

$$\frac{AR}{RB}=\frac{t}{1-t},\frac{CQ}{QA}=\frac{t}{1-t},\frac{BP}{RC}=\frac{t}{1-t}$$

$\therefore$ $AR=tAB, CQ=tCA, BP=tBC$,

$$\frac{CD}{CQ}=\frac{AR}{CQ}=\frac{tAB}{tAC}=\frac{AB}{AC}.$$

又 $\angle DCQ=\angle BAC$, $\therefore$ $\triangle CDQ\backsim\triangle ABC$.

则 $\frac{DQ}{BC}=\frac{CQ}{AC}=t$. 于是 $DQ=tBC=BP$.

又 $\angle DQC=\angle ACB$, $\therefore$ $DQ /\!/ BP$,

故四边形$BPDQ$为平行四边形. 则 $PD=BQ$.

从而$\triangle APD$是以AP、BQ、CR为三边长的三角形.

$$k=S_{\triangle APD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CPD}. \quad ①$$

由 $$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle CAB}=\frac{AR}{AB}=t,$$

可得 $$S_{\triangle ACD}=tL. \quad ②$$

由 $$\frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}CD\cdot CP\cdot\sin\angle PCD}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}=\frac{AR}{AB}\cdot\frac{CP}{BC}=t(1-t),$$

可得 $$S_{\triangle CPD}=t(1-t)L. \quad ③$$

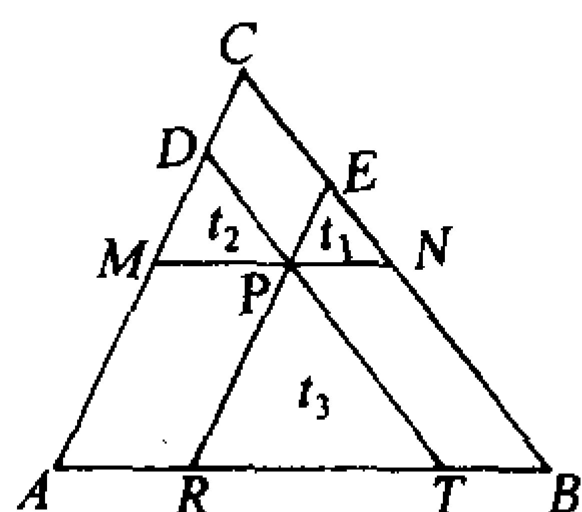
由 $$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BP}{BC}=t,$$

可得 $$S_{\triangle ABP}=tL. \quad ④$$

由①式及②、③、④式得

$$k=L+tL-tL-t(1-t)L=(1-t+t^2)L.$$

即 $\dfrac{k}{L}=1-t+t^2$.



8·24 如图，P 是$\triangle ABC$ 内一点，过 P 分别作直线平行于$\triangle ABC$ 的各边，所形成的小三角形 t_1、t_2 和 t_3 的面积分别是 4、9 和 49. 求：$\triangle ABC$ 的面积.

（第 2 届美国数学邀请赛，1984 年）

［解］ 如图，设 $MP=p, PN=q, RT=r, AB=c$，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$p+q+r=c.$$

$\because$ $\triangle PEN \backsim \triangle MDP \backsim \triangle RPT \backsim \triangle ABC$,

$\therefore$ $\dfrac{4}{S}=\dfrac{q^2}{c^2}$, $\dfrac{9}{S}=\dfrac{p^2}{c^2}$, $\dfrac{49}{S}=\dfrac{r^2}{c^2}$,

则 $\dfrac{2}{\sqrt{S}}=\dfrac{q}{c}$, $\dfrac{3}{\sqrt{S}}=\dfrac{p}{c}$, $\dfrac{7}{\sqrt{S}}=\dfrac{r}{c}$,

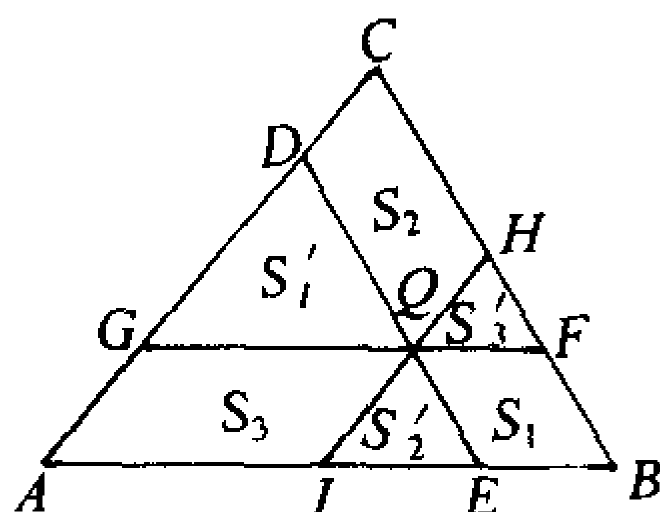
三式相加得 $\dfrac{2+3+7}{\sqrt{S}}=\dfrac{p+q+r}{c}=1$.

$\therefore$ $S=(2+3+7)^2=144$.

即$\triangle ABC$ 的面积为 144.

8·25 通过$\triangle ABC$ 内部一点 Q 引平行于三角形三边的直线，这些直线分三角形为六部分，已知三个平行四边形部分的面积为 S_1、S_2、S_3，求：$\triangle ABC$ 的面积.

（中国上海市数学竞赛，1991 年）



［解］ 记 $S_{\triangle QDG}$，$S_{\triangle QIE}$，$S_{\triangle QFH}$ 分别为 S'_1、S'_2、S'_3，

$$\because \quad \frac{\frac{1}{2}S_1}{S'_2}=\frac{S_{\triangle QBE}}{S'_2}=\frac{BE}{EI}=\frac{FQ}{EI}$$

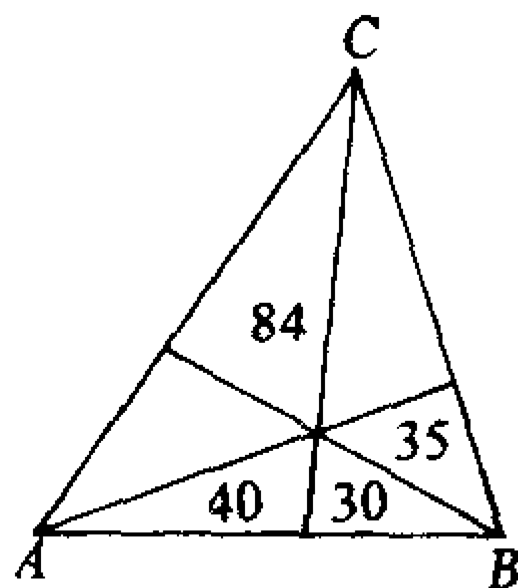
$$=\frac{HQ}{QI}=\frac{S_2}{S_3},$$

$$\therefore \quad S_2{'}=\frac{S_3S_1}{2S_2}.$$

同理 $S_1{}' = \dfrac{S_2S_3}{2S_1}$，$S_3{}' = \dfrac{S_1S_2}{2S_3}$.

$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2 + S_3 + \dfrac{S_2S_3}{2S_1} + \dfrac{S_3S_1}{2S_2} + \dfrac{S_1S_2}{2S_3}$.

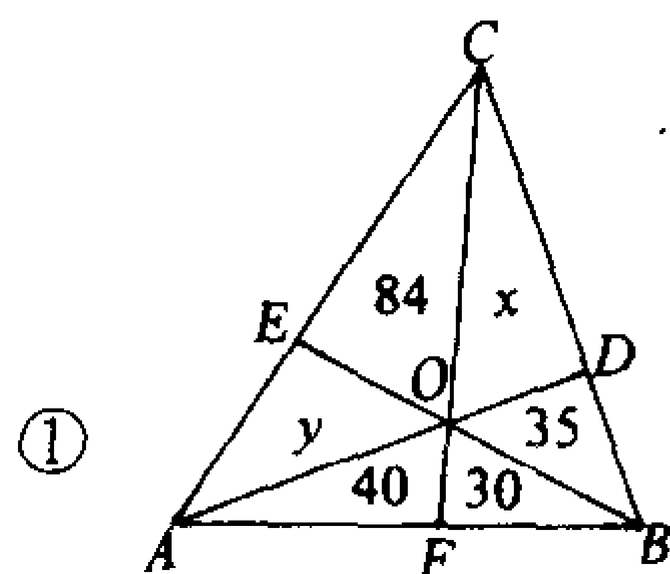
8·26 如图，$\triangle ABC$ 被通过它的三个顶点与一个内点的三条直线分为六个小的三角形，其中四个小三角形的面积已在图中标出，求：$\triangle ABC$ 的面积.



（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）

[解 1] 设 $S_{\triangle COD} = x$，$S_{\triangle AOE} = y$.

利用"如果两个三角形的高相等，那么这两个三角形的面积比等于对应底边的边长之比"可得



$$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle BOF}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

$\therefore \quad \dfrac{84 + y + 40}{x + 35 + 30} = \dfrac{4}{3}$，

即 $\dfrac{124 + y}{65 + x} = \dfrac{4}{3}$. ①

又 $\because \quad \dfrac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOA}} = \dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle COA}} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{35}{40 + 30} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore \quad \dfrac{x}{84 + y} = \dfrac{1}{2}$. ②

解①、②得 $x = 70$，$y = 56$.

$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = 84 + 56 + 40 + 30 + 35 + 70 = 315$.

[解 2] $\because \quad S_{\triangle OAF} = 40$，$S_{\triangle OFB} = 30$，

$S_{\triangle OAB} = 70$，$S_{\triangle OBD} = 35$，

$\therefore \quad AF : FB = 4 : 3$，$AO : OD = 2 : 1$，

直线 COF 与 $\triangle ABD$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{OD}{AO} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{DC} = 1. \quad \therefore \quad BC : DC = 3 : 2.$$

$\therefore \quad BD = \dfrac{1}{3} BC$.

$\because \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle AFO} + S_{\triangle FBO} + S_{\triangle OBD} = 105$，

$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ABD} = 315$.

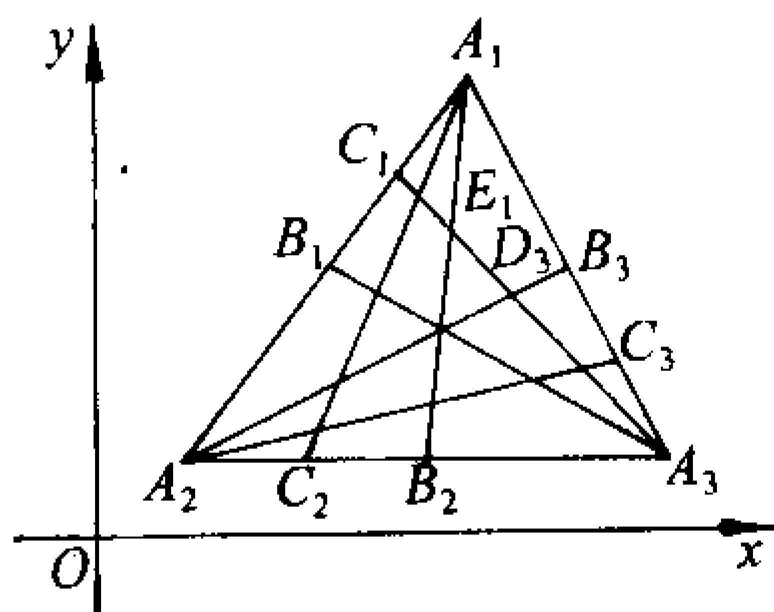
注 由此解法可见,条件 $S_{\triangle CEO}=84$ 多余.

8·27 A_1、A_2、A_3 为平面上的三点,今约定 $A_4=A_1$, $A_5=A_2$,对于 $n=1,2,3$,令 B_n 为 A_nA_{n+1}的中点,C_n 为 A_nB_n 的中点,A_nC_{n+1}与 B_nA_{n+2}交于 D_n, A_nB_{n+1} 与 C_nA_{n+2} 交于 E_n. 试求: $\triangle D_1D_2D_3$ 与 $\triangle E_1E_2E_3$ 的面积之比.

(亚太地区数学奥林匹克,1989 年)

[解] 建立坐标系.设 A_n 坐标为(x_n,y_n).于是

$$C_2\left(\frac{x_3+3x_2}{4},\frac{y_3+3y_2}{4}\right),\quad B_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$



$$l_{A_1C_2}:\frac{y-y_1}{\frac{y_3+3y_2}{4}-y_1}=\frac{x-x_1}{\frac{x_3+3x_2}{4}-x_1}.$$

$$l_{A_3B_1}:\frac{y-y_3}{\frac{y_1+y_2}{2}-y_3}=\frac{x-x_3}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_3}.$$

整理 $l_{A_1C_2}$, $l_{A_3B_1}$, 得

$$\begin{cases}\dfrac{y-y_1}{y_3+3y_2-4y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_3+3x_2-4x_1},\\[2ex] \dfrac{y-y_3}{y_1+y_2-2y_3}=\dfrac{x-x_3}{x_1+x_2-2x_3}.\end{cases}$$

解得 $D_1\left(\dfrac{3x_1+3x_2+x_3}{7},\dfrac{3y_1+3y_2+y_3}{7}\right)$.

同法可求

$$E_1\left(\frac{3x_1+x_2+x_3}{5},\frac{3y_1+y_2+y_3}{5}\right).$$

将下标 1,2,3 轮换便产生其他点坐标. 故

$$S_{\triangle D_1D_2D_3}=\frac{1}{7^2}\begin{vmatrix}1 & 3x_1+3x_2+x_3 & 3y_1+3y_2+y_3\\ 1 & 3x_2+3x_3+x_1 & 3y_2+3y_3+y_1\\ 1 & 3x_3+3x_1+x_2 & 3y_3+3y_1+y_2\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{49}\begin{vmatrix}1 & 3x_1+3x_2+x_3 & 3y_1+3y_2+y_3\\0 & 2x_3-2x_1 & 2y_3-2y_1\\0 & 2x_3-2x_2 & 2y_3-2y_2\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{4}{49}\begin{vmatrix}x_3-x_1 & y_3-y_1\\x_3-x_2 & y_3-y_2\end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

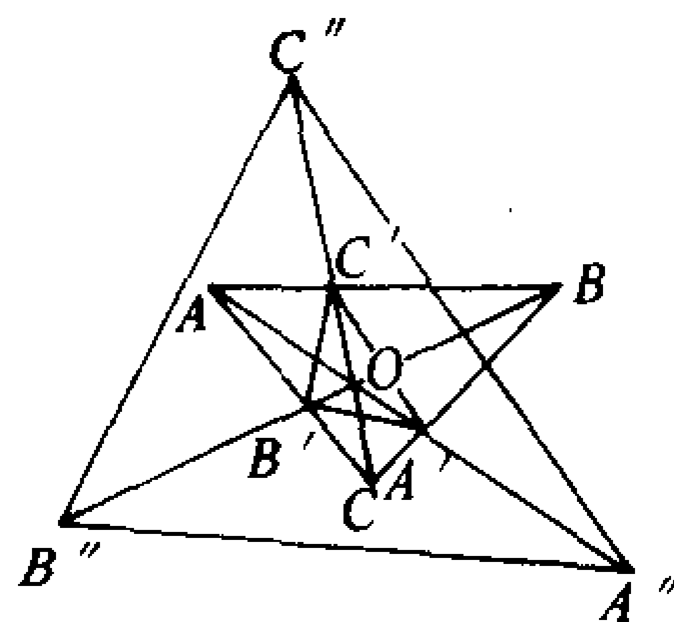
同理可得 $S_{\triangle E_1E_2E_3}=\frac{4}{25}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}$ 的绝对值.

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle D_1D_2D_3}}{S_{\triangle E_1E_2E_3}}=\frac{25}{49}.$$

8·28 在$\triangle ABC$的边AB、AC、BC上依次取点C'、B'、A'，使得线段AA'、BB'、CC'相交于一点，点A''、B''、C''依次是A、B、C关于A'、B'、C'的对称点.求证：$S_{\triangle A''B''C''}=3S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle A'B'C'}$.

（奥地利数学奥林匹克，1983年）

［证］ 设线段AA'、BB'、CC'相交于点O，且 $\angle AOB=\varphi$. 则



$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\varphi,$$

$$S_{\triangle AOB'}=\frac{1}{2}OA\cdot OB'\sin\varphi,$$

$$S_{\triangle BOA'}=\frac{1}{2}OB\cdot OA'\sin\varphi,$$

$$S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{2}OA'\cdot OB'\sin\varphi.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle A''OB''}&=\frac{1}{2}OA''\cdot OB''\sin\varphi\\&=\frac{1}{2}(OA+2OA')(OB+2OB')\sin\varphi\\&=\frac{1}{2}(OA\cdot OB+2OA\cdot OB'+2OA'\cdot OB+4OA'\cdot OB')\sin\varphi\\&=S_{\triangle AOB}+2S_{\triangle AOB'}+2S_{\triangle A'OB}+4S_{\triangle A'OB'}\end{aligned}$$

同理可得

$$S_{\triangle A''OC''}=S_{\triangle AOC}+2S_{\triangle AOC'}+2S_{\triangle A'OC}+4S_{\triangle A'OC'}.$$

$$S_{\triangle B''OC''}=S_{\triangle BOC}+2S_{\triangle BOC'}+2S_{\triangle B'OC}+4S_{\triangle B'OC'}.$$

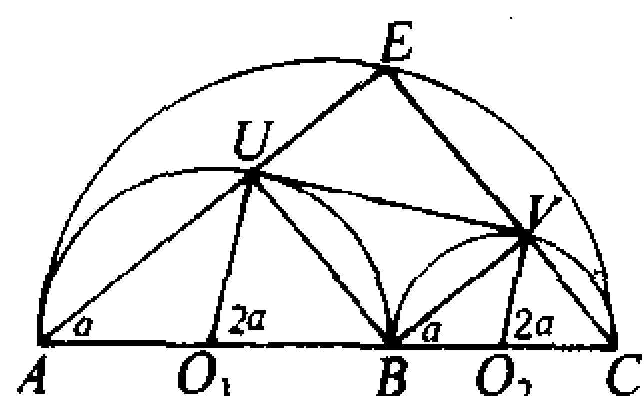
以上三式相加得

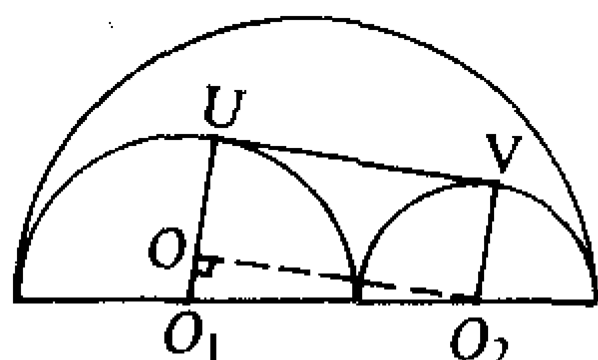
$$\begin{aligned}S_{\triangle A''B''C''}&=S_{\triangle A''OB''}+S_{\triangle A''OC''}+S_{\triangle B''OC''}\\&=S_{\triangle ABC}+2(S_{\triangle AOB'}+S_{\triangle BOC'}+S_{\triangle COA'}+S_{\triangle A'OB}+\\&\quad S_{\triangle B'OC}+S_{\triangle C'OA})+4S_{\triangle A'B'C'}\\&=3S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle A'B'C'}.\end{aligned}$$

8·29　A、B、C三点共线，且B在A与C之间，今在AC的同一侧以AB、BC、AC为直径分别作半圆，前两个半圆在B点的公切线与第三个半圆相交于E点，而前两个半圆的另外一条公切线的切点分别为U和V，令$r_1=\frac{1}{2}AB$，$r_2=\frac{1}{2}BC$.求：$\frac{S_{\triangle EUV}}{S_{\triangle EAC}}$（用$r_1$和$r_2$表示）.

（卢森堡等五国国际数学竞赛，1980年）

注　*卢森堡等五国是指比利时，英国，卢森堡，荷兰和前南斯拉夫.*





［解1］　首先证明A、U、E三点共线，C、V、E三点共线.

为此，连EU、AU、EV、CV、BU、BV，又设以AB为直径的半圆的圆心为O_1，以BC为直径的半圆的圆心为O_2，连O_1U、O_2V.

设$\angle UAO=\alpha$，则　$\angle UO_1B=2\alpha$.

又因为　$UO_1/\!/VO_2$，

则　$\angle VO_2C=\angle UO_1B=2\alpha$.

因为BE是圆的切线，则　$\angle EBC=90°$，

∴　$\angle EBV=\angle O_2CV=90°-\alpha$，

且　$\angle EBU=\angle UAO_1=\alpha$.

又因为UV为圆的公切线，则　$\angle VUB=\alpha$.

过O_2作$O_2D/\!/UV$交O_1U于D，则

$UV=O_2D=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$.

由BE是直角三角形AEC斜边AC的高，则

$BE=\sqrt{AB\cdot BC}=\sqrt{2r_1\cdot 2r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$.

∴　$BE=UV$.

在$\triangle EUB$和$\triangle VBU$中，

∵　$BE=UV$，$\angle VUB=\alpha=\angle EBU$，$UB=UB$，

$\therefore \quad \triangle EUB \cong \triangle VBU$.

又$\because \quad \angle UBV = \alpha + 90° - \alpha = 90°$,

$\therefore \quad \angle BUE = \angle UBV = 90°$.

而$\angle AUB$ 的直径AB 上的圆周角,则 $\angle AUB = 90°$,

所以 A、U、E 三点共线.

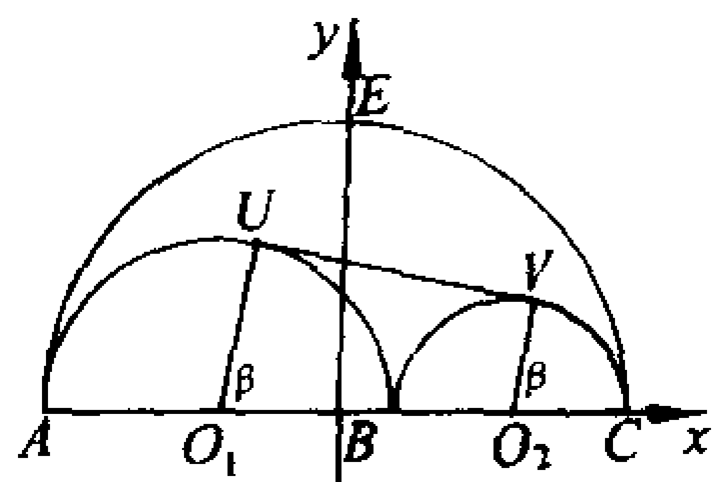
同理 E、V、C 三点共线,这样就有

$$\angle EVU = 90° - \angle UVB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha,$$

$\therefore \quad \triangle UEV \backsim \triangle CEA$.

$$\frac{S_{\triangle EUV}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{(UA)^2}{(AC)^2} = \frac{(2\sqrt{r_1 r_2})^2}{(2r_1 + 2r_2)^2} = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

[解 2] 用解析几何法.



以 B 为坐标原点,BC 所在直线为 x 轴,BC 方向为 x 轴正向,BE 方向为 y 轴正向,建立直角坐标系,则

$$A(-2r_1, 0), C(2r_2, 0), E(0, 2\sqrt{r_1 r_2}).$$

设 $\angle UO_1B = \beta$,

则 $U(-r_1 + r_1\cos\beta, r_1\sin\beta), V(r_2 + r_2\cos\beta, r_2\sin\beta)$

且 $\cos\beta = \dfrac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$, $\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}$.

$$S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2}(2r_1 + 2r_2)2\sqrt{r_1 r_2} = 2(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}. \quad ①$$

$$S_{\triangle EDA} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{r_1 r_2} & 1 \\ -r_1(1-\cos\beta) & r_1\sin\beta & 1 \\ r_2(1+\cos\beta) & r_2\sin\beta & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$= \frac{1}{2}\{-2r_1 r_2\sin\beta + 2\sqrt{r_1 r_2}[(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)\cos\beta]\}$$

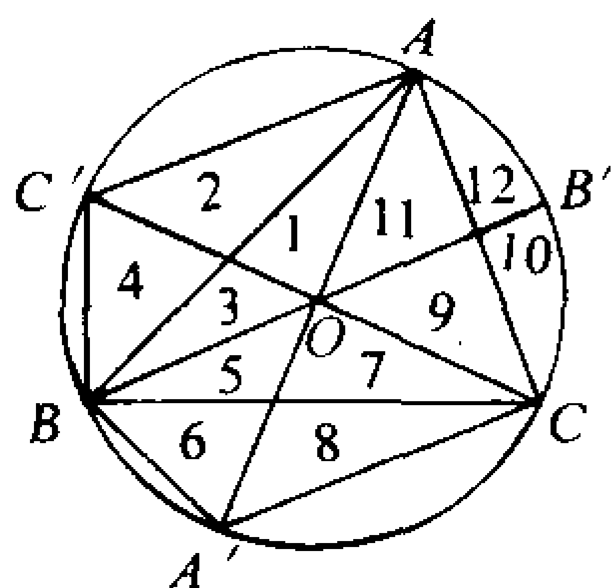
$$= \frac{1}{2}\left\{-2r_1 r_2 \cdot \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} + 2\sqrt{r_1 r_2}\left[(r_1 + r_2) - \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 + r_2}\right]\right\}$$

$$= \frac{2r_1 r_2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}. \quad ②$$

由①、②可得 $\dfrac{S_{\triangle UEV}}{S_{\triangle CEA}}=\dfrac{\dfrac{2r_1r_2\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}}{2(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2}}=\dfrac{r_1r_2}{(r_1+r)^2}$.

8·30 分别过锐角$\triangle ABC$的3个顶点作它的外接圆的3条直径AA'、BB'、CC'，求证：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'CB}+S_{\triangle B'AC}+S_{\triangle C'BA}$.

（中国安徽省芜湖市初中数学竞赛，1981年）



［证1］ 所论图形中共有12个三角形编号如图所示.

$\because$ $\triangle AOC'$与$\triangle AOC$等底同高，

$\therefore$ $S_1+S_2=S_{\triangle AOC'}=S_{\triangle AOC}=S_{11}+S_9$.

同理

$S_3+S_4=S_5+S_7$，$S_5+S_6=S_1+S_3$，

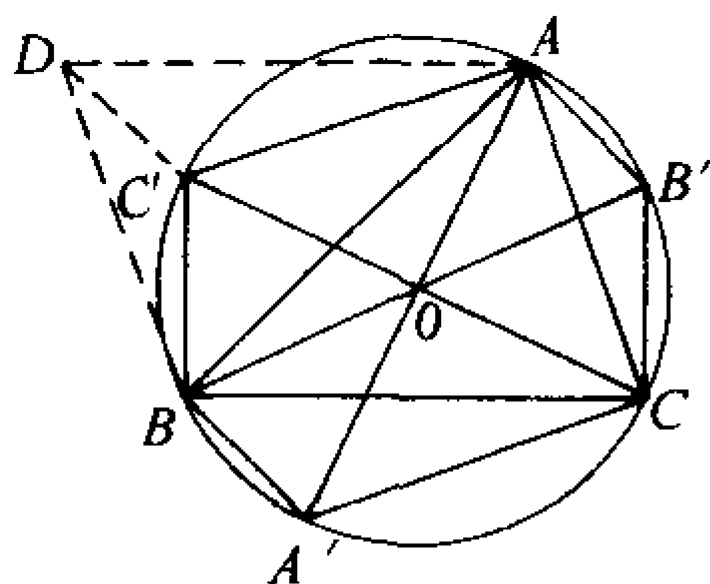
$S_7+S_8=S_9+S_{11}$，$S_9+S_{10}=S_5+S_7$，

$S_{11}+S_{12}=S_1+S_3$.

将上述6式相加并消去共同项.得到

$S_1+S_3+S_5+S_7+S_9+S_{11}=S_2+S_4+S_6+S_8+S_{10}+S_{12}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'CB}+S_{\triangle B'AC}+S_{\triangle C'BA}$.



［证2］ 过点A作$AD \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} CB$，连结$BD$、$C'D$，于是四边形$DBCA$为平行四边形.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

$\therefore$ $\triangle OC'B\cong\triangle OCB'$，

$\therefore$ $BC' \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} CB'$.

又$\because$ $BD \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} CA$，

$\therefore$ $\triangle BC'D\cong\triangle CB'A$.

同理 $\triangle ADC'\cong\triangle CBA'$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC'}+S_{\triangle BC'D}+S_{\triangle AC'D}$

$=S_{\triangle A'CB}+S_{\triangle B'AC}+S_{\triangle C'BA}$.

［证3］ 取$\triangle ABC$的垂心H，连结AH、BH、CH，于是

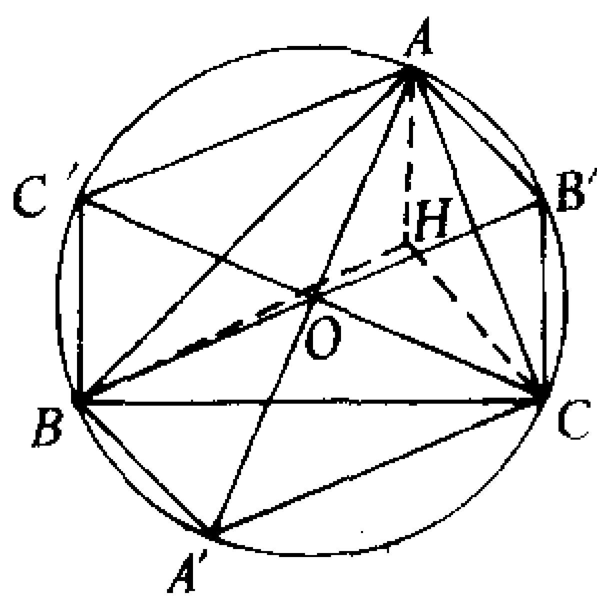
$AH\perp BC$，$BH\perp AC$，$CH\perp AB$.

$\because$ AA'、BB'、CC'都是直径，

$\therefore$ $BC'\perp BC$.

$\therefore \quad BC' \parallel HA$.同理 $C'A \parallel BH$.

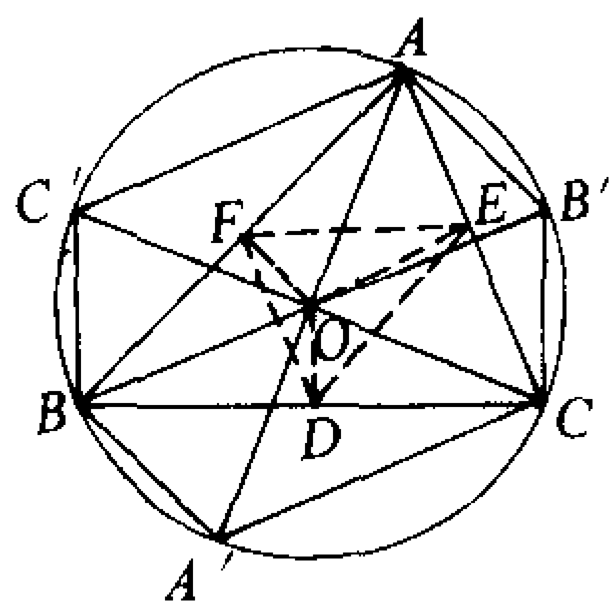
$\therefore \quad$ 四边形 $C'BHA$ 为平行四边形.



同理四边形 $BA'CH$ 和 $AHCB'$ 都是平行四边形.

$$\begin{aligned}\therefore \quad S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABH} + S_{\triangle BCH} + S_{\triangle CAH} \\ &= S_{\triangle ABC'} + S_{\triangle A'CB} + S_{\triangle B'AC}.\end{aligned}$$

[证 4] 设 BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F,连结 OD、OE、OF、DE、EF、FD,于是



$$\triangle DEF \backsim \triangle ABC, \quad \triangle ODE \backsim \triangle C'BA,$$
$$\triangle OEF \backsim \triangle A'CB, \quad \triangle OFD \backsim \triangle B'AC,$$

且相似比均为$\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad S_{\triangle ABC} &= 4S_{\triangle DEF} \\ &= 4(S_{\triangle ODE} + S_{\triangle OEF} + S_{\triangle OFD}) \\ &= S_{\triangle C'BA} + S_{\triangle A'CB} + S_{\triangle B'AC}.\end{aligned}$$

8·31 设 $A_iH_i(i=1,2,3)$是面积为 S 的$\triangle A_1A_2A_3$ 的三条高,求证:当且仅当 $S = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} A_iA_{i+1} \cdot A_iH_i$ (其中 $A_4 = A_1$)时,$\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

(美国纽约数学奥林匹克,1980 年)

[证] 令 $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_1A_3$, $a_3 = A_1A_2$, $h_1 = A_1H_1$, $h_2 = A_2H_2$, $h_3 = A_3H_3$.则有

$$\begin{aligned}& a_3h_1 + a_1h_2 + a_2h_3 \\ &= a_1h_1 \cdot \frac{a_3}{a_1} + a_2h_2 \cdot \frac{a_1}{a_2} + a_3h_3 \cdot \frac{a_2}{a_3} \\ &= 2S\left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3}\right) \\ &\geqslant 6S.\end{aligned}$$

即 $\quad S \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} A_iA_{i+1} \cdot A_iH_i$

而题设的条件恰为上式等号成立,即 S 取得最大值,这时有

$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_3}$, 即 $\quad a_1 = a_2 = a_3$,

即 $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

8·32 将边长为 a 的正三角形的各边都1993等分,再将各边上对应分点用平行线连接,将大正三角形划分成若干个小正三角形,求:所有小正三角形的内切圆面积的和.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1993年)

[解] 小正三角形的个数为

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2\times1993-1)=1993^3.$$

每个小正三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{1993}$,

每个小正三角形内切圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{1993}\cdot\frac{1}{3}$,

∴ 每个小正三角形内切圆的面积为 $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{1993}\cdot\frac{1}{3}\right)^2$.

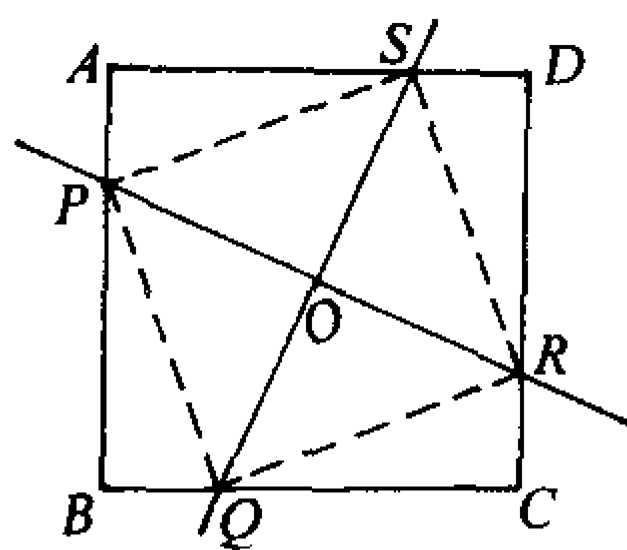
故 全部 1993^2 个小正三角形内切圆面积的和为

$$S=1993^2\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{1993}\cdot\frac{1}{3}\right)^2=\frac{\pi a^2}{12}.$$

(二)四边形面积

8·33 两条互相垂直的直线把一个正方形分成四个四边形区域,其中的三个区域的面积均为1,证明:这个正方形的面积为4.

(第6届拉丁美洲地区数学奥林匹克,1991年)



[证] 设正方形 $ABCD$ 被两条互相垂直的直线 PR, QS 分成四个区域 $APOS$、$BPOQ$、$DSOR$、$CQOR$,且

$$S_{APOS}=S_{BPOQ}=S_{DSOR}=1.$$

∵ $\angle ASQ=\angle DRP$,

又 $S_{ABQS}=S_{ADRP}=2$, 且 $AB=AD$,

∴ 直角梯形 $ABQS\cong$直角梯形 $DAPR$.

则 $AS=DR$, $AP=BQ$.

连 PS、RS、RQ，下面证明 $PS=RS$.

若不然，不妨设 $PS>RS$，则 $PO>OQ$，$AP<SD$，

$\therefore$ $S_{\triangle PSO}>S_{\triangle ROS}$，$S_{\triangle APS}>S_{\triangle SRD}$，$S_{APOS}>S_{SORD}$.

出现矛盾，于是 $PS=RS$.

同理 $PQ=PS$.

因此 PR 与 SQ 互相平分. $\therefore$ 四边形 $PQRS$ 为菱形.

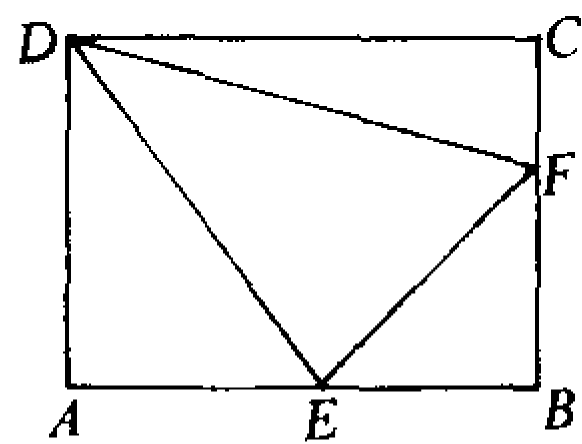
由 $\angle RQC=\angle ASP$，$PS=QR$

可得 $Rt\triangle RQC\cong Rt\triangle PSA$.

$\therefore$ $S_{OQCR}=S_{\triangle OQR}+S_{\triangle RQC}=S_{\triangle POS}+S_{\triangle PSA}=1$.

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 4.

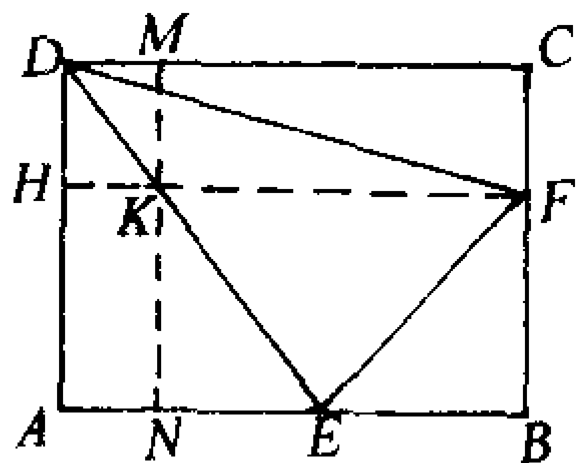
8·34 矩形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、BC 边上任两点. 求证：$S_{ABCD}=2S_{\triangle DEF}+AE\cdot CF$.



（中国北京市数学竞赛，1979）

[证 1] 作 $FH\perp AD$ 于 H，交 DE 于 K. 过 K 作 $MN\perp CD$ 于 M，交 AB 于 N，则

$S_{MKFC}=2S_{\triangle DKF}$，$S_{KNBF}=2S_{\triangle KEF}$.



又 $\triangle DHK\backsim\triangle DAE$，有

$HK:AE=DH:AD$，

故 $HK\cdot AD=AE\cdot DH=AE\cdot CF$，

$\because$ $\triangle A_{DMN}=AE\cdot CF$，

$\therefore$ $S_{ABCD}=S_{MKFC}+S_{KNBF}+S_{\triangle DMN}$

$=2S_{\triangle DKF}+2S_{\triangle KEF}+AE\cdot CF$

$=2S_{\triangle DEF}+AE\cdot CF$.

[证 2] 设 $AD=a$，$CD=b$，$AE=x$，$CF=y$，则

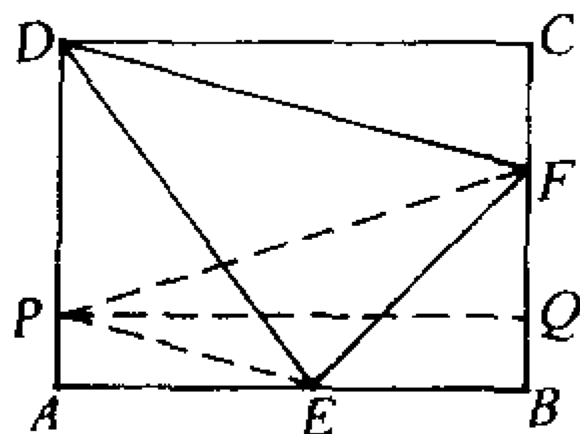
$$S_{ABCD}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle CDF}+S_{\triangle BEF}$$

$$=S_{\triangle DEF}+\frac{1}{2}[ax+by+(a-y)(b-x)]$$

$$=S_{\triangle DEF}+\frac{1}{2}(ab+xy)$$

$$=S_{\triangle DEF}+\frac{1}{2}S_{ABCD}+\frac{1}{2}AE\cdot CF,$$

$\therefore$ $S_{ABCD}=2S_{\triangle DEF}+AE\cdot CF$.



［证 3］ 过 E 作 $EP /\!/ DF$ 与 AD 交于 P，连 PF，则 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DFP}$.

再过 P 作 $PQ /\!/ AB$，交 BC 于 Q.

则 $S_{CDPQ}=2S_{\triangle DFP}=2S_{\triangle DEF}$.

又 $\triangle AEP \backsim \triangle CDF$，

有 $AE:CD=AP:CF$，

$\because \quad CD=AB, \quad \therefore \quad AE\cdot CF=AB\cdot AP=S_{ABQP}$,

$\therefore \quad S_{ABCD}=S_{CDPQ}+S_{\triangle BQP}=2S_{\triangle DEF}+AE\cdot CF$.

8·35 如果矩形的边及对角线之长均为整数，则它的面积是可被 12 整除的整数.

（莫斯科数学奥林匹克，1936 年）

［证］ 设矩形的边长、宽及对角线之长分别为 x、y、z. 此处 x、y、$z\in N$.

则不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解为

$$\begin{cases}x=m(a^2-b^2),\\ y=m(2ab),\\ z=m(a^2+b^2),\end{cases}$$

此处 a、b、$c\in N$.

不失一般性，假定 $(x,y)=1$，则

$$\begin{cases}x=a^2-b^2,\\ y=2ab,\\ z=a^2+b^2.\end{cases}$$

为此只要证面积 $2ab(a^2-b^2)$ 被 12 整除即可，为此又只要证 $6|ab(a^2-b^2)$ 成立.

$\because \quad a^3-a=a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$,

$\therefore \quad 6|a^3-a$.

同理 $6|b^3-b$.

由 $$ab(a^2-b^2)=a^3b-ab^3=a^3b-ab+ab-ab^3$$
$$=b(a^3-a)-a(b^3-b),$$

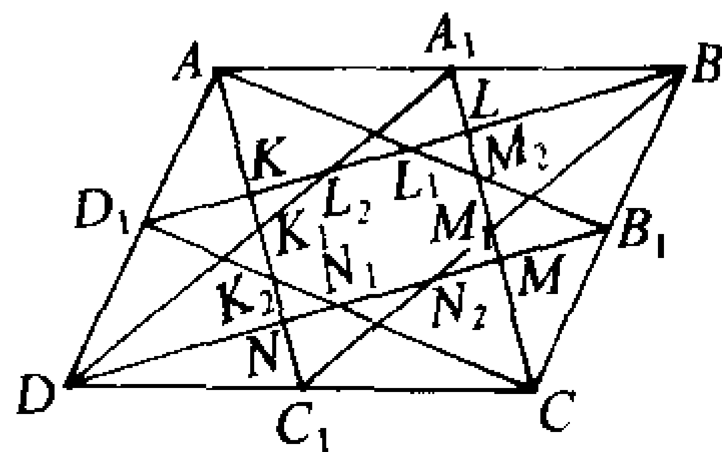
知上式是 6 的倍数.

8·36 连接平行四边形的顶点与不以它为端点的两条边的中点所得的八条直线构成一个八边形. 求证：它的面积是平行四边形面积的六

分之一.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1972年)

[证] 设平行四边形 $ABCD$ 的面积为 S, A_1、B_1、C_1、D_1 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.



设 AC_1、AB_1、BC_1、BD_1、CA_1、CD_1、DB_1、DA_1 交成八边形 $M_1M_2L_1L_2K_1K_1N_1N_2$.

由 $AA_1 // CC_1$, $AA_1 = CC_1$, 则四边形 AA_1CC_1 是平行四边形.

因为平行四边形 AA_1CC_1 与 $ABCD$ 的高相等,且底边 $AA_1=\frac{1}{2}AB$,则 $S_{AA_1CC_1}=\frac{1}{2}S$.

因为 $BB_1 // DD_1$,且 $BB_1=DD_1$,则四边形 BB_1DD_1 是平行四边形,从而四边形 $KLMN$ 是平行四边形.

由于 $D_1K // DN$ 及 D_1 是 AD 的中点,则 $AK=KN$,又可证 $KN=LM=MC=2C_1N$,于是 $KN=\frac{2}{5}AC_1$,

$$\therefore \quad S_{KLMN}=\frac{2}{5}S_{AA_1CC_1}=\frac{2}{5}\times\frac{S}{2}=\frac{S}{5}.$$

又因为 AA_1C_1D 是平行四边形,则 $AK_1=K_1C_1$,

而 K_2 是$\triangle ACD$ 的重心,则 $AK_2=2K_2C_1$.

$$\text{于是}\quad KK_1=AK_1-AK=\frac{1}{2}AC_1-\frac{2}{5}AC_1=\frac{1}{10}AC_1=\frac{1}{4}KN.$$

$$NK_2=C_1K_2-C_1N=\frac{1}{3}AC_1-\frac{1}{5}AC_1=\frac{2}{15}AC_1=\frac{1}{3}KN.$$

同理可得 $KL_2=\frac{1}{3}KL$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad S_{\triangle KK_1L_2}&=\frac{1}{2}KK_1\cdot KL_2\sin\angle K_1KL_2\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}KN\right)\left(\frac{1}{3}KL\right)\sin\angle NKL\\&=\frac{1}{12}S_{\triangle NKL}=\frac{1}{24}S_{KLMN}\end{aligned}$$

$$= \frac{S}{120}.$$

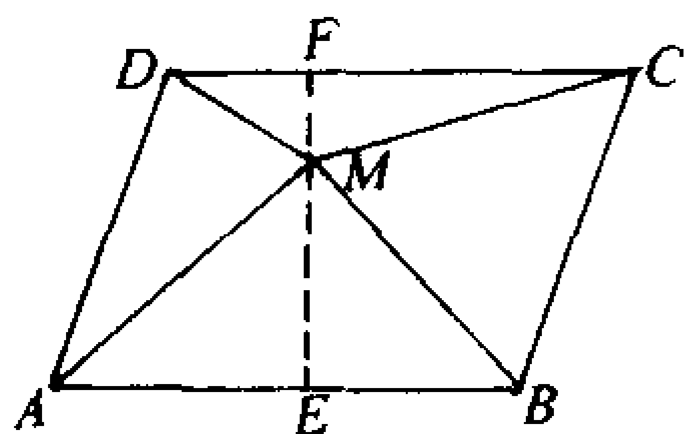
同理可证 $S_{\triangle LL_1M_2} = S_{\triangle MM_1N_2} = S_{\triangle NN_1K_2} = \frac{S}{12}.$

于是八边形 $M_1M_2L_1L_2K_1K_2N_1N_2$ 的面积为

$$S_{M_1M_2L_1L_2K_1K_2N_1N_2} = S_{KLMN} - 4S_{\triangle KK_1L_2} = \frac{S}{5} - 4\times\cdot\frac{S}{120} = \frac{S}{6}.$$

8·37 把平行四边形内部一点与四个顶点连起来，就得到四个三角形，试找出一点，它所决定的四个三角形的面积可以排成等比数列，并证明这样的点是惟一的

（中国北京市数学竞赛，1962 年）



［解］ 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O，不难证明对角线分平行四边形所成的四个三角形等积，则点 O 具有所要求的性质. 以下再证明这种点的惟一性.

如图，设 M 为$\square ABCD$ 内部一点，过 M 作 AB 的垂线，分别交 AB、CD 于 E、F. 则

$$\begin{aligned}&S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MCD}\\&= \frac{1}{2}ME\cdot AB + \frac{1}{2}MF\cdot CD\\&= \frac{1}{2}(ME+MF)AB = \frac{1}{2}EF\cdot AB\\&= \frac{1}{2}S_{\square ABCD},\end{aligned}$$

同理 $S_{\triangle MAD} + S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$

因这四个三角形的面积可以排成等比数列，设这等比数列为

$$a, ar, ar^2, ar^3. (r>0)$$

根据以上讨论这四项中某两项之和必等于另外两项之和. 这样的等比数列是常数列，因为

(1)若 $a + ar = ar^2 + ar^3$,

则 $(r-1)(r+1)^2 = 0$, $r=1$;

(2)若 $a + ar^2 = ar + ar^3$,

则 $(r-1)(r^2+1) = 0$, $r=1$;

(3)若 $a + ar^3 = ar + ar^2$,

则 $(r-1)^2(r+1)=0,\ r=1.$

这表明四个三角形的面积总是相等,且都等于$\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,故 M 点必与 O 重合.

8·38 设 $ABCD$ 是凸四边形.考察两个新的凸四边形 F_1 和 F_2,它们的两个相对顶点都分别是 $ABCD$ 的对角线的中点,而另两个顶点又都分别是 $ABCD$ 对边的中点.已知 F_1 和 F_2 的面积相等.求证:$ABCD$ 的一条对角线将它分成等面积的两部分

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

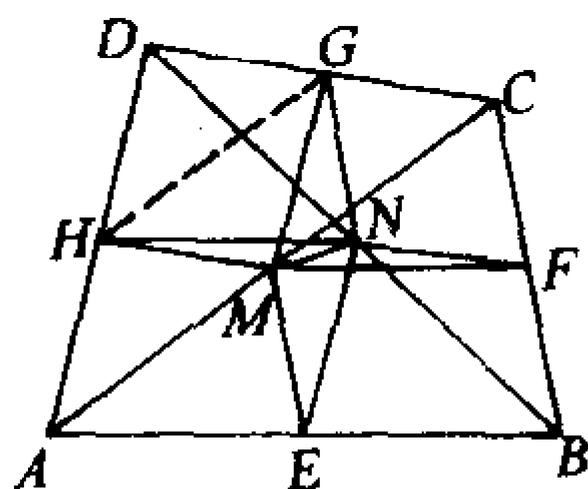
[证] 在凸四边形 $ABCD$ 中,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点.

$\therefore\quad EN \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}AD \underset{=}{\parallel} MG.$

$\therefore\quad ENGM$ 是平行四边形.

同理, $FNHM$ 也是平行四边形.

由题设 $S_{\square ENGM} = S_{\square FNHM}$,



$\therefore\quad S_{\triangle MNG} = \frac{1}{2}S_{\square ENGM} = \frac{1}{2}S_{\square FNHM}$

$= S_{\triangle NMH}.$

因此$\triangle MNG$ 和$\triangle NMH$ 的 MN 边上的高相等,由此得 $MN /\!/ HG$,又 $HG /\!/ AC$,AC 和 MN 都过 M 点.所以 MN 重合于 AC.

因为 $S_{\triangle MNG} = S_{\triangle NME}$,

所以 $\triangle MNG$,$\triangle NME$ 的 MN 边上的高相等.

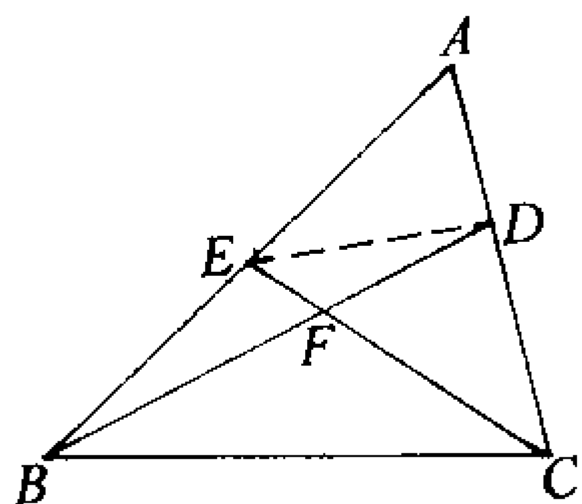
又 G 是 CD 的中点,易证$\triangle ACD$ 的 AC 边上的高是$\triangle MNG$ 的 MN 边上的高的两倍.

同理 $\triangle ACB$ 的 AC 边上的高是$\triangle NME$ 的 MN 边上的高的两倍.

因此 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACB}.$

8·39 设 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AC 和 AB 上,BD 与 CE 交于 F,$AE = EB$,$\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$,$S_{\triangle ABC} = 40$.求:$S_{AEFD}$.

(中国部分省市初中数学通讯赛,1990 年)



[解 1]　如图，连接 DE，设$\triangle AED$、$\triangle EFD$、$\triangle BFE$、$\triangle BCF$、$\triangle FCD$ 的面积分别为 x、y、z、u、t. 可求得

$x=8$，$x+y+z=16$.

设　$S_{AEFD}=x+y=s$，则有

$z=16-s$，$y=s-8$，$t=20-s$，$u=4+s$.

$\because$　$\dfrac{y}{z}=\dfrac{t}{u}$，有　$\dfrac{s-8}{16-s}=\dfrac{20-s}{4+s}$.

解得　$s=11$，即　$S_{AEFD}=11$.

[解 2]　直线 BFD 与$\triangle AEC$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA}=1.$$

$\because$　$\dfrac{AB}{BE}=2$，$\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore$　$\dfrac{FC}{EF}=\dfrac{AB}{BE}\cdot\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}=3$.

$\therefore$　$EF=\dfrac{1}{3}FC=\dfrac{1}{4}EC$.

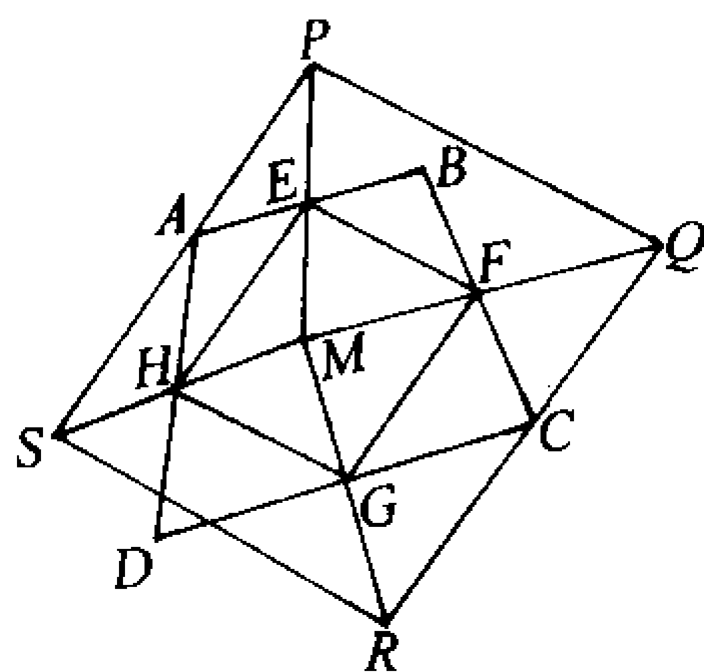
$\because$　$S_{\triangle EBC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=20$.　$\therefore$　$S_{\triangle EBF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle EBC}=5$.

$\because$　$S_{\triangle ADB}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle ABC}=16$，

$\therefore$　$S_{AEFD}=S_{\triangle ADB}-S_{\triangle EBF}=16-5=11$.

8·40　凸四边形 $ABCD$ 的面积是 S_0，形内一点 M 关于四边中点的对称点分别是 P、Q、R、S. 试求：四边形 $PQRS$ 的面积.

（莫斯科数学奥林匹克，1963 年）



[解]　设 E、F、G、H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点.（如图）

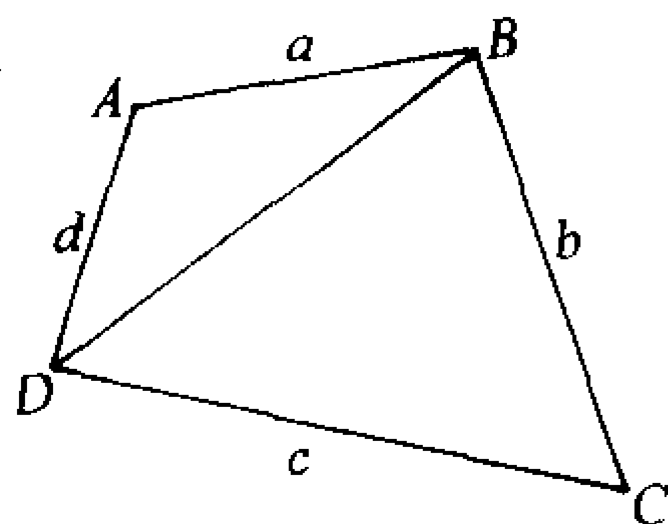
$$\begin{aligned}&S_{\square EFGH}\\&=S_{\triangle MEH}+S_{\triangle MFE}+S_{\triangle MFG}+S_{\triangle MGH}\\&=\frac{1}{4}(S_{\triangle MPS}+S_{\triangle MQP}+S_{\triangle MRQ}+S_{\triangle MRS})\\&=\frac{1}{4}S_{PQRS}\end{aligned}$$

另一方面　$S_{\square EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_0$.

故　　$S_{\square PQRS}=2S_0$.

8·41　凸四边形的边长为 a、b、c、d，一双对角之和等于 2α. 求证：四边形的面积等于 $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\alpha}$，其中 p 为四边形的半周长.

（基辅数学奥林匹克，1936 年）



［证］　设在四边形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$\angle A+\angle C=2\alpha$.（如图）

在△BAD 中 $BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$，

在△BCD 中 $BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$，

$$\therefore\quad \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}=ad\cos A-bc\cos C \qquad ①$$

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则

$$2S=ad\sin A+bc\sin C \qquad ②$$

将①与②式平方再相加，得

$$4S^2+\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4}$$
$$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C).$$

$$\therefore\quad 16S^2=4(a^2d^2+b^2c^2)-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-8abcd\cos 2\alpha$$
$$=4(a^2d^2+b^2c^2)-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-8abcd(2\cos^2\alpha-1)$$
$$=4(a^2d^2+b^2c^2)-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+8abcd-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd\cos^2\alpha.$$

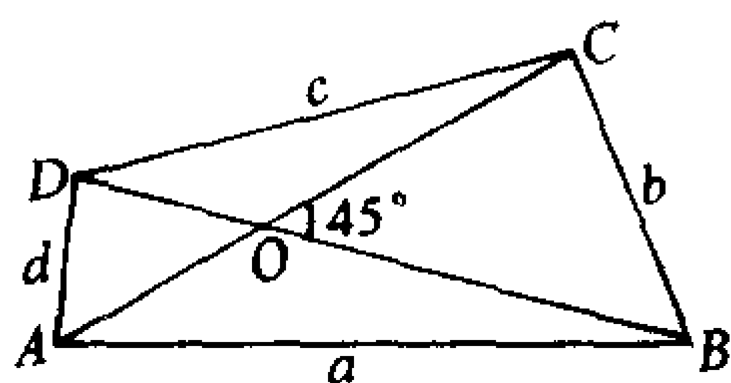
设　$p=\frac{a+b+c+d}{2}$，则有

$$4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$
$$=[2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)][2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)]$$
$$=(a+b+c-d)(b+c+d-a)(a+d+b-c)(a+d-b+c)$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\alpha}.$$

注　当四边形可内接于圆时，显然有

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.



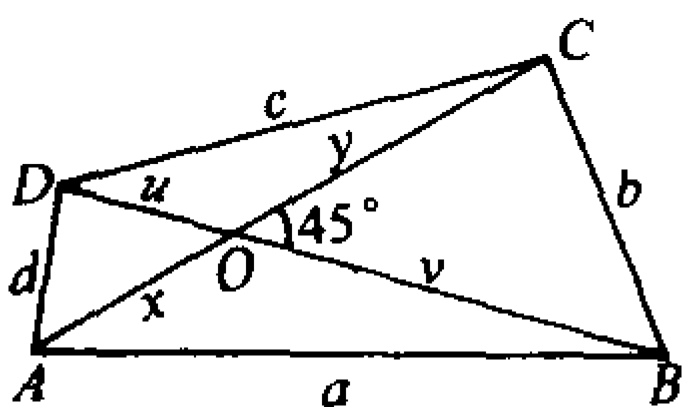
8·42 若凸四边形 $ABCD$ 四边长分别为 a、b、c、d,且其对角线所夹锐角为 45°.求证:

$$S_{ABCD}=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}.$$

(中国北京市数学竞赛,1984 年)

[证] 如图设 $OA=x,OB=u,OC=y,OD=v$.则

$$S=\frac{1}{2}(x+y)(u+v)\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(xu+yu+xv+yv)\sin 45^\circ. \qquad ①$$



由余弦定理且注意到 $\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$,则

$$x^2+u^2+2xu\cos 45^\circ=a^2 \qquad ②$$
$$u^2+y^2-2uy\cos 45^\circ=b^2 \qquad ③$$
$$y^2+v^2+2yv\cos 45^\circ=c^2 \qquad ④$$
$$x^2+v^2+2xv\cos 45^\circ=d^2 \qquad ⑤$$

②-③+④-⑤ 得

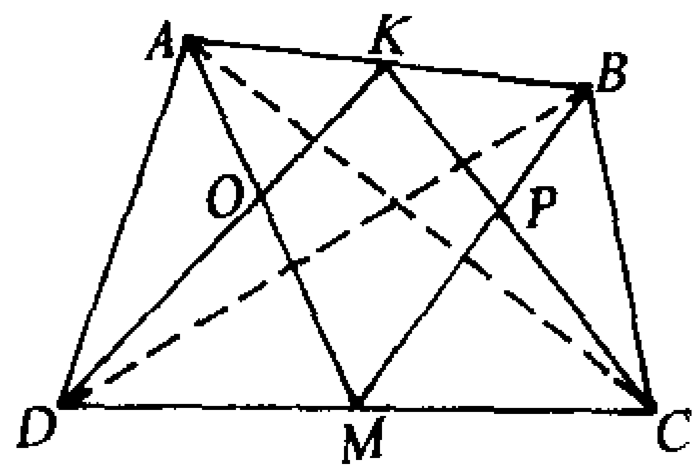
$2\cos 45^\circ(xu+yu+yv+xv)=a^2-b^2+c^2-d^2$.

与①式比较,注意到 $\cos 45^\circ=\sin 45^\circ$,有

$$S=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}.$$

8·43 给定凸四边形 $ABCD$.边 AB 和 CD 的中点分别为 K 和 M,线段 AM 和 DK 的交点为 O,线段 BM 和 CK 的交点为 P.求证:四边形 $MOKP$ 的面积等于△BPC 和△AOD 的面积之和.

(莫斯科数学奥林匹克,1959 年)



[证] 如图,连结 BD.

∵ DK 是△ADB 的一条中线,

∴ $S_{\triangle AKD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$.

∵ BM 是△BCD 的一条中线,

∴ $S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$.

故 $S_{\triangle AKD}+S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

连结 AC，同理可证 $S_{\triangle BKC}+S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

$$S_{ABCD}=S_{\triangle AKD}+S_{\triangle BMC}+S_{\triangle BKC}+S_{\triangle AMD}$$
$$=S_{ABCD}-S_{MOKP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle AOD},$$

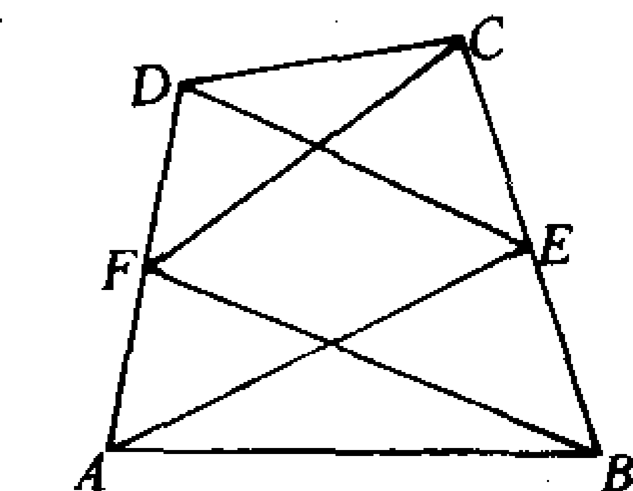
$\therefore$ $0=-S_{MOKP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle AOD}$.

故 $S_{MOKP}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle AOD}$.

8·44 凸四边形 $ABCD$ 中,BC 和 AD 的中点分别为 E,F. 求证:$S_{\triangle EDA}+S_{\triangle FBC}=S_{ABCD}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 由于 E 是 BC 的中点,设 E 到 AD 的距离为 h_E,C、B 到 AD 的距离分别为 h_C 和 h_B,则



$$h_E=\frac{h_C+h_B}{2}.$$

$\therefore$ $S_{\triangle EDA}=\dfrac{S_{\triangle CDA}+S_{\triangle BDA}}{2}$;

同理有 $S_{\triangle FBC}=\dfrac{S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ABC}}{2}$,

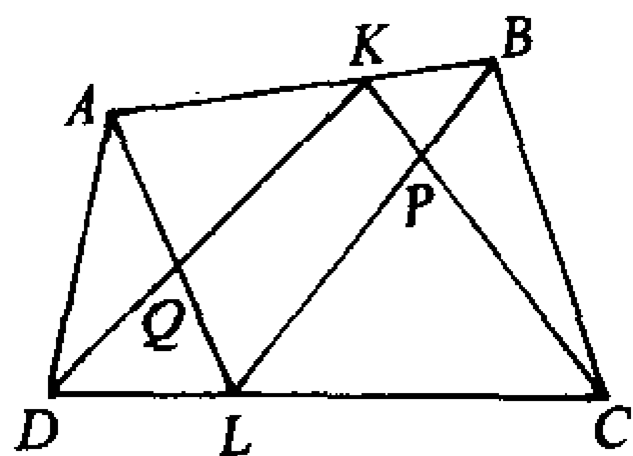
于是有

$$S_{\triangle EDA}+S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}(S_{\triangle CDA}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BDA}+S_{\triangle DBC})=S_{ABCD}.$$

8·45 点 K 和 L 将四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 分成 $m:n$ 两份,线段 BL 和 CK 交于点 P,线段 DK 和 AL 交于点 Q. 求证:$S_{KPLQ}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}$.

(基辅数学奥林匹克,1961 年)

[证] 设四边形 $ABCD$ 的面积为 σ.



$\because$ $S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}$

$$=\frac{m}{n+m}S_{\triangle ADB}+\frac{m}{n+m}S_{\triangle DBC}=\frac{m}{n+m}\sigma,$$

及 $S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK}$

$$=\frac{n}{m+n}S_{\triangle ADC}+\frac{n}{m+n}S_{\triangle ACB}=\frac{m}{m+n}\sigma,$$

$\therefore \quad S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}+S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK}=\sigma,$

故 $\quad S_{KQLP}=\sigma-(S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}+S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK})$

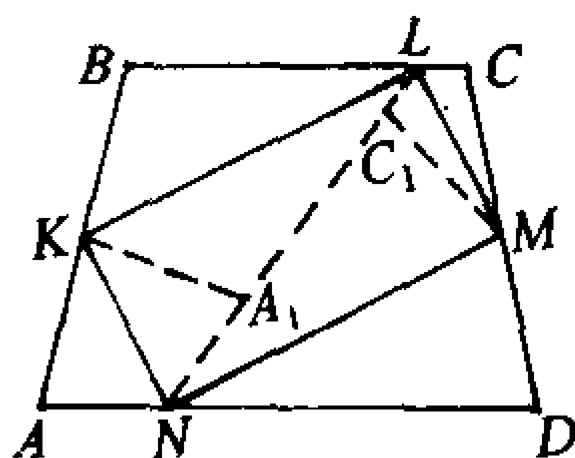
$$+S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}$$

$$=S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}.$$

注 *本命题系上一命题的推广情形.*

8·46 点 K 和 M 是凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 的中点,点 L 和 N 在另外两边上. 并且 $KLMN$ 是矩形. 试证 四边形 $ABCD$ 的面积是矩形 $KLMN$ 的面积的 2 倍.

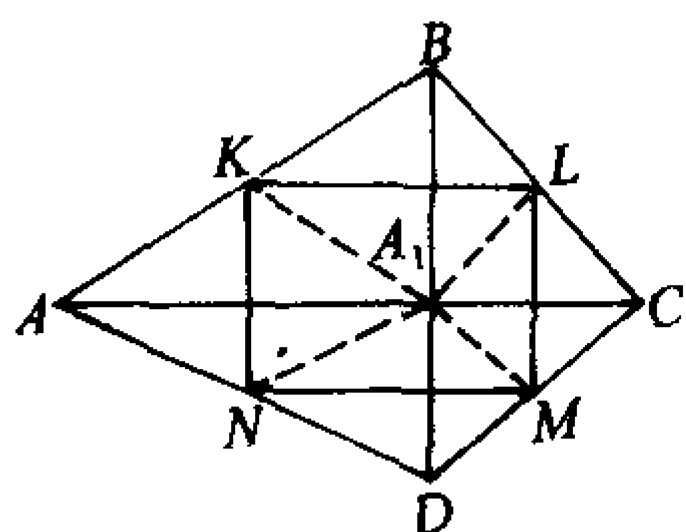
(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)



[证] 设想四边形 $ABCD$ 是一张纸片,由于这个四边形是凸的,所以矩形 $KLMN$ 全在它的内部. 现在沿着矩形各边把纸片的四角分别折迭到矩形内部,如果恰好填满矩形而没有空隙也无重迭,命题得证.

事实上,因 K 为 AB 中点,$\angle NKL=90°$,从而

$KA=KB$, $\angle AKN+\angle BKL=\angle NKL$,



所以 KA 和 KB 折迭后重合于 KA_1,

同理 MC 和 MD 折迭后重合于 MC_1.

又因 $\angle ANK+\angle DNM=\angle KNM$,

所以 NA_1 与 NC_1 共线,

同理 LA_1 与 LC_1 共线.

如果 $A_1 \not\equiv C_1$ 那么 N 和 L 都在直线 A_1C_1 上,这时 $\angle A+\angle B=\angle KA_1N+\angle KA_1L=180°$.

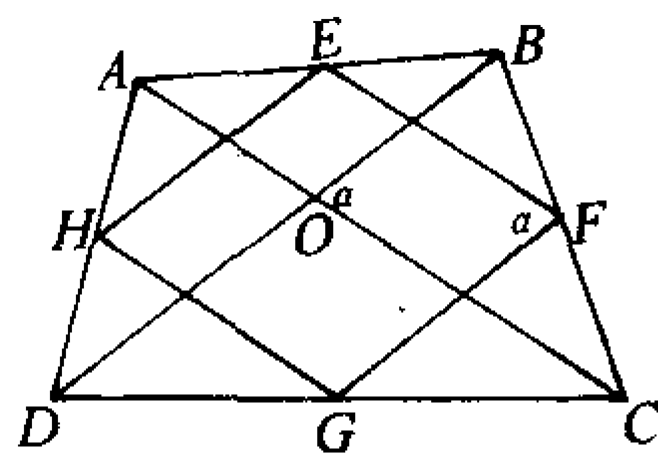
所以 $AD/\!/BC$, 知 $ABCD$ 是梯形,它的面积比 $KLMN$ 面积大一倍.

如果 $C_1 \equiv A_1$,如图,NA_1 和 LA_1 就可以不在同一直线上. 这时,AC 和 BD 相互垂直,即分别平行于矩形的边且 N 和 L 分别是 AD 和 BC 的中点. $ABCD$ 的面积也比 $KLMN$ 的面积大一倍.

8·47 在任意凸四边形 $ABCD$ 中,对角线 BD 与 AC 之比为 l,现有一菱形,其顶点在四边形的各边上,菱形各边平行于四边形的对角线,求:四边形的面积与菱形面积之比.

(第 11 届全俄数学奥林匹克,1985 年)

[解] 设 $AC=d_1, BD=d_2$,有$\frac{d_2}{d_1}=l$.



如图,设 $EFGH$ 为菱形,且设 $AE=xAB(0<x<1)$,则

$$BE=(1-x)AB.$$

$\because$ $EH /\!/ BD$, $\therefore$ $\triangle AEH \backsim \triangle ABD$,

于是 $EH=x\cdot BD=xd_2$.

类似地有 $EF=(1-x)d_1$.

由 $EFGH$ 为菱形可知$EF=EH$,

于是有 $xd_2=(1-x)d_1$, $\therefore$ $x=\frac{d_1}{d_1+d_2}$.

从而,菱形 $EFGH$ 的边长为 $\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$.

设 AC 与 BD 相交于 O, 又$\angle BOC=\angle EFG=\alpha$, 则

$$S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot \sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha,$$

$$S_{\square EFGH}=EF^2\sin\alpha=\frac{d_1^2d_2^2}{(d_1+d_2)^2}\sin\alpha.$$

从而所求面积比为

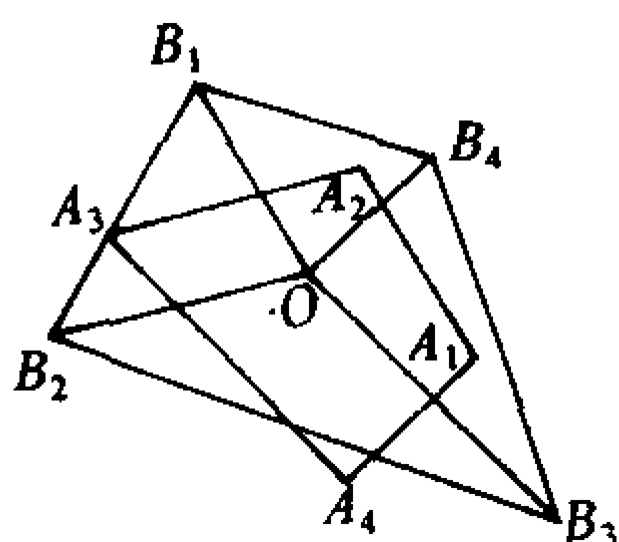
$$\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square EFGH}}=\frac{\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha}{\frac{d_1^2d_2^2}{(d_1+d_2)^2}\sin\alpha}=\frac{(d_1+d_2)^2}{2d_1d_2}=\frac{\left(1+\frac{d_2}{d_1}\right)^2}{2\cdot\frac{d_2}{d_1}}=\frac{(1+l)^2}{2l}.$$

8·48 图中 $OB_i \underline{\mathbin{/\!/}} A_iA_{i+1}$,其中 $i=1,2,3,4.(A_s=A_1)$.求证: $B_1B_2B_3B_4$ 的面积为 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积的 2 倍.

(第 14 届加拿大数学奥林匹克,1982 年)

[证] 由已知 $OB_1 \underline{\mathbin{/\!/}} A_1A_2, OB_2 \underline{\mathbin{/\!/}} A_2A_3$,

$$\begin{aligned}S_{\triangle OB_1B_2}&=\frac{1}{2}OB_1\cdot OB_2\sin\angle B_1OB_2\\&=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_2A_3\sin\angle A_1A_2A_3\\&=S_{\triangle A_1A_2A_3},\end{aligned}$$



同理　$S_{\triangle OB_3B_4}=S_{\triangle A_3A_4A_1}$.

上面诸式相加

$$S_{\triangle OB_1B_2}+S_{\triangle OB_3B_4}=S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle A_3A_4A_1}=S_{A_1A_2A_3A_4},$$

同理又有　$S_{\triangle OB_2B_3}+S_{\triangle BB_4B_1}=S_{A_1A_2A_3A_4}$

于是　$S_{B_1B_2B_3B_4}=2S_{A_1A_2A_3A_4}$.

8·49　在$\triangle ABC$的AB和BC边上，于三角形之外作平行四边形$ABDE$和平行四边形$BCFG$，直线ED和FG相交于点M，再在边AC上向三角形之外作平行四边形$ACKL$，它的边CK和AL等于线段MB，且平行于MB.求证：$S_{\square ACKL}=S_{\square ABDE}+S_{\square BCFG}$.

（第14届全俄数学奥林匹克，1988年）

［证］　延长LA交ME于Q，延长KC交MF于P.

显然四边形$ABMQ$和$BCPM$都是平行四边形.

延长MB，取$BN=BM$.于是四边形$BNKC$和$BNLA$都是平行四边形.

从而有　$\triangle ABC\cong\triangle LNK$.

这样　$S_{\square ACKL}=S_{\square ABNL}+S_{\square BCKN}$

$=S_{\square ABMQ}+S_{\square BCPM}$

$=S_{\square ABDE}+S_{\square BCFG}$.

8·50　在$\triangle ABC$的边AC上作平行四边形$AKLC$，使它与$\triangle ABC$位于AC的同侧；再以AB和BC为底分别作平行四边形$AEFB$和$BMNC$，使它们与$\triangle ABC$分别位于边AB和BC的两侧，使EF经过K，MN经过L.求证：平行四边形$AKLC$的面积等于平行四边形$AEFB$和$BMNC$的面积的和(帕帕·阿列克赛特里斯基定理).

（基辅数学奥林匹克，1956年）

［证］　设直线EF和NM交于S点.如图

$\therefore$　$\triangle KSL\cong\triangle ABC$,

$\therefore$　$AB=KS$,　$BC=SL$,

则　$S_{\triangle KSL}=S_{\triangle ABC}$,

且　$S_{\square AKSB}=S_{\square AEFB}$，

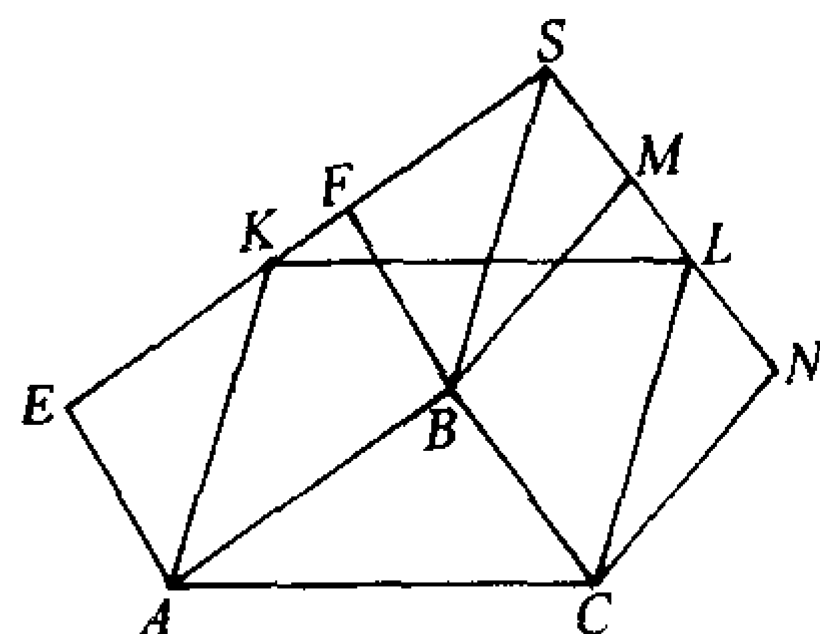
及　$S_{\square BSLC}=S_{\square BMNC}$，

∴　$S_{\square AKLC}=S_{AKSLC}-S_{\triangle KSL}$

$=S_{AKSLC}-S_{\triangle ABC}$

$=S_{\square AKSB}+S_{\square BSLS}$

$=S_{\square AEFB}+S_{\square BMNC}$.



8·51　以直角△ABC 的斜边和两直角边为边向外各作一个正方形，如果已知三角形的斜边的长和两直角边长之和，求：除△ABC 的顶点以外的正方形顶点所组成的六边形的面积.

（基辅数学奥林匹克，1962 年）

［解］　如图，作 $EP\perp CB$ 的延长线于P，连 PN，则　$\triangle EPB\cong\triangle ABC$，

且　$EP\ \underline{\parallel}\ BN$，

∴　$EPNB$ 是平行四边形.

又　$S_{\triangle BEN}=\dfrac{1}{2}S_{\square EPEB}$

$=S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab$，

故　六边形的面积 S 为

$$S=4-\frac{1}{2}ab+a^2+b^2+c^2=(a+b)^2+c^2.$$

8·52　凸四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 延长线交于E，设 H 和 G 是BD 和AC 的中点，求：△EHG 的面积与四边形 $ABCD$ 的面积之比.

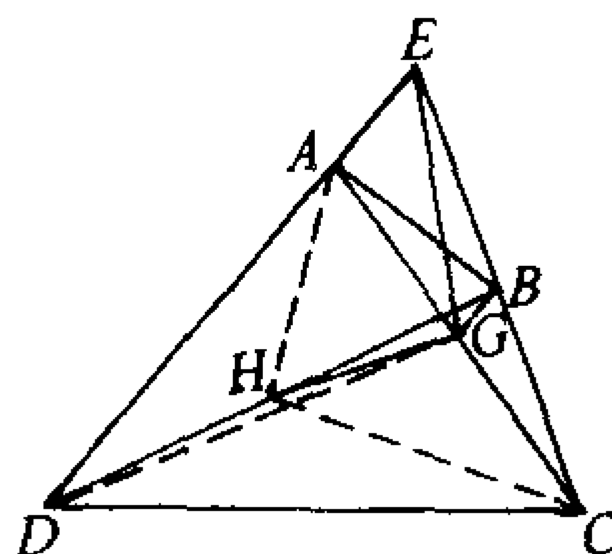
（第 10 届加拿大数学奥林匹克，1978 年）

［解 1］　设△EDC 的面积为 1.

又设　$x=\dfrac{EA}{ED}$，$y=\dfrac{EB}{EC}$，则

$S_{\triangle ACE}=x$，$S_{\triangle ACD}=1-x$，

$S_{\triangle BDE}=y$，$S_{\triangle BCD}=1-y$.



又 $$\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{\frac{1}{2}EA\cdot EB\cdot\sin\angle AEB}{\frac{1}{2}ED\cdot EC\cdot\sin\angle DEC}=xy.$$

因为 H 是 BD 的中点,G 是 AC 的中点,则

$$S_{\triangle DEH}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}y,$$

$$S_{\triangle CDH}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}(1-y),$$

$$S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}x,$$

又 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDE}-S_{\triangle ABE}=y-xy,$

$\therefore$ $S_{\triangle ADH}=\frac{1}{2}y(1-x).$

及 $S_{\triangle ACH}=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}xy,$

同时 $S_{\triangle AGH}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}xy.$

$\therefore$ $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle DBE}-S_{\triangle BEH}-S_{\triangle ADH}=\frac{1}{2}xy.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 4S_{\triangle EGH}&=4(S_{\triangle AEG}+S_{\triangle AGH}-S_{\triangle AEH})\\&=2x+(1-2x+xy)-2xy\\&=1-xy=S_{\triangle CDE}-S_{\triangle ABE}=S_{ABCD}.\end{aligned}$$

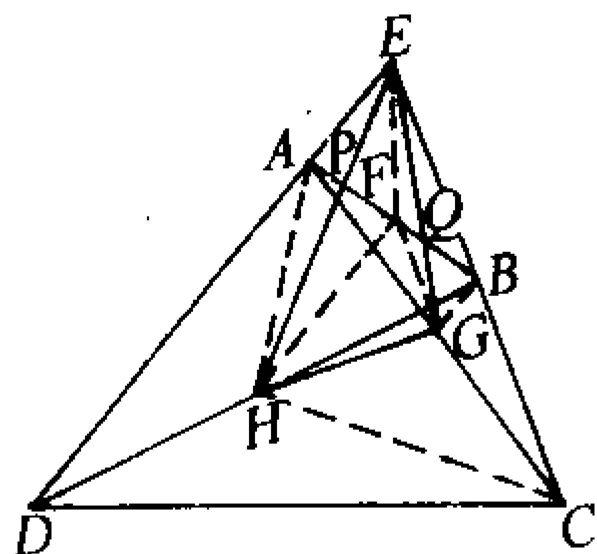
$\therefore$ $\frac{S_{\triangle EGH}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{4}.$

[解 2] 连 BG、DG,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle EGH}&=S_{\triangle DEG}-S_{\triangle DGH}-S_{\triangle DEH}\\&=S_{\triangle EAG}+S_{\triangle ADG}-\frac{1}{2}S_{\triangle DBG}-\frac{1}{2}S_{\triangle BDE}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle ACE}+\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}-\frac{1}{2}S_{DGBE}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle EDC}-\frac{1}{2}S_{DGBE}=\frac{1}{2}S_{BCDG}\\&=\frac{1}{4}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC})=\frac{1}{4}S_{ABCD}.\end{aligned}$$

即 $\dfrac{S_{\triangle EGH}}{S_{ABCD}}=\dfrac{1}{4}$.

[解 3] 连结 AH、CH、BG,



$\because$ H,G 分别为 DB,AC 中点,

$\therefore$ $S_{AHGB}=\dfrac{1}{2}S_{AHCB}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}$.

故只需证明 $S_{\triangle EGH}=S_{AHGB}$.

取 AB 中点 F,连结 EF、HF、GF,分别记 AB 与 EH、EG 的交点为 P、Q. 于是有

$HF /\!/ DE$, $GF /\!/ CE$.

$\therefore$ $\triangle APE\backsim\triangle FPH$, $\triangle BQE\backsim\triangle FQG$.

$\therefore$ $\dfrac{AP}{FP}=\dfrac{EP}{HP}$, $\dfrac{BQ}{FQ}=\dfrac{EQ}{GQ}$.

$\therefore$ $AP\cdot HP=FP\cdot EP$, $BQ\cdot GQ=FQ\cdot EQ$.

$\therefore$ $S_{\triangle APH}=S_{\triangle EPF}$, $S_{\triangle BQG}=S_{\triangle EQF}$.

$\therefore$ $S_{\triangle APH}+S_{\triangle BQG}=S_{\triangle EPQ}$.

$\therefore$ $S_{\triangle EGH}=S_{AHGB}$.

8·53 平面上有一个凸四边形 $ABCD$. (1)如果平面上存在一点 P,使得 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 的面积都相等,问四边形 $ABCD$ 应满足什么条件? (2)满足(1)的点 P,平面上最多有几个? 证明你的结论.

(第 6 届中国中学生数学冬令营,1991 年)

[解] (1)①先看点 P 在形内的情形.

若 A、P、C 和 B、P、D 都三点共线,则四边形 $ABCD$ 为平行四边形,P 为两条对角线的交点.

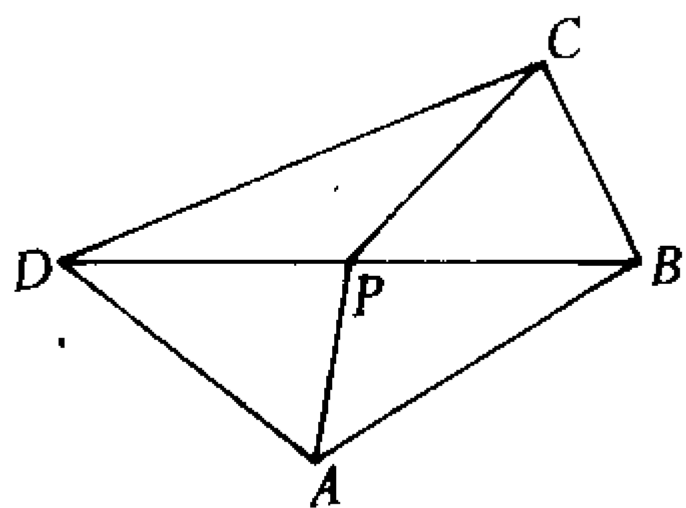


图 1

若 A、P、C 三点不共线,由于 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 等积,故直线 AP 必过对角线 BD 的中点.

同理知直线 CP 也过 BD 的中点. 因而 P 为 BD 中点.

显然,这时 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 等积(见图 1). 这意味着若四边形内

有满足要求的点 P，则四边形 $ABCD$ 被它的一条对角线按面积平分，容易看出，这个条件还是充分的.

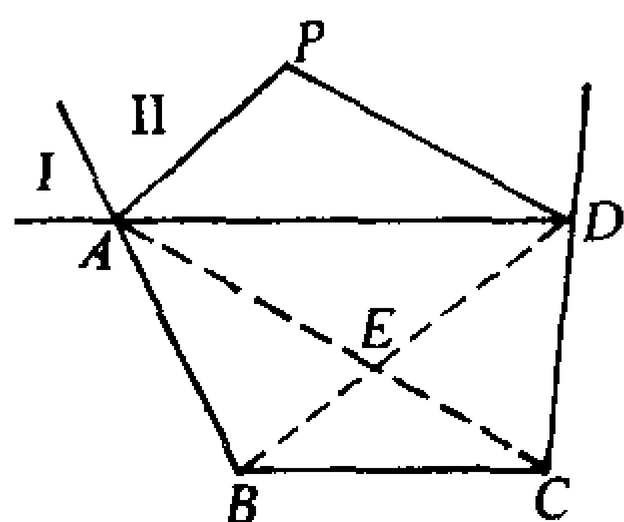


图 2

②再看点 P 在形外的情形. 容易看出，延长四边形的两条邻边，比如延长 BA、DA 所形成的角域 I（见图 2）中的任何点都不满足题中要求.

因而，若在形外有满足要求的点 P，它只能在图 2 所示的区域Ⅱ中.

这时，因为$\triangle PAB$ 与$\triangle PAD$ 等积，

故有　$AP /\!/ BD$.

同理　$AC /\!/ PD$.

设 AC，BD 交于点 E，则四边形 $AEDP$ 为平行四边形.

因而有　$S_{\triangle AED}=S_{\triangle APD}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}-S_{ABCD}$.

故有　$S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

可见，若有形外一点 P 满足题中要求，则四边形 $ABCD$ 的两条对角线将它分成的四个三角形中，必有一个的面积是四边形面积的一半.

下面我们来证明，这个条件也是充分的.

设 $S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$并简记它的面积为 S. 过 A 作 BD 的平行线，过 D 作 CA 的平行线且两线交于点 P，于是四边形 $AEDP$ 为平行四边形且 $S_{\triangle PAD}=S$（参看图 2），这时，PB 作为梯形 $BDPA$ 的对角线当然在凸五边形 $ABCDP$ 内部.

同理，PC 也在凸五边形 $ABCDP$ 内部从而有

$$\begin{aligned}S_{\triangle PAB}&=S=S_{\triangle PCD},\ S_{\triangle PBC}=S_{ABCDP}-S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}\\&=S_{\triangle PAD}+S_{ABCD}-2S\\&=S+2S-2S=S.\end{aligned}$$

可见，点 P 满足题中要求.

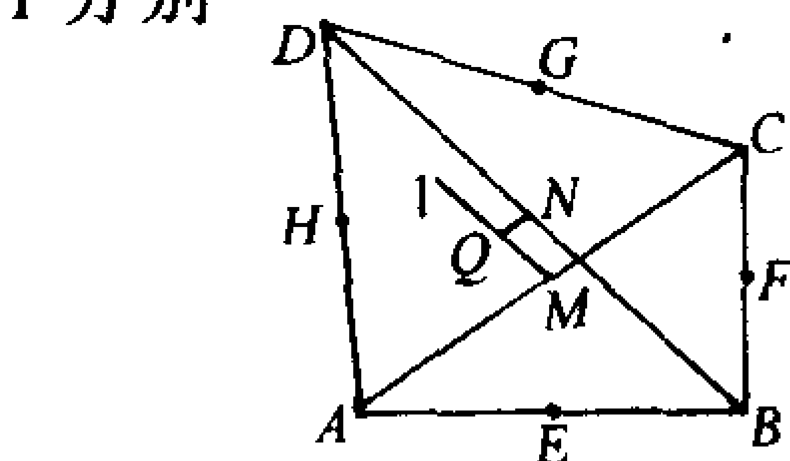
(3)由①和②可知，四边形 $ABCD$ 的形外和形内都是最多只有一点满足要求. 而且由导出的充分必要条件看出，形内和形外不能同时有满足要求的点，故知满足要求的点 P，最多有一点.

8·54　给定一个凸四边形，是否总能在它的内部确定一点，使得该点与各边中点的连线将四边形分为四个面积相等的区域？如果这样的

点存在，那么是否是惟一的？

（加拿大数学奥林匹克训练题，1992年）

［解］ 设凸四边形为 $ABCD$，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，则



$$EH=FG=\frac{1}{2}BD,$$

且 EH、FG 平行于 BD.

过 AC 的中点 M 作 BD 的平行线 l.

于是点 A 和点 C 到直线 l 的距离相等，不妨设这个距离为 $4d$. 注意到

$$S_{ABCD}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle BCD}=4dBD.$$

由于对 l 上的任意一点 P 都有

$$S_{AEPH}=S_{\triangle AEH}+S_{\triangle PEH}=2dEH=dBD=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

同理 $S_{CFPG}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

设点 Q 符合题目要求，则点 Q 必在直线 l 上.

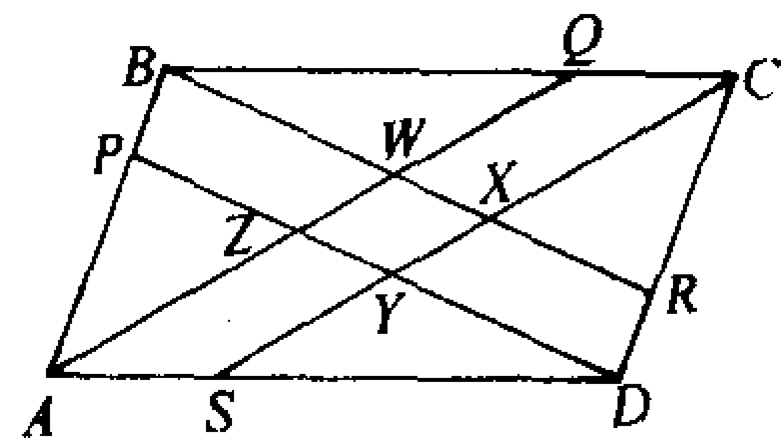
同样地，点 Q 也必在过 BD 的中点且平行于 AC 的直线上，由于该直线不与 l 平行，则必与 l 相交.

这样点 Q 就是惟一的交点，即满足题目条件的点存在而且惟一.

8·55 面积为740的平行四边形 $ABCD$，边 AB、BC、CD、DA 上5:2的内分点分别为 P、Q、R、S. 直线 AQ 与 BR 交于 W，直线 BR 与 CS 交于 X，直线 CS 与 DP 交于 Y，直线 DP 与 AQ 交于 Z，求：四边形 $WXYZ$ 的面积.

（日本数学奥林匹克，1990年）

［解］ 由 $\frac{AS}{SD}=\frac{2}{5}$ 得 $\frac{S_{ASCQ}}{S_{ABCD}}=\frac{2}{7}$，



$\therefore\quad S_{ASCQ}=\frac{2}{7}\times 740.$

令 $WQ=SY=a$，则

$$\frac{AZ}{SY}=\frac{AD}{SD}=\frac{7}{5}.\quad\therefore\quad AZ=\frac{7}{5}a.$$

又∵ $\dfrac{AZ}{ZW}=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{5}{2}$,

∴ $ZW=\dfrac{2}{5}AZ=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{5}a=\dfrac{14}{25}a$.

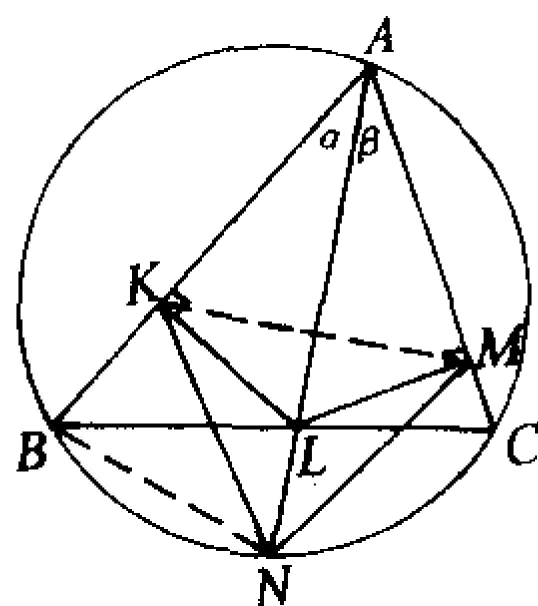
$AQ=AZ+ZW+WQ=\dfrac{7}{5}a+\dfrac{14}{25}a+a=\dfrac{74}{25}a$.

有 $\dfrac{S_{WXYZ}}{S_{ASCQ}}=\dfrac{WZ}{AQ}=\dfrac{\frac{14}{25}a}{\frac{74}{25}a}=\dfrac{14}{74}$,

∴ $S_{WXYZ}=\dfrac{14}{74}S_{ASCQ}=\dfrac{14}{74}\times\dfrac{2}{7}\times740=40$.

8·56 锐角△ABC 的顶角 A 的平分线交 BC 边于 L,又交三角形的外接圆于 N,过 L 分别作 AB 和 AC 边的垂线 LK 和 LM,垂足是 K 和 M.求证:四边形 $AKNM$ 的面积等于△ABC 的面积.

(第 28 届国际数学奥林匹克,1987 年)



[证 1] 设 $\angle BAN=\alpha$, $\angle CAN=\beta$.

因为 AN 是$\angle A$ 的平分线,有 $\alpha=\beta$.

又∵ $LK\perp AB, LM\perp AC$, ∴ $LK=LM$.

连 KM, 则 $KM\perp AL$.

∴ $S_{AKLM}=\dfrac{1}{2}AL\cdot KM=AK\cdot KL$, ①

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin2\alpha$

$=AB\cdot AC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$=AB\cdot AC\cdot\dfrac{KL}{AL}\cdot\dfrac{AK}{AL}$. ②

连 BN, 则 $\triangle ALC\backsim\triangle ABN$,

∴ $\dfrac{AB}{AL}=\dfrac{AN}{AC}$, 即 $AB\cdot AC=AL\cdot AN$. ③

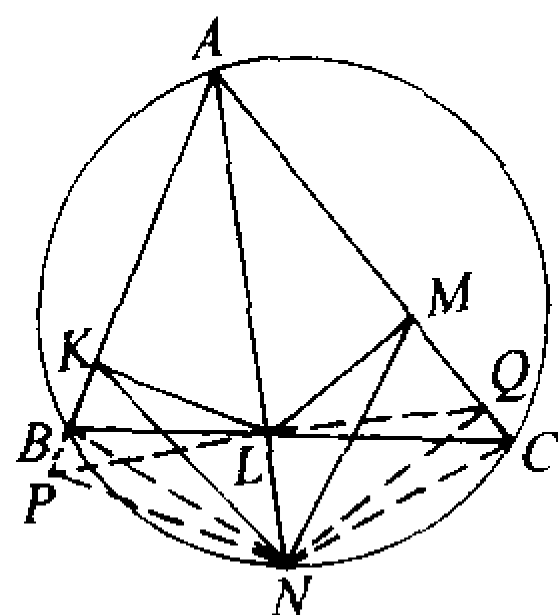
把①和③代入②得

$$S_{\triangle ABC}=AL\cdot AN\cdot\frac{AL\cdot KM}{2AL\cdot AL}=\frac{1}{2}AN\cdot KM=S_{AKNM}.$$

[证 2] 过点 N 作 $NP\perp AB$ 于 P,作 $NQ\perp AC$ 于 Q.

$\because$ $LK \perp AB$, $LM \perp AC$,

$\therefore$ $NP /\!/ LK$, $NQ /\!/ LM$.



连结 BN、CN、PL、LQ,于是有

$S_{\triangle AKN} = S_{\triangle APL}$, $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AQL}$.

可见,为证本题的结论,只需证明 $S_{\triangle LCQ} = S_{\triangle LBP}$,而为此又只需证明 $BP = CQ$.

$\because$ AN 平分$\angle BAC$,

$\therefore$ $BN = NC$, $NP = NQ$.

$\therefore$ $\triangle NPB \cong \triangle NQC$, $\therefore$ $BP = CQ$.

[证 3] 连结 BN 并记圆的半径为 r,于是有 $AK = AL\cos\dfrac{A}{2}$.

$$\therefore\quad S_{AKNM} = 2S_{\triangle AKN} = AK \cdot AN\sin\frac{A}{2} = AL \cdot AN\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2},$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABL} + S_{\triangle ALC} = \frac{1}{2}AL(AB + AC)\sin\frac{A}{2}.$$

为证本题的结论,只需证明 $AB + AC = 2AN\cos\dfrac{A}{2}$.

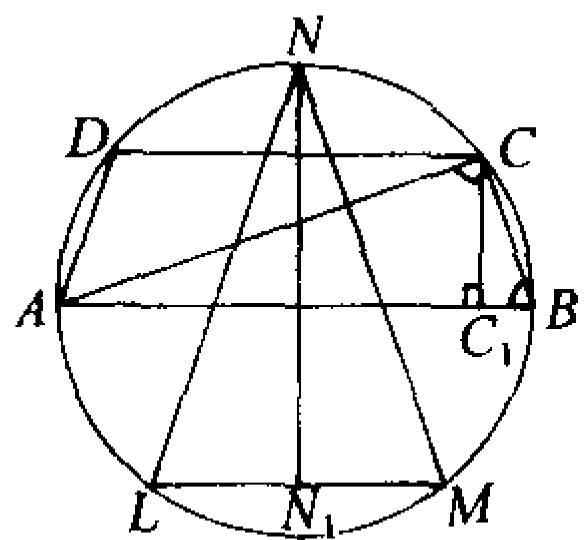
在$\triangle ABN$ 中应用正弦定理有

$$\begin{aligned} 2AN\cos\frac{A}{2} &= 4r\sin\angle ABN \cdot \cos\frac{A}{2} = 4r\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2} \\ &= 2r(\sin(B + A) + \sin B) = 2r\sin C + 2r\sin B \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

8·57 在圆中内接一个梯形,其底边为直径,又内接一个三角形,其边平行于梯形的边,求证:这三角形与这梯形面积相等.

(基辅数学奥林匹克,1952 年)

[证] 如图,设圆内接梯形 $ABCD$ 的底 AB 是此圆的直径;$\triangle LMN$ 为此圆的内接三角形,且



$LN /\!/ AD$, $MN /\!/ BC$, $LM /\!/ AB$.

$\because$ $CD /\!/ AB$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$, $AD = BC$.

$\because$ $AD /\!/ LN$, $BC /\!/ MN$, $AB /\!/ LM$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{NC}$,

$$\overset{\frown}{LN}=\overset{\frown}{AL}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DN}=2\overset{\frown}{AL}+\overset{\frown}{AD}=2\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{BC}$$
$$=\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{NC}=\overset{\frown}{MN}.$$

$\therefore$ $LN=MN=AC$,

作 $CC_1 \perp AB$ 于 C_1，$\angle ACC_1=\angle ABC$,

有 $\triangle MN_1N \cong \triangle CC_1A$,

$$\therefore \quad S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)CC_1=AC_1\cdot CC_1$$
$$=2S_{\triangle CC_1A}=2S_{\triangle MN_1N}=S_{\triangle LMN}.$$

8·58 求一个圆内接凸八边形的面积,它有四个接连边的长皆为3单位,而其余四边长皆为2单位,答案要以 $r+s\sqrt{t}$ 之形式,其中 r、s、t 皆为正整数.

(第39届美国普特南数学竞赛,1978年)

[解1] 设圆的半径为 r. α 和 β 分别是长为3和2的弦所对的圆周角,则

$$8\alpha+8\beta=2\pi. \quad \therefore \quad \beta=\frac{\pi}{4}-\alpha.$$

又 $\sin\alpha=\dfrac{3}{2r}$，则 $\sin\beta=\dfrac{2}{2r}=\dfrac{1}{r}$.

于是 $\dfrac{1}{r}=\sin\beta=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$

而 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2r}{3}\cdot\dfrac{1}{r}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

圆心到弦长为3的弦的距离 h_3 为

$$h_3=\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

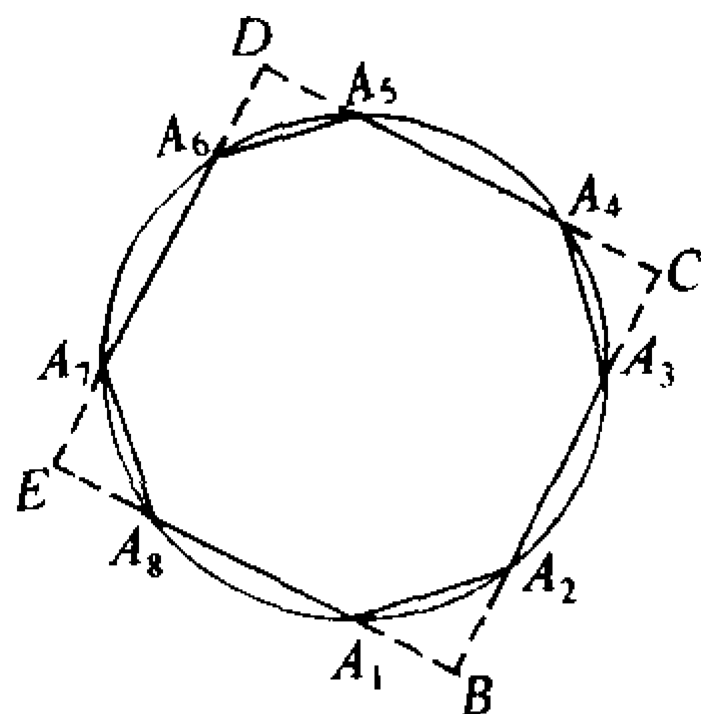
同理可得,圆心到弦长为2的弦的距离 h_2 为

$$h_2=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}.$$

所求八边形的面积为

$$4\left(\frac{1}{2}\cdot3h_3+\frac{1}{2}\cdot2h_2\right)=(9+6\sqrt{2})+(4+6\sqrt{2})=13+12\sqrt{2}.$$

[**解 2**]　如果一个圆内接八边形，它的边分别为 3 单位长与 2 单位长相间出现，则它的面积与所求的八边形面积相等．



这个新八边形的每个内角为$\frac{3\pi}{4}$．

延长所有边长为 3 的边 A_2A_3、A_4A_5、A_6A_7、A_8A_1，得到一个边长为 $3+2\sqrt{2}$的正方形 $BCDE$．

又$\triangle A_1A_2B$、$\triangle A_3A_4C$、$\triangle A_5A_6D$、$\triangle A_7A_8E$ 为斜边为 2 的等腰三角形．

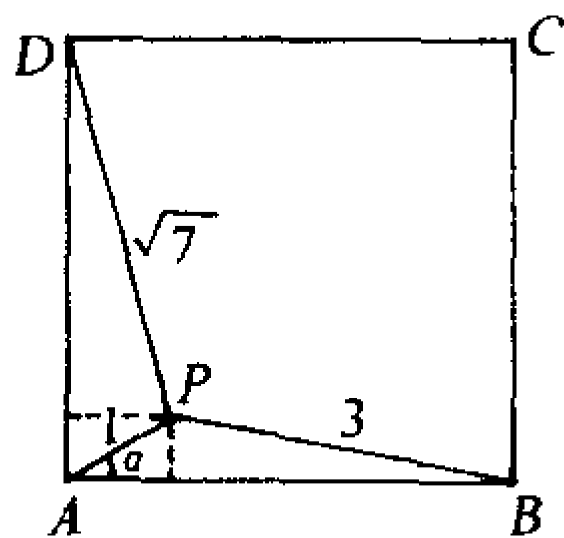
于是，所求八边形的面积为

$$(3+2\sqrt{2})^2-4\times\frac{1}{2}\times2\times1=13+12\sqrt{2}.$$

8·59　P 为正方形 $ABCD$ 内一点，又 P 到 A、B、D 距离分别为 1、3、$\sqrt{7}$，求：$S_{正方形ABCD}$．

（中国陕西省数学竞赛，1979 年）

[**解**]　设正方形 $ABCD$ 边长为 a，且$\angle PAB=\alpha$，由余弦定理有



$$3^2=1^2+a^2-2a\cos\alpha \quad ①$$

$$(\sqrt{7})^2=1+a^2-2a\cos(90^\circ-\alpha) \quad ②$$

即　$2a\cos\alpha=a^2-8$　和　$2a\sin\alpha=a^2-6$，

上两式两边平方后相加有

$$4a^2=(a^2-8)^2+(a^2-6)^2,$$

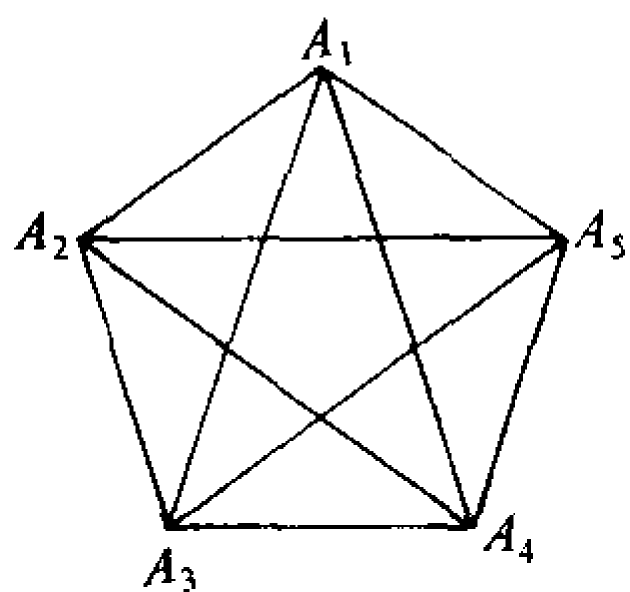
即　$a^4-16a^2+50=0$，得　$a^2=8+\sqrt{14}$（已舍负值）．

$\therefore$　$S_{正方形ABCD}=8+\sqrt{14}$．

（三）五边形、六边形、……、多边形面积

8·60　$A_i(i=1,2,3,4,5)$为正五边形五个顶点（如图），其中每两点连成一线段，记该 10 条线段平方和为 Q；其中每三点连成一个三角形，记该 10 个三角形面积平方和为 P，求证：$Q^2=80P$．

（中国安徽省数学竞赛，1979 年）



［证］ 设 d 为正五边形外接圆直径，则五边形边长 $a=d\sin 36^\circ$.

而该五边形对角线 $l=d\sin 72^\circ$，这样

$Q=5(a^2+l^2)$.

$$\because\quad S_1=S_{\triangle A_1A_2A_3}=S_{\triangle A_2A_3A_4}=\cdots=S_{\triangle A_5A_1A_2}=\frac{1}{2}a^2\sin 108^\circ=\frac{1}{2}a^2\sin 72^\circ,$$

且
$$S_2=S_{\triangle A_1A_3A_4}=S\triangle A_2A_4A_5=\cdots=S_{\triangle A_5A_2A_3}=\frac{1}{2}l^2\sin 36^\circ,$$

这样 $P=5(S_1^2+S_2^2)$，将前诸式代入，

$$\therefore\quad \frac{Q^2}{P}=\frac{25(a^2+l^2)^2}{5(S_1^2+S_2^2)}=\frac{20(3+2\cos 72^\circ)}{\sin^2 72^\circ},$$

因而只需证 $\dfrac{3+2\cos 72^\circ}{\sin^2 72^\circ}=4$，

$$\because\quad \frac{2\sin 72^\circ(\cos 72^\circ+\cos 144^\circ)}{2\sin 72^\circ}=\frac{\sin 144^\circ+\sin 216^\circ-\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ}=\frac{-\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ}=-\frac{1}{2},$$

$\therefore\quad 2(\cos 72^\circ+\cos 144^\circ)=-1$，

则 $3+2\cos 72^\circ=2-2\cos 144^\circ=2(1-\cos 144^\circ)=4\sin^2 72^\circ$，

$\therefore\quad \dfrac{3+2\cos 72^\circ}{\sin^2 72^\circ}=4$，故 $\dfrac{Q^2}{P}=80$ 即 $Q^2=80P$.

8·61 设 A 是正五角星形的一个尖角的顶点，折线 $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1A$ 是五角星的外围周界. 直线 AB 与 DE 相交于 F 点. 求证：多边形 $ABB_1CC_1DED_1A$ 与四边形 AD_1EF 的面积相等.

（莫斯科数学奥林匹克，1953 年）

［证］ 如图，$\because\quad \angle FAE=180^\circ-108^\circ=72^\circ$，

又
$$\angle AED_1=\angle AEE_1+\angle E_1ED_1=36^\circ+36^\circ=72^\circ,$$

$\therefore\quad \angle FAE=\angle AED_1$. 则 $AB/\!/EC$.

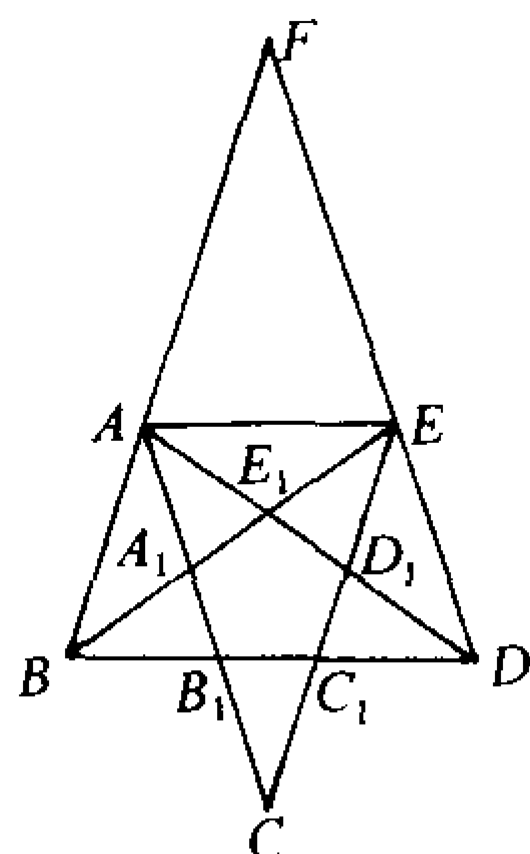
同理　$AC /\!/ EF$.

即　$AFEC$ 是平行四边形，

$\therefore$　$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AFE}$.

又　$\triangle ABA_1 \cong \triangle DED_1 \cong \triangle AEE_1$,

且　$\triangle A_1BB_1 \cong \triangle C_1DD_1 \cong \triangle D_1EE_1$,



$\therefore$　$S_{ABB_1CC_1DED_1A}$

$=(S_{\triangle ACE}-S_{\triangle AEE_1}-S_{\triangle D_1EE_1})+S_{\triangle ABA_1}$

$\quad+S_{\triangle A_1BB_1}+S_{\triangle C_1DD_1}+S_{\triangle DED_1}$

$=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle C_1DD_1}+S_{\triangle DED_1}$

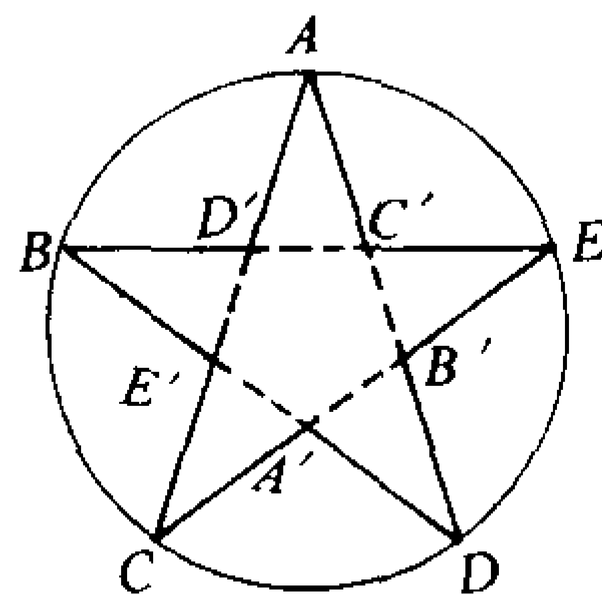
$=S_{\triangle AFE}+S_{\triangle D_1EE_1}+S_{\triangle AEE_1}$

$=S_{AD_1EF}$.

8·62　已知一面国旗上的大五角星的一边长为 1,求:这五角星的面积$\left(已知 \sin18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.

（中国陕西省数学竞赛,1978 年）

[解]　如图,$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=36^\circ$,



$$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'$$
$$=\sqrt{1+1-2\cos36^\circ}=2\sin18^\circ,$$
$$S_{\triangle AD'C'}=\frac{1}{2}\sin36^\circ=\frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ .$$

又　$S_{五角星}=3S_{\triangle AD'C'}+S_{\triangle D'CE}$，而

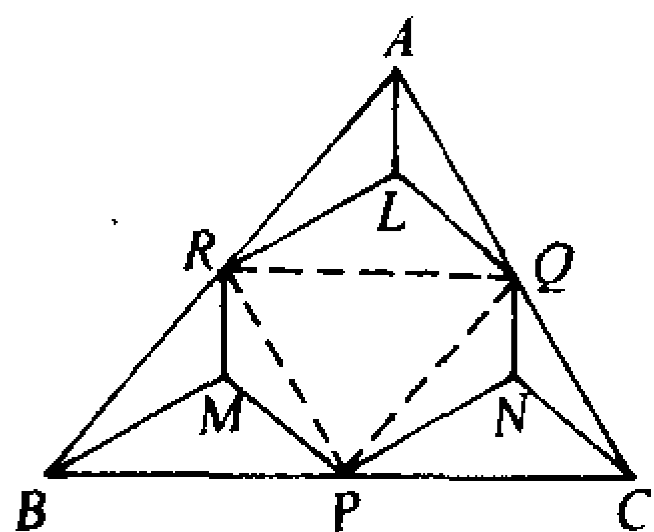
$$\begin{aligned}S_{\triangle D'CE}&=\frac{1}{2}D'C\cdot D'E\cdot\sin108^\circ\\&=\frac{1}{2}(1+2\sin18^\circ)^2\cos18^\circ\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cos18^\circ\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\&=\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}\ .\end{aligned}$$

$$\therefore \quad S_{\text{五角星}}=\frac{3}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{1}{4}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

8·63 在锐角三角形中，由每边的中点向其他两边引垂线. 求证：这些垂线围成的六边形的面积等于三角形面积的一半.

（第19届全苏数学奥林匹克，1985年）



［证］ 设△ABC为已知的三角形，P、Q、R分别是各边中点(如图).

易证 $\triangle AQR \cong \triangle BRP \cong \triangle CPQ \cong \triangle ABC$.

这些三角形都是锐角三角形. 它们的垂心L、M、N都在三角形内.

题设的六边形为$LRMPNQ$，设其面积为S.

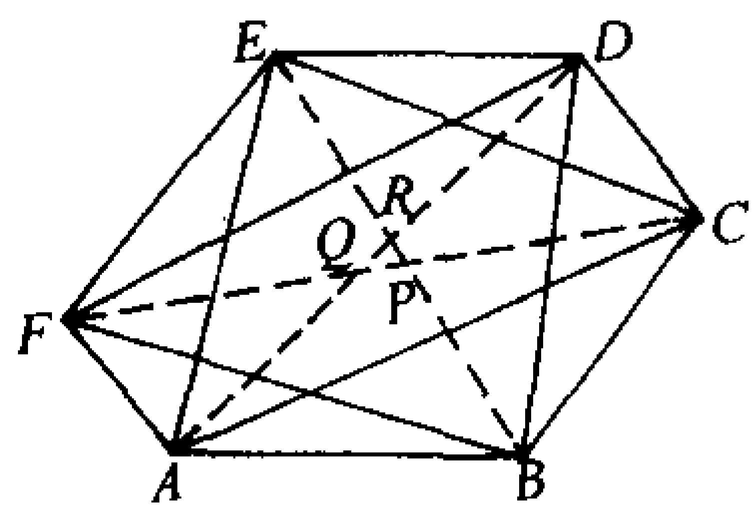
则 $S=S_{\triangle PQR}+S_{\triangle QLR}+S_{\triangle RMP}+S_{\triangle PNQ}$.

其中 $\triangle RMP\cong\triangle ALQ$， $\triangle PNQ\cong\triangle RDA$.

$$\therefore \quad S=S_{\triangle PQR}+S_{\triangle ARQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

8·64 设凸六边形$ABCDEF$的对边$AB /\!/ DE$，$BC /\!/ EF$，$CD /\!/ FA$. 求证：△ACE和△BDF的面积相等.

（匈牙利数学奥林匹克，1958年）



［证］ 作对角线AD、BE和CF，设R、P、Q是它们的交点(这三点可能重合).

$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACQ}+S_{\triangle CEP}+S_{\triangle EAR}+S_{\triangle PQR}$，

$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle DFQ}+S_{\triangle FBP}+S_{\triangle BDR}+S_{\triangle PQR}$.

$\because$ $AF /\!/ CD$，$\therefore$ $S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ADF}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ACF}-S_{\triangle AQF}=S_{\triangle ADF}-S_{\triangle AQF}$

即 $S_{\triangle ACQ}=S_{\triangle DFQ}$.

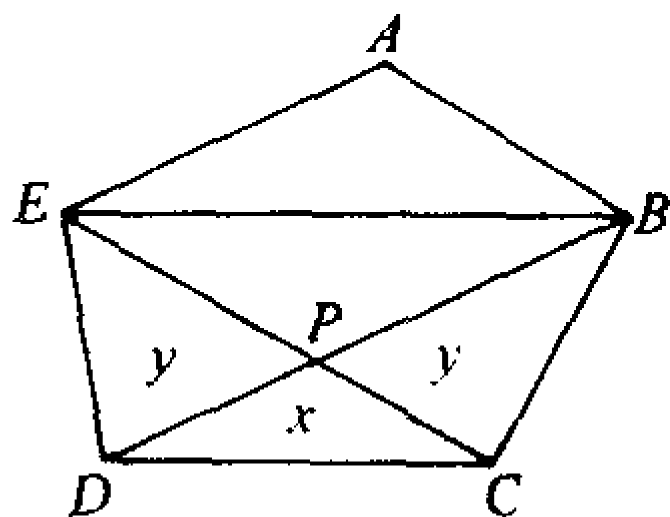
同理 $S_{\triangle CEP}=S_{\triangle FBP}$， $S_{\triangle EAR}=S_{\triangle BDR}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BDF}$.

8·65　一个给定的凸五边形 $ABCDE$，具有如下性质：五个三角形 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEA$、$\triangle EAB$ 中的每一个的面积都等于 1. 求证：每个具有上述性质的五边形都有相同的面积，并且有无限多个这样的不全等的五边形.

（第 1 届美国数学奥林匹克，1972 年）

[证 1]　记 $S_{\triangle ABC}$ 为 $\triangle ABC$ 的面积，余类推.



$\because\quad S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}=1,$

$\therefore$　$\triangle BCD$ 和 $\triangle ECD$ 是以 CD 为底且等高的三角形，于是有　$BE/\!/CD$.

同理有　$BD/\!/AE$，　$EC/\!/AB$.

记 P 为 BD 与 CE 的交点. 则四边形 $ABPE$ 为平行四边形.

于是　$S_{\triangle EPB}=S_{\triangle EAB}=1$.

令　$S_{\triangle PCB}=S_{\triangle PDE}=y$，　$S_{\triangle PDC}=x$，

$\because\quad x+y=1$

$\therefore\quad \dfrac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PEB}}=\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle PBC}}$，　则　$\dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{y}$，

由　$x+y=1$　得　$\dfrac{y}{1}=\dfrac{1-y}{y}$，

即　$y^2+y-1=0$，　得　$y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　（已舍负值）.

且　$x=1-y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

所以五边形 $ABCDE$ 的面积为

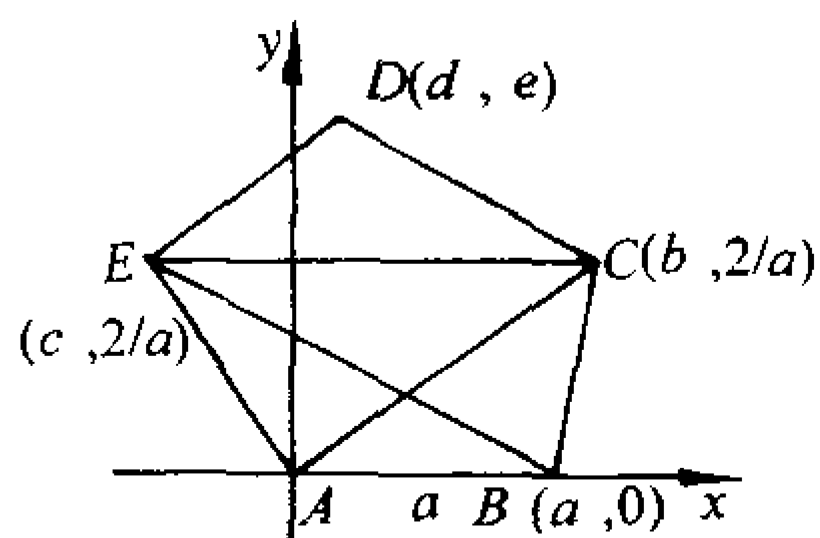
$$S_{ABCDE}=1+1+2y+x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

为了证明有无限多个这样的不全等的五边形，可以先构造一个任意的 $\triangle PCD$，使

$$S_{\triangle PCD}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

延长 CP 到 E，延长 DP 到 B，使得　$S_{\triangle EDC}=S_{\triangle BDC}=1$，

从而　$BE/\!/CD$，再作 $EA/\!/BD$，$AB/\!/EC$，这样得到的五边形 $ABCDE$ 就具有题目的性质.



［证 2］ 用解析几何证法.

以 AB 所在直线为 x 轴，A 为坐标原点建立直角坐标系，如图.

设 $AB=a$，则 $A(0,0)$，$B(a,0)$.

由 $S_{\triangle ABC}=1$ 可得顶点 C 的纵坐标为 $\dfrac{2}{a}$. 设 C 点的坐标为 $\left(b,\dfrac{2}{a}\right)$.

又由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=1$. 可得 $CE /\!/ AB$.

同理可得 $BC /\!/ DA$，$CD /\!/ BE$，$DE /\!/ AC$，$AE /\!/ BD$.

因此可设 $D(d,e)$，$E\left(c,\dfrac{2}{a}\right)$，于是

$$S_{ABCDE}=S_{\triangle DEA}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=1+1+\frac{1}{2}ae=2+\frac{1}{2}ae.$$

下面计算 ae 的值. 记直线 AC 的斜率为 k_{AC}，余类推.

由于 $AC /\!/ DE$，$BC /\!/ DA$，$AE /\!/ BD$，则

$$k_{AC}=k_{DE},\quad k_{BC}=k_{DA},\quad k_{AE}=k_{BD}.$$

于是有 $\dfrac{\frac{2}{a}}{b}=\dfrac{e-\frac{2}{a}}{d-c}$，$\dfrac{\frac{2}{a}}{b-a}=\dfrac{e}{d}$，$\dfrac{\frac{2}{a}}{c}=\dfrac{e}{d-a}$.

即 $\begin{cases} aeb+2(c-d-b)=0, & ① \\ aec+2(a-d)=0, & ② \\ ae(a-b)+2d=0. & ③ \end{cases}$

①+③得 $a^2e+2(c-b)=0$， ④

②+③得 $a^2e+aec+2a-aeb=0$，

即 $ae+ec+2-eb=0$， ⑤

④×e−⑤×2 得 $a^2e^2-2ae-4=0$.

即 $ae=1\pm\sqrt{5}$.

由 $ae>0$ 得 $ae=1\pm\sqrt{5}$.

于是 $S_{ABCDE}=2+\dfrac{1}{2}ae=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

所以具有题设性质的凸五边形的面积具有相同的定值.

下面证明存在着无限多个具有题设性质的不全等的凸五边形.

事实上,由上面的结果 $ae=1+\sqrt{5}$ 得 $e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{a}$,

设 $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C\left(b,\ \dfrac{2}{a}\right)$, $D\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a),\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $E\left(b-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a,\dfrac{2}{a}\right)$.

此时 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{2}{a}=1$.

通过计算 CE、AB、BC、DA、CD、EB 的斜率可得

$CE/\!/AB$, $BC/\!/DA$, $CD/\!/EB$, $ED/\!/AC$, $EA/\!/BD$.

从而可得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=1$.

而 $ABCDE$ 的凸性可由各顶点的坐标不难进行验证.

由于 a,b 取值的任意性,所以可得到无限多个具有题设性质的不全等的凸五边形.

8·66 凸五边形 $ABCDE$ 中,BE 分别交 AC、AD 于 S、R,BD 分别交 CA、CE 于 T、P,AD 交 CE 于 Q,且 $\triangle ASR$、$\triangle BTS$、$\triangle CPT$、$\triangle DQP$、$\triangle ERQ$ 的面积均为 1.(1)求五边形 $PQRST$ 的面积;(2)求五边形 $ABCDE$ 的面积.

(日本数学奥林匹克,1995 年)

[**解**] 我们证明:所有这样的凸五边形 $ABCDE$ 均可由一个正五边形经适当仿射变换得到.记线段 SR 的中点为 M.连 AM.

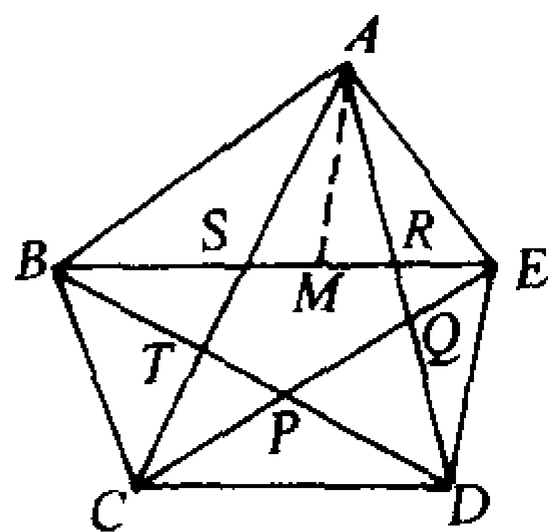


图 1

首先,我们可以作一个 AS 方向的适当伸缩变换使 $\angle AMS$ 为直角,即 $\triangle ASR$ 变成一个以 A 为顶角的等腰三角形,设此时的图形为 $A_1B_1C_1D_1E_1$(图 2).

作 E_1、Q_1、C_1 关于直线 A_1M_1 的对称点 E'_1、Q'_1、C'_1,若 Q'_1 与 T_1 不重合,我们不妨设 $S_1Q'_1<S_1T_1$,则 $S_1B_1<S_1E'_1$(这是因为仿射变换保持面积比不变),于是

$$\frac{1}{2}\cdot S_1B_1\cdot S_1T_1\sin\angle B_1S_1T_1$$
$$=S_{\triangle S_1B_1T_1}=S_{\triangle R_1E_1Q_1}=S_{\triangle S_1E'_1Q'_1}$$

$= \frac{1}{2} \cdot S_1Q'_1 \cdot S_1E'_1 \cdot \sin\angle B_1S_1T_1$,

即 $S_1B \cdot S_1T_1 = S_1E'_1 \cdot S_1Q'_1$,

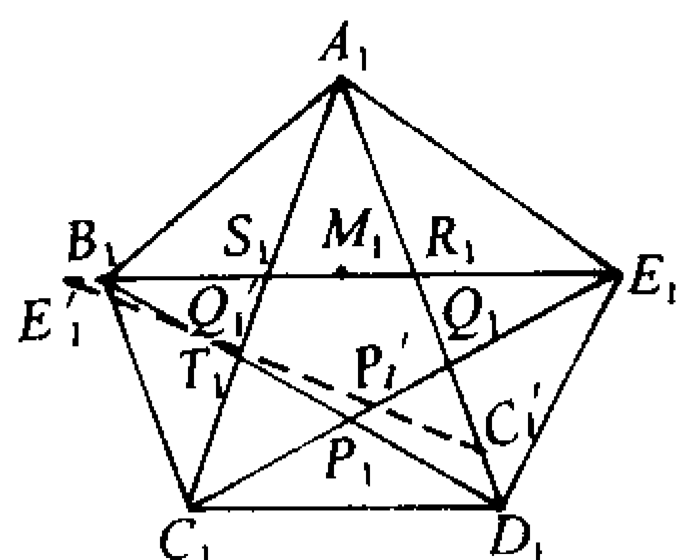


图 2

设直线 $Q'_1C'_1$ 与 P_1Q_1 交于 P'_1,则 P'_1 位于 P_1Q_1 之间,C'_1 位于 D_1Q_1 之间.

因而 $S_{\triangle C_1P_1T_1} < S_{\triangle C_1P'_1Q'_1} = S_{\triangle C'_1P'_1Q_1} < S\triangle D_1O_1Q_1$,

与 $S\triangle C_1P_1T_1 = S_{\triangle D_1P_1Q_1}$矛盾.

所以 Q'_1 与 T_1 重合,整个图形关于直线 A_1M_1 对称.现在我们可以考虑在 A_1M_1 方向上作伸缩变换,注意 $B_1S_1 = R_1E_1$ 保持不变,而 $B_1T_1 = Q_1E_1$ 则连续变化,因而有适当变换使在得到的图形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 中$\triangle B_2S_2T_2$ 与$\triangle E_2Q_2R_2$ 均为等腰三角形.

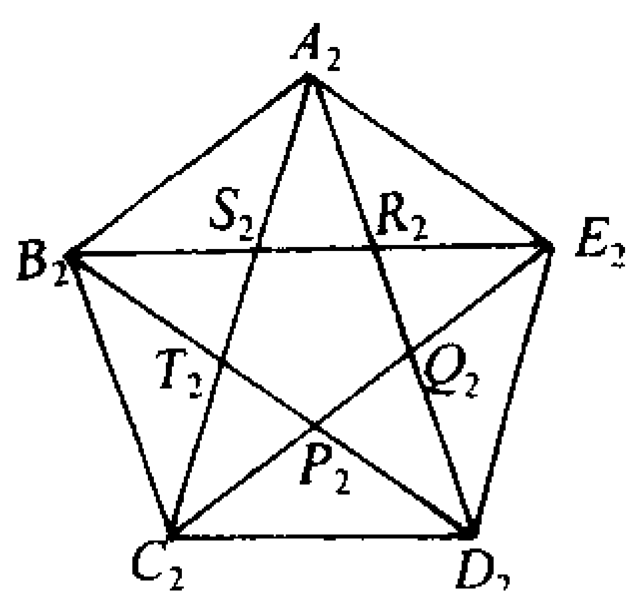


图 3

考虑关于 E_2 与 R_2Q_2 的中点连线的对称性便知

$$\begin{aligned}\angle R_2A_2S_2 &= \angle Q_2E_2R_2 = \angle P_2D_2Q_2 \\ &= \angle T_2C_2P_2 = \angle S_2B_2T_2 \\ &= \frac{1}{5} \times 180^\circ = 36^\circ,\end{aligned}$$

即 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 为正五边形.

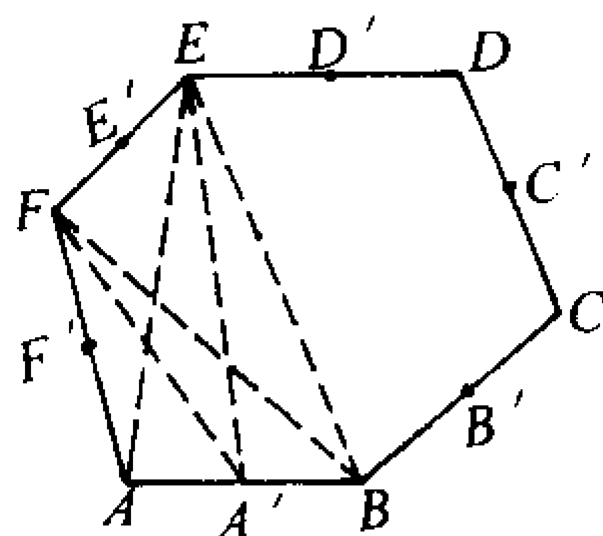
于是在正五边形中可以得到

(1) $S_{PQRST} = \sqrt{5}$,

(2) $S_{ABCDE} = \frac{1}{2}(15 + 7\sqrt{5})$.

8·67 设 A'、B'、C'、D'、E'、F'分别为六边形 $ABCDEF$ 的边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点.试用 $S_{\triangle ABC'}$、$S_{\triangle BCD'}$、$S_{\triangle CDE'}$、$S_{\triangle DEF'}$、$S_{\triangle EFA'}$、$S_{\triangle FAB'}$表示 S_{ABCDEF}.

(世界城市国际数学联赛,1996 年)



[证] 由设 A'是 AB 的中点,则

$2S_{\triangle EFA'} = S_{\triangle EFA} + S_{\triangle EFB}$.

同理可得

$2S_{\triangle FAB'} = S_{\triangle FAB} + S_{\triangle FAC}$,

$$2S_{\triangle ABC'}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD},$$
$$2S_{\triangle BCD'}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BCE},$$
$$2S_{\triangle CDE'}=S_{\triangle CDE}+S_{\triangle CDF},\qquad 2S_{\triangle DEF'}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DEF}.$$

又 $S_{ABCDEF}=S_{\triangle EFA}+S_{\triangle DEA}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

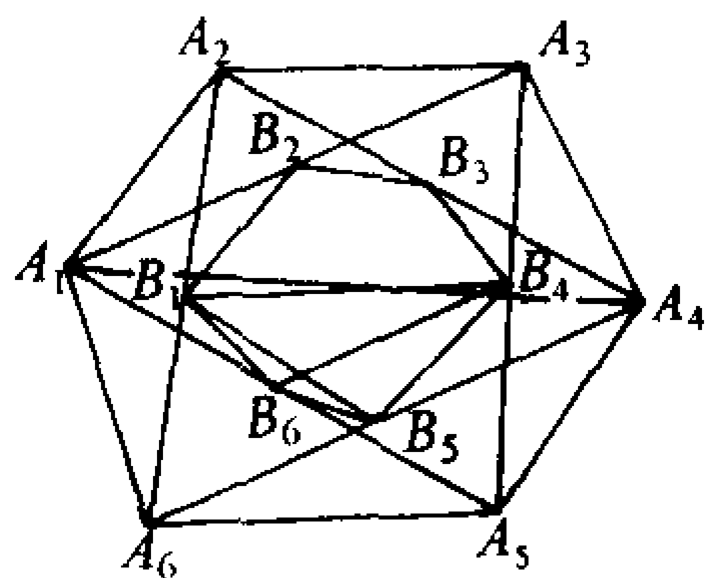
$=S_{\triangle FAB}+S_{\triangle EFB}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle CDE}$

$=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle FAC}+S_{\triangle CDF}+S_{\triangle DEF}.$

$\therefore\quad S_{ABCDEF}=\frac{2}{3}(S_{\triangle ABC'}+S_{\triangle BCD'}+S_{\triangle CDE'}+S_{\triangle DEF'}+S_{\triangle EFA'}+S_{\triangle FAB'}).$

8·68 点 $B_i(i=1,2,\cdots,6)$分别是凸六边形 $A_1A_2\cdots A_5A_6$ 的六条对角线 $A_1A_3,A_2A_4,A_3A_5,A_4A_6,A_5A_1,A_6A_2$ 的中点,并且六边形 $B_1B_2\cdots B_5B_6$ 也是凸六边形.试证明:$S_{六边形B_1B_2\cdots B_5B_6}=\frac{1}{4}S_{六边形A_1A_2\cdots A_5A_6}$.

(第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年)



[证] 如图,由三角形中位线定理知

$B_1B_5 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_2A_4,\quad B_4B_6 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1A_3,$

又 (B_1B_5,B_4B_6)夹角

$=(A_2A_4,A_3A_1)$夹角$=\alpha,$

$\therefore\quad \frac{1}{2}B_1B_5\cdot B_4B_6\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A_1A_4\cdot\frac{1}{2}A_1A_3\right)\sin\alpha$

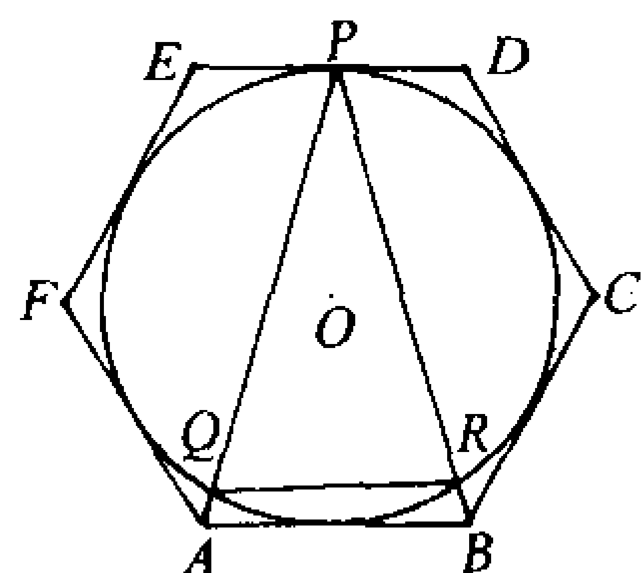
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}A_2A_4\cdot A_1A_3\sin\alpha\right)$

即 $S_{四边形B_1B_4B_5B_6}=\frac{1}{4}S_{四边形A_1A_2A_3A_4}$ ①

同理 $S_{四边形B_1B_2B_3B_3}=\frac{1}{4}S_{四边形A_1A_4A_5A_6}$ ②

①+②有 $S_{六边形B_1B_2\cdots B_5B_6}=\frac{1}{4}S_{六边形A_1A_2\cdots A_5A_6}.$

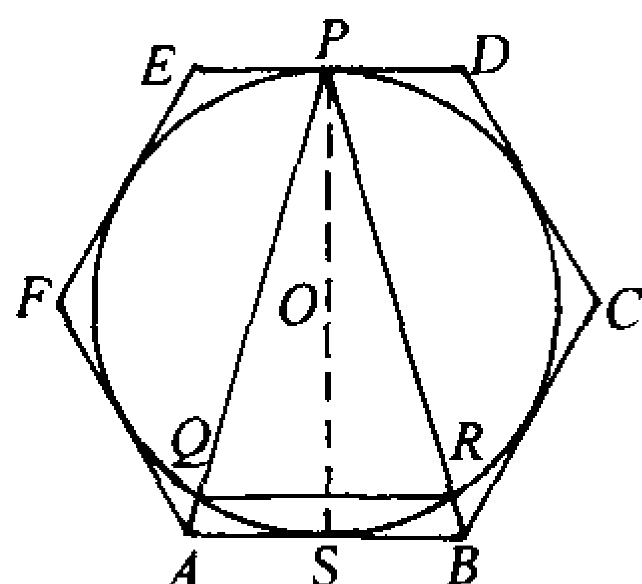
8·69 ⊙O 是正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆,P 为⊙O 与 DE 边的切点,Q、R 分别是 PA、PB 与⊙O 的交点.若正六边形边长为 2,求:



$S_{\triangle PQR}$.

（中国北京市数学竞赛，1980 年）

［解］ 设 $\odot O$ 切 AB 边于 S，连 PS，易证 $PS \perp AB$ 且 $PS \perp QR$，故 $QR // AB$.



$\therefore \quad \triangle PQR \backsim \triangle PAB$.

$\therefore \quad \dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PAB}} = \dfrac{PQ^2}{PA^2}$.

$\because \quad AS = 1, \quad PS = 2OS = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \quad PA = \sqrt{AS^2 + PS^2} = \sqrt{13}$.

由 $\quad AS^2 = AQ \cdot PA$,

有 $\quad AQ = \dfrac{AS^2}{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$,

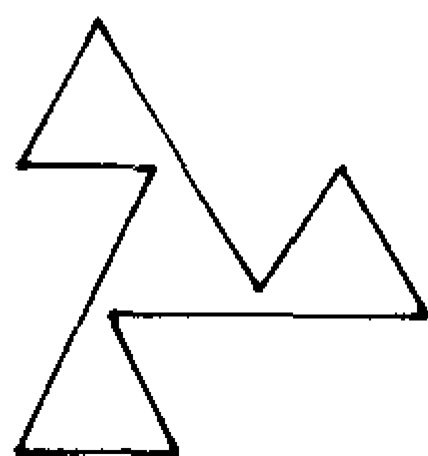
故 $\quad PQ = PA - PQ = \sqrt{13} - \dfrac{1}{\sqrt{13}} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$

$\therefore \quad S_{\triangle PQR} = \dfrac{PQ^2}{PA^2} S_{\triangle PAB} = \dfrac{288\sqrt{3}}{169}$.

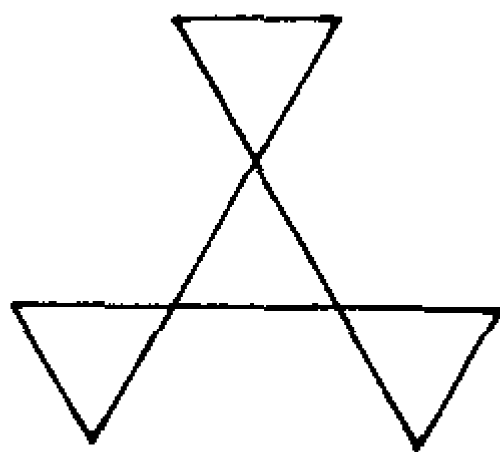
8·70 考察任意多边形（不一定是凸的），(1)能否一定找到多边形的一条弦（两个端点均在多边形的周界上，且整个属于多边形的线段）将多边形分为面积相等的两部分？(2)试证任何多边形都可被自己的某条弦分成两部分，使每部分面积皆不小于多边形面积的三分之一.

（莫斯科数学竞赛，1994 年）

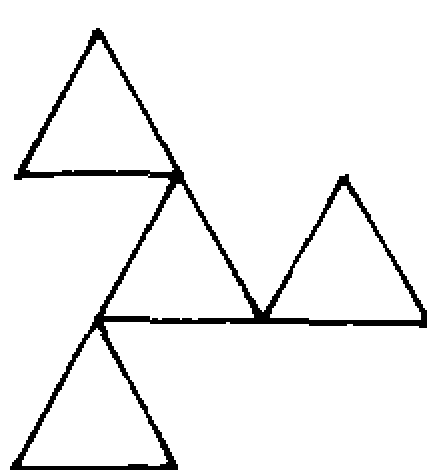
［解］ (1)不一定. 如图(a)所示的多边形就不能被它的任何一条弦分为面积相等的两个部分. 图(b)和图(c)给出了这个多边形的构造过程. 从图(b)中四个全等的正三角形出发，保留正中的一个正三角形



(a)



(b)



(c)

不动，而将周围的三个正三角形分别向三个方向作镜面反射，由此得到图(c)．再“打通”四个三角形之间的“通道”即得图(a)中的多边形．

(2)首先通过对多边形的边数 n 作归纳．知对任何多边形都可用一系列不在形内相交的对角线将其分成若干个三角形．我们将这称为对多边形的三角形划分．

显然这些对角线都是多边形的弦．对于划分出的每个三角形 T，若它的某条边是原多边形的对角线，则该边就将原多边形分成了两个部分，其中一部分包含 T，另一部分不包含 T．将不包含 T 的那一部分称为 T 的该边的外侧部分(简称外部)．

现设已对多边形作了三角形划分，如果存在某个三角形，在它的某条边的外侧部分的面积不小于$\frac{S}{3}$，不大于$\frac{2S}{3}$(S 是原多边形的面积)，则以该边为界所作的划分即符合要求．

如果不存在上述的三角形，那么我们必可找出一个三角形 T，在 T 的每一边的外侧的面积都小于$\frac{S}{3}$．(如果某个三角形的某边的外侧部分面积大于$\frac{2S}{3}$，那么，我们就到该外侧部分去找所需的三角形 T．)记 T 为$\triangle ABC$．

如果 T 仅有一条边 AB 属于原多边形的对角线(即是说它仅有一个外侧部分属于原多边形)，那么 T 的面积大于$\frac{2S}{3}$，于是，只要取 BC 边的中点 D(它位于多边形的周界上)，以 AD 为界所作的划分即符合要求．

如果 T 有两条边 AB 和 AC 的外侧部分均属于原多边形，由于它们的面积均小于$\frac{S}{3}$，从而，只要在边 BC 上取一适当的点 D，并以 AD 为界作划分即可．

不难知，在以上两种情况下都可通过适当选取 D，使得以 AD 为界的划分为等分．

最后，如果 T 的 3 条边的外侧均属于原多边形，我们就让点 D 在线段 BC 上自 B 向 C 移动，并观察多边形以通过 A、D 两点的弦为界所分成的两部分(将点 B 所在的部分称为 B 部)的面积．

如果在移动中可使 B 部的某一时刻刚好等于$\frac{S}{3}$,那么就停住,此时的划分即为所求.

否则,必存在 BC 上的某个点 E,当 D 未越过 E 时,B 部的面积小于$\frac{S}{3}$,而一旦越过,则大于$\frac{S}{3}$.

这时,就让 D 越过点 E 并尽量接近点 E,此时就有(以下以 S_T 表示 T 的面积):

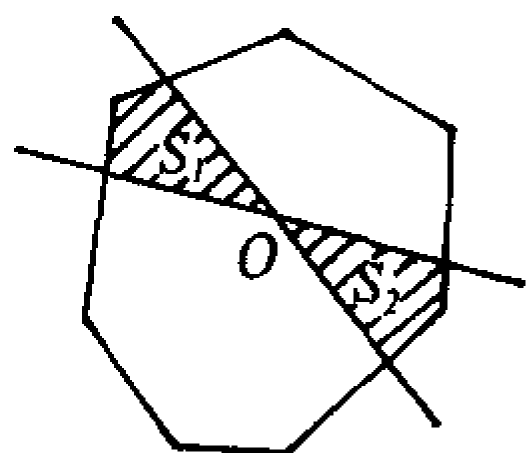
$$S_{B部}\leqslant S_{AB外部}+S_{BC外部}+S_{\triangle AED}<\frac{2S}{3}+S_{\triangle AED}.$$

由于可使点 D 非常接近点 E,所以,$S_{\triangle AED}$可非常小,以致使

$$S_{B部}\leqslant\frac{2S}{3}.$$

8·71　给定凸 n 边形内的一点,这个凸 n 边形的边两两不平行.证明:过这一点不可能作出 n 条以上的直线,使其中的每一条都平分 n 边形的面积.

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)



[证]　设每条直线都平分多边形 M 的面积,那么多边形落在由这些直线形成的两个对顶角中每一个在多边形中的部分有相等的面积(在图中 $S_1=S_2$).

我们同时考虑已知多边形 M 关于 O 点成中心对称的伴随多边形 M'.

如果通过点 O 引 k 条直线,每一条都平分 M 的面积,则这 k 条直线平分所得的 $2k$ 个角中的每一个都应与多边形 M 和 M' 周界有交点.

但在多边形 M 的每条边上不多于两个这样的交点.这意味着,如果 M 具有 n 条边,则这些交点不小于 $2k$ 且不大于 $2n$.所以 $k\leqslant n$.

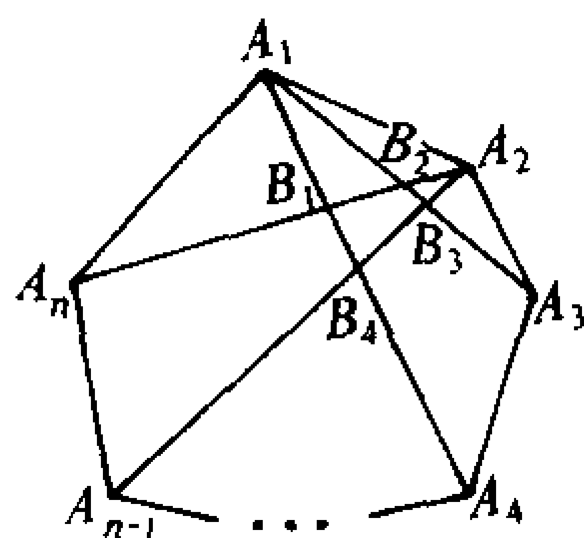
8·72　凸 $n(n\leqslant5)$边形为其所有的对角线所分割.求证:在这种情况下,所得的各部分中,必有面积不相等的部分.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[证]　如若不然,凸 n 边形被其所有对角线所分割,得到的各部分面积都相等.如图.

设对角线 $A_1A_3,A_1A_4,A_2A_n,A_2A_{n-1}$.

它们除相交于 A_1、A_2 外的交点为 B_1、B_2、B_3、B_4(当 $n=5$ 时,B_4 与 A_4 重合).



考虑$\triangle A_1B_1B_2$ 和$\triangle A_1B_2A_2$,由假设,它们的面积相等,也就是说 $B_1B_2=B_2A_2$.

同理　$A_1B_2=B_2B_3$.

因此,四边形 $A_1A_2B_3B_1$ 是平行四边形.

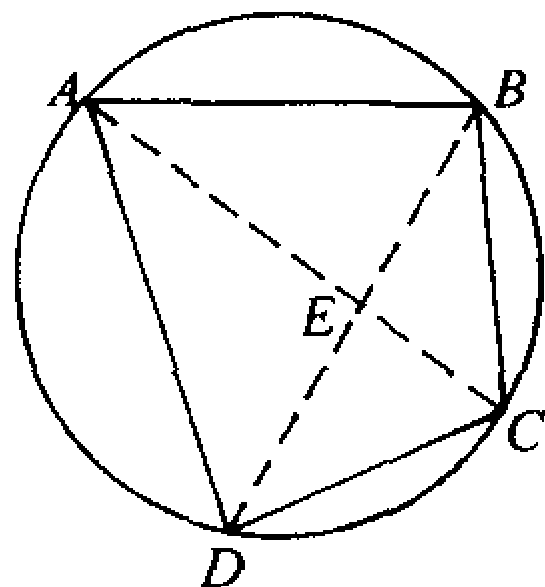
所以直线 $A_1A_4/\!/A_2A_{n-1}$,这与它们相交矛盾.

(四)圆和其他图形的面积

8·73　圆内接四边形 $ABCD$ 中,$BC=CD$,求证:$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC^2\sin A$.

(国际城市数学奥林匹克,1991 年)

[证]　连 AC、BD 交于 E,注意到



$\angle BAC=\angle BDC=\angle DBC=\angle DAC$,

又　$\angle ABD=\angle ACD$,$\angle ADB=\angle ACB$,

$\therefore$　$\triangle ACD\backsim\triangle ABE$,则$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$,

即 $AB\cdot AD=AC\cdot AE$.

且　$\triangle ACB\backsim\triangle BCE$,有$\frac{BC}{CE}=\frac{AC}{AB}$,

即 $BC^2=AC\cdot CE$.

$$\therefore\quad AB\cdot AD+BC^2=AC\cdot AE+AC\cdot CE=AC(AE+EC)$$
$$=AC\cdot AC=AC^2.$$

而　$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin A+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin(180^\circ-A)$$

$$=\frac{1}{2}(AB\cdot AD+BC^2)\sin A$$

$$=\frac{1}{2}AC^2\sin A.$$

8·74　方程 $x^2+(a+2b-2)x-2a+b+2=0$ 之二根是方程 x^2

$+ax+b=0$ 之二根的平方.试求 a、b 的值.若 a、b 为直角三角形之两边,求:这三角形内切圆面积与外接圆面积之比.

(中国福建省福州市数学竞赛,1963 年)

[解] 设 方程 $x^2+ax+b=0$ 的二根为 x_1、x_2,则

方程 $x^2+(a+2b-2)x-2a+b+2=0$ 的二根为 x_1^2、x_2^2.依题意得

$$-(a+2b-2)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2b,$$

即 $\quad -2a+b+2=x_1^2\cdot x_1^2=(x_1\cdot x_2)^2=b^2.$

$$\therefore \quad \begin{cases} a^2+a-2=0 \\ b^2-b+2a-2=0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

若 a、b 为直角三角形的边,则只能取最后一组解,且 a、b 仅能为直角边,这时斜边 $c=\sqrt{2}$.

$$\therefore \quad R=\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{且} \quad r=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $$\frac{S_{内切圆}}{S_{外接圆}}=\frac{r^2}{R^2}=\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2=3-2\sqrt{2}.$$

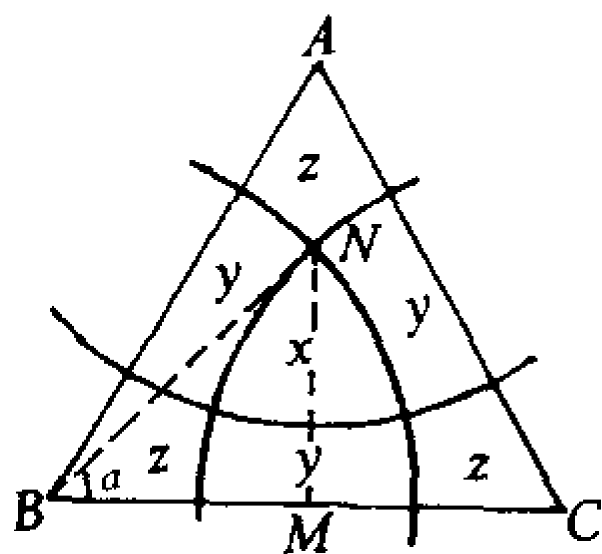
8·75 一正三角形的每边长是$2a$,以各顶点为圆心,$\sqrt{2a}$ 为半径作三圆,求:三圆公共部分的面积.

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1957 年)

[解] 由对称性,用 x,y,z 分别表示图中曲边图形的面积,可得

$$x+3y+3z=S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}a^2, \quad ①$$

$$x+2y+z=\frac{1}{6}\pi(\sqrt{2}a)^2=\frac{1}{3}\pi a^2, \quad ②$$



$\because \quad \cos\alpha=\frac{BM}{BN}=\frac{\sqrt{2}}{2},$

有 $\quad \alpha=45°,$

$\therefore \quad x+y$ 等于含 90°弧的弓形面积.

即　$x+y=\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}a)^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2$

$$=\frac{\pi a^2}{2}-a^2. \qquad ③$$

联立①、②、③解得　$x=\frac{a^2}{2}(\pi+2\sqrt{3}-6)$.

8·76　已知:三圆两两外切,它们的半径分别为 a、a、b,求:这三个圆所围成的面积.

（中国天津市数学竞赛,1957 年）

[解]　如图,设 B、C、A 分别为三圆的圆心,则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{(a+b)^2-a^2}$$

$$=a\sqrt{2ab+b^2},$$

$$\angle B=\angle C=\arccos\frac{a}{a+b},$$

$$\angle A=\pi-2\arccos\frac{a}{a+b}.$$

∴　三个圆所围的面积

$$S=a\sqrt{2ab+b^2}-a^2\arccos\frac{a}{a+b}-\frac{b^2}{2}\left(\pi-2\arccos\frac{a}{a+b}\right)$$

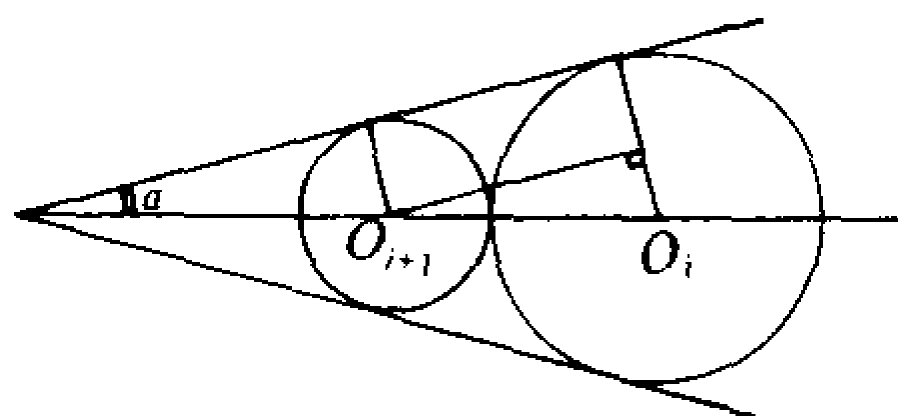
$$=a\sqrt{2ab+b^2}-\frac{b^2}{2}\pi-(a^2-b^2)\arccos\frac{a}{a+b}.$$

8·77　圆 $\Gamma_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的半径为 r_i,内切于大小为 2α 的角,并且 Γ_i 与 Γ_{i+1} 外切,$r_{i+1}<r_i$,证明:圆 $\Gamma_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的面积之和等于半径为 $r=\frac{r_0(\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\csc\alpha})}{2}$ 的圆的面积.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

[证]　由题设易知

$$\frac{r_i-r_{i+1}}{r_i+r_{i+1}}=\sin\alpha,$$



故　$\frac{r_{i+1}}{r_i}=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$,

$$\therefore \quad r_i = r_0\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^i.$$

因此　圆 $\Gamma_i(i=0,1,2,\cdots)$面积之和为

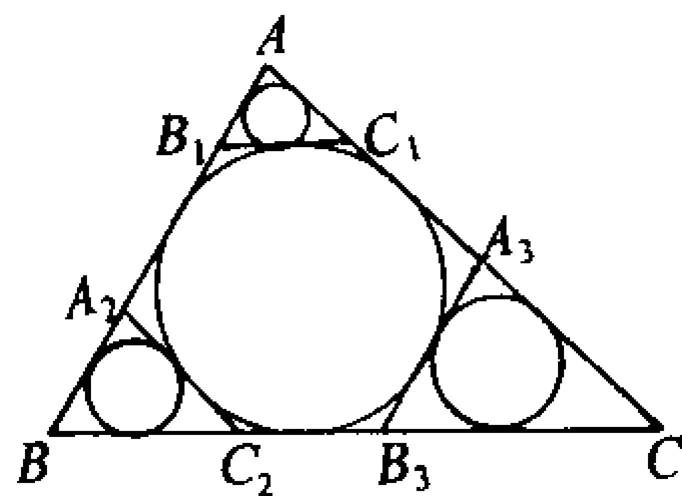
$$\pi\sum_{i=0}^{\infty} r_i^2 = \frac{\pi r_0^2}{1-\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\pi r_0^2(1+\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}$$

$$= \frac{\pi r_0^2(\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\csc\alpha})^2}{4}.$$

即圆 Γ_i 的面积之和等于以 $\frac{r_0(\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\csc\alpha})}{2}$ 为半径的圆的面积.

8·78　在边长为 a、b、c 的三角形 ABC 内作内切圆,并作此圆的三条切线,它们分别平行于已知三角形的三边,这三条切线与已知三角形相截,得三个三角形,再分别作这三个三角形的内切圆,求:所作出的四个圆的面积之和.

(第 6 届国际数学奥林匹克,1964 年)



[解]　记 S、p、S_1、p_1、S_2、p_2、S_3、p_3 分别为$\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$、$\triangle A_2BC_2$、$\triangle A_3B_3C$ 的面积和半周长.则

$$p_1 = p-a,\quad p_2 = p-b,\quad p_3 = p-c.$$

又记$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,则 $S=pr$.

于是用 p、S 表示的内切圆面积为 $\pi\cdot\frac{S^2}{p^2}$.

同理　$\triangle AB_1C_1$、$\triangle A_2BC_2$、$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆面积依次为

$$\pi\cdot\frac{S_1^2}{p_1^2},\quad \pi\cdot\frac{S_2^2}{p_2^2},\quad \pi\cdot\frac{S_3^2}{p_3^2}.$$

由于　$A_3B_3 /\!/ AB$,则　$\triangle A_3B_3C \backsim \triangle ABC$,

$$\therefore \quad \frac{S_3}{S} = \frac{p_3^2}{p^2},\ \text{则}\quad S_3 = \frac{Sp_3^2}{p^2}.$$

于是$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆面积为 $\frac{\pi S_3^2}{p_3^2} = \frac{\pi\cdot\frac{p_3^4S^2}{p^4}}{p_3^2} = \frac{\pi S^2}{p^4}\cdot p_3^2.$

同理可得$\triangle AB_1C_1$和$\triangle A_2BC_2$的内切圆面积依次为

$$\frac{\pi S^2}{p^4}\cdot p_1^2,\ \frac{\pi S^2}{p^4}\cdot p_2^2.$$

由此可得题设的四个内切圆面积之和为

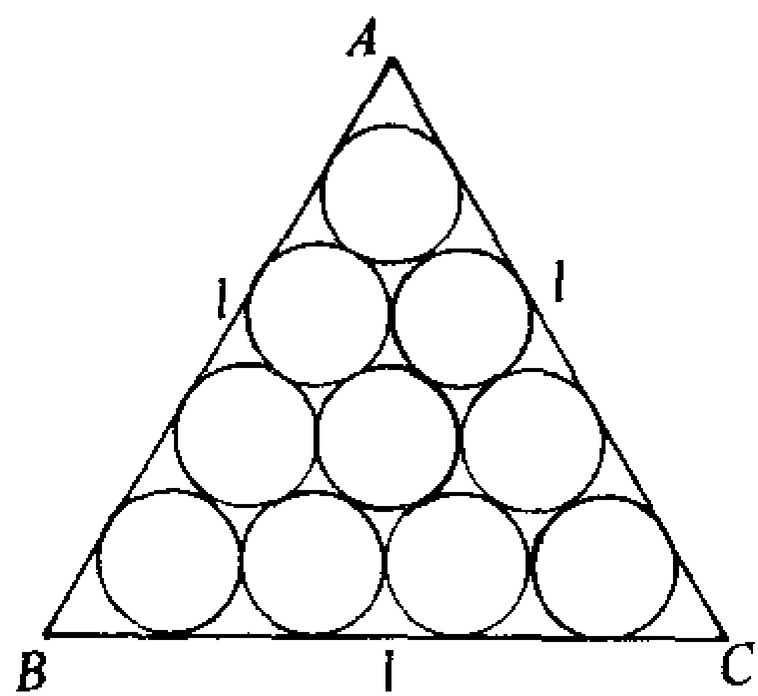
$$\begin{aligned}&\frac{\pi S^2}{p^2}+\frac{\pi S^2}{p^4}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\\&=\frac{\pi S^2}{p^4}(p^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2)\\&=\frac{\pi S^2}{p^4}[p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2]\\&=\frac{\pi S^2}{p^4}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

再由海伦公式可得,四个内切圆面积之和为

$$\begin{aligned}&\frac{\pi p(p-a)(p-b)(p-c)(a^2+b^2+c^2)}{p^4}\\&=\frac{\pi(p-a)(p-b)(p-c)(a^2+b^2+c^2)}{p^3}.\end{aligned}$$

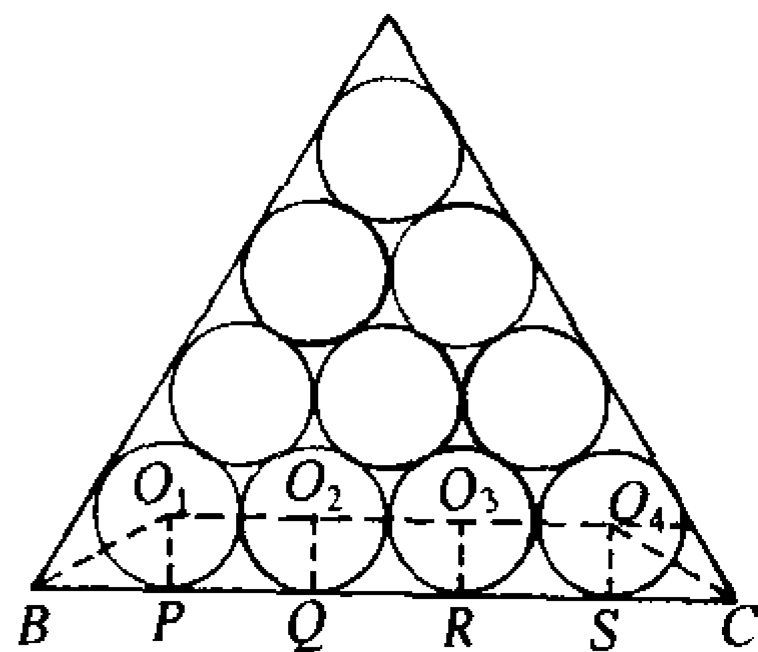
8·79 在一边长为 l 的正$\triangle ABC$内放置十个等圆,相邻两圆互相外切,且与边相邻的圆均与该边相切.求:这十个等圆面积之和.

(中国北京市数学竞赛,1981 年)



[解] 设十个等圆的半径都是 r,切 BC 边的四个等圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$分别切 BC 于 P、Q、R、S 四点.

而 BO_1、CO_4 分别是$\angle B$与$\angle C$的平分线.连 O_1O_4 及 O_1P、O_2Q、O_3R、O_4S,则 $O_1O_4=RS=6r$.



又 $\angle PBO_1=\angle SCO_4=\frac{1}{2}\angle B=\frac{\pi}{6}$,

且 $BP=CS=O_1P\text{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}r$,

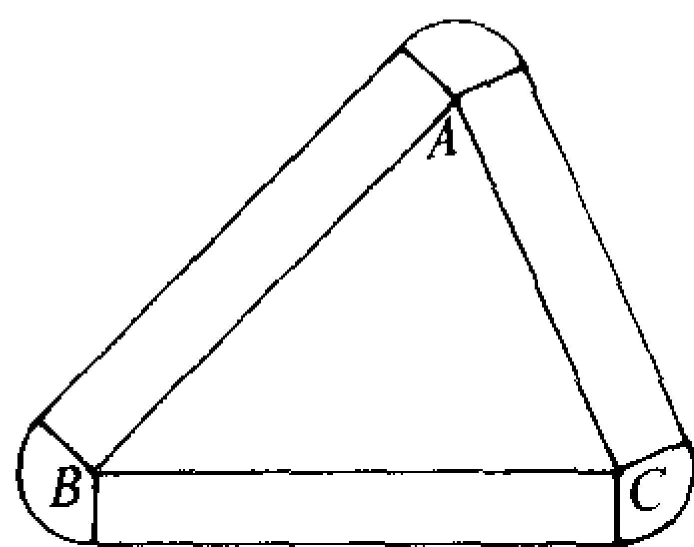
$\therefore\ BC=l=2\sqrt{3}r+6r=2(\sqrt{3}+3)r$.

$\therefore \quad r=\dfrac{l}{2(\sqrt{3}+3)}$.

故十个等圆面积和为 $S=10\pi r^2=\dfrac{5(2-\sqrt{3})\pi}{12}l^2$.

8·80　一个房屋的地基呈三角形状，这三角形的周长为 p 米，面积为 A 平方米，花园由距离地基的边界 5 米之内的土地形成. 问房屋连同花园共占地多少？

（第 20 届加拿大数学奥林匹克，1988 年）



［解］　如图，花园显然是由以 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 为长，宽为 5 米的三个矩形以及三个半径为 5 米的扇形组成.

三个矩形的面积之和为

$5(AB+BC+CA)=5p$（平方米）.

三个扇形的半径为 5 米，下面求这三个扇形中心角之和.

设三角形的三个内角为 A、B、C，则三个扇形中心角之和为

$$\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+A\right)\right]+\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+B\right)\right]+\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+C\right)\right]$$

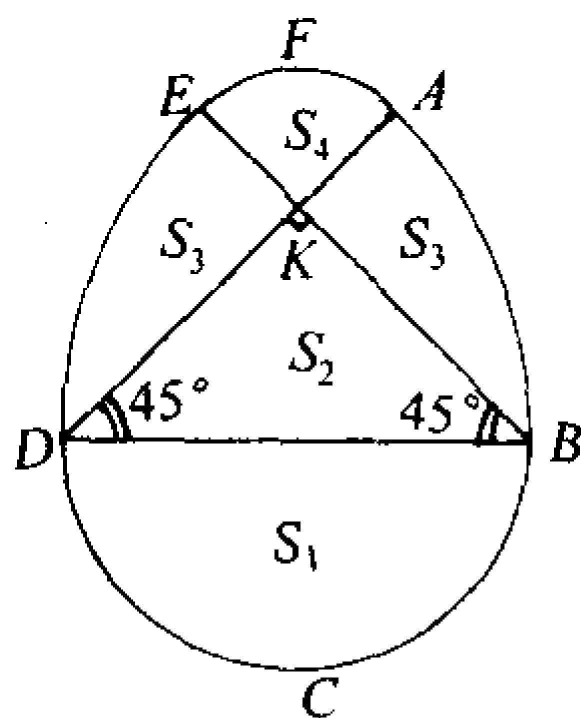
$$=(\pi-A)+(\pi-B)+(\pi-C)$$

$$=3\pi-(A+B+C)=2\pi.$$

所以三个扇形的面积之和为　$\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times 5^2=25\pi$.

于是，花园的占地面积为　$(5p+25\pi)$平方米.

由此可得，占地总面积为　$(5p+25\pi+A)$平方米.



8·81　如图，$ABCDEF$ 由四段圆弧组成，$\overset{\frown}{AB}$ 是以 D 为中心，半径为 $2r$ 的圆弧，$\overset{\frown}{BCD}$ 是以 $DB=2r$ 为直径的半圆，$\overset{\frown}{DE}$ 是以 B 为中心，半径为 $2r$ 的圆弧，$\overset{\frown}{EFA}$ 是以 K 为中心，AK 为半径的圆弧，其中 K 为线段 AD 和 EB 的交点，且 $\angle ADB=\angle EBD$

$=45°$.求:以 $ABCDEF$ 为界的图形的面积.

(第12届全俄数学奥林匹克,1986年)

[**解**] 容易求出

$$S_1=\frac{1}{2}\pi r^2,\ \ S_2=S_{\triangle BKD}=\frac{1}{2}\sqrt{2}r\cdot\sqrt{2}r=r^2,$$

$$S_3=S_{扇形AOB}-S_2=\frac{1}{8}\pi(2r)^2-r^2=\frac{1}{2}\pi r^2-r^2,$$

又∵ $KA=2r-\sqrt{2}r$,

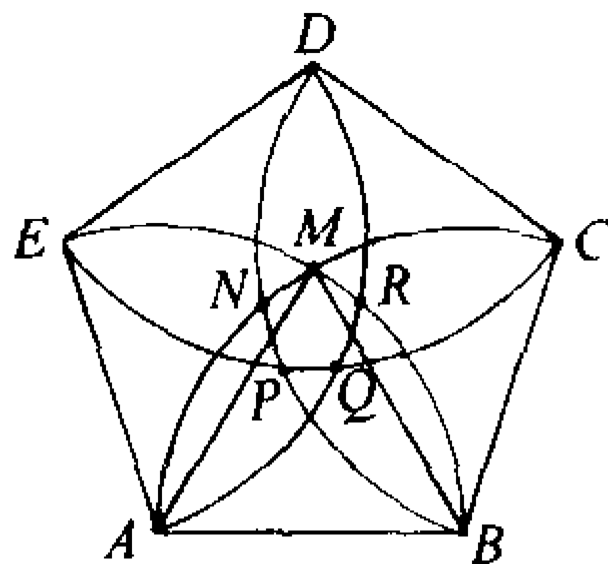
$$\therefore\quad S_4=\frac{1}{4}\pi(2-\sqrt{2})^2r^2=\frac{\pi}{2}(3-2\sqrt{2})r^2.$$

故所求面积为 $S_1+S_2+S_3+S_4=(3-\sqrt{2})\pi r^2-r^2$.

8·82 在边长为1的正五边形内,去掉所有与五边形各顶点距离都小于1的点,求:余下部分的面积.

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[**解**] 以 A 为圆心,1为半径的扇形 ABE 内的点到点 A 的距离都小于1,分别以正五边形的各顶点为圆心,1为半径画圆弧,以五段圆弧为边界的"曲边五边形"$MNPQR$ 内的点到正五边形 $ABCDE$ 各顶点的距离都小于1.五边形内余下的部分是五个等积的"曲边三角形"BMC、CND、DPE、EQA、ARB.



考察"曲边三角形"BMC 与以 $\angle BAM$ 为圆心角$\left(等于\frac{\pi}{3}\right)$的扇形 BAM 的面积之和,恰等于等边 $\triangle ABM$ 与以 $\angle CBM$ 为圆心角$\left(等于\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{15}\right)$的扇形 CBM 的面积之和.

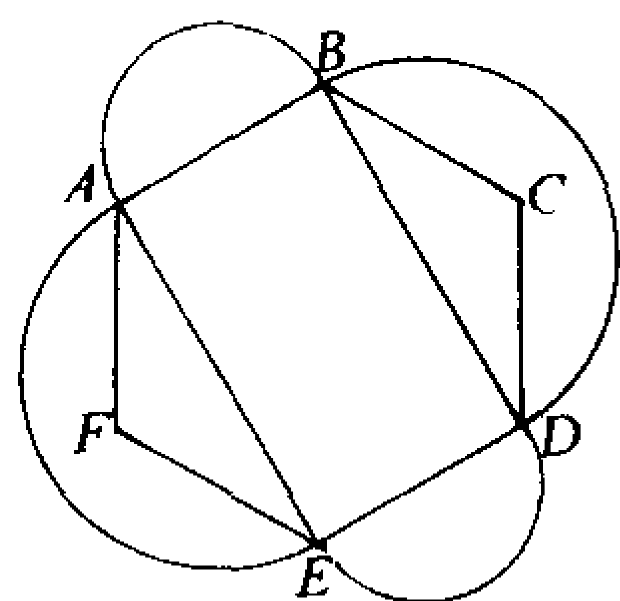
故所求的圆形的面积为

$$5S_{曲边\triangle BMC}=5(S_{\triangle ABM}+S_{扇形CBM}-S_{扇形BAM})$$

$$=5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2\pi}{15}-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right).$$

8·83 作圆的内接正六边形 $ABCDEF$.然后分别以 AB、BD、DE、EA 为直径向外作半圆,求:六边形的面积与这些半圆所围成的面积之比.

(基辅数学奥林匹克,1971年)



[**解**] 如图,设外接圆半径为 r,则

$$S_{正六边形ABCDEF}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{3}{2}\sqrt{3}r^2.$$

设这些半圆所围成的面积为 S,则

$$S=S_{\square ABCD}+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{DE}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AE}{2}\right)^2$$

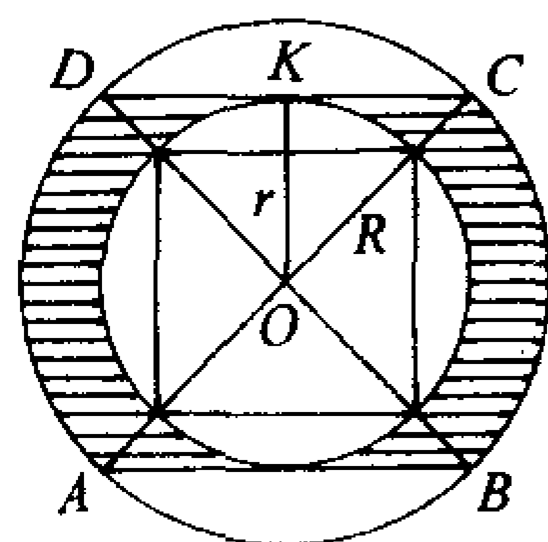
$$=r(\sqrt{3}r)+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}r^2\right)+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{4}r^2\right)+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}r^2\right)+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{4}r^2\right)$$

$$=(\sqrt{3}+\pi)r^2.$$

$$\therefore\quad S_{ABCDEF}:S=\frac{3}{2}\sqrt{3}r^2:(\sqrt{3}+\pi)r^2=9:(6+2\sqrt{3}\pi).$$

8·84 圆的面积被同心圆分成两个相等的部分.求证:圆环介于两条平行的内圆切线之间的部分与接于小圆的正方形面积相等.

(基辅数学奥林匹克,1951 年)



[**证**] 设外圆半径为 R,内圆半径为 r.设 O 是圆心,AB 与 CD 是$\odot O(r)$(即半径为 r 的$\odot O$,下同)的两条平行的切线,K 是 CD 与$\odot O(r)$的切点.如图.

由 $OK=r$, $OC=R$,

又$\because$ $\pi R^2=2\pi r^2$. $\therefore$ $\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

在$\triangle OCK$ 中 $\sin\angle OCK=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

即 $\angle COK=\dfrac{\pi}{4}$.

因而 $\angle COD=\dfrac{\pi}{2}$.

设 S 为圆环介于两条平行$\odot O(r)$切线之间的部分的面积,则

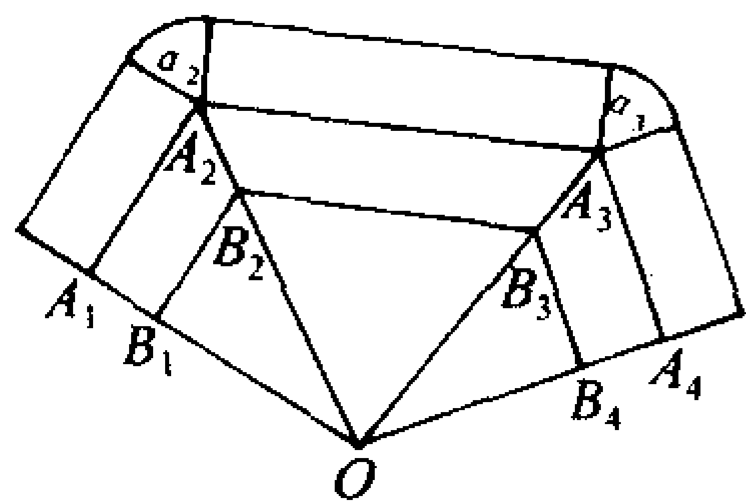
$$S=2S_{扇形BOC}+2S_{\triangle COD}-\pi r^2$$
$$=\frac{1}{2}\pi r^2+R^2-\pi r^2$$
$$=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}r)^2+(\sqrt{2}r)^2-\pi r^2=2r^2.$$

它也是$\odot O(r)$内接正方形的面积.

8·85 半径为 r 的硬币在平面上移动,它的中心沿凸多边形的边界绕行.这个凸多边形外切于半径为 $R(>r)$的圆,求:硬币扫过平面的痕迹的面积.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[解] 设硬币沿凸多边形 $A_1A_2,\cdots A_n$ 的边界移动,O 为该多边形内切圆圆心.在多边形外,硬币扫过的痕迹部分是由总面积为 pr(p 为多边形的周长)的矩形及(在多边形各顶点处)半径为 r 的扇形所组成(如图),以 α_i 表示在顶点 A_i 处的扇形角,



则 $\alpha_i+\angle A_i=\pi$(其中$\angle A_i$ 表示多边形在顶点 A_i 处的内角),

故 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n\pi-(\angle A_1+\angle A_2+\cdots+\angle A_n)$
$$=n\pi-(n-2)\pi=2\pi,$$

于是各扇形面积之和为 πr^2.

在多边形内,硬币扫过的痕迹部分的面积等于多边形 $A_1A_2,\cdots A_n$ 与多边形 $B_1B_2,\cdots B_n$ 的面积之差,$A_1A_2,\cdots A_n$ 与 $B_1B_2,\cdots B_n$ 是以 O 为中心,$\frac{R-r}{R}$为位似比的位似形,因此,

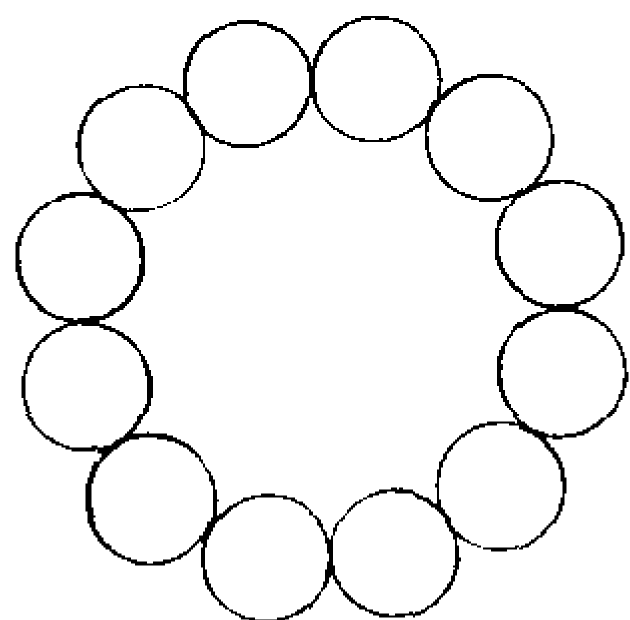
$$S_{A_1A_2,\cdots A_n}-S_{B_1B_2,\cdots B_n}=\frac{PR}{2}-\frac{PR}{2}\cdot\left(\frac{R-r}{R}\right)^2=pr-\frac{pr^2}{2R}.$$

所以硬币扫过的整个痕迹的面积是

$$\pi r^2+2pr-pr^2/2R.$$

8·86 如图,12 个全等的圆盘放在半径为 1 的圆周 C 上,使得它们盖住 C,任两个圆盘不重叠,且相邻的圆盘相切,这些圆盘面积之和可写成 $\pi(a-b\sqrt{c})$,其中 a、b、c 为正整数,c 不能被任何素数的平方整除,求:$a+b+c$ 的值.

(第 9 届美国数学邀请赛,1991 年)



［**解**］ 由已知可得，圆周 C 一定经过各圆盘相切的切点，各切线过 C 的圆心 O.

设 P 为一圆盘的圆心，B 为该圆与相邻圆相切的切点，则

$$PB \perp OB,\ \angle PBO = 90^\circ,\ \angle POB = \frac{\pi}{12}.$$

又 $PB = BO \cdot \text{tg}\angle POB = 1 \times (2-\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}$.

所以每个圆盘的面积为

$$\pi(2-\sqrt{3})^2 = \pi(7-4\sqrt{3}).$$

则全部 12 个圆盘的面积之和为

$$12\pi(7-4\sqrt{3}) = (84-48\sqrt{3})\pi.$$

从而 $a+b+c = 84+48+3 = 135$.

第九章　定值问题

9·1　一直线从左到右排列着 1990 个点：$P_1, P_2, \cdots, P_{1990}$. 已知点 P_k 是线段 $P_{k-1}P_{k+1}$ 的 k 等分点中最靠近 P_{k+1} 的那个分点（$2 \leqslant k \leqslant 1989$），如 P_5 是 P_4P_6 上的 5 等分点中最靠近 P_6 的那个点，若线段 P_1P_2 的长度是 1，线段 $P_{1988}P_{1990}$ 的长度为 l，试证：$\frac{1}{l} = 1988 \cdot 1987 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2$.

（中国浙江省数学竞赛，1990 年）

[证]　由题意，P_2 应为 P_1P_3 之二等分点，

$\therefore \quad P_1P_2 = P_2P_3 = 1.$

P_3 应为 P_2P_4 之三等分点中最靠近 P_4 的点，

$\therefore \quad P_3P_4 = \frac{1}{2}P_2P_3 = \frac{1}{2}.$

一般地，P_k 是 $P_{k-1}P_{k+1}$ 的 K 等分点中最靠近 P_{k+1} 的那个分点，则

$$P_kP_{k+1} = \frac{1}{k}P_{k-1}P_{k+1} = = \frac{1}{k}P_{k-1}P_k + \frac{1}{k}P_kP_{k+1}.$$

$\therefore \quad \frac{k-1}{k}P_kP_{k+1} = \frac{1}{k}P_{K-1}P_k,$

即　$P_kP_{k+1} = \frac{1}{k-1}P_{k-1}P_k,$

在上式中令 $k = 4, 5, 6, \cdots, 1988, 1989$，得

$P_4P_5 = \frac{1}{3}P_3P_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \times 2},$

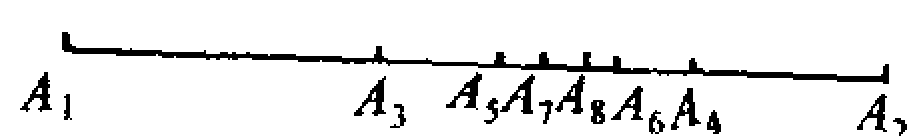
$P_5P_6 = \frac{1}{4}P_4P_5 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2},$

$$P_6P_7=\frac{1}{5}P_5P_6=\frac{1}{5\times4\times3\times2},$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$l=P_{1989}P_{1990}=\frac{1}{1988}P_{1988}P_{1989}=\frac{1}{1988\cdot1987\cdot1986\cdot\cdots\cdot3\cdot2}.$$

即 $\frac{1}{l}=1988\cdot1987\cdot\cdots\cdot3\cdot2.$



9·2 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是直线上的一列点，$\overline{A_1A_2}$之长是 1，又 A_{n+2}是线段$\overline{A_nA_{n+1}}$上的一点，且$\overline{A_nA_{n+2}}:\overline{A_{n+2}A_{n+1}}=\overline{A_{n+2}A_{n+1}}:\overline{A_{n+1}A_n}$，其中 $n=1,2,3,\cdots$，求证：$\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \cdots$之长所成的数列有极限，且此极限是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

（中国上海市数学竞赛，1957 年）

［证］ 由设$\overline{A_1A_2}=1$，又$\overline{A_1A_3}:\overline{A_3A_2}=\overline{A_3A_2}:\overline{A_2A_1}$；即 A_3 把 A_2A_1 分成黄金分割，

而 A_2A_3 是 A_1A_3 与 A_2A_1 的比例中项.

$\therefore\quad (1-\overline{A_3A_2}):\overline{A_3A_2}=\overline{A_3A_2}:1.$

由 $\overline{A_3A_2}^2+\overline{A_3A_2}-1=0$，求得 $\overline{A_3A_2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

同理可得

$$\overline{A_3A_4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{A_3A_2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

$$\overline{A_4A_5}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n;$$

又因 $\overline{A_1A_2}=1$，$\therefore\quad \overline{A_1A_3}=\overline{A_1A_2}-\overline{A_3A_2}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\overline{A_1A_4}=\overline{A_1A_3}+\overline{A_3A_4}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

$$\overline{A_1A_5}=\overline{A_1A_4}-\overline{A_5A_4}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,$$

························

$$\overline{A_1A}_{(n+2)}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

这是一个公比为 $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的等比级数,因 $\left|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<1$,故当项数无限增加时,它必趋向于一个常数,亦即数列 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_1A_4}$、…有极限.且此极限为

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

9·3 自然数 $n\geqslant 3$.平面上给定一条直线 l,在 l 上依次有 n 个互不相同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$.记点 P_i 到其余 $n-1$ 个点的距离的乘积为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$.平面上还有一点 Q 不在 l 上,点 Q 到点 P_i 的距离记为 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$.求:以下和式的值 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{c_i^2}{d_i}$

(中国国家集训队选拔考试,1998年)

[解] 不妨设这 n 个点在实轴上,有坐标 $P_i(x_i,0)(i=1,2,\cdots,n)$,$x_1<x_2<\cdots<x_n$,$Q$ 点有坐标 $Q(\alpha,\beta)$.于是,

$$(-1)_{n-i}d_i=(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n),$$

$$c_i^2=(a-x_i)^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2ax_i+x_i^2,$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha^2+\beta^2-2ax_i+x_i^2}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad ①$$

令 $$T_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad ②$$

其中 $k=0,1,2$.

设部分分式 $$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-x_i}, \quad ③$$

这里 $k<n$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为常数.

用 $x-x_j$ 乘式③两端,再令 $x=x_j$,可得

$$\frac{x_j^k}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}\cdots(x_j-x_n)}=A_j$$

$$(j=1,2,\cdots,n).$$

代入②,得 $T_k=\sum_{j=1}^{n}A_j$. ④

用 x 乘式③两端,得

$$\frac{x^{k+1}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_ix}{x-x_i}.$$

令 $x\to+\infty$,则

上式左端 $\to\begin{cases}1, & k+1=n\text{ 时},\\0, & k+1<n\text{ 时},\end{cases}$

上式右端 $\to\sum_{i=1}^{n}A_i$.

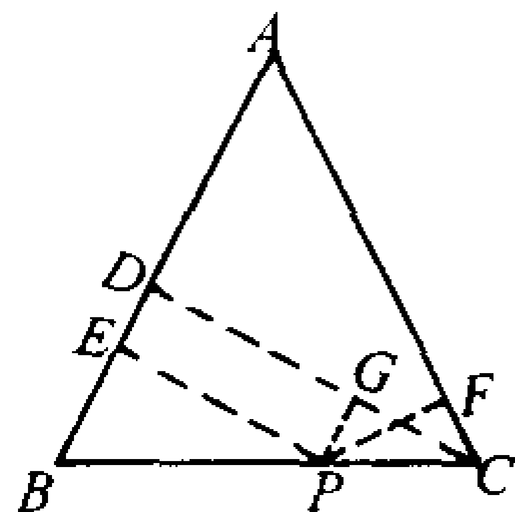
所以 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\begin{cases}0, & k<n-1\text{ 时},\\1, & k=n-1\text{ 时}.\end{cases}$

代入④得 $T_0=T_1=0$, $T_2=\begin{cases}1, & n=3\text{ 时},\\0, & n>3\text{ 时}.\end{cases}$

代入①得 $S_n=(\alpha^2+\beta^2)T_0-2\alpha T_1+T_2=T_2=\begin{cases}1, & n=3\text{ 时},\\0, & n>3\text{ 时}.\end{cases}$

9·4 某点在等腰三角形的底边上运动.证明:该点到两腰的距离之和是常量(与点的位置无关).

(基辅数学奥林匹克,1959 年)



[证] 在△ABC 中 $AB=AC$,设 P 是 BC 上任一点.

作 $CD\perp AB$ 于 D, $PE\perp AB$ 于 E, $PF\perp AC$ 于 F, $PG\perp CD$ 于 G.如图.

易证 $\triangle CFD\cong\triangle PGC$, $\therefore$ $PF=GC$,

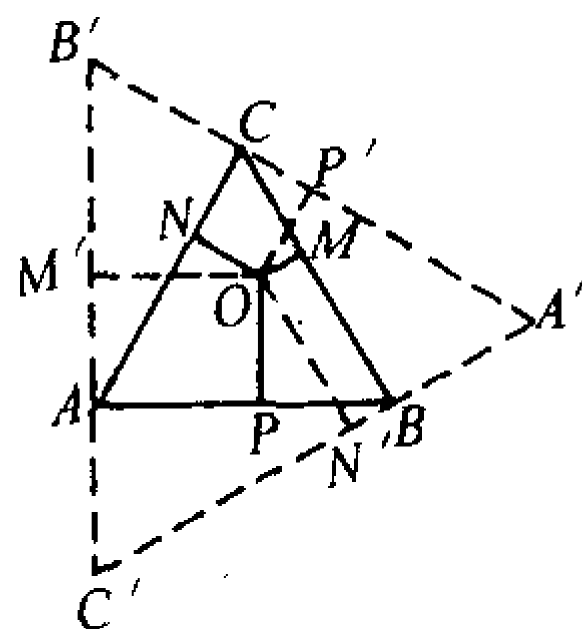
又 $PE=DG$,

故 $PE+PF=GC+DG=CD$ 为常量.

9·5 在等边△ABC 的内部取一点 O,从 O 点作边 BC、CA、AB 的垂线 OM、ON、OP,求证:线段 AP、BM、CN 之和与点 O 的位置无

关.

（波兰数学奥林匹克，1958 年）



[证] 过等边三角形 ABC 的顶点 A、B、C 分别作边 AB、BC、CA 的垂线得到三角形 $A'B'C'$，容易证明$\triangle A'B'C'$是等边三角形.

过 O 作 $OM' \perp B'C'$ 于 M'，$ON' \perp A'C'$ 于 N'，$OP' \perp A'B'$ 于 P'，于是

$$OM' = AP, \quad ON' = BM, \quad OP' = CN.$$

连 OA'、OB'、OC'，则

$$S_{\triangle OA'B'} + S_{\triangle OA'C'} + S_{\triangle OB'C'} = S_{\triangle A'B'C'}.$$

设$\triangle A'B'C'$的边长为 a'，高为 h'，则

$$(OM' + ON' + OP')a' = a'h',$$

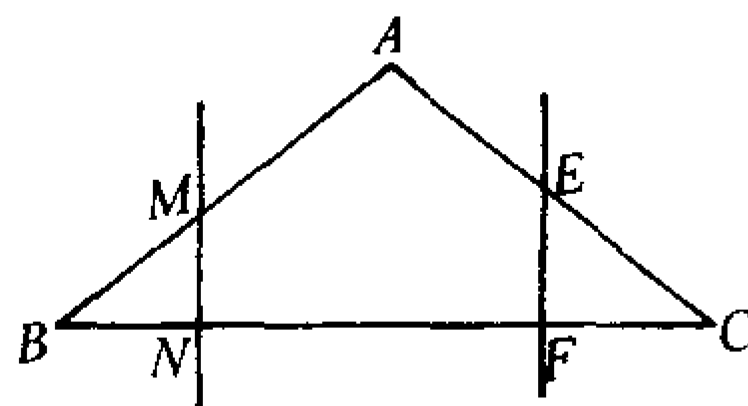
有 $\quad OM' + ON' + OP' = h'$,

即 $\quad AP + BM + CN = h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a'$

又设$\triangle ABC$ 的边长为 a，容易求出 $a' = \sqrt{3}a$.

于是 $AP + BM + CN = \dfrac{3}{2}a$ 为定值，且与 O 的位置无关.

9·6 给定$\triangle ABC$，其中 $AB = AC$，直线 EF、MN 均垂直于 BC. 求证不论 MN、EF 怎样平行移动，只要它们之间距离保持不变，则五边形 $AMNFE$ 的周长为一定值.



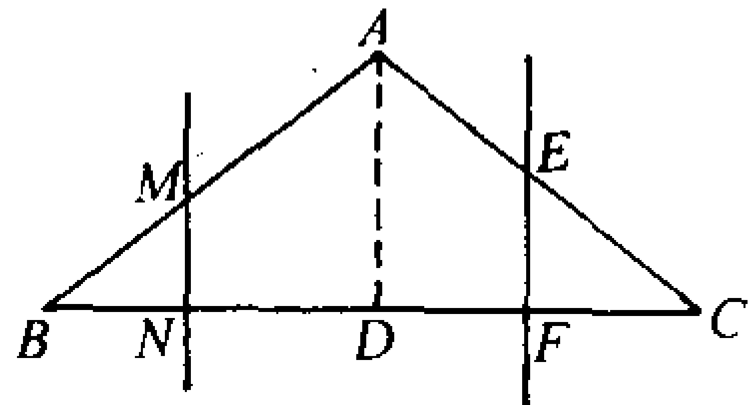
（中国北京市数学竞赛，1979 年）

[证 1] 作 $AD \perp BC$ 于 D，则

$$\triangle ABD \backsim \triangle BMN, \quad \triangle ACD \backsim \triangle CEF.$$

$$\therefore \quad \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BD}, \quad \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD},$$

则 $\quad \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DN}{BD}, \quad \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DF}{CD}.$



$\because \quad AB = AC$，且 $\quad BD = CD$,

$$\therefore \quad \frac{AM + AE}{AB} = \frac{DN + DF}{BD} = \frac{NF}{BD},$$

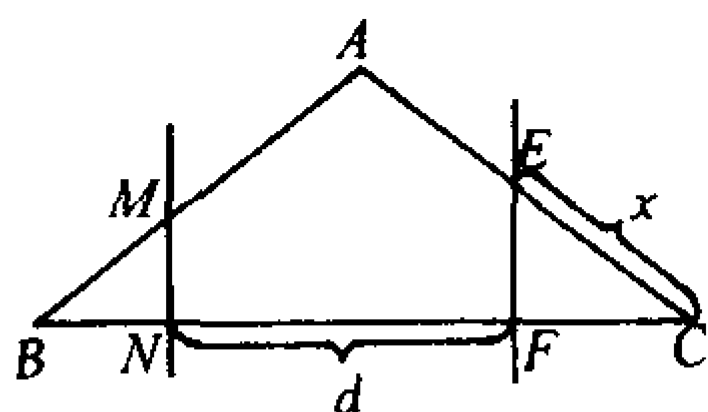
故　$AM+AE=\frac{AB}{BD}\cdot NF$ 为定值.

又∵　$\frac{MN}{AD}=\frac{BN}{BD}$, $\frac{EF}{AD}=\frac{CF}{CD}$,

∴　$\frac{MN+EF}{AD}=\frac{BN+CF}{BD}=\frac{BC-NF}{BD}$,

故　$MN+EF=\frac{AD}{BD}(BC-NF)$亦为定值.

于是五边形 $AMNFE$ 的周长为定值.



［证 2］　设 $AB=AC=b$, $BC=a$, $CE=x$, $NF=d$.

则　$AE=b-x$, $CF=x\cos\theta$.

且　$EF=x\sin\theta$, $BN=a-d-x\cos\theta$,

$MN=(a-d-x\cos\theta)\operatorname{tg}\theta$,

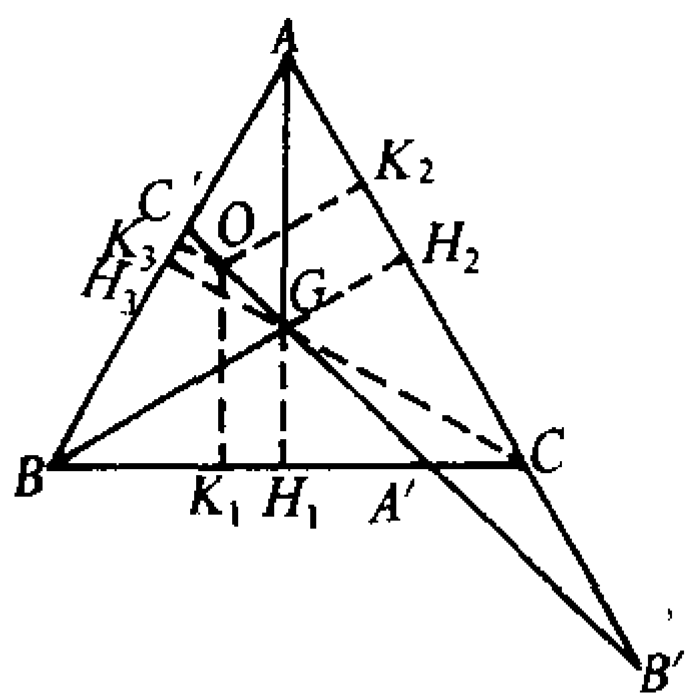
及　$AM=(a-d-x\cos\theta)/\cos\theta$,

于是　$AE+EF+NF+MN+AM$

$=(b-x)+x\sin\theta+d+(a-d-x\cos\theta)\operatorname{tg}\theta+[b-(a-d-x\cos\theta)/\cos\theta]$

$=2b+d+(a-d)(\operatorname{tg}\theta-\sec\theta)$,

它是定值.



9·7　点 O 是等边△ABC 内部一点, G 是△ABC 的重心, 直线 OG 与△ABC 的三边(或其延长线)分别相交于点 A'、B'、C'. 求证: $\frac{A'O}{A'G}+\frac{B'O}{B'G}+\frac{C'O}{C'G}=3$.

(莫斯科数学奥林匹克, 1957 年)

［证］　由点 O 和点 G 向△ABC 的各边分别引垂线 OK_i 和 GH_i $(i=1,2,3)$ (如图).

$$\frac{A'O}{A'G}+\frac{B'O}{B'G}+\frac{C'O}{C'G}$$

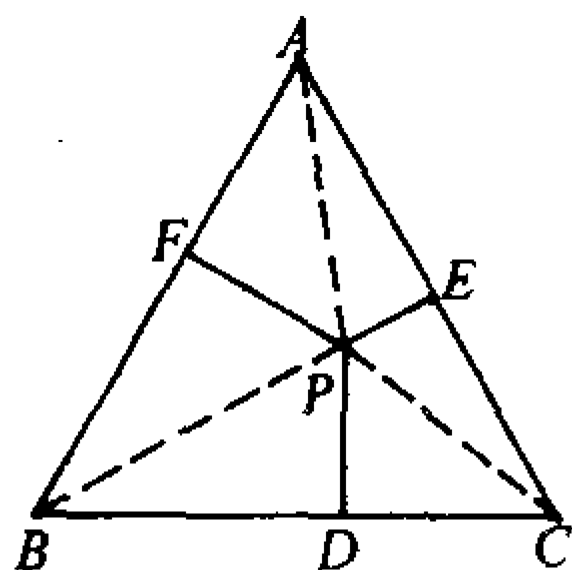
$$=\frac{OK}{GH_1}+\frac{OK_1}{GH_2}+\frac{OK_3}{GH_3}=\frac{OK_1}{\frac{1}{3}h}+\frac{OK_2}{\frac{1}{3}h}+\frac{OK_3}{\frac{1}{3}h}$$

$$=\frac{3}{h}(OK_1+OK_2+OK_3)=\frac{3}{h}h=3.$$

9·8　设△ABC是等边三角形. P是△ABC内任意一点,作三角形三边的垂线PD、PE、PF、D、E、F是垂足,试证:不管P在哪里,总有$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

(第1届加拿大数学奥林匹克,1969年)

[证]　连结PA、PB、PC,设等边△ABC的边长为a,则它的面积为



$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

又　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$.

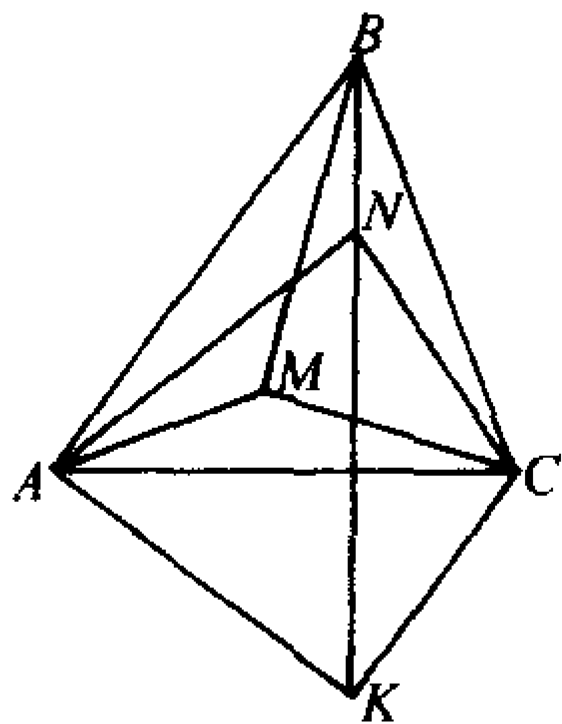
即　$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{1}{2}a(PD+PE+PF)$.

$$\therefore\quad \frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{\frac{3}{2a}}{3a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

9·9　设M、N是△ABC内部的两个点,且满足$\angle MAB=\angle NAC$,$\angle MBA=\angle NBC$.证明:$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$.

(第39届国际数学奥林匹克预选题,1998年)

[证1]　设K是射线BN上的点,且满足$\angle BCK=\angle BMA$.因为$\angle BMA>\angle ACB$,则K在△ABC的外部.又因$\angle MBA=\angle CBK$,所以△ABM∽△KBC.



故　$\frac{AB}{BM}=\frac{BM}{BK}=\frac{AM}{CK}$.

由　$\angle ABK=\angle MBC$, $\frac{AB}{KB}=\frac{BM}{BC}$,

可得　△ABK∽△MBC.

于是　$\frac{AB}{BM}=\frac{BK}{BC}=\frac{AK}{CM}$.

因为$\angle CKN=\angle MAB=\angle NAC$,所以$A$、$N$、$C$、$K$四点共圆.由托勒密定理,有

$AC\cdot NK=AN\cdot CK+CN\cdot AK$,

或　$AC(BK-BN)=AN\cdot CK+CN\cdot AK$.

将 $CK=\frac{AM\cdot BC}{BM}$, $AK=\frac{AB\cdot CM}{BM}$, $BK=\frac{AB\cdot BC}{BM}$ 代入,得

$$AC\left(\frac{AB\cdot BC}{BM}-BN\right)=\frac{AN\cdot AM\cdot BC}{BM}+\frac{CN\cdot AB\cdot CM}{BM},$$

即 $$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1.$$

[证 2]　由塞瓦定理有

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}\cdot\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle MCB}=1,$$

$$\frac{\sin\angle NAC}{\sin\angle BAN}\cdot\frac{\sin\angle NCB}{\sin\angle ACN}\cdot\frac{\sin\angle ABN}{\sin\angle NBC}=1.$$

∵　$\angle BAM=\angle NAC$, $\angle MBA=\angle NBC$.

∴　$\angle MAC=\angle BAN$, $\angle CBM=\angle ABN$.

从而 $$\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle MCB}=\frac{\sin\angle NCB}{\sin\angle ACN},$$

有　$\angle ACM=\angle NCB$(已知中的 M、N 称为等角共轭点).

设 M 关于 AB、BC、CA 的对称点分别为 M_1、M_2、M_3,则

$$\begin{aligned}S_{AM_1BM_2CM_3}&=S_{\triangle AM_1B}+S_{\triangle BM_2C}+S_{\triangle CM_3A}+S_{\triangle ABC}\\&=S_{\triangle AMB}+S_{\triangle BMC}+S_{\triangle CMA}+S_{\triangle ABC}\\&=2S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

又　$\angle NAM_1=\angle BAN+\angle M_1AB=\angle MAC+\angle BAM=\angle BAC$,

∴　$2S_{\triangle AM_1N}=AM_1\cdot AN\sin\angle NAM_1=AM\cdot AN\cdot\sin\angle BAC$.

同理可得其他类似的等式.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2S_{\triangle ABC}&=S_{AM_1BM_2CM_3}\\&=S_{\triangle AM_1N}+S_{\triangle ANM_3}+S_{\triangle BM_2N}+S_{\triangle BNM_1}+S_{\triangle CM_2N}\\&\quad+S_{\triangle CNM_3}\\&=2S_{\triangle AM_1N}+2S_{\triangle BM_2N}+S_{\triangle CM_3N}\\&=AM\cdot AN\sin\angle BAC+BM\cdot BN\sin\angle CBA+CM\cdot\\&\quad CN\sin\angle ACB,\end{aligned}$$

两边同时除以 $2S_{\triangle ABC}(=AB\cdot AC\sin\angle BAC=BA\cdot BC\sin\angle CBA=CA\cdot CB\sin\angle ACB)$即得命题结果.

9·10 动点 P 到定$\triangle ABC$三边 BC、CA、AB 的垂线足依次为 D、E、F，记 $S_P=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}+S_{\triangle PAF}$，这里$\triangle PBD$，$\triangle PCE$，$\triangle PAF$ 可以是退化的三角形，即有两个顶点互相重合或三个顶点互相重合的三角形，规定退化的三角形面积为零. 试证：

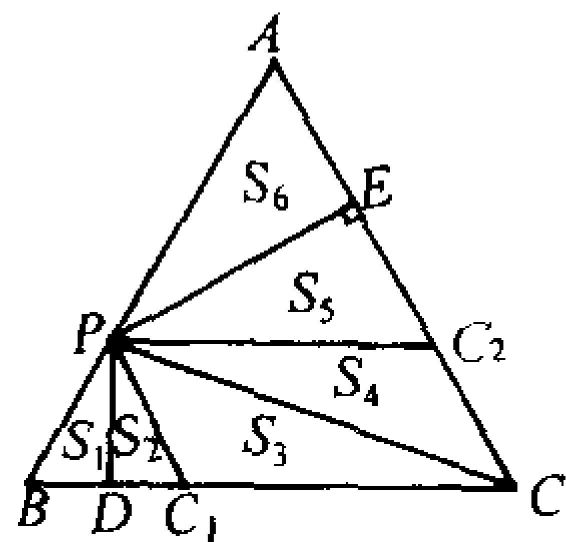
(1)若$\triangle ABC$为正三角形，P 在 AB 边上且 P 在 A、B 之间，则 S_P 为定值.

(2)若$\triangle ABC$为正三角形，P 在$\triangle ABC$内，则 S_P 为定值.

(3)若 P 不在$\triangle ABC$外，S_P 为定值，则$\triangle ABC$为正三角形.

（中国广州、洛阳、福州、武汉、重庆数学联赛，1991 年）

[证] 记 $S_{\triangle ABC}=S$.



(1)如图，作$\square PC_1CC_2$，显然有 $S_1=S_2$，$S_3=S_4$，$S_5=S_6$，$\triangle PAF$ 退化.

故 $S_P=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}=S_1+S_4+S_5$

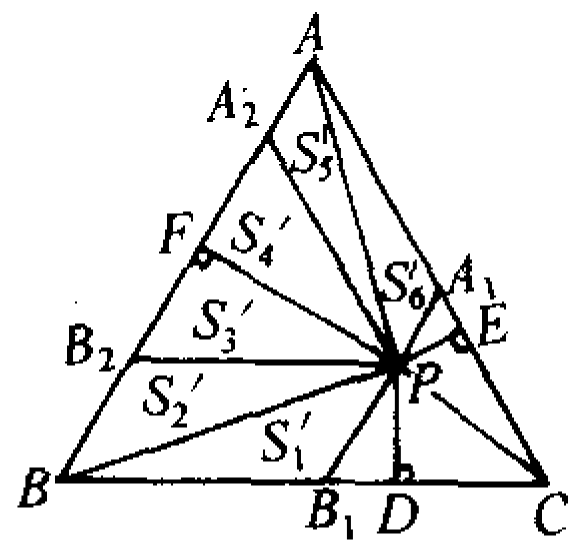
$$=\frac{1}{2}S=\text{定值}.$$

(2) 如图，作 $\square PA_1AA_2$ 和 $\square PB_1BB_2$，则$\triangle A_1B_1C$与$\triangle PA_2B_2$为正三角形.

显然有 $S'_1=S'_2$，$S'_3=S'_4$，$S'_5=S'_6$.

又由(1)，在$\triangle A_1B_1C$中，P 在 A_1B_1 上，故有

$$S_{\triangle PB_1D}+S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle B_1A_1C}$$

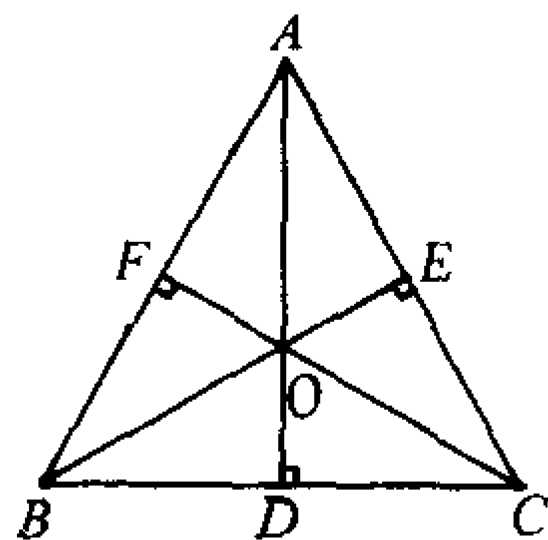


因此 $S_P=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}+S_{\triangle PAF}$

$$=S'_1+S_{\triangle PB_1D}+S_{\triangle PCE}+S'_6+S'_3$$

$$=\frac{1}{2}(S'_1+S'_2)+\frac{1}{2}(S'_3+S'_4)+\frac{1}{2}(S'_5+S'_6)+\frac{1}{2}S_{\triangle A_1B_1C}$$

$$=\frac{1}{2}S=\text{定值}.$$



(3)如图，设 O 为$\triangle ABC$的垂心，依次取 P 为 A、B、C，得

$$S_P=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCE}=S_{\triangle CAF},$$

可知$\triangle ABC$为锐角三角形.

故 $S-S_P=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BAE}=S_{\triangle CBF}$.

两式相比，得 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{AF}{BF}$.

又 $\triangle AEO\backsim\triangle BDO$，有 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{OD}{OE}$.

同理 $\dfrac{CE}{BF}=\dfrac{OE}{OF}$，$\dfrac{AF}{CD}=\dfrac{OF}{OD}$.

从而
$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^2=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{BD}{AE}\cdot\frac{CE}{BF}\cdot\frac{AF}{CD}$$
$$=\frac{OD}{OE}\cdot\frac{OE}{OF}\cdot\frac{OF}{OD}=1$$

故 $BD=CD$.

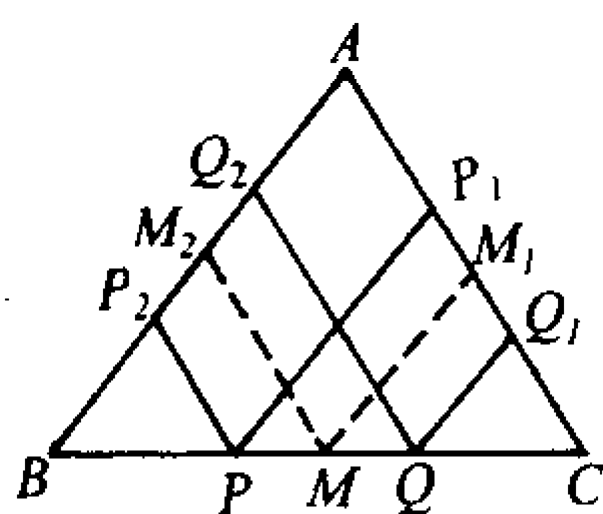
于是 AD 为 BC 的垂直平分线，即 $AB=AC$，

同理 $BC=BA$.

故$\triangle ABC$ 为正三角形.

9·11 若 PQ 为一线段，长度固定，令它在$\triangle ABC$ 的边 BC 上滑动(次序是 $BPQC$). 过 P、Q 作 AB、AC 的平行线，分别交 AC 于 P_1、Q_1，交 AB 于 P_2、Q_2. 证明：梯形 PQQ_1P_1 与梯形 PQQ_2P_2 的面积之和与 PQ 在 BC 上的位置无关.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年)



[证] 设 PQ 的中点为 M.

过 M 引 AB、AC 的平行线分别交 AC、AB 于 M_1、M_2.

设梯形 PQQ_1P_1 与梯形 PQQ_2P_2 的面积之和为 S. 则

$$S=PQ\cdot(MM_1\sin B+MM_2\sin C)$$

由正弦定理得 $MM_1=\dfrac{CM\cdot\sin C}{\sin A}$,

又 $\sin B=\dfrac{AC\cdot\sin A}{BC}$.

$\therefore\quad MM_1\sin B=\dfrac{CM\cdot AC\cdot\sin C}{BC}$,

同理 $MM_2\sin C=\dfrac{BM\cdot AB\cdot\sin B}{BC}$

设$\triangle ABC$中BC边上的高为h,则

$$h=AC\cdot\sin C=AB\cdot\sin B.$$

因此有 $MM_1\cdot\sin B+MM_2\sin C$

$$=\frac{CM\cdot AC\cdot\sin C+BM\cdot AB\cdot\sin B}{BC}$$

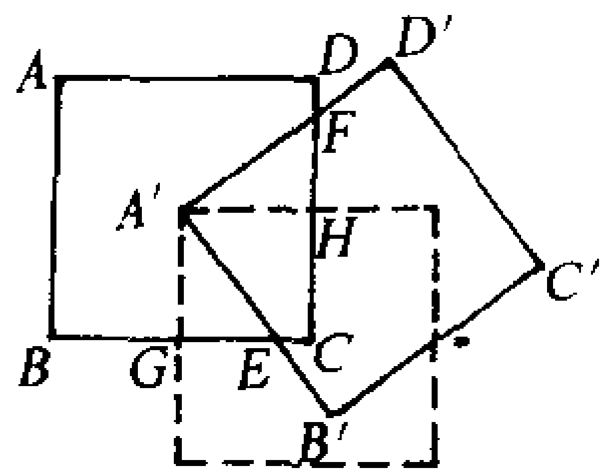
$$=\frac{(CM+BM)h}{BC}=h.$$

于是$S=PQ\cdot h$.从而S与PQ在BC上的位置无关.

9·12 平面上有两个边长相等的正方形$ABCD$、$A'B'C'D'$,且正方形$A'B'C'D'$的顶点A'在正方形$ABCD$的中心.当正方形$A'B'C'D'$绕A'转动时,两个正方形的重合部分的面积必然是一个定值.这个结论对吗?证明你的判断.

(希望杯数学邀请赛,1990年)

[解] 结论正确,证明如下:



如图,当$A'B'C'D'$的边与$ABCD$的边对应平行时,易知重合部分面积为正方形面积的$\frac{1}{4}$.

当转动到实线正方形$A'B'C'D'$位置时,易证$\triangle A'FH\cong\triangle A'EG$.

所以两个正方形重合部分面积仍为正方形面积的$\frac{1}{4}$,是个定值.

9·13 作平面上任意一点M关于一给定四边形各边中点的对称点.求证:以这些对称点为顶点构成的四边形的面积为M的位置无关.

(基辅数学奥林匹克,1966年)

[证] 设A、B、C、D为已知四边形的各边中点,M为平面上的任意一点.

A'、B'、C'、D'为M关于A、B、C、D的对称点.

$$\because\quad \frac{MA'}{MA}=\frac{MB'}{MB}=\frac{MC'}{MC}=\frac{MD'}{MD}=2,$$

$\therefore$ 四边形$A'B'C'D'$是以M为位似中心,相似系数为2的四边形$ABCD$的位似图形.

$$\therefore\quad S_{A'B'C'D'}=4S_{ABCD}=4\left(\frac{1}{2}S\right)=2S,$$

其中 S 是原四边形的面积.

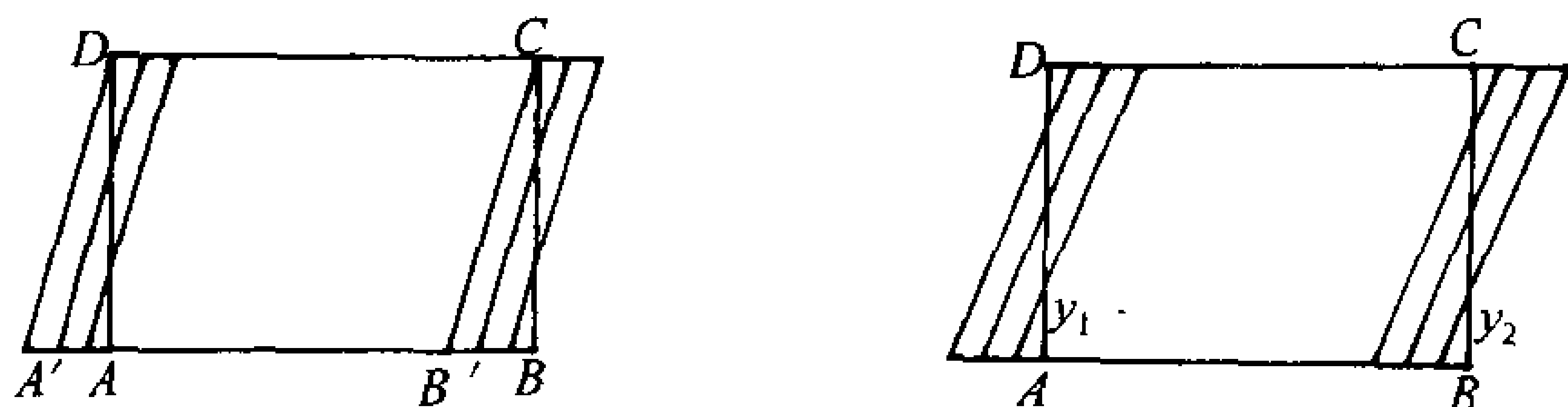
故 $S_{A'B'C'D'}$ 与 M 的位置无关.

9·14 设 $ABCD$ 为长方形, $AB=a$, $BC=b$, 一族平行线, 每两条相邻的距离为 d, 与 AB 成固定角 φ, $0°<\varphi<90°$. 这族平行线被长方形截得的线段长之和为 L, 求出(1) L 的变化情况(如果直线向右平移). (2) L 为常数的充分必要条件. (3)上述常数的值.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题, 1985 年)

[解]

如果这族平行线中有一条过 D, 有一条过 C, 那么由面积公式有



$$Ld=S_{\square A'B'CD}=S_{矩形ABCD}=ab.$$

从而 $$L=\frac{ab}{d}$$ ①

同样, 如果这族平行线中有一条过 D, 有一条过 A, 则①也成立.

在以上两种情况下, L 为定值 $\frac{ab}{d}$.

设这族平行线中与 AD 有公共点为 n_1 条, 与 BC 有公共点的为 n_2 条, 每两条在 AD 上截得的线段长为 d',

由于 $\left[\frac{b}{d'}\right]\leqslant n_1\leqslant\left[\frac{b}{d'}\right]+1, \left[\frac{b}{d'}\right]\leqslant n_2\leqslant\left[\frac{b}{d'}\right]+1,$

则 $|n_1-n_2|\leqslant 1.$

如果 $n_1=n_2+1$.

设 AD 上各截点距 A 为 $y_1,\ y_1+d',\ \cdots,\ y_1+(n_1-1)d'$.

BD 上各截点距 B 为 $y_2,\ y_2+d',\ \cdots,\ y_2+(n_2-1)d'$, 则

$[y_2+(y_2+d')+\cdots+(y_2+(n_2-1)d')]-[y_1+(y_1+d')+\cdots+(y_1+(n_1-1)d')]=l$,

在平行线向右平移时增加(这时 y_2、y_1 都减少 Δ, 所以 $l'-l=(n_2y'_2-n_1y'_1+d)-(n_2y_2-n_1y_1+d)=(n_1-n_2)\Delta=\Delta$)因而 l 增加.

如果 $n_1=n_2$,平行线向右移动时,L 不变.

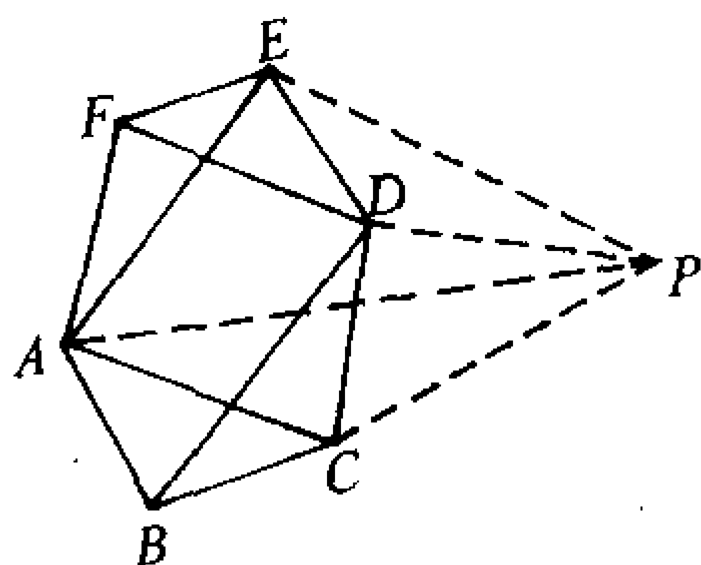
如果 $n_1=n_2-1$, L 减少.

因此 $n_1=n_2$ 是 l 为常数的充分必要条件,这时总可经平移化为开始的两种情况,即此常数为$\frac{ab}{d}$.

9·15 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,$\angle B+\angle D+\angle F=360°$,且$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$. 证明:$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DB}=1$.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

[证 1] 设点 P 满足$\angle FEA=\angle DEP$, $\angle EFA=\angle EDP$,则$\triangle FEA\backsim\triangle DEP$. 于是



$$\frac{FA}{EF}=\frac{DP}{DE} \quad ①$$

$$\frac{EF}{ED}=\frac{EA}{EP}. \quad ②$$

由已知条件,有$\angle ABC=\angle PDC$. 又由①得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE\cdot FA}{CD\cdot EF}=\frac{DP}{CD}. \quad ③$$

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle PDC$. 故 $\angle BCA=\angle DCP$, 且 $\frac{CB}{CD}=\frac{CA}{CP}$.

因为 $\angle FED=\angle AEP$, 由②知 $\triangle FED\backsim\triangle AEP$.

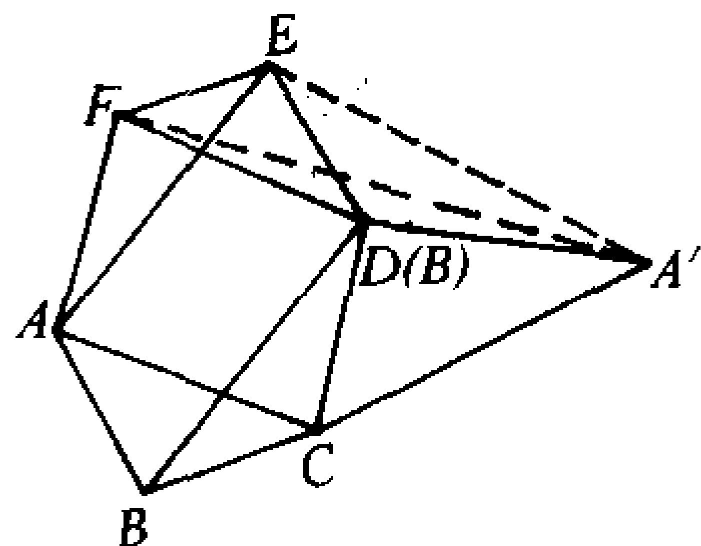
类似地由 $\angle BCD=\angle ACP$ 及③得 $\triangle BCD\backsim\triangle ACP$.

于是

$$\frac{FD}{EF}=\frac{PA}{AF},\frac{BC}{DB}=\frac{CA}{PA}.$$

两式相乘,即得所求.

[证 2] 以 C 为旋转中心,将$\triangle CBA$ 旋转,使射线 CB 与 CD 重合. 然后以 C 为位似中心进行放缩,使 B 点与 D 重合. 设这时 A 的位置为 A',



则 $\triangle CDA'\backsim\triangle CBA$,从而

$\angle A'DC=\angle B$,

且 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'D}{CD}$.

再由题设得 $\dfrac{FA}{EF}=\dfrac{A'D}{DE}$. ①

又 $\angle B+\angle D+\angle E=360°$, $\therefore$ $\angle A'DE=\angle F$.

结合①得 $\triangle EDA' \backsim \triangle EFA$.

从而以 E 为旋转中心,绕 E 旋转$\triangle EFA$,再以 E 为位似中心进行放缩便可使$\triangle EFA$ 与$\triangle EDA'$重合.

$\therefore$ $\dfrac{FD}{AA'}=\dfrac{FE}{AE}$. ②

同理 $\dfrac{DB}{AA'}=\dfrac{CB}{CA}$. ③

由②、③即得结论.

9·16 已知:一凸多边形的任意两边都不平行,对每条边都取距它所在直线最远的一个顶点.求证:所有顶点对相应边的张角和均为180°.

(第22届全俄数学奥林匹克,1996年)

[证] 把距 a 边所在直线最远的多边形顶点记为 P_a.在平面上任取一点 O,过 O 且平行于直线 P_aQ(点 Q 在边 a 上)的所有直线构成了两个对顶角区域,我们把这两个对顶角称为 a 的对应角(见图1).

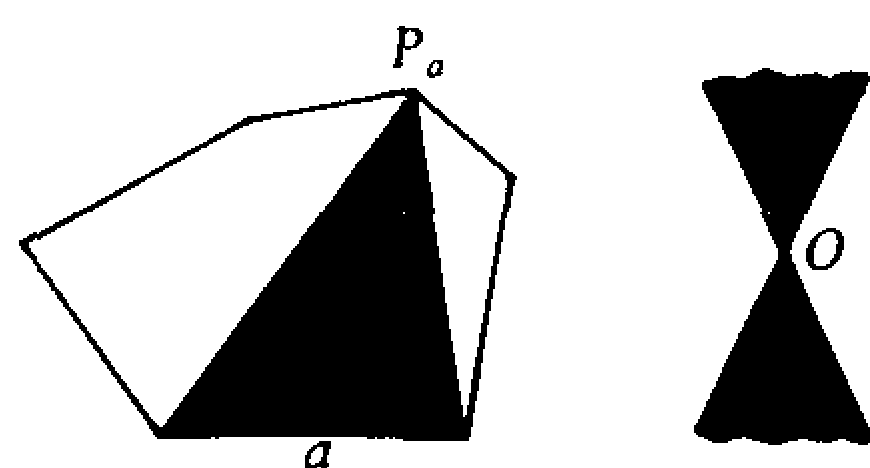


图 1

首先证明:不同边的对应角不重叠.

设以 O 为端点的某射线 l 位于边 a 的某对应角内,则经过点 P_a 且平行于该射线的直线必交边 a 于它的某内点 A.经过点 P_a 引边 a 所在直线 c 的平行线 b(见图2).

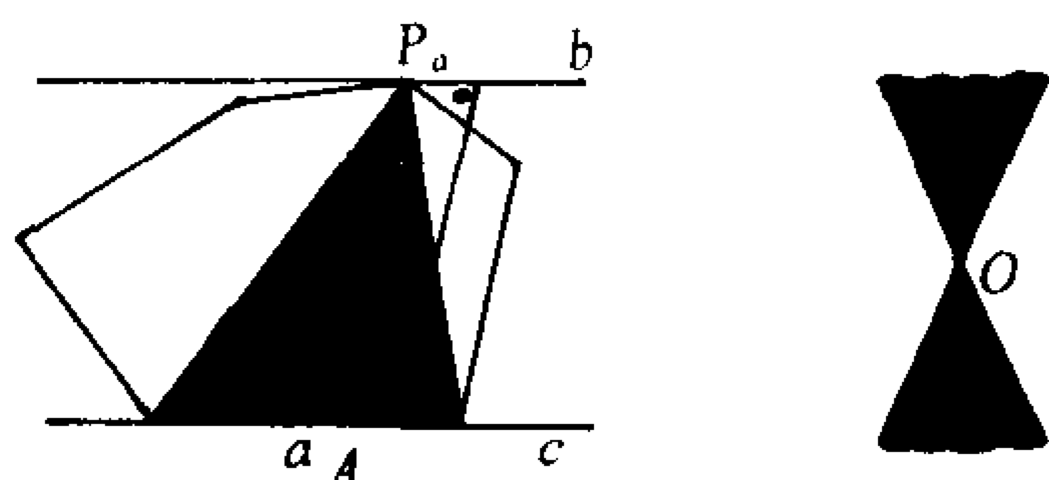


图 2

由多边形是凸多边形和 P_a 所满足的条件知,多边形位于以 b、c 为边界的条形区域内.

特别地由于多边形无平行边，所以点 P_a 是该多边形位于直线 b 上的惟一点.

于是，线段 P_aA 是所有 l 的平行线截多边形所得到的线段中的最长的线段，而且其他的线段的长都严格小于 P_aA 的长.

如果射线 l 同时还位于另一条边 b 的对应角内，那么重复上面的讨论，我们就会得到某线段 $P_bB(B\in b)$，它是所有 l 的平行线截多边形所得到的线段中的最长的线段.

由最长线段的惟一性知，点 A 与点 B 重合. 这与 a、b 是不同的边矛盾. 所以，不同边的对应角不重叠.

现在证明我们构造的角覆盖整个平面.

若非如此，则存在以 O 为顶点的某个角不被我们所构造的任何一个角覆盖. 在这个角内，取以 O 为端点的射线 m，使它不平行于多边形的任意一条边和对角线.

取所有的 m 的平行线截多边形所得的线段中的最长的线段，显然，它的一个端点 P 是多边形的一个顶点，而它另一个端点 A 位于多边形的某条边 a 上.

过 P 作 a 边所在直线 b 的平行线 c. 假设过顶点 P 的多边形的一条边不在以平行线 b、c 为边界的条形区域内，则必可找到一条直线，它与 m 平行且与多边形交出比 PA 长的线段(见图 3)，矛盾.

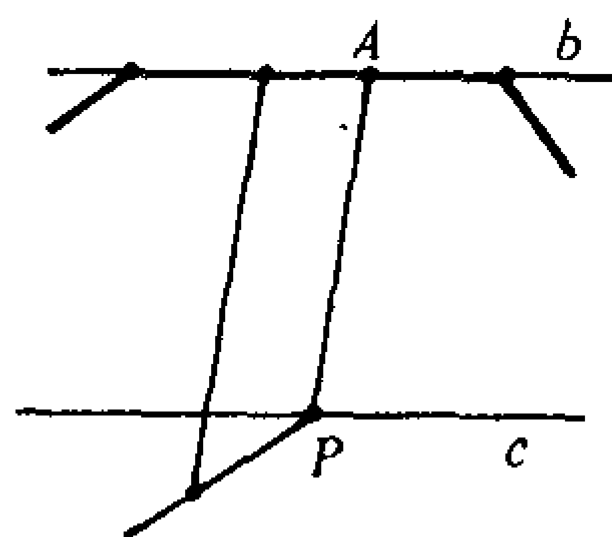


图 3

于是推出，多边形位于以平行线 b、c 为边界的条形区域内.

由此得出，点 P 是距边 a 所在直线 b 最远的多边形的顶点.

这说明，射线 m 位于边 a 的一个对应角内，与我们所取的射线 m 的条件矛盾.

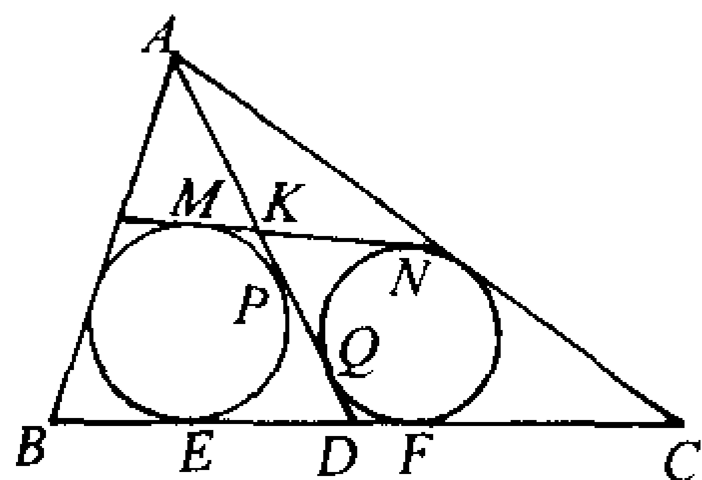
这样一来，我们所构造的角既不互相重叠又覆盖了整个平面，故它们的和等于 360°.

现在只需指出，问题中所说的角度之和恰为我们所构造的角度之和的一半.

9·17　D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点. 作 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内切圆，

且作它们的外公切线(异于 BC 的外公切线),交 AD 于点 K.求证:线段 AK 的长度与点 D 在 BC 上的位置无关.

(莫斯科数学竞赛,1994 年)



[证] 如图,将 AD 与两圆的切点分别记作 P、Q,将所作之两圆的又一条公切线记作 MN,并将 BC 与两圆的切点分别记作 E、F,有

$$AK = AP - KP,\quad AK = AQ - KQ. \qquad ①$$

利用切线的性质不难算得

$$AP = \frac{1}{2}(AB + AD - BD),$$

$$AQ = \frac{1}{2}(AD + AC - DC),$$

$$KP + KQ = KM + KN = MN = EF.$$

将上述三式代入①式,可得

$$\begin{aligned} 4AK &= 2(AP + AQ) - 2(KP + KQ) \\ &= AB + AC - BC + 2(AD - EF). \end{aligned} \qquad ②$$

另一方面,容易算得

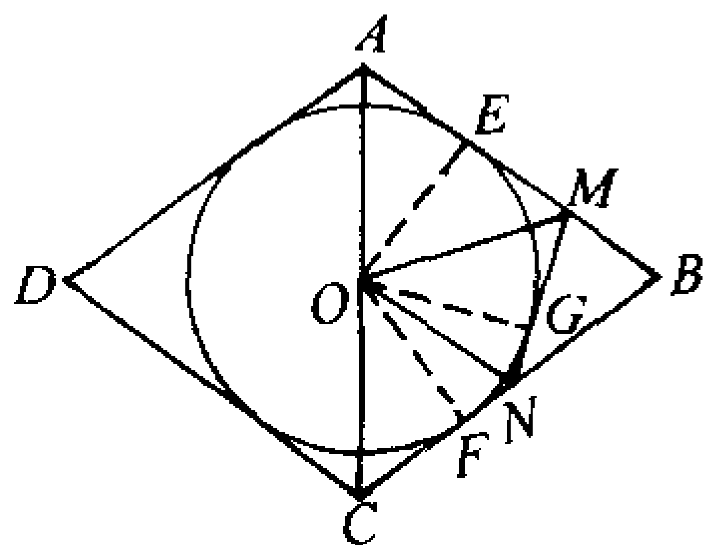
$$\begin{aligned} 2EF &= (DE + DP) + (DF + DQ) \\ &= (AD + BD - AB) + (AD + DC - AC) \\ &= 2AD - (AB + AC - BC). \end{aligned} \qquad ③$$

将③代入②,有 $2AK = AB + AC - BC$.

可见 AK 之长只与三角形的三边之长有关,而与 D 在 BC 上的位置无关.

9·18 试证:菱形 $ABCD$ 两邻边 AB 和 BC 被内切圆的切线所截取的线段 AM 和 CN 的乘积一定.

(中国福建省数学竞赛,1978 年)



[证] 如图,设 E、F、G 各为直线 AB、BC、MN 与圆 O 的切点.则

$\triangle AOE \cong \triangle COF$,

且 $\triangle MOE \cong \triangle MOG$,

及 $\triangle NOG \cong \triangle NOF$,

$\therefore \angle AOE = \angle FOC$,

$$\angle EOM=\angle MOG,\quad \angle GON=\angle NOF.$$

于是 $\angle AOE+\angle EOM+\angle GON=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

从而 $\angle AOM=90^\circ-\angle GON=90^\circ-\angle NOF=\angle CNO$.

又 $\angle OAM=\angle OCN$, $\therefore$ $\triangle AOM\backsim\triangle CNO$,

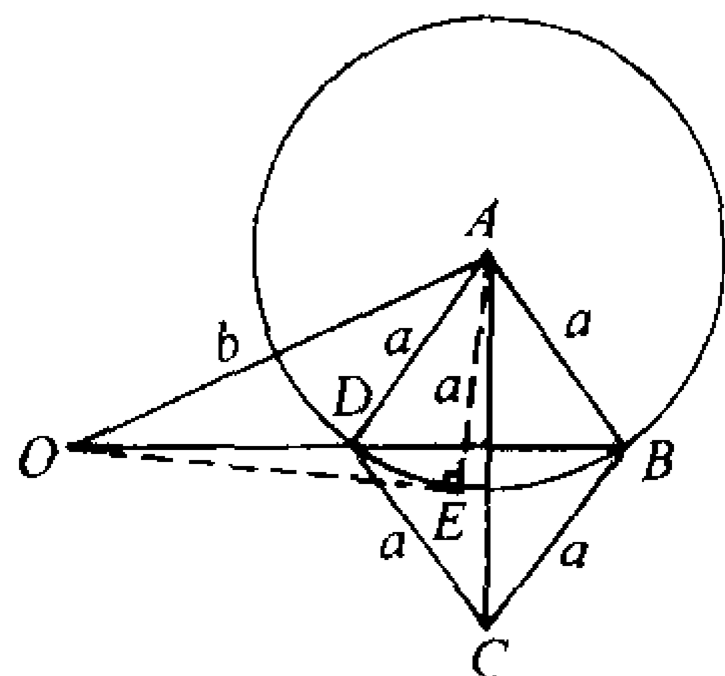
$\therefore$ $\frac{AM}{CO}=\frac{AO}{CN}$,即 $AM\cdot CN=AO\cdot CO=AO^2$(定值).

9·19 在边长为 a 的菱形 $ABCD$ 外取一点 O,使得它和顶点 A 和顶点 C 的距离都等于 $b(b>a)$,试证:乘积 $OB\cdot OD$ 的大小与$\angle BAD$ 的大小无关.

(前民主德国数学奥林匹克,1964 年)

[证] 由 $OA=OC$, 则 O 点在 AC 的垂直平分线上,

又因为 BD 垂直平分 AC,则 O、B、D 三点共线.



过 O 作以 A 为圆心,以 $AD=a$ 为半径的圆的切线 OE,连 AE.则 $AE\perp OE$,

于是 $OE^2=OA^2-AE^2=b^2-a^2$.

又由切割线定理有

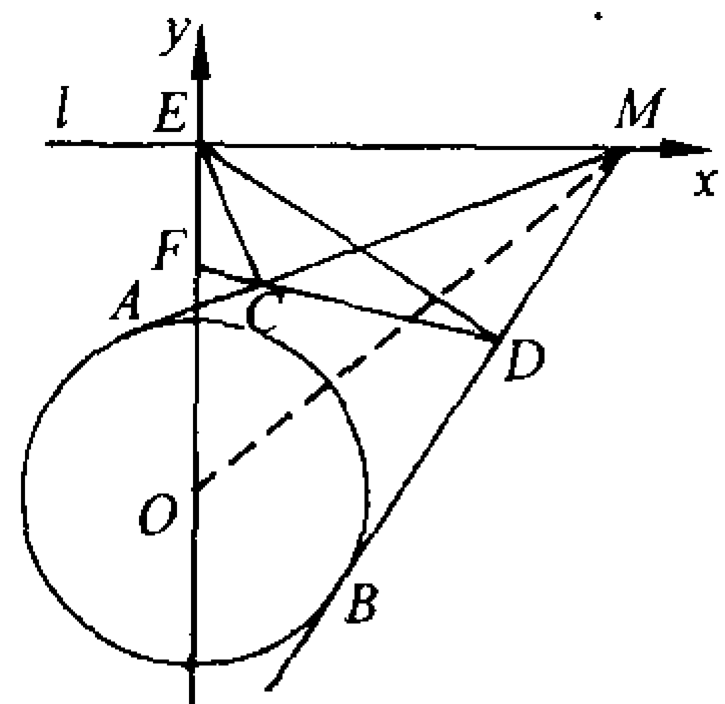
$$DE^2=OB\cdot OD=b^2-a^2.$$

于是 $OB\cdot OD=b^2-a^2$ 为定值,因而与$\angle BAD$ 大小无关.

9·20 ⊙O 与直线 l 相离,$OE\perp l$ 于点 E,M 为 l 上异于 E 的一点,过 M 作⊙O 的两条切线,切点分别为 A 和 B,$EC\perp MA$ 于点 C,$ED\perp MB$ 于点 D,直线 CD 交 OE 于点 F,求证:点 F 的位置与点 M 的位置无关.

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[证] 取以 E 为原点,直线 l 为 x 轴,OE 为 y 轴的直角坐标系.设点 O 的坐标为$(0,a)$,点 M 的坐标为$(b,0)$.⊙O 的半径为 R,$R<|a|$.



连结 OM,于是直线 OM 的斜率为 $k_{OM}=-\frac{a}{b}$.因而直线 OM 与 x 轴的正向的夹角为

$\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)$.

记 $\angle AMO=\angle OMB=\theta$，于是 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

因此有 $\operatorname{tg}\theta=\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2-R^2}}$，$\theta=\operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2-R^2}}$.

从而切线 MA 和 MB 的方程分别为

$$y=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)-\theta\right)(x-b). \quad ①$$

$$y=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)+\theta\right)(x-b). \quad ②$$

按三角公式计算有

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)-\theta\right)=\frac{bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{aR-b\sqrt{a^2+b^2-R^2}}, \quad ③$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)+\theta\right)=\frac{bR-a\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{aR+b\sqrt{a^2+b^2-R^2}}. \quad ④$$

将③和④分别代入①和②,得到 MA 和 MB 的方程分别为

$$y=\frac{bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{aR-b\sqrt{a^2+b^2-R^2}}(x-b), \quad ⑤$$

$$y=\frac{bR-a\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{aR+b\sqrt{a^2+b^2-R^2}}(x-b). \quad ⑥$$

因为 $ED\perp MB$，所以 直线 ED 的方程为

$$y=\frac{aR+b\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{a\sqrt{a^2+b^2-R^2}-bR}x. \quad ⑦$$

将⑥和⑦联立,解得点 D 的坐标为

$$\left(\frac{b(bR-a\sqrt{a^2+b^2-R^2})^2}{(a^2+b^2)^2},\ \frac{b(aR+b\sqrt{a^2+b^2-R^2})(a\sqrt{a^2+b^2-R^2}-bR)}{(a^2+b^2)^2}\right).$$

同理 可得点 C 的坐标为

$$\left(\frac{b(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})^2}{(a^2+b^2)^2},\ \frac{b(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})(b\sqrt{a^2+b^2-R^2}-aR)}{(a^2+b^2)^2}\right).$$

由此可得 $k_{CD}=\dfrac{2b(a^2-b^2)R\sqrt{a^2+b^2-R^2}}{-4ab^2R\sqrt{a^2+b^2-R^2}}=\dfrac{b^2-a^2}{2ab}$.

设点 F 的坐标为$(0,y_F)$,于是有

$$\frac{b^2-a^2}{2ab}=k_{CD}=\frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2y_F-b(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})(b\sqrt{a^2+b^2-R^2}-aR)}{-b(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})^2}.$$

由此解得

$$y_F=\frac{\frac{a^2-b^2}{2a}(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b(bR+a\sqrt{a^2+b^2-R^2})(b\sqrt{a^2+b^2-R^2}-aR)}{(a^2+b^2)^2}$$

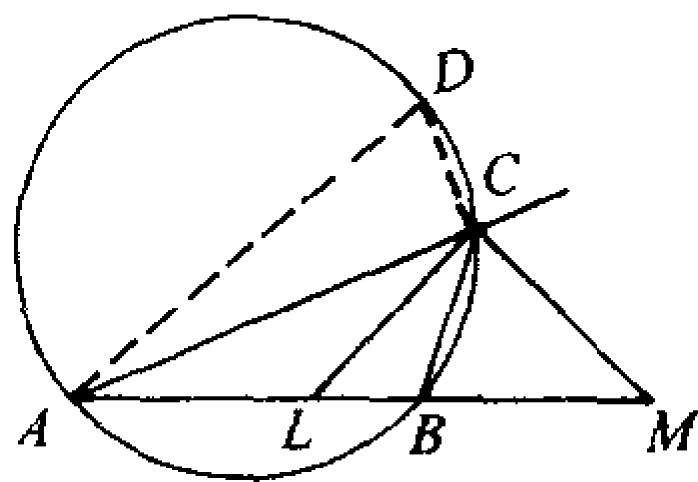
$$=\frac{a^2-R^2}{2a}.$$

这表明 y_F 与 b 无关,即点 F 的位置与点 M 的位置无关.

9·21 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 的内角平分线和外角平分线分别交直线 AB 于点 L 和 M.求证:如果 $CL=CM$,则 $AC^2+BC^2=4R^2$.其中 R 是外接圆半径.

(保加利亚数学奥林匹克,1981 年)

[证] 因为 CL 和 CM 是$\angle C$ 的内角平分线和外角平分线,则 $\angle LCM=90°$.



又因为 $CL=CM$,

则 $\angle CLM=\angle M=45°$.

$\therefore$ $2\angle BAC+\angle BCA=2(\angle LAC+\angle LCA)=2\angle CLM=90°$.

又 $\angle BAC+\angle BCA=180°-\angle ABC$.

$\therefore$ $\angle ABC=90°+\angle BAC>90°$, 因而$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

所以$\triangle ABC$ 外接圆直径 AD 在$\triangle ABC$ 的外部.

因为 A、B、C、D 四点共圆,则

$\angle DAC=(180°-\angle ADC)-\angle ACD=\angle ABC-90°=\angle BAC$.

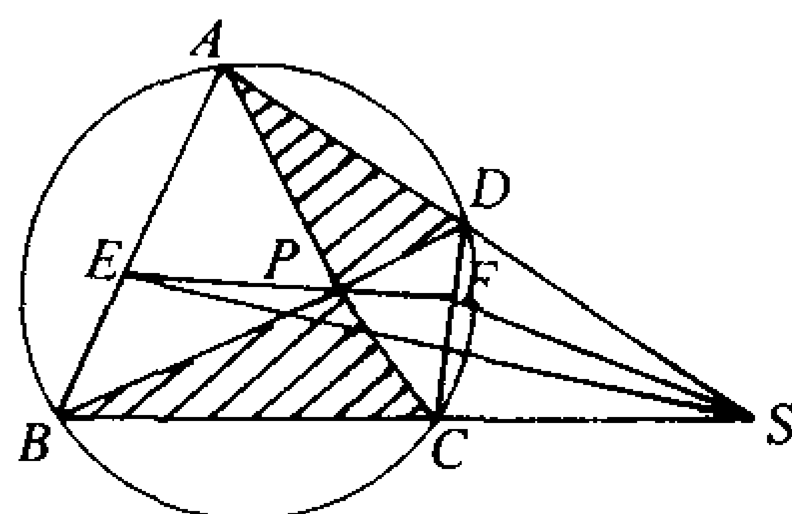
于是 $DC=BC$.

又因为 $\triangle ACD$ 为直角三角形，则 $AC^2+DC^2=AD^2=4R^2$，

即 $AC^2+BC^2=4k^2$.

9·22 已知:$ABCD$ 是圆内接四边形,E、F 分别为 AB、CD 上的点,且满足 $AE:EB=CF:FD$. 设 P 是线段 EF 上满足 $PE:PF=AB:CD$ 的点. 证明:$\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 的面积之比不依赖于 E、F 的选择.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)



[证 1] 若直线 AD、BC 不平行(如左图),设其交点为 S. 因为 $ABCD$ 为圆内接四边形，则 $\triangle ASB\backsim\triangle CSD$. 从而 $\dfrac{AB}{AS}=\dfrac{CD}{CS}$.

又 $\because$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FD}$，即 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{CF}{CD}$，

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AS}=\dfrac{CF}{CS}$.

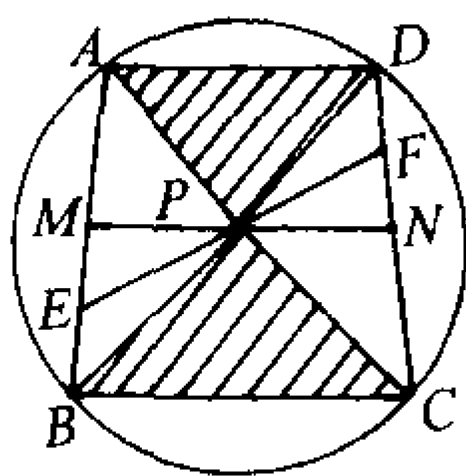
故 $\triangle ASE\backsim\triangle CSF$. $\therefore$ $\angle ASE=\angle CSF$,

且 $\dfrac{SE}{SF}=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{PE}{PF}$.

从而 $\angle ESP=\angle FSP$. 于是 $\angle ASP=\angle BSP$.

所以 P 到 AD、BC 的距离相等.

故 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC}=AD:BC$ 为常数.



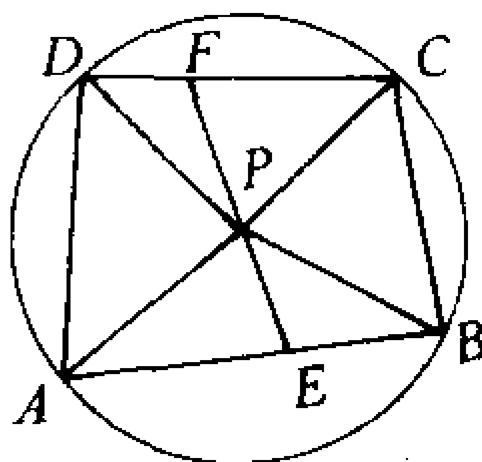
当 AD 平行于 BC 时(如左图),$ABCD$ 为等腰梯形,且 $AB=CD$,从而 $BE=DF$.

设 M、N 分别为 AB、CD 的中点,则 $ME=NF$,且 F、F 到 MN 的距离相等.

于是,EF 的中点 P 在 MN 上.

从而,P 到 AD 和 BC 的距离相等.

故 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC}=AD:BC$.



[证 2] 我们证明 P 到 AD 与 BC 的距离相等,从而 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC}=AD:BC$.

设 $AE:EB=\lambda$, $PE:PF=\mu$,又 E、F 到 AD 的距离分别为 d_E, d_F,则由分点公式,

P 到 AD 的距离 $= d_E + \mu d_F = AE\ \sin A + \mu \cdot DF\ \sin D$

$$= \frac{\lambda}{1+\lambda} AB\ \sin A + \mu \cdot CD \cdot \frac{1}{1+\lambda} \sin D$$

$$= AB\ \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\ \sin A + \frac{1}{1+\lambda}\ \sin D\right).$$

同理　P 到 BC 的距离 $= EB\ \sin D + \mu \cdot FC\ \sin A$

$$= \frac{1}{1+\lambda} AB\ \sin D + \mu \cdot CD \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda}\ \sin A$$

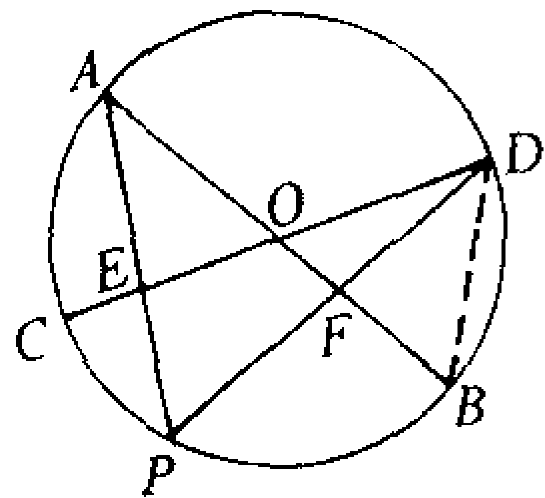
$$= AB\ \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\ \sin A + \frac{1}{1+\lambda}\ \sin D\right).$$

由上知 $S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC}$ 不依赖于点 E、F 的选择.

9·23　$\odot O$ 半径为 R，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条直径，且 $\overparen{AC} = 60°$，在 $\overparen{CB}$ 上任取一点 P，设 PA、PD 交 CD、AB 于 E、F. 记 $m = AE \cdot AP + DF \cdot DP$，学生甲说："$m$ 是一个变量"；学生乙说："m 是一个定值"，你究竟赞成哪种意见呢？并证明你的结论.

（中国安徽省安庆市数学竞赛，1990 年）

[解]　m 为定值. 证明如下：



连接 DB，易知　$\triangle DBF \cong \triangle AOE$，

得　$BF = OE$.

从而　$OE + OF = BF + OF = OB = R$.

$\because$　$\overparen{AC} = 60°$，$\therefore$　$\overparen{AD} = 120°$，

从而 $\angle P = 60°$，则　$\angle P = \angle AOE$.

$\therefore$　O、E、P、F 四点共圆.

得　$AE \cdot AP = AO \cdot AF$，$DF \cdot DP = DO \cdot DE$.

$$\begin{aligned} \therefore\quad m &= AE \cdot AP + DF \cdot DP = AO \cdot AF + DO \cdot DE \\ &= AO^2 + AO \cdot OF + DO^2 + DO \cdot OE \\ &= AO^2 + DO^2 + AO \cdot (OF + OE) \\ &= R^2 + R^2 + R^2 = 3R^2. \end{aligned}$$

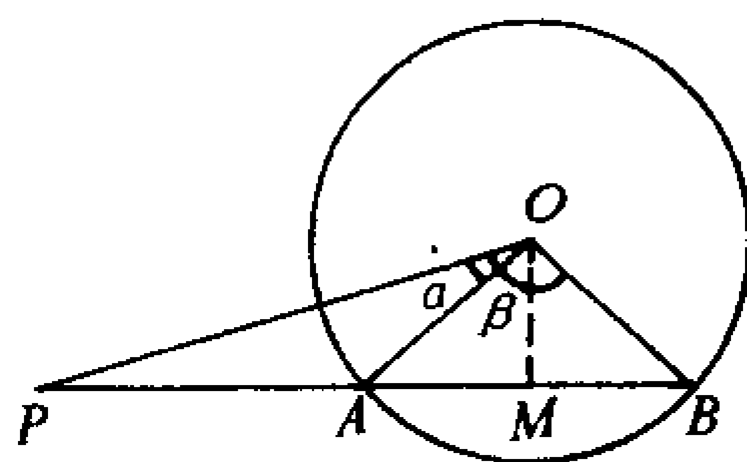
9·24　由定圆 O 外一定点 P 引任意割线 PAB（不过圆心 O）.

求证：$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\angle AOP \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\angle BOP$ 为定值.

（中国广东省数学竞赛，1978 年）

[证]　设 $\angle AOP = \alpha$，$\angle BOP = \beta$，

则 $\angle AOM=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$,



$\angle POM=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)$,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)-\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\beta+\alpha)}=\frac{\cos AOM-\cos POM}{\cos AOM+\cos POM}$$

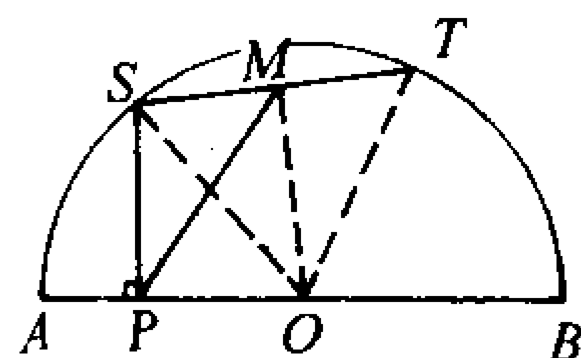
$$=\frac{\frac{OM}{OA}-\frac{OM}{OP}}{\frac{OM}{OA}+\frac{OM}{OP}}=\frac{OP-OA}{OP+OA},$$

因为 OP、OA 由假设是定值,所以 $\frac{OP-OA}{OP+OA}$ 也是定值,

即 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP$ 是定值.

9·25 定长的弦 ST 在一个以 AB 为直径的半圆周上滑动,M 是 ST 的中点,P 是 S 对 AB 所作垂线的垂足.求证:不管弦 ST 滑到什么位置,$\angle SMP$ 是一定角.

(第18届加拿大数学奥林匹克,1986年)



[证] 设 O 是半圆的中心.

由于 ST 为定长,则$\overset{\frown}{ST}$为定值,$\angle SOT$ 为定角.

连 OM,则由 M 是中点得 $OM\perp ST$.

又∵ $SP\perp AB$, 则 S、P、O、M 共圆.

于是 $\angle SPM=\angle SOM=\frac{1}{2}SOT$.

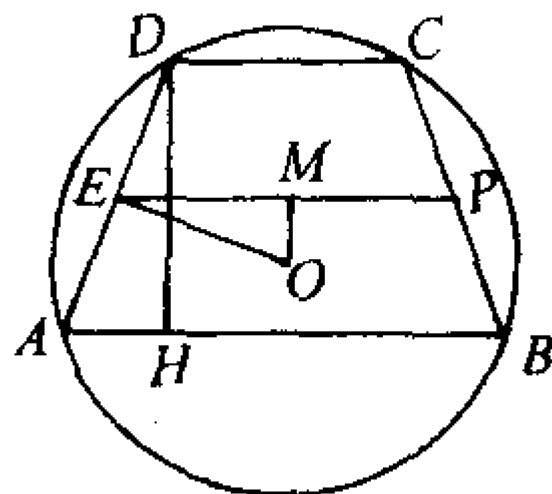
∴ $\angle SPM$ 为定角.

9·26 求证:所有腰长为 a,内接于定圆的梯形,其高与中位线之

比为定值.

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

［证］ 如图，梯形 $ABCD$ 内接于定圆 O，由 $AB // CD$，易知 $AD=BC=a$，设 DH 是梯形的高，EF 是中位线，过 O 引 CD 的垂线，交 EF 于 M，则直线 OM 平分弦 DC，易知 $EFCD$ 是等腰梯形，因而 M 也是 EF 的中点，且 $OM \perp EF$.



由 E 是 AD 的中点，得 $OE \perp AD$，又 $ME \perp DH$，

$\therefore \quad \angle ADH=\angle OEM$，

故 $\mathrm{Rt}\triangle ADH \backsim \mathrm{Rt}\triangle OEM$.

得 $\dfrac{AD}{OE}=\dfrac{DH}{EM}$，

即 $\dfrac{a}{\sqrt{R^2-\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2}}=\dfrac{DH}{\dfrac{1}{2}EF}$，（$R$ 为圆 O 的半径）

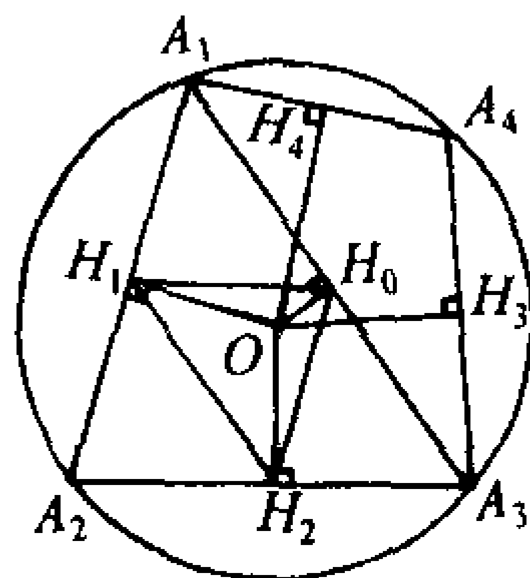
$\therefore \quad \dfrac{DH}{EF}=\dfrac{a}{\sqrt{4R^2-a^2}}$.

其中 a、R 是与 $ABCD$ 位置无关的定值，因此命题得证.

9·27 圆内接四边形被它的一条对角线分成两个三角形.求证：这两个三角形的内切圆半径之和与对角线的选取无关.

（第23届国际数学奥林匹克候选题，1982年）

［证］ 设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于以 O 为圆心，以 R 为半径的圆.点 O 在弦 A_1A_3、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 上的射影依次为 H_0、H_1、H_2、H_3、H_4.



记 $h_i=OH_i$，$i=0,1,2,3,4$.且设 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_3A_4A_1$ 的面积为 S_1、S_2，半周长为 p_1 和 p_2，内切圆半径为 r_1 和 r_2..

考虑含点 O 的三角形，设 O 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中.

对内接四边形 $A_3H_0OH_2$、$A_1H_1OH_0$、$A_2H_2OH_1$ 应用托勒密定理，并注意到 H_0H_2、H_0H_1、H_1H_2 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的中位线，可以得到

$$
\begin{aligned}
(R+r)P_1 &= R\cdot H_0H_2 + R\cdot H_0H_1 + R\cdot H_1H_2 + S_1 \\
&= (h_0\cdot H_2A_3 + h_2\cdot H_0A_3) + (h_0\cdot H_1A_1 + h_1\cdot H_0A_1) \\
&\quad + (h_2\cdot H_1A_2 + h_1\cdot H_2A_2) + \frac{1}{2}(h_1\cdot A_1A_2 + h_2\cdot \\
&\quad A_2A_3 + h_0\cdot A_3A_1) \\
&= (h_1+h_2+h_0)p_1.
\end{aligned}
$$

从而 $R+r=h_1+h_2+h_0$.

如果外接圆圆心 O 在三角形的外部,在这种情形下,恰有一个顶点与点 O 分别在由其对边分成的不同的半平面上,为确定起见,设这个顶点是$\triangle A_3A_4A_1$ 中的顶点 A_4,则四边形 $A_1H_4H_0O$、$A_3H_3H_0O$、$A_4H_4OH_3$ 都是圆内接四边形,由此得

$$
\begin{aligned}
(R+r_2)P_2 &= R\cdot H_0H_4 + R\cdot H_0H_3 + R\cdot H_3H_4 + S_2 \\
&= (h_4\cdot H_0A_1 - h_0\cdot H_4A_1) + (h_3\cdot H_0A_3 - h_0\cdot H_3A_3) \\
&\quad + (h_4\cdot H_3A_4 - h_3\cdot H_4A_4) + \frac{1}{2}(h_3\cdot A_3A_4 + h_4\cdot \\
&\quad A_4A_1 - h_0A_1A_3). \\
&= (h_3+h_4-h_0)P_2.
\end{aligned}
$$

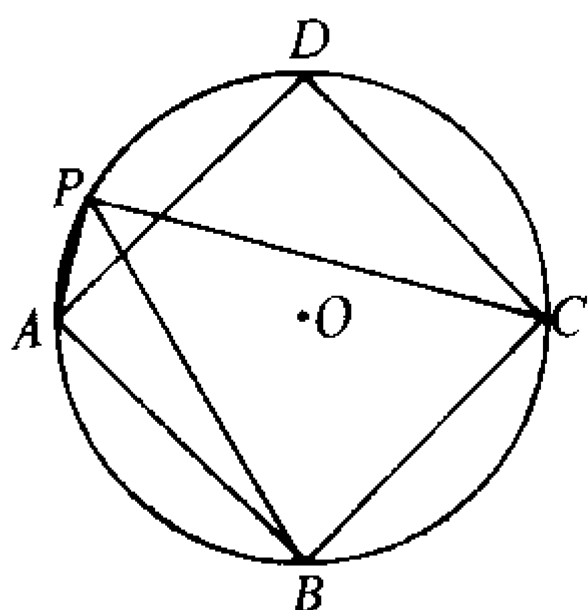
从而 $R+r_2=h_3+h_4-h$.

$\therefore\ r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R$.(如图的情况)

对一般情况,所求的内切圆半径之和等于 h_1、h_2、h_3、h_4,$2R$ 并赋以一定符号之和,这些符号只与点 O 相对于四边形$A_1A_2A_3A_4$ 的位置有关,因此,这个和与对角线的选择无关.

9·28 如图,圆 O 外接于正方形$ABCD$,P 为$\overset{\frown}{AD}$上的任意点,求证:$\dfrac{PA+PC}{PB}$为定值.

(中国吉林省数学竞赛,1992 年)



[证] 因为 $ABCD$ 是正方形,则$\angle APB=\angle BPC=45°$.

在$\triangle APB$ 中,由余弦定理,有

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos\angle APB \\
&= PA^2+PB^2-\sqrt{2}PA\cdot PB. \qquad ①
\end{aligned}
$$

同理,在$\triangle BPC$ 中,有

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - \sqrt{2}PB \cdot PC. \qquad ②$$

① - ②,得 $\quad PA^2 - PC^2 - \sqrt{2}PB(PA - PC) = 0.$

即 $\quad (PA - PC)(PA + PC - \sqrt{2}PB) = 0.$

∵ $\quad P$ 在$\overset{\frown}{AD}$上，故 $\quad PA - PC \neq 0,$

∴ $\quad PA + PC - \sqrt{2}PB = 0.$

故 $\quad \dfrac{PA + PC}{PB} = \sqrt{2}$(常数).

9·29 已知:正 n 边形外接圆的半径为R,其所在平面内任意点 P 到圆心的距离为 a,求证:P 到这个正 n 边形各顶点距离平方的和等于 $n(R^2 + a^2)$.

(中国福建省数学竞赛,1978 年)

[**证**] 如 P 重合于圆心 O,则结论显然成立.

否则,令$\angle POA_0 = \alpha, A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$是正 n 边形的顶点.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(OA_k^2 + OP^2 - 2 \cdot OA_k \cdot OP \cdot \cos\angle POA_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[R^2 + a^2 - 2Ra\cos\left(a + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right] \\ &= n(R^2 + a^2) - 2Ra\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

其中 $$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\left(a + \frac{2k+1}{n}\right) - \sin\left(a + \frac{2k-1}{n}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[-\sin\left(a - \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(a + \frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]$$

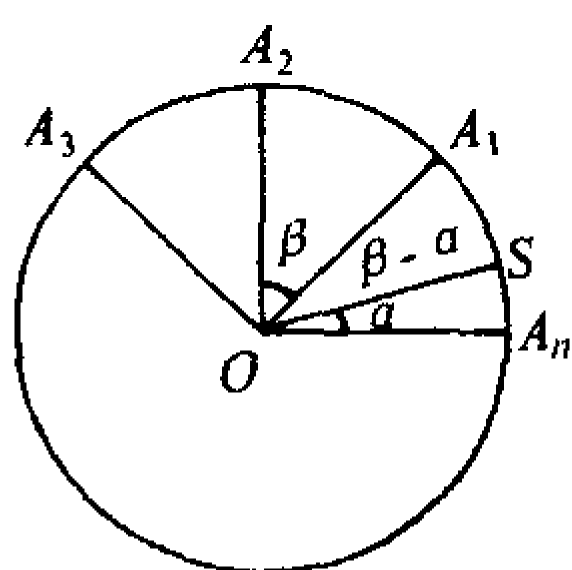
$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[-\sin\left(a - \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$= 0,$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{n-1} PA_k^2 = n(R^2 + a^2).$$

9·30 设 S 为单位圆圆周上任意一点；$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 为圆的内接正 n 边形的顶点，求证：$SA_1^2 + SA_2^2 + \cdots\cdots + SA_n^2$ 是常数.

（中国上海市数学竞赛，1957 年）



[证] 设 $\angle A_nOS = \alpha$，$\angle A_nOA_1 = \dfrac{2\pi}{n} = \beta$.

则 $\angle SOA_1 = \beta - \alpha$，$\angle SOA_k = k\beta - \alpha$.

由余弦定理有

$$SA_1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(\beta - \alpha)$$

$$= 2k^2[1 - \cos(\beta - \alpha)].$$

$$SA_2^2 = 2R^2[1 - \cos(2\beta - \alpha)].$$

……………………

$$SA_n^2 = 2R^2[1 - \cos(n\beta - \alpha)].$$

$$\therefore \quad T = \sum_{i=1}^{n} SA_i^2$$

$$= 2nR^2 - 2R^2[\cos(\beta - \alpha) + \cos(2\beta - \alpha) + \cdots + \cos(n\beta - \alpha)]$$

$$= 2nR^2 - 2k^2 \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\beta - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\right.$$

$$+ \sin\left(\frac{5}{2}\beta - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\beta - \alpha\right) + \cdots$$

$$\left. + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\beta - \alpha\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\beta - \alpha\right)\right]$$

$$= 2nR^2 - \frac{R^2}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\beta - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\right]$$

$$= 2nR^2 - \frac{R^2}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(2\pi + \frac{\beta}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\right]$$

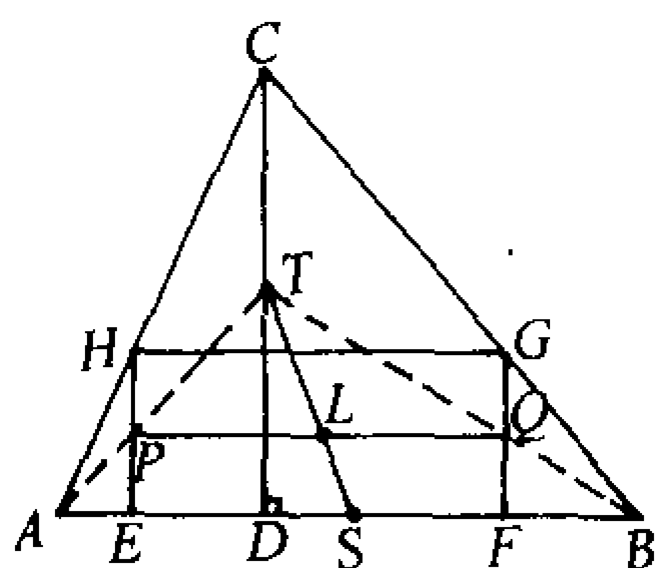
$$= 2nR^2.$$

第十章　轨迹问题

10·1　求顶点在一个已知三角形的周界上的矩形的中心的轨迹.

（波兰数学奥林匹克，1952 年）

［解］　设矩形 $EFGH$ 的两个顶点 E 和 F 在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上，顶点 G 在 BC 边上，顶点 H 在 AC 边上.



设矩形 $EFGH$ 的中心为 L，则 L 是边 EH 和 FG 的中点连线 DQ 的中点.

作 $\triangle ABC$ 的高 CD. 因为 $\triangle AEH$ 和 $\triangle ADC$ 关于点 A 位似，$\triangle BFG$ 和 $\triangle BDC$ 关于点 B 位似，所以直线 AD 和 BQ 经过线段 CD 的中点 T.

又因为 $\triangle PQT$ 和 $\triangle ABT$ 关于点 T 位似，所以直线 TL 经过线段 AB 的中点 S.

因此，L 在线段 TS 的内部.

反过来，线段 ST 内部的每个点 L，都是矩形 $EFGH$（E、F 在 AB 上，G 在 BC 上，H 在 AC 上）的中心.

事实上，过 L 作与线段 AB 关于点 T 位似的线段 PQ，然后过 P 和 Q 分别作与 CD 关于 A 和 B 位似的线段 EH 和 FG，这样就得到四边形 $EFGH$.

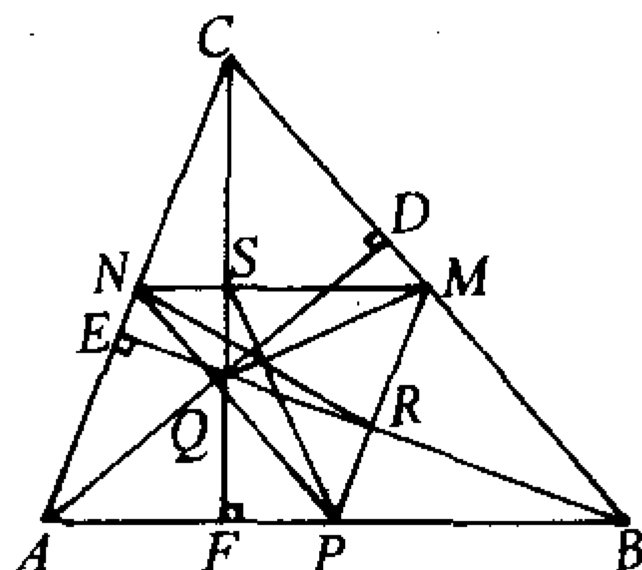
由位似的性质可知，点 P 和点 Q 分别与线段 EH 和 FG 的中点相重合，而点 L 与线段 PQ 的中点相重合，因此 $EFGH$ 是矩形，L 是它的中心.

因此，两个顶点落在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，另两顶点分别落在边 AC 和 BC 上的矩形，其中心 L 的轨迹是连接 BA 中点 S 与 BA 上的高 CD

中点 T 的线段的内部.

如果已知三角形是锐角三角形,那么当矩形的两个顶点落在三角形的任一边上,则上述结论都成立,因而所求的轨迹是由三条线段的内点组成,这三条线段分别是三角形各边中点与该边上的高的中点的连线.

下面证明这三条线段交于一点.



设 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的高,Q、R、S 是三条高的中点,P、M、N 是 AB、BC 和 CA 的中点.

对$\triangle ABC$ 的三条高相交于一点应用塞瓦定理

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

因为$\triangle MNP$ 的三边分别与$\triangle ABC$ 的三边平行,

$$\therefore\quad \frac{NS}{SM}=\frac{AF}{FB},\ \frac{PQ}{QN}=\frac{BD}{DC},\ \frac{MR}{RP}=\frac{CE}{EA}.$$

于是有 $\dfrac{NS}{SM}\cdot\dfrac{PQ}{QN}\cdot\dfrac{MR}{RP}=1,$

再由塞瓦定理的逆定理,则直线 MQ、NR、PS 交于一点.

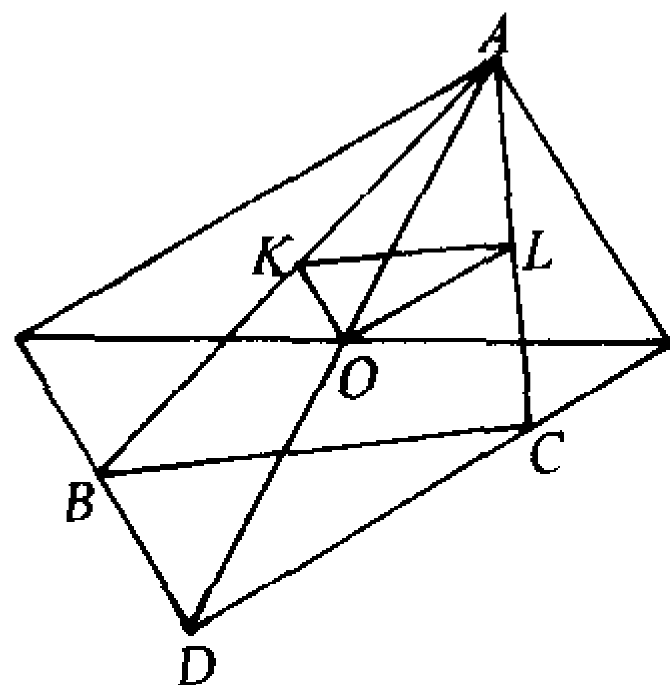
如果$\triangle ABC$ 是直角三角形,则所论的轨迹的三条线段中有两条互相重合.

如果$\triangle ABC$ 是钝角三角形,则所论的轨迹只有一条线段的内点.

10·2　求一已知锐角三角形的外接矩形的中心的集合(所谓外接矩形,是指这矩形的每一条边都含有三角形的一个顶点).

(基辅数学奥林匹克,1966 年)

[解]　所求中心集合为以该三角形三条中位线为直径的三个半圆周.



下面来证明(必要性).设$\triangle ABC$ 为已知的三角形,由外接矩形的定义知,$\triangle ABC$ 有一顶点必同时落在外接矩形的两邻边上,即外接矩形的一个顶点与$\triangle ABC$ 的某一顶点重合.

设重合点为 A,设矩形中与 A 相对的顶点

为D,O为矩形的中心,作$\triangle ABC$的中位线KL,则$KL \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$.如图.

故 $\triangle OKL \backsim \triangle DBC$,相似比为 $1:2$.

且 $\angle KOL=\angle BDC=90^{\circ}$.

O落在以KL为直径且位于KL与BC之间的半圆周上.

考虑B点、C点,共有3个这样的半圆周.

(充分性)设O是半圆周上任一点.

过A和B分别引两条平行KO的直线,

过A和C分别引两条平行LO的直线.

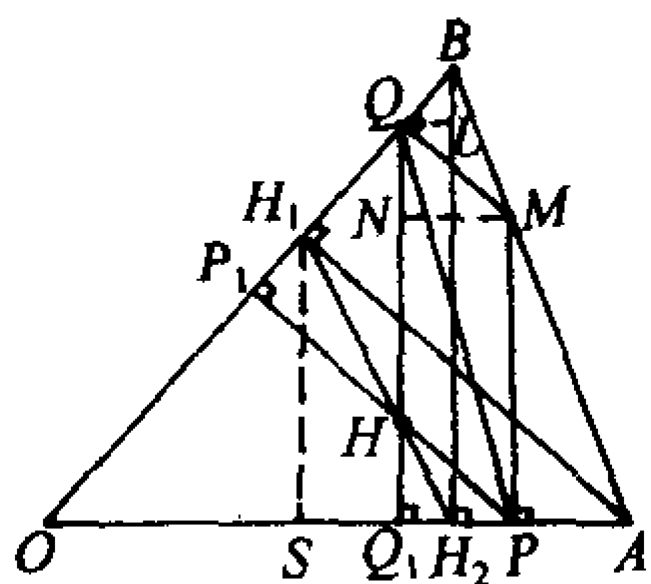
则此平行四边形对角线互相平分于O点.

$\because$ $\angle BDC=\angle KOL=90^{\circ}$.

$\therefore$ 此平行四边形为已知三角形的外接矩形.

10·3 在$\triangle OAB$中,已知$\angle AOB=\alpha(\alpha<90^{\circ})$,从$\triangle AOB$的任一点$M$(不与$O$点重合),作$MP\perp OA$,$MQ\perp OB$,垂足分别为$P$、$Q$,$H$是$\triangle OPQ$的垂心,分别求下列两种情况下$H$点的轨迹.(1)当动点$M$在线段$AB$上运动时.(2)当动点$M$在$\triangle OAB$的内部运动时.

(第7届国际数学奥林匹克,1965年)



[解] 我们先就$\triangle OAB$是锐角三角形的情形进行讨论.

(1)当动点M在线段AB上运动时.

设$AH_1\perp OB$,$BH_2\perp OA$,垂足为H_1、H_2,则线段H_1H_2就是所求的轨迹.

下面证明这个结论.

设M是AB上的任一点,$MP\perp OA$,$MQ\perp OB$,$QQ_1\perp OA$,$PP_1\perp OB$,垂足依次为P、Q、Q_1、P_1.

则PP_1和QQ_1的交点H就是$\triangle OPQ$的垂心.

设QQ_1与H_1H_2交于K点.

要证明H点在H_1H_2上,只要证明H点与K点重合就可以了.

记 $\angle OAB=\beta$,又由已知 $\angle AOB=\alpha$,且 $\alpha,\beta<90^{\circ}$.

$\because$ $\angle BH_2A=\angle AH_1B=90^{\circ}$,$\therefore$ H_2、A、B、H_1四点共圆.

于是 $\angle H_1H_2O=\angle OBA=\beta$.

设　$BM=x$，则　$BQ=x\cos\beta$，$QM=x\sin\beta$.

作 $QL/\!/OA$ 交 BH_2 于点 L，则四边形 QQ_1H_2L 是矩形，$\angle LQB=\angle AOB=\alpha$.

因为点 K 是 QQ_1 和 H_1H_2 的交点，所以在 $\triangle KQ_1H_2$ 中，有

$Q_1H_2=QL=BQ\cdot\cos\alpha=x\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha$,

$Q_1K=QH_2\cdot\text{tg}\angle H_1H_2O=x\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\text{tg}\beta$

$=x\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

作 $MN/\!/AO$，交 Q_1Q 于点 N，则 MNQ_1P 是矩形，

且　$\angle NQM=\angle AOB=\alpha$.

因为点 H 是 P_1P 与 Q_1Q 的交点，所以在 $\triangle HQ_1P$ 中，有

$Q_1P=NM=QM\cdot\sin\alpha=x\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$,

又因为 $\angle Q_1HP=\angle AOB=\alpha$，得

$Q_1H=Q_1P\cdot\text{ctg}\angle Q_1HP=x\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\text{ctg}\alpha$

$=x\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

因此有 $Q_1H=Q_1K$.

又因为 Q_1H 与 Q_1K 均在线段 Q_1Q 上，所以点 H 与 K 重合，因此符合条件的点 H 在线段 H_1H_2 上.

当动点 M 在 BA 上从 B 连续运动到 A 时，$x=BM$ 的值从 0 连续增大到 BA,

从而　$Q_1H=Q_1K=x\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$ 从 0 连续增大到 $BA\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=AH_1\cdot\cos\alpha=H_1S$（其中 $H_1S\perp OA$ 于 S）.

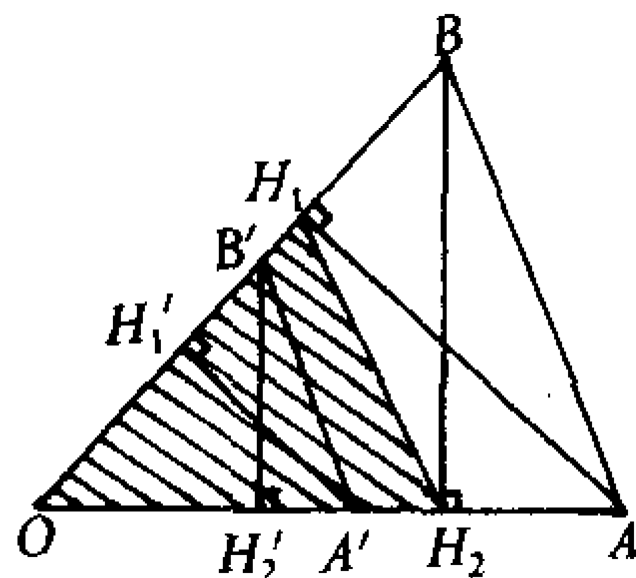
于是，对于线段 H_1H_2 上的任一点 H'，作 $H'Q'_1\perp OA$ 于 Q'_1，有

$0<Q'_1H'_1<H_1S$.

对应的　$x'=\dfrac{Q'_1H'}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$，使　$Q'_1H'=x'\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

由于　$0<x'<\dfrac{H_1S}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}=BA$,

所以在线段 BA 上存在一点 M'，使 $AM'=x'$，H' 就是对应于 M' 点符合条件的垂心，因此线段 H_1H_2 上任一点都符合条件.



(2)当 M 在 $\triangle OAB$ 内部运动时.

我们先考察动点 M 在 $\triangle OAB$ 内与 AB 平行

的某一条线段$A'B'$上运动时,对应的垂心H的轨迹.

如图,作$A'H'_1\perp OB$、$B'H'_2\perp OA$,垂足分别为H'_1、H'_2.

对$\triangle OA'B'$,利用(Ⅰ)的结论,垂心H的轨迹为线段$H'_1H'_2$.

显然,由$A'B'/\!/AB$、$A'H'_1/\!/AH_1$、$BH'_2/\!/BH_2$可知,四边形$H'_1H'_2A'B'$与四边形H_1H_2AB位似,所以有

$H'_1H'_2/\!/H_1H_2$, 故 $\dfrac{OH'_2}{OH_2}=\dfrac{OA'}{OA}$.

设$OA'=y$, 则有 $OH'_2=\dfrac{OH_2\cdot y}{OA}$.

当点A'在OA上从O点连续移动到A点时,对应的一系列平行于AB的线段$A'B'$就连续充满整个$\triangle OAB$.

这时,y从0连续增大到OA,

从而$OH'_2=\dfrac{OH_2\cdot y}{OA}$的值从$O$连续增大到$OH_2$,即对应的$H'_2$点从点$O$连续移动到$H_2$点.

这一系列的平行于H_1H_2的线段$H'_1H'_2$便连续地移遍整个$\triangle OH_1H_2$,并且由于当点M在线段AB上运动时,对应的H点的轨迹是线段H_1H_2,当点M在线段OA上运动时,点H的轨迹是线段OH_1,当点M在线段OB上运动时,点H的轨迹是线段OH_2.

所以当点M在$\triangle OAB$的内部运动时,所求点H的轨迹是$\triangle OH_1H_2$的内部区域(不包括$\triangle OH_1H_2$的边界).

如果$\triangle OAB$是钝角三角形或直角三角形,也有同样的结论.证明方法类似.

10·4　设给定的$\triangle ABC$不是等边三角形,顶点依逆时针顺序排列,正三角形$A'B'C'$(顶点依逆时针顺序排列)的顶点B'、C'与A共线;A'、C'与B共线,A'、B'与C共线.求:$\triangle A'B'C'$的重心轨迹.

(第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年)

[解]　设$\triangle A'B'C'$的重心为G.

由$\triangle A'B'C'$为正三角形,则A'在以BC为底,所含圆周角为60°的弓形弧上,将此弓形弧补成圆,则$A'G$与该圆的交点是所含圆周角为120°的$\overset{\frown}{BC}$的中点D,D是定点.

同样,$B'G$与所含圆周角为120°的$\overset{\frown}{CA}$的交点E,$C'G$与所含圆周

角为 120°的$\overset{\frown}{AB}$的交点F均是相应弧的中点，D、E、F均为定点.

如果以$\triangle ABC$的边为边向内侧作正三角形，则D、E、F分别是所作的三个正三角形的中心，容易证明，$\triangle DEF$是正三角形.

若G在$\triangle ABC$内，则$\angle AGB$、$\angle CGB$、$\angle CGA$不能全等于 120°，否则 $\angle BGA'=\angle CGB'=\angle AGC'$.

$\therefore\quad \triangle BGA'\cong\triangle CGB'\cong\triangle AGC'$.

由此可得出$\triangle ABC$为正三角形，与已知矛盾.

因此$\angle AGB$、$\angle CGB$、$\angle CGA$中必有一个大于 120°，一个小于 120°，从而D、E、F中有一点在线段$A'G$、$B'G$、$C'G$的延长线上，又有一点在相应的线段上，即$\angle DGE$、$\angle BGF$、$\angle FGD$恰有一个为 120°，所以G在$\triangle DEF$的外接圆上.

若G不在$\triangle ABC$内，设G与A'在BC同侧，则D在$A'G$的延长线上，这时

$$\angle BGA+\angle AGC<180°<240°,$$

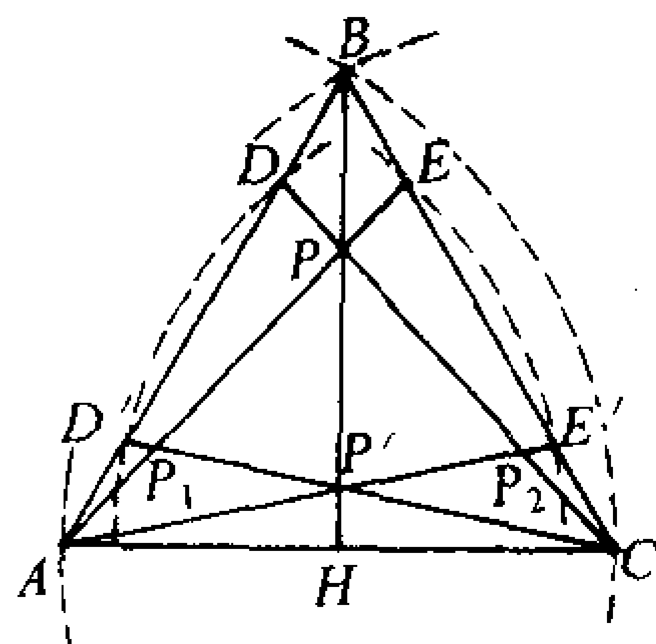
因而$\angle BGA$、$\angle AGC$中至少有一个小于 120°，E、F中至少有一个在相应的线段$B'G$或$C'G$上，从而G也在$\triangle DEF$的外接圆上.

所以$\triangle A'B'C'$的重心G的轨迹是$\triangle DEF$的外接圆（除去$\triangle ABC$的费马点P）.

10·5 在等边$\triangle ABC$的边AB和BC上各有一个动点D和E，使$AE=CD$. 求：线段AE和CD的交点的轨迹.

（莫斯科数学奥林匹克，1955 年）

［解］ 当AE和CD不是$\triangle ABC$的高线时，还可以对称地画出AE'和CD'. 这时显然有$\triangle CDD'\cong\triangle AEE'$. 记$AE$、$AE'$与$CD$、$CD'$的交点分别为$P$、$P_1$、$P_2$、$P'$（如图）. 由对称性知，点$P$和$P'$在$\triangle ABC$的高$BH$上.



$\because\quad \angle BD'P_1=\angle P_1EE'$,

$\therefore\quad B$、D'、P_1、E 四点共圆.

$\therefore\quad \angle AP_1C=\angle D'P_1E=180°-\angle D'BE=120°$.

同理 $\angle AP_2C=120°$.

综上可知，所求的轨迹为$\triangle ABC$的边AC上的高BH和以AC为弦过$\triangle ABC$的中心的 120°圆弧.

10·6 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，p 为过H 的任一直线，直线 q、r、s 分别为直线p 关于BC、CA、AB 的对称直线. 直线 q、r、s 交于一点，当直线 p 绕H 旋转时，求：这个点的轨迹.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

［解］ 设 AH、BH、CH 分别与$\triangle ABC$ 的外接圆k 相交于Q、R、S.

设 HQ 交BC 于Q_1，容易证明

$$\triangle BQ_1H \cong \triangle BQ_1Q.$$

所以BC 垂直平分HQ，即 Q 与H 关于BC 对称. 因此直线 q 应当过点 Q.

同理，直线 r、s 分别过点R、S.

设 s 与r 相交于X，又设$\angle XSH=\alpha$，$\angle XRB=\beta$，$\angle HBA=\gamma$，则有

$$\angle RXS=\angle RHS-\alpha-\beta=2\angle RHS-\pi$$
$$=2\left(\angle RHS-\frac{\pi}{2}\right)=2\gamma.$$

因此 X 在圆k 上，即 s 过r 与外接圆k 的交点.

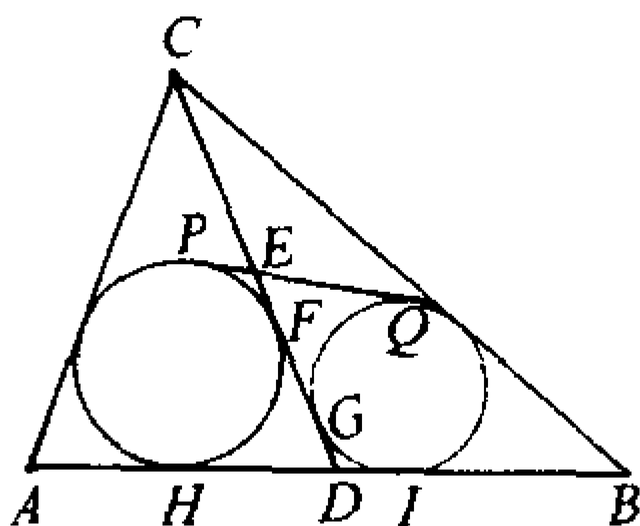
同样，q 过 r 与外接圆k 的交点X，

所以，q、r、s 交于X，X 在外接圆k 上，

当直线 p 绕点H，从 HQ 开始作逆时针旋转时，直线 q 与圆k 的交点X 自点A 沿圆周k 作顺时针旋转，因此圆 k 就是所求的轨迹.

10·7 设 D 是已知$\triangle ABC$ 的边AB 上的任意一点，点 E 在该三角形内部，且是$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 的内切圆的外公切线与CD 的交点. 证明：点 E 的轨迹是一段圆弧.

（第 20 届美国数学奥林匹克，1991 年）



［证］ 如图，设 AB 分别切两圆于H、I，CD 分别切两圆于F、G，两圆的另一条外公切线为 PQ，其中 P、Q 为切点.

由切线长定理有

$$PQ=PE+EQ=EF+EG=2EF+FG,$$

同理 $HI=2DG+FG$.

又因为 PQ、HI 为两圆的外公切线，所以 $PQ=HI$.

即　$2EF+FG=2DG+FG$，∴　$EF=DG$.

又由已知两圆分别是$\triangle ACD$和$\triangle BCD$的内切圆，则

$$CF=\frac{AC+CD-AD}{2},\ DG=\frac{CD+BD-BC}{2}.$$

从而　$CE=CF-EF=CF-DG$

$$=\frac{AC+CD-AD}{2}-\frac{CD+BD-BC}{2}$$

$$=\frac{AC+BC-AB}{2}\quad(\text{定值})$$

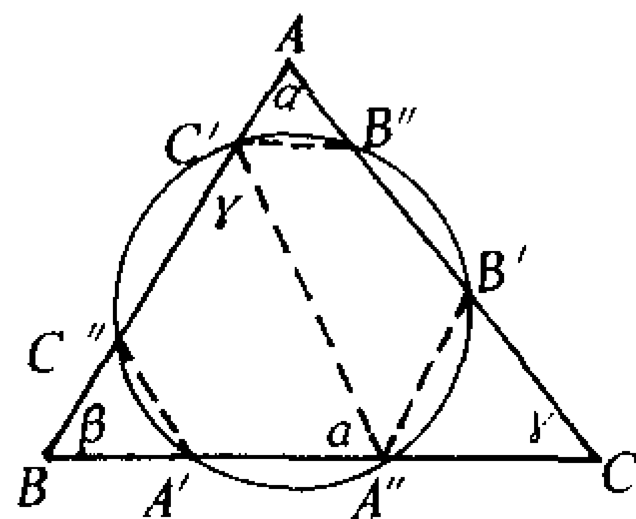
于是点E的轨迹是以C为圆心，$\frac{AC+BC-AB}{2}$为半径在$\triangle ABC$内部的一段圆弧.

10·8　设$\triangle ABC$是一个任意的锐角三角形.圆Γ满足下列条件:(1)圆Γ与$\triangle ABC$的三边(线段)都有公共点;(2)以上述六个公共点为顶点构成的凸六边形,三组对边平行(六边形可能是退化的,即有两个或更多的顶点重合,这时"对边平行"按通常的极限观点来定义).试求圆Γ的中心的轨迹,并说明如何作出这一轨迹.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[解]　我们证明,轨迹是一条线段.

不失一般性,假定$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$,这里$\alpha$、$\beta$、$\gamma$分别是$\triangle ABC$的顶角$A$、$B$、$C$的度数.

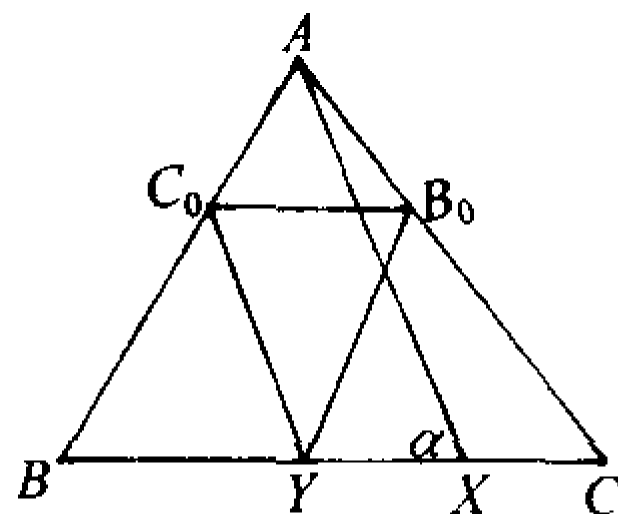


分别记圆Γ与AB、BC、CA的交点为C'、C''、A'、A''、B'、B''.并且A''在A'与C之间,B''在B'与A之间,C''在C'与B之间.易知

$$\angle BA''C'=\angle BC''A'=\alpha.$$

所以在知道点A''后,可作$A''C'$,使$\angle BA''C'=\alpha$,$A''C'$交AB于C',作$C'B''/\!/BC$交AC于B'',这样由三点A''、C'、B''即可作出圆Γ.

我们研究当A''具备什么条件时,这样作出的圆适合条件(1)、(2).



设$A''\in$线段$XY\subset BC$.我们来确定临界点X和Y.

由于$\alpha>\gamma$,我们可以在$\angle BAC$内作$\angle BAX=\gamma$,AX交BC于X,易知$\angle AXB=\alpha$.

我们可以在 BC、CA、AB 上作出点 y、B_0、C_0，使 $B_0C_0 /\!/ BC$，且

$$\angle YB_0C_0 = \angle YC_0B_0 = \alpha.$$

X 和 Y 就是所求的临界点.

事实上，若 A'' 在线段 XC 上，则 $\angle AA''B < \angle AXB = \alpha$.

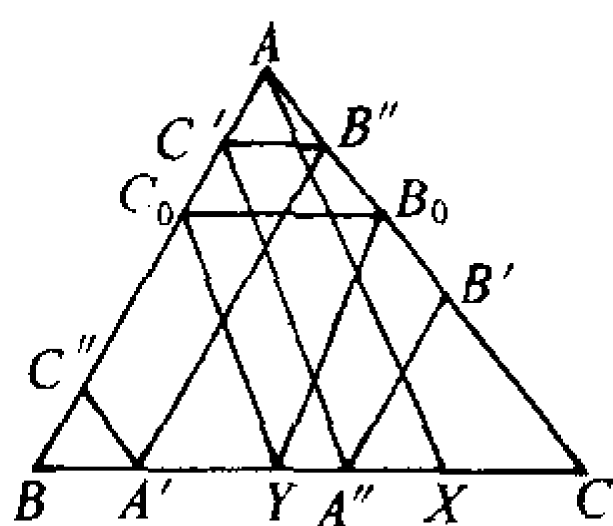
这时前面作出的 C' 不在线段 AB 内，所以 A'' 必须在线段 BX 上，注意到

$$\angle A'B''C = \angle B'A''C = \beta = \angle YB_0C,$$

即 $A'B'' /\!/ YB_0$，

若 A'' 在线段 BY 上，虽可定出 C'、B''，但 B'' 在线段 CB_0 上，从而 A' 在 CY 上，与 A'' 与 A' 与 C 之间矛盾.

现在设 A'' 在线段 XY 上，作出 C'、B''（$A''C' /\!/ AX$，$C'B'' /\!/ C_0B_0$）后，再作 $B''A' /\!/ B_0Y$，$A''B' /\!/ AB$，$A'C'' /\!/ AC$. 这里 C'、B''、A' 分别在线段 AC_0、AB_0、BY 上，B'、C'' 分别在 AC、AB 上.



由于 $\angle BA'C'' = \gamma < \angle BYC_0 = \alpha$，所以 C'' 在线段 BC_0 上.

由于 $\angle B'A''C = \beta < \angle B_0YC = \alpha$，所以 B' 在线段 CB_0 上.

A'、A''、B'、B''、C'、C'' 这六个点配置合乎要求，而且由 $\angle A''B'C = \alpha = \angle A''C'B''$ 可知，A''、B'、B''、C' 四点共圆. 由 $\angle B'A''C = \beta = \angle A'B''B'$ 可知，A'、B''、B'、A' 共圆.

所以，A'、A''、B'、B''、C'、C'' 六点共圆.

设此圆 Γ，它的圆心 O 也是所求轨迹上的点. 所有符合要求的圆 Γ 的圆心都可以通过 A''（圆 Γ 与 BC 的接近顶点 C 的那个公共点）用上法得出. 当 A'' 在线段 XY 上变化时，圆心 O 作为线段 $A''C$ 与 $C'B''$ 的垂直平分线的交点的位置随 A'' 作线性变换，因而 O 的轨迹是一条线段 O_XO_Y.

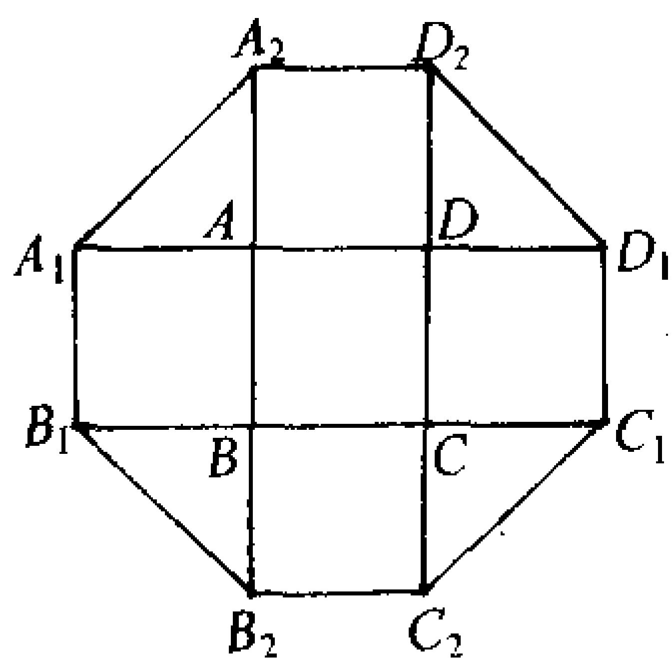
其中 O_X、O_Y 分别为 A'' 与临界点 X、Y 重合时，相应的圆心，由于 X、Y 均已作出，则 O_X、O_Y 也可作出，从而 O_XO_Y 完全确定.

10·9 给定一个边长是 1的正方形. 试求：到该正方形的各边或边的延长线的距离之和等于 4 的所有点的集合.

（莫斯科数学奥林匹克，1959 年）

［解］ $ABCD$ 是边长为 1 的正方形. 把各边向两边都延长，使

$AA_1 = DD_1 = BB_1 = CC_1 = AA_2 = BB_2 = DD_2 = CC_2 = 1$.



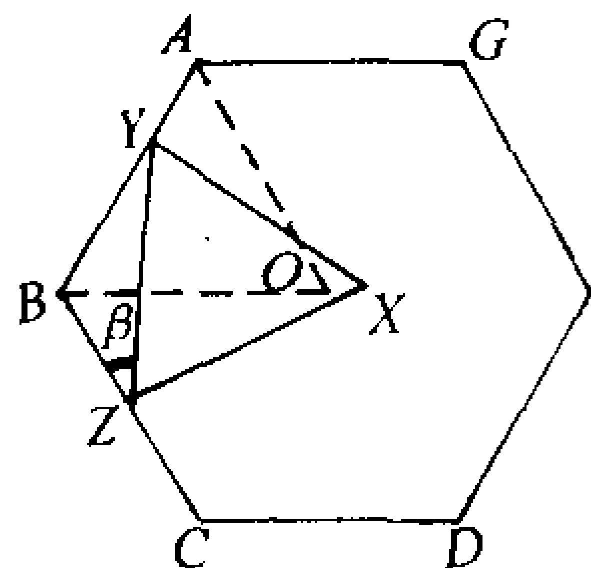
连结 A_1B_1、B_1B_2、B_2C_2、C_2C_1、C_1D_1、D_1D_2、D_2A_2、A_2A_1，所得八边形 $A_1B_1B_2C_2C_1D_1D_2A_2$ 周界上任意一点，到正方形 $ABCD$ 四边或其延长线的距离之和均为 4.

故满足条件的所有点的集合为正八边形 $A_1A_2D_2D_1C_1C_2B_2B_1$ 的周界.

10·10　以点 O 为中心的正 n 边形($n \geqslant 5$)的两个相邻顶点记为 A、B. $\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 全等，最初令 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 重合，然后在平面上移动 $\triangle XYZ$，使点 Y 和 Z 都沿着多边形周界移动一周，而点 X 保持在多边形内移动，求：动点 X 的轨迹.

（第 27 届国际数学奥林匹克，1986 年）

［解］　设正 n 边形 $ABCD\cdots G$ 的外接圆的半径为 1.



$\triangle XYZ$ 的位置如图所示.

由题设　$XY = XZ = 1$.

$\because$　$\angle YXZ = \angle AOB$,

$\therefore$　$\angle YXZ + \angle YBZ = \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{(n-2)\pi}{n} = \pi$.

从而　Y、X、Z、B 四点共圆. $\therefore$　$\angle XBY = \angle XZY = \angle OBA$,

于是　O、B、X 三点共线.

记　$\angle BZY = \beta$，则在 $\triangle BZX$ 中，由正弦定理可得

$$\frac{BX}{XZ} = \frac{BX}{1} = \frac{\sin\angle BZX}{\sin\angle XBZ} = \frac{\sin\left(\dfrac{n-2}{2n}\pi + \beta\right)}{\sin\dfrac{n-2}{2n}\pi} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n} - \beta\right)}{\cos\dfrac{\pi}{n}}.$$

$\therefore$　$BX = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n} - \beta\right)}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$.　于是　$1 \leqslant BX \leqslant \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}} = \sec\dfrac{\pi}{n}$.

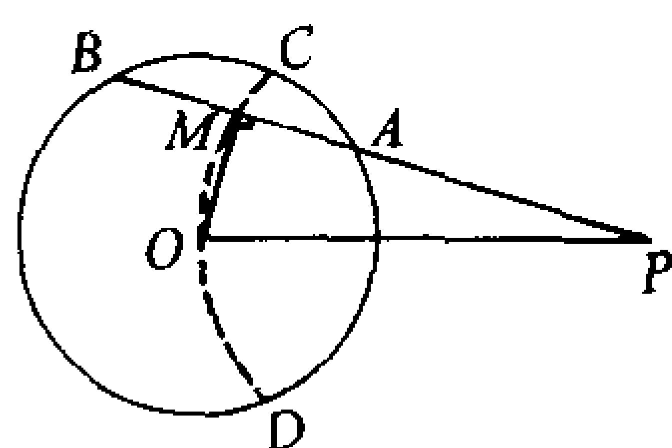
因此，当 Z 从 B 变到 BC 上一点 K 时$\left(使\ \beta = \dfrac{\pi}{n}\right)$，$X$ 在直线 BD

上，由 O 移到 O_2，其中 $BO_2=\sec\frac{\pi}{n}$，$OO_2=\sec\frac{\pi}{n}-1$，并且当 Z 从 K 移到 C 上时，X 在直线 BO 上从 O_2 回到 O.

于是点 X 的轨迹是分别在直线 AO、BO、…、GO 上的 n 条线段 $OO_j(j=1,2,\cdots,n)$，且在每条线段上通过两次.

10·11 设 P 为圆外一点，过点 P 引所有与圆相交的直线，试求：这些直线与圆相截所得的弦的中点的集合.

（莫斯科数学奥林匹克，1941 年）



［解］ 如图，过点 P 任意引⊙O 的一条割线所截得的弦为 AB，M 是 AB 的中点，连结 OM.

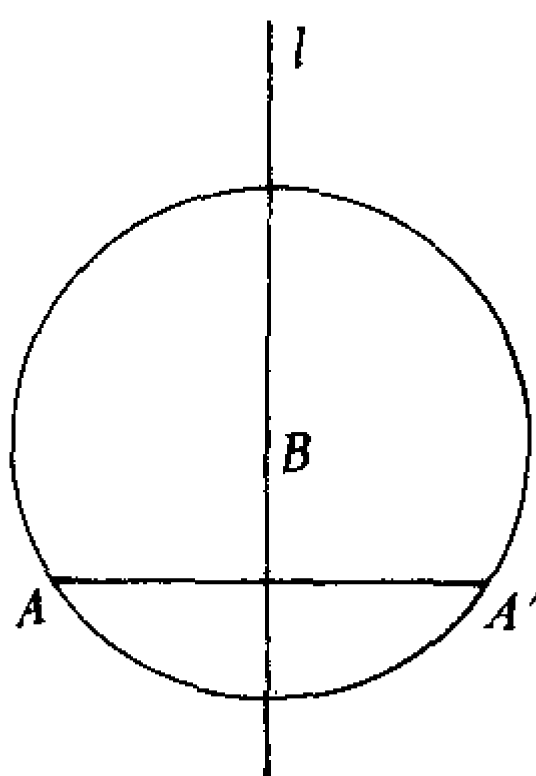
则 $OM\perp AB$.

以 OP 为直径的⊙S 与⊙O 交于 C、D.

故动点 M 的轨迹为⊙S 的劣弧$\overset{\frown}{CD}$.

10·12 设 A、B 为已知两点，求点 A 关于任一过点 B 的直线的对称点的集合.

（基辅数学奥林匹克，1971 年）



［解］ 设 $AB=r$，作⊙$B(r)$，则⊙$B(r)$即为所求的轨迹.

(1)过 B 任作一直线 l，设 A' 是 A 关于 l 的对称点，则 $A'B=AB=r$.

∴ A'在⊙$B(r)$上.

(2)设 A'在⊙$B(r)$上，则 $A'B=AB=r$.

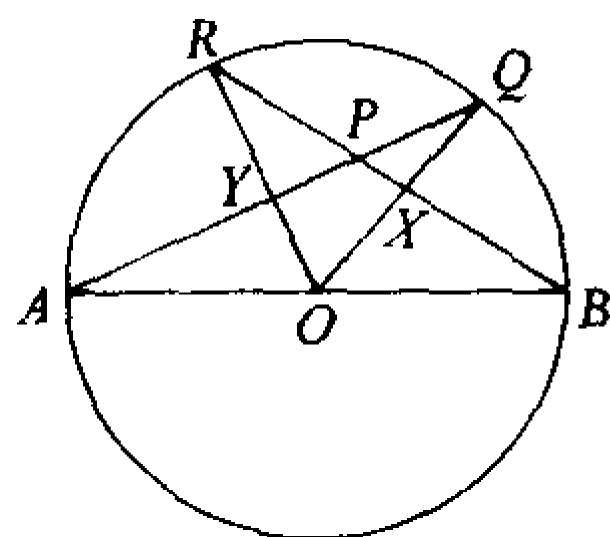
故 A'、A 关于 AA'的垂直平分线 l 对称，且 l 是过点 B 的直线.

10·13 设 AB 是⊙O 的直径，P 是圆内一点，弦 AQ 与 BR 相交于点 P. 设 X 为半径 OQ 与弦 BR 的交点，Y 为半径 OR 与弦 AQ 的交点. 求：所有使得四边形 $OXPY$ 有外接圆的点 P（即使得 Q、X、P、Y 共圆的点 P 的轨迹）.

（基辅数学奥林匹克，1965 年）

［解］ ∵ $\angle XPY\overset{\mathrm{m}}{=}\frac{1}{2}(180^\circ+\overset{\frown}{PQ})$.

$$\therefore \quad \angle XPY = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle ROQ)$$
$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ROQ$$
$$= 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XPY)$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle XPY,$$



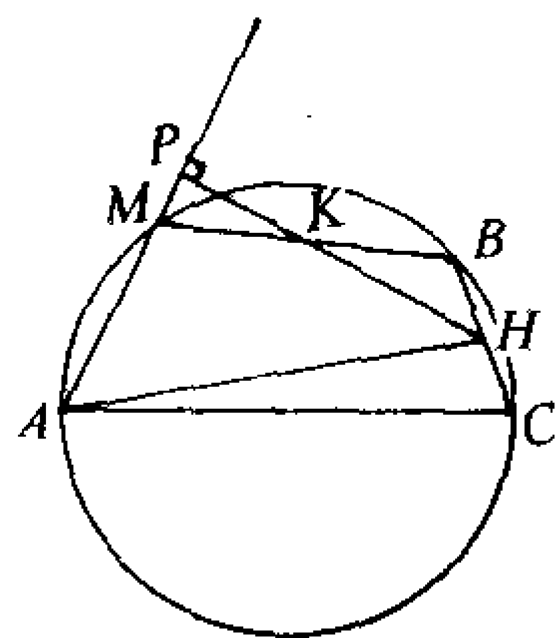
$$\therefore \quad \frac{3}{2}\angle XPY = 180^\circ,\ \angle XPY = 120^\circ$$

故点 P 的轨迹是以 AB 为公共弦所含视角 $\angle APB = 120^\circ$ 的两段圆弧.

10·14　A、B 为一已知圆上的两定点，M 为这圆上的动点，过 MB 的中点作 MA 的垂线，交 MA 于 P，求：点 P 的轨迹.

（基辅数学奥林匹克，1970 年）

［解］　设 K 是 MB 的中点，作直径 AC，直线 KP 与线段 CB 相交于 H.



$\because$　$MC /\!/ PK$，$MK = KB$.

$\therefore$　H 是 BC 的中点.

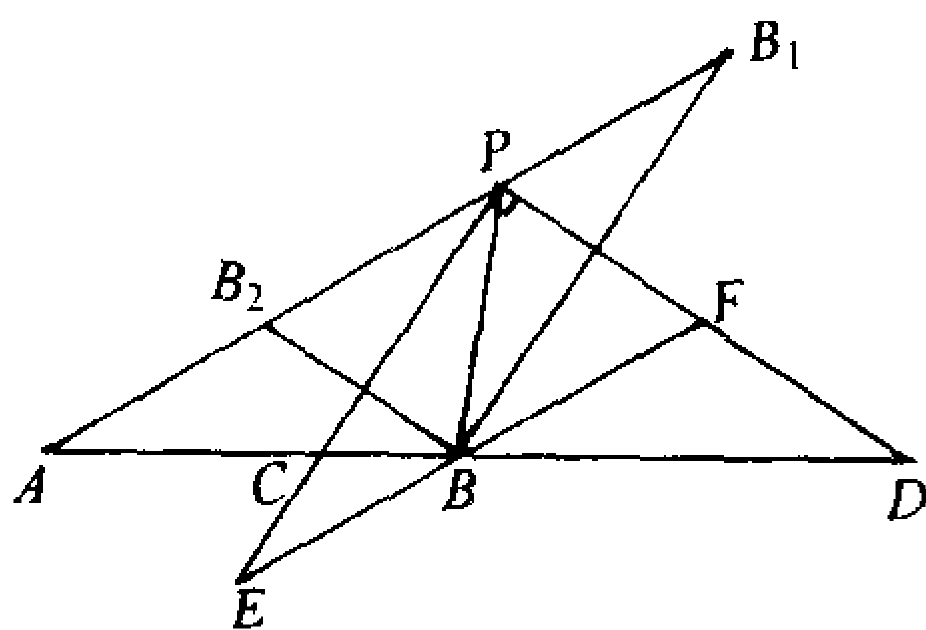
故点 P 的轨迹是以 AH 为直径的圆.

10·15　求证：到两个已知点的距离之比为定值的点的轨迹是圆（阿波罗尼斯圆）.

（基辅数学奥林匹克，1955 年）

［证］　设 A 和 B 是已知点，P 是所求轨迹上任意一点，即

$$\frac{AP}{BP} = \alpha \text{ 为常数.}$$



假定 PC 是 $\angle APB$ 的平分线，PD 是 $\angle APB$ 的邻补角的平分线（如图）.

则　$PC \perp PD$，以 CD 为直径作 $\odot O(R)$.

作 B 关于 PD 和 PC 的对称点 B_1、B_2，则 B_1、B_2 在 AP 上.

$\because$　$CP /\!/ BB_1$，

$\therefore \quad \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AP}{PB_1}=\dfrac{AP}{PB}=\alpha.$

$\because \quad BB_2 /\!/ PD,$

$\therefore \quad \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AP}{B_2P}=\dfrac{AP}{BP}=\alpha.$

另一方面,假设点 P 在$\odot O(R)$上

过点 B 作 $EF /\!/ PA$,分别交 PC、PD 于 E、F,则

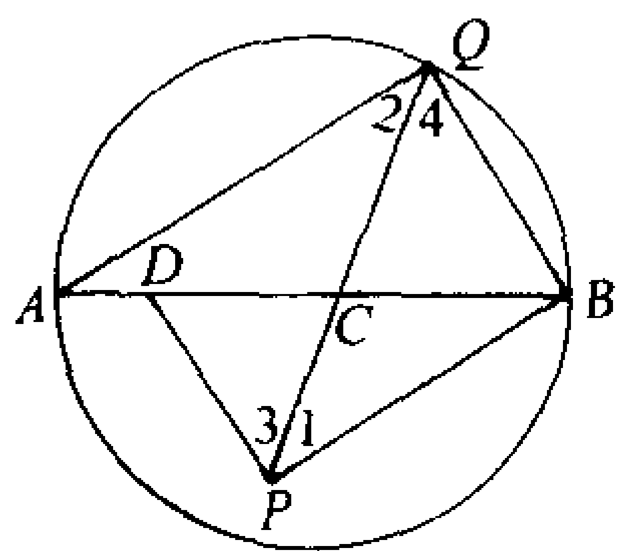
$$\frac{PA}{EB}=\frac{AC}{CB}=\alpha, \quad \frac{PA}{FB}=\frac{AD}{BD}=\alpha,$$

$\therefore \quad \dfrac{PA}{EB}=\dfrac{PA}{FB}=\alpha.$ 且 $\quad EB=FB=PB.$

故 $\dfrac{PA}{PB}=\alpha$, 因此,所求轨迹为$\odot O(R)$.

10·16 设 AB 是圆的直径,C 是这个直径上在 A 和 B 之间的任一固定点. Q 是周围上的动点,设 P 是由 Q 和 C 的确定的直线上的点,且$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{QC}{CP}$,描述并证明点 P 的轨迹.

(第 8 届加拿大数学奥林匹克,1976 年)



[解] 如图,在 AC 上取点D,使

$$\frac{AC}{CB}=\frac{BC}{CD}.$$

此时相当于当 Q 与 B 重合时,P 与 D 重合. 因此,对任何 Q,都有

$$\frac{AC}{CB}=\frac{QC}{CP}=\frac{BC}{CD}.$$

于是有 $\quad \triangle ACQ \backsim \triangle BCP$, $\triangle QCB \backsim \triangle PCD.$

即 $\quad \angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. 从而 $\quad \angle BPD$ 是直角.

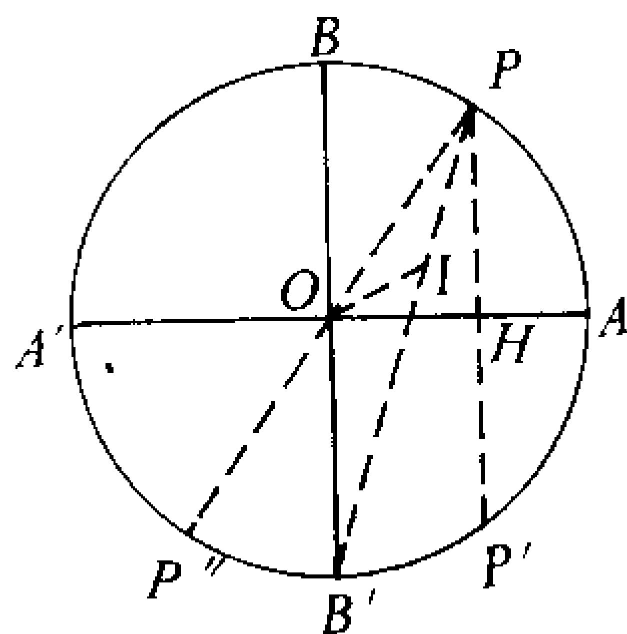
所以 P 的轨迹是以 BD 为直径的圆.

10·17 设 P 是以 OA、OB 为半径的$\dfrac{1}{4}$圆周上的一个动点($\angle AOB=90°$),H 是 P 在 OA 上的射影.

求:直角三角形 HPO 的内心的轨迹.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解] 设 AA'、BB' 为 $\odot O$ 的直径，P'、P'' 分别是点 P 关于 OA 及圆心 O 的对称点.



显然，P'、P'' 在 $\odot O$ 上，并且 B' 是 $\overparen{P'P''}$ 的中点.(弧 $\overparen{P'P''}$ 指劣弧).从而直线 PI 过点 B'.由于

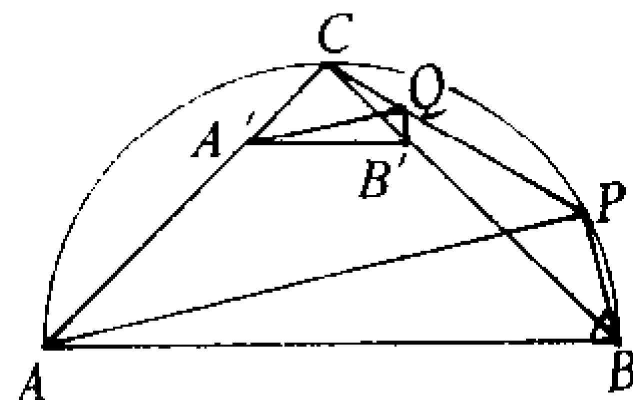
$$
\begin{aligned}
\angle OIB' &= \angle B'PP'' + \angle POI \\
&= \frac{1}{2}\angle B'OP'' + \frac{1}{2}\angle P''OA' \\
&= \frac{1}{2}\angle B'OA' = \frac{\pi}{4} = \angle OAB'
\end{aligned}
$$

所以，内心 I 的轨迹是 $\triangle OAB'$ 的外接圆上的一段劣弧 $\overparen{OA}$.

10·18 C 是一个半圆 $\overparen{AB}$ 的中点，对 $\overparen{AB}$ 上任一点 P，在线段 CP 上取一点 Q，使 $PQ = \dfrac{|PA - PB|}{2}$. 当 P 沿半圆从 A 变至 B 时，求：点 Q 的轨迹.

(加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年)

[解 1] 设半圆的半径为 R.



在 CA 上取点 A'，CB 上取点 B'，使

$$AA' = BB' = R.$$

设 $\angle PBA = \alpha$，

则 $\angle PAC = \left|\dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right| = \left|\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right|$.

且 $|PA - PB| = 2R|\sin\alpha - \cos\alpha| = 2\sqrt{2}R\left|\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$，

又 $CP = 2R\left|\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

所以有 $\dfrac{PQ}{CP} = \dfrac{2\sqrt{2}R\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{4R\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\dfrac{AA'}{CA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

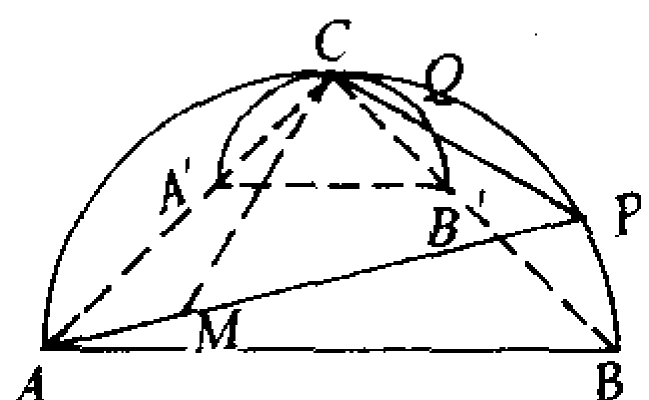
于是 $\dfrac{PQ}{CP} = \dfrac{AA'}{CA}$.

从而 $A'Q \parallel AP$.

因此 $\angle A'QB' = \angle APB = 90°$.

即 Q 在以 $A'B'$ 为直径的含 C 点的半圆上.

于是以 $A'B'$ 为直径的含 C 点的半圆就是所求的轨迹.



[解 2] 连结 AC、BC,在 AP 上取点 M,使 $AM = BP$, 于是 $\triangle ACM \cong \triangle BCP$. 从而知 $\triangle CMP$ 为等腰直角三角形.

显然有 $PM = PA - PB$, $PQ = \frac{1}{2}PM$,

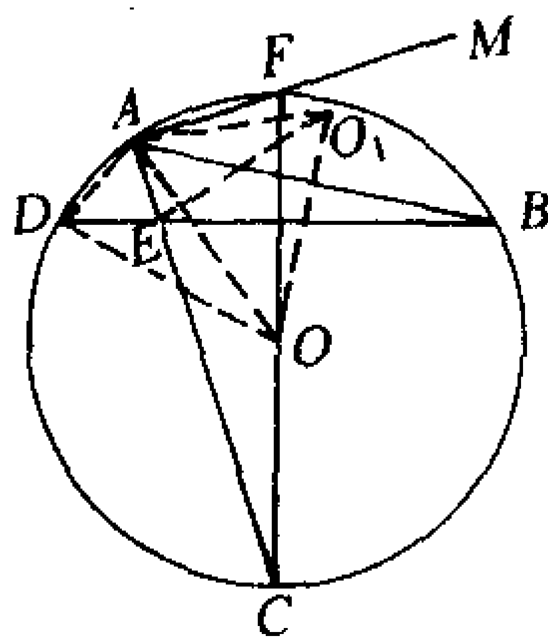
因此有 $CQ : CP = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

由对称性知当 P 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上时亦有同样的结果.

由位似的性质即知,所求的轨迹是以 C 为位似中心,以 $k = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 为位似比与半圆 $\overset{\frown}{ACB}$ 位似的半圆 $\overset{\frown}{A'CB'}$(如图所示).

10·19 AC 是 $\odot O$ 的一条定弦,但不是直径,BD 是一条动弦且垂直于 OC,D 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上,如果 BD 交 AC 于 E. 求:$\triangle ABE$ 的外心的轨迹.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991 年)



[解] 设 $\triangle ABE$ 的外心为 O_1.

连结 O_1O、O_1A、O_1E、OA、OD、AD.

则 $\angle AOD = 2\angle B = \angle AO_1E$.

于是 $\triangle AOD \backsim \triangle AO_1E$.

有 $\frac{AD}{AE} = \frac{AO}{AO_1}$, 且 $\angle DAO = \angle EAO_1$.

$\therefore$ $\angle DAE = \angle OAO_1$,

则 $\triangle ADE \backsim \triangle AOO_1$.

因此 $\angle AO_1O = \angle AED = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$ 的度数为定值.

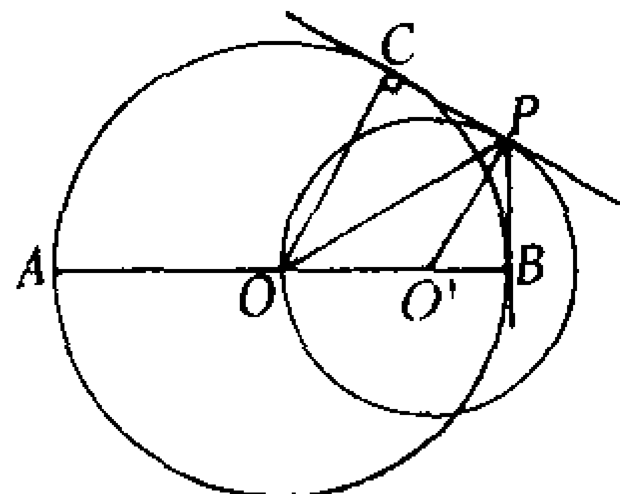
易知 O_1 一定在 CO 的右侧. 作 $AM \perp AC$,则 AF 过直径 FC 的端点下.

因此,$\triangle ABE$ 的外心的轨迹是以 AO 为弦,所含圆周角的度数等于 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 的度数,且夹在 O 与 AM 之间的一段弧.

10·20　AB 是一个圆心为 O 的定圆的直径，另一个动圆的圆心在直线 AB 上，它过点 O 且交定圆于两点，两圆的公切线在动圆上的切点为 P. 求：点 P 的轨迹.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）

[解]　设动圆的圆心为 O'. $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的公切线切 $\odot O$ 于点 C.



$\because$　$OC \perp CP$，$O'P \perp CP$.

$\therefore$　$OC // O'P$，且　$\angle COP = \angle OPO'$.

又 $\because$　$\angle OPO' = \angle O'OP$，

$\therefore$　$\angle COP = \angle O'OP$.

再由　$OC = OB$，$OP = OP$，$\therefore$　$\triangle PCO \cong \triangle PBO$.

于是　$\angle PBO = 90°$.

因此，所求的点 P 的轨迹是过 A、B 两点且与 AB 垂直的两条直线，但应去掉 A、B 两点.

10·21　如果 A 与 B 是给定圆周上的两个定点，又设 AB 不为直径，XY 为同圆内的一条变动的直径，试判定（并证明）AX 与 BY 交点的轨迹.

（第 5 届美国数学奥林匹克，1976 年）

[解]　设 P 和 P' 分别表示 AX 和 BY 在圆外或圆内的交点（如图）.

由于 XY 是圆的直径，则　$\angle PAY = 90°$.

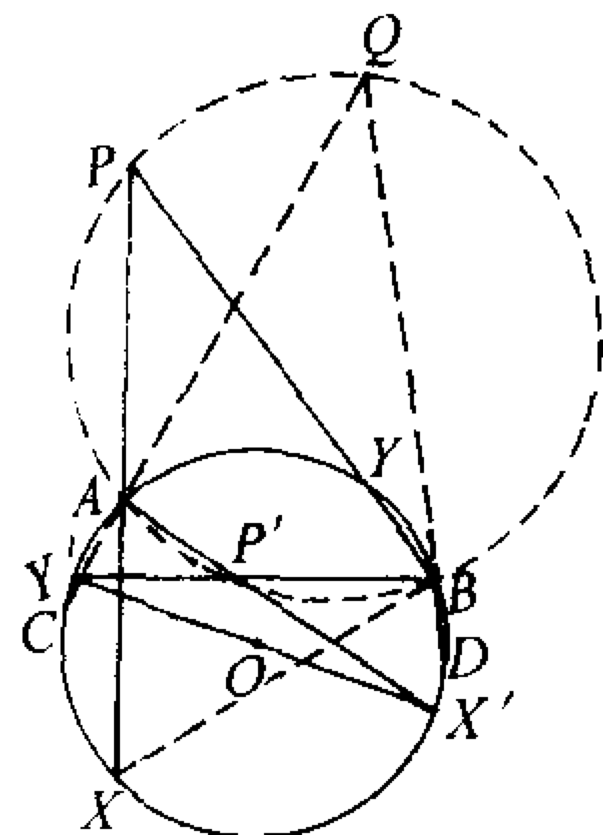
又　$\angle AYP = \angle AXB = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数，

$\therefore$　$\angle P = 90° - \angle AXB$ 是一个定值.

又 $\because$　$\angle AP'Y' + \angle AY'B = 90°$，

而由　$\angle AP'Y' = 90° - \angle AY'B$，

有　$\angle AP'B = 180° - \angle AP'Y'$
$= 90° + \angle AY'B$
$= 90° + \angle AXB$



于是　$\angle APB + \angle AP'B = 180°$.

从而　A、B、P 和 P' 在同一个圆周上.

设　A、B、P 和 P' 所在圆的半径为 R，则

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle P}=\frac{AB}{2\sin(90^\circ-\angle AXB)}=\frac{AB}{2\cos\angle AXB}.$$

即 AX 和 BY 的交点在以 AB 为弦，半径为 $\frac{AB}{2\cos\angle AXB}$ 的圆上.

反之，在以 AB 为弦，半径为 $\frac{AB}{2\cos\angle AXB}$ 的圆上任取一点 Q，连 QA、QB，分别交圆 O 于 C、D.

则 $\angle AQD=\angle APB$，且 $\angle ADQ=\angle AYP=90^\circ-\angle APB$，

$\therefore\ \angle ADQ+\angle AQD=90^\circ$. 即 $\angle DAC=90^\circ$.

因此 CD 为圆 O 的直径.

由以上，AX 与 BY 交点的轨迹是通过 A、B 两点，且以 $R=\frac{AB}{2\cos\angle AXB}$ 为半径的圆.

10·22 考虑在同一平面上半径为 R 与 $r(R>r)$ 的两个同心圆，设 P 是小圆周上的一个定点，B 是大圆周上的一个动点，直线 BP 与大圆周相交于另外一点 C，过点 P 且与 BP 垂直的直线 l 与小圆周相交于另一点 A（如果 l 与小圆相切于 P，则 $A=P$）.(1)求：表达式 $BC^2+CA^2+AB^2$ 所取值的集合.(2)求：线段 AB 中点的轨迹.

（第 29 届国际数学奥林匹克，1988 年）

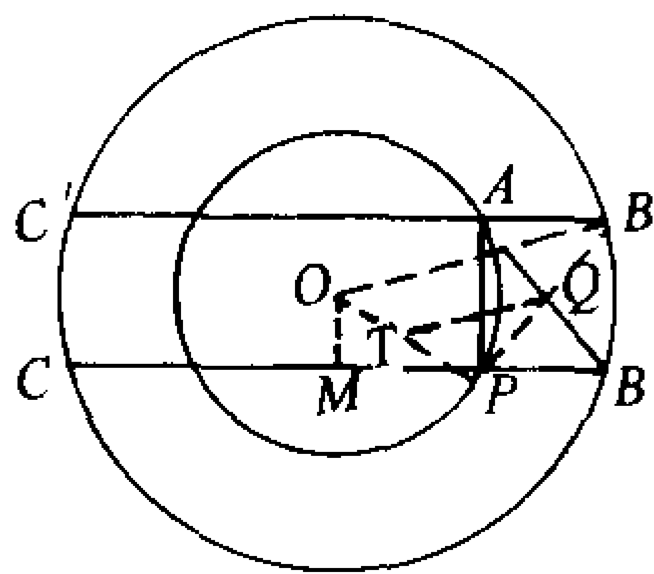
[解] (1)设两个圆的圆心为 O，过 O 作 $OM\perp BC$ 于 M.

设 $AP=2t$，则 $OM=t$.

且 $BC=2BM=2\sqrt{R^2-t^2}$,

及 $PM=\sqrt{r^2-t^2}$.

$$\begin{aligned}BP^2+CP^2&=(BM-PM)^2+(BM+PM)^2\\&=2(BM^2+PM^2)=2(R^2-t^2)+2(r^2-t^2)\\&=2(R^2+r^2)-4t^2.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore\ &BC^2+CA^2+AB^2\\&=BC^2+(PC^2+PA^2)+(PB^2+PA^2)\\&=BC^2+(BP^2+CP^2)+2PA^2\\&=4(R^2-t^2)+2(R^2+r^2)-4t^2+8t^2\\&=6R^2+2r^2.\end{aligned}$$

这是一个常数，与 B 的位置无关.（即使在

$A=P$ 的特殊情况下,表达式 $BC^2+CA^2+AB^2$ 也取此值.)

所以 $BC^2+CA^2+AB^2$ 的取值集合为 $\{6R^2+2r^2\}$.

(2)下面求 AB 中点的轨迹.

过 A 作直线平行于 CB,交大圆周于 C'、B'.

这时易见,$PBB'A$ 为一矩形,所以线段 AB 的中点也是线段 PB' 的中点.当 B 在大圆周上变动一周时,B' 也在大圆周上变动一周.

连 OB'、OP、PB',设 AB 与 PB' 的中点为 Q,OP 的中点为 T,则 T 为定点,$TQ=\frac{1}{2}OB'=\frac{1}{2}R$.

所以 线段 AB 的中点 Q 的轨迹是以线段 OP 的中点 T 为圆心,$\frac{1}{2}R$ 为半径的一个圆周.

10·23 在一个平面中,C 为一个圆周,直线 L 是圆周的一条切线,M 为 L 上一点,试求出具有如下性质的所有点 P 的集合:在直线 L 上存在两个点 Q 和 R,使得 M 是线段 QR 的中点,且 C 是 $\triangle PQR$ 的内切圆.

(第 33 届国际数学奥林匹克,1992 年)

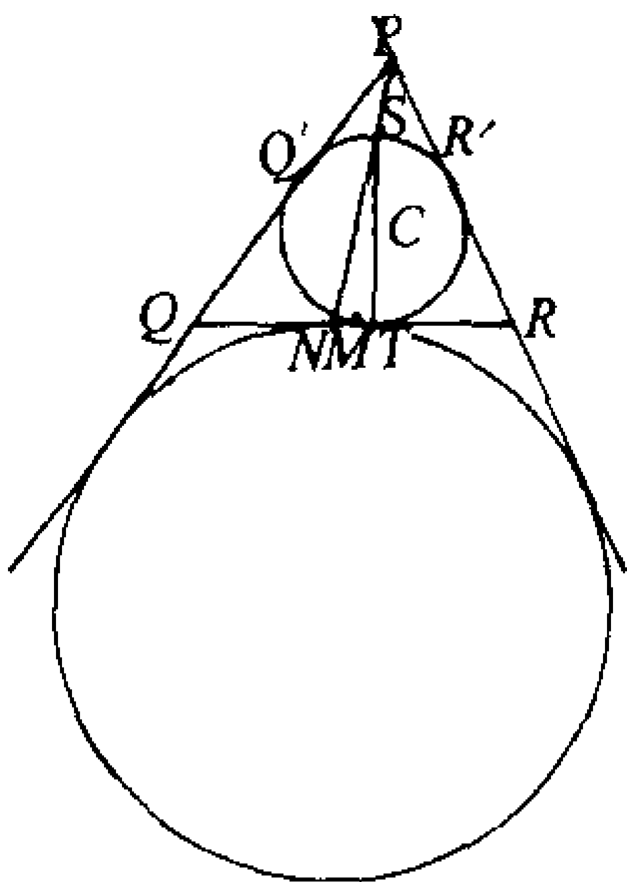
[解] 设⊙C 切直线 L 于点 T.

TS 为直径.过 S 作直线平行于 RQ 分别交 PR 于 R',交 PQ 于 Q',则 $R'Q'$ 切圆 C 于 S.

显然,$\triangle PQ'R'$ 与 $\triangle PQR$ 位似,P 为位似中点.

由于⊙C 为 $\triangle PQ'R'$ 的旁切圆,所以在上述位似变换下,⊙C 变为 $\triangle PQR$ 的旁切圆,PS 与直线 L 的交点 N 为旁切圆与 QR 的切点.

设 $PQ=c$, $PR=b$, $QR=a$, $s=\frac{a+b+c}{2}$.



所以 $QN=RT=s-c$. $NM=MT$.

于是在直线上取点 N,使 $NM=MT$,过 N,S 作直线,则 P 在直线 NS 上,从而点 P 的轨迹为直线 NS 的一部分:

以 S 为端点不含点 N 的射线(点 S 除外).

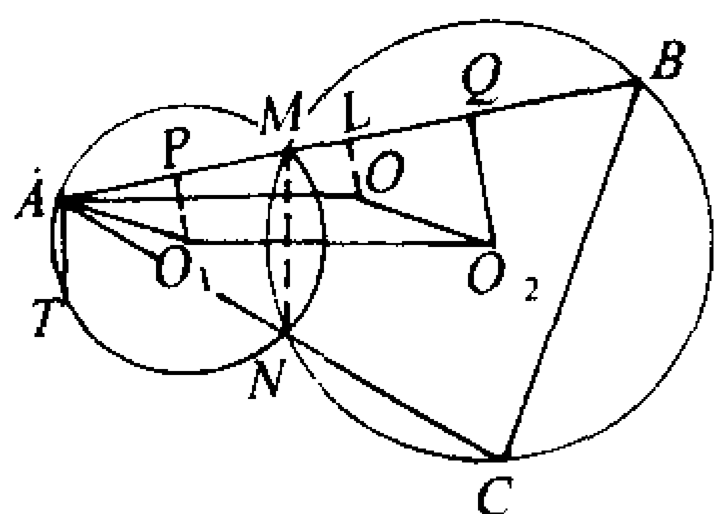
反之,设 P 在上述射线上,过 P 作⊙C 的切

线交直线 L 于 R，在 L 上取 Q，使 $QM=MR$，过 Q 作$\odot C$ 的切线交 PR 于 P'，则可以证明点 P'与点 P 重合.

所以点 P 满足条件.

10·24　圆心 O_1、O_2 相距为 l 的两圆交于 M、N 两点. A 为$\odot O_1$ 上(异于 M、N)的一点，引直线 AM、AN 分别交$\odot O_2$ 于 B、C. (1)求证$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 l. (2)如果 A 遍历$\odot O_1$ 的周界(M、N 除外)，求：$\triangle ABC$ 外心的轨迹.

(第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年)



［证］ (1)设 O 为$\triangle ABC$ 的外心，AO 为其半径，过 A 引$\odot O$ 的切线 AT，则

$\angle TAC=\angle ABC=\angle ANM$,

$\therefore\ AT /\!/ MN$.

而　$AT\perp AO$，$MN\perp O_1O_2$.

$\therefore\ AO /\!/ O_1O_2$(含 AO 与 O_1O_2 所在直线重合之情况)

分别过 O、O_1、O_2 引 AB 的垂线，垂足依次为 L、P、Q，

于是　$AL=\dfrac{1}{2}AB$，$PQ=PM+MQ=\dfrac{1}{2}(AM+MB)=\dfrac{1}{2}AB$.

设 AO 与 AB 的夹角为 α，则

$$AO=\frac{AL}{\cos\alpha}=\frac{2AB}{\cos\alpha}=\frac{PQ}{\cos\alpha}=O_1O_2=l.$$

(2)由上述证明得 $O_2O=AO_1=\odot O_1$ 的半径(定值). 所以对圆周 O_1 上除 M、N 之外的任意点 A，点 O 在以 O_2 为圆心，$\odot O_1$ 的半径长为半径的圆上，设点 M、N 分别沿$\overrightarrow{O_1O_2}$方向平移$|O_1O_2|$个单位到 M、N. 那么$\triangle ABC$ 的外心的轨迹为以 O_2 为圆心、$\odot O_1$ 的半径长为半径的圆周除去 M、N 两个点.

10·25　在直线 d 上顺次取定 A、B、C 三点，$AB=4BC$，动点 M 在 d 的过点 C 的垂线上. MT_1、MT_2 为以 A 为中心，AB 为半径的圆的切线，试求：$\triangle MT_1T_2$ 的垂心的轨迹.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年)

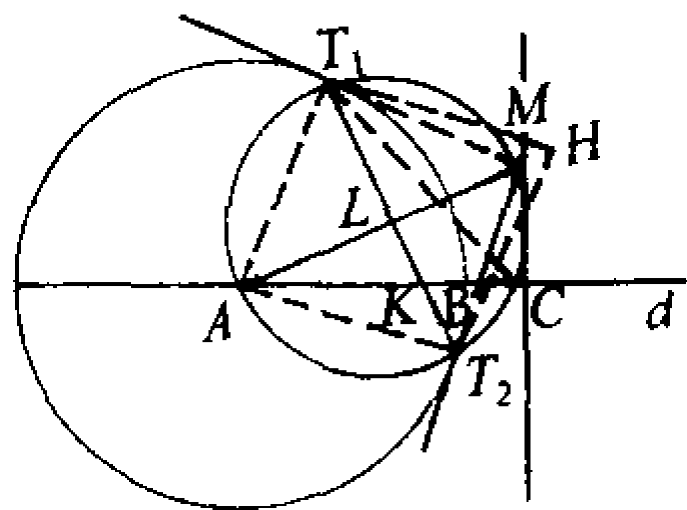
［解］ 由 MT_1、MT_2 为$\odot A$ 的切线，$MC\perp$直线 d，则 T_1、T_2、C 在以 AM 为直径的圆上.

设 T_1T_2 交 AC 于 K,则由

$\angle AT_1T_2=\angle AT_2T_1=\angle ACT_1$,

可得 $\triangle AT_1K \backsim \triangle ACT_1$,

$\therefore \quad AK=\dfrac{AT_1^2}{AC}=\dfrac{AB^2}{AC}=\dfrac{4}{5}AB.$



所以 K 为 d 上与 M 的位置无关的定点.

如果 H 是$\triangle MT_1T_2$ 的垂心,则四边形 AT_1HT_2 是菱形,它的中心 L 是$\angle T_1AT_2$ 的平分线 AM 与 T_1T_2 的交点. L 在以 AK 为直径的圆上,因此 H 在一个以 A 为位似中心,相似比为$\dfrac{1}{2}$的圆上,即在以 K 为圆心,以 KA 为半径的圆 Γ 上.

反之,对$\odot\Gamma$ 上每一点 $H\neq A$, AH 与 d 的过点 C 的垂线交于点 M,由此确定的$\triangle MT_1T_2$ 必以 H 为垂心.

10·26 给定锐角 θ 和相内切的两个圆,过切点 A 作定直线 l(不过圆心)交外圆于另一点 B.设点 M 在外圆优弧上运动, MA 与内圆的另一交点为 N, P 是射线 MB 上的点,使得$\angle MPN=\theta$.试求:点 P 的轨迹.

(中国国家集训队选拔考试,1995 年)

[解 1] 当动点 M 在大圆优弧的不同部位时,相应的图形略有差异,但可统一进行论证.

将直线 l 与内圆的另一个交点记为 C,连结 NC.过 A 和 B 分别作外圆的切线交于点 D.

$\because \quad \angle DAB=\angle AMB=\angle ANC, \quad \therefore \quad MB /\!/ NC.$

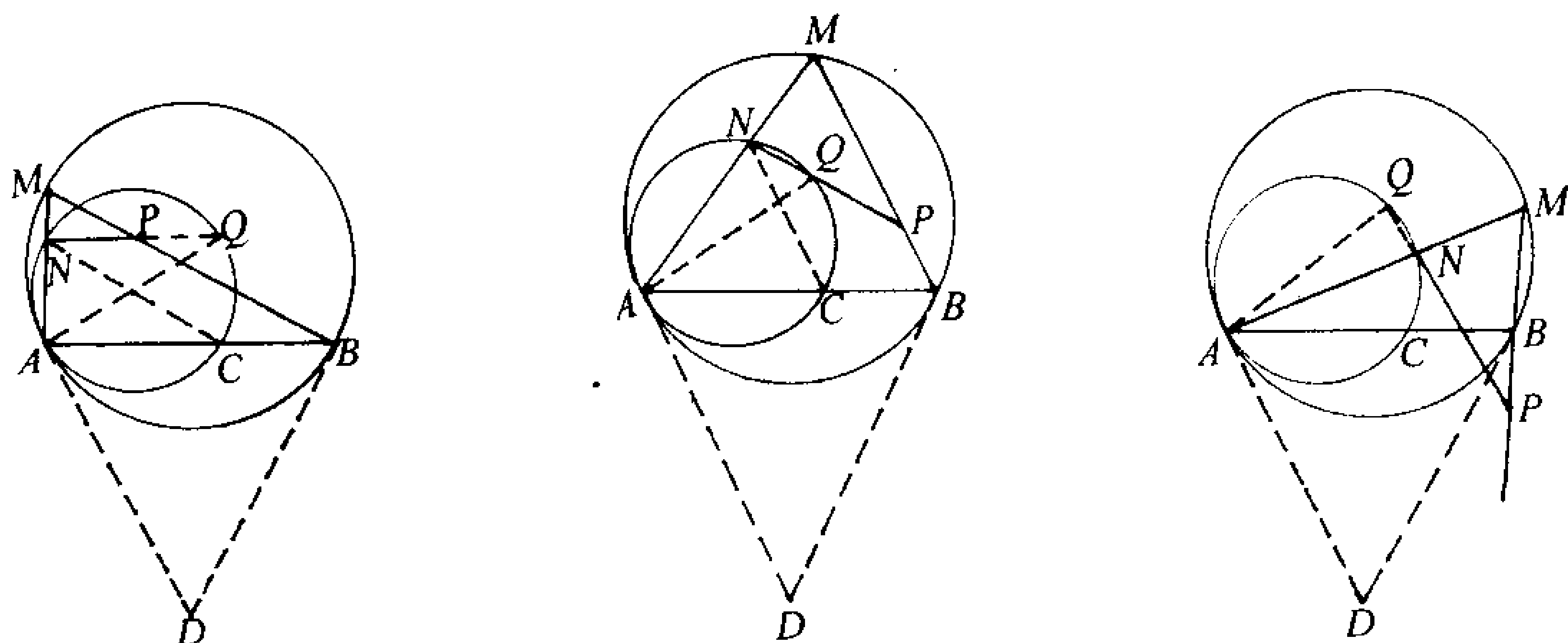
$\therefore \quad \angle CNP=\angle MPN=\theta.$

设直线 PN 与内圆的另一交点是 Q,则 A、C、N、Q 四点共圆.连结 AQ.

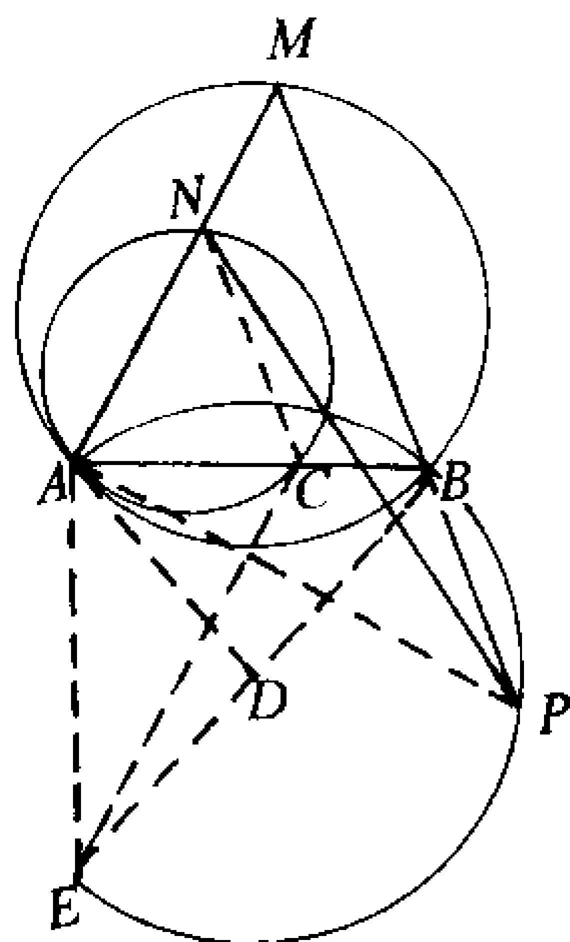
$\therefore \quad \angle CAQ=\angle CNP=\angle MPN=\theta.$

$\therefore \quad A$、B、Q、P 四点共圆.

可见,点 Q 是内圆上的定点,使得$\angle CAQ=\theta$,并且点 P 在$\triangle ABQ$ 的外接圆上.因此,可以按如下方式作出点 P 的轨迹:在内圆被直线 l 截得的优弧上取点 Q,使得$\angle BAQ=\theta$.然后作$\triangle ABQ$ 的外接圆,则此



圆在$\angle ABD$之外的部分圆弧(不包括端点)即为所求的轨迹.



[解2] 过A和B分别作外圆的切线交于点D,设直线l与内圆的另一交点是C,连结NC,在切线BD上取点E,使得$\angle BEC=\theta$.连结CE、AE、AP(如图).

$\because\quad \angle NMP=\angle CBE,$

$\angle MPN=\angle BEC=\theta,$

$\therefore\quad \triangle MNP\backsim\triangle BCE.$

$$\therefore\quad \frac{MN}{MP}=\frac{BC}{BE}. \qquad ①$$

$\because\quad \angle M=\angle BAD=\angle ANC,$

$\therefore\quad NC/\!/MB.$

$$\therefore\quad \frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BC}. \qquad ②$$

将①和②两端分别相乘,得到

$$\frac{AM}{MP}=\frac{AB}{BE}.$$

又$\because\quad \angle AMP=\angle ABE$,$\therefore\quad \triangle AMP\backsim\triangle ABE.$

$\triangle ABE$是一个完全确定的三角形.因此,$\triangle AMP$的各角及各边之比也是完全确定的.因而点P可由点M经过绕点A的旋转相似变换而得到,即

$$\angle PAM=\angle EAB(定角),$$

$$\frac{AP}{AM}=\frac{AD}{AB}(\text{定值}).$$

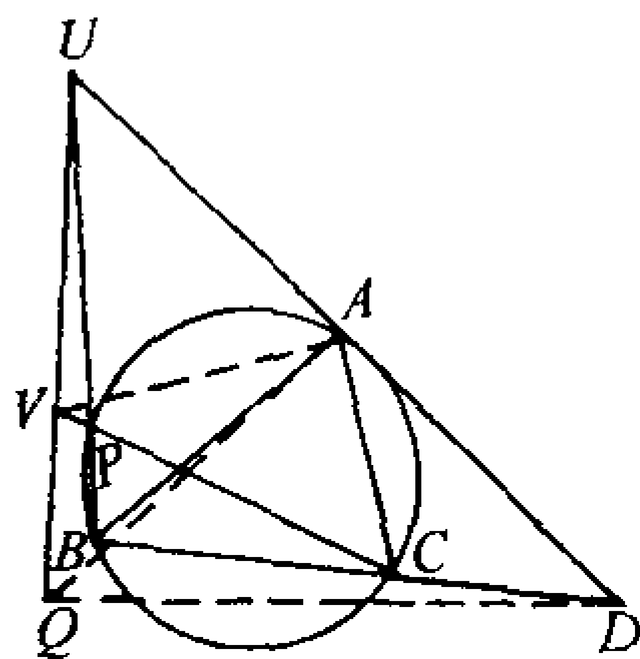
可见,将所给的外圆的优弧作相应的旋转相似变换即得点 P 的轨迹.

综上所述,点 P 的轨迹是以 AE 为弦,张角等于$\angle ABD$(定角)的一段圆弧(不包括端点).

10·27　给定 $\lambda>1$,设 P 是$\triangle ABC$ 的外接圆的$\overparen{BAC}$上的一个动点.在射线 BP 和 CP 上分别取点 U 和 V,使得 $BU=\lambda BA$, $CV=\lambda CA$,在射线 UV 上取点 Q,使得 $UQ=\lambda UV$,求:点 Q 的轨迹.

(中国国家集训队选拔考试,1997 年)

[解 1]　在 BC 延长线上取点 D,使 $BD=\lambda BC$.连结 AD、AU、AV、AQ.



$\because$　$BU=\lambda BA$, $CV=\lambda CA$,

$\angle ACV=\angle ABU$,

$\therefore$　$\triangle AVC\backsim\triangle AUB$.

$\therefore$　$\frac{AU}{AV}=\frac{AB}{AC}$, $\angle VAC=\angle UAB$.

$\therefore$　$\angle UAV=\angle BAC$.

$\therefore$　$\triangle AUV\backsim\triangle ABC$.

$\because$　$UQ=\lambda UV$, $BD=\lambda BC$.

$\therefore$　$\triangle AUQ\backsim\triangle ABD$, $\triangle AVQ\backsim\triangle ACD$.

$\therefore$　$\triangle AQD\backsim\triangle AVC$.　$\therefore$　$\frac{QD}{VC}=\frac{AD}{AC}$.

$\therefore$　$QD=\frac{VC\cdot AD}{AC}=\lambda AD$.

$\therefore$　点 Q 位于以 D 为心,λAD 为半径的圆上.

当点 P 运动到点 B 时,BP 化为过点 B 的切线,CP 化为 CB.与此对应地可得到点 Q'.类似地,当点 P 运动到点 C 时又可得到点 Q''.易知,点 Q 的轨迹即为上述圆的以 Q' 和 Q'' 为端点的圆弧.

[解 2]　将图形所在的平面视为复平面,仍用表示点的字母来表示相应的复数.

$\because$　$\angle ACV=\angle ABU$,

$\therefore$　$\frac{U-B}{A-B}=\frac{V-C}{A-C}=W$, $|W|=\lambda$.

$\therefore \quad U=(A-B)W+B,\ \ V=(A-C)W+C.$

$\because \quad Q-U=\lambda(V-U),$

$$\begin{aligned}\therefore \quad Q &= \lambda(V-U)+U=\lambda V+(1-\lambda)U \\ &= \lambda[(A-C)W+C]+(1-\lambda)[(A-B)W+B] \\ &= \lambda C+(1-\lambda)B+W[\lambda(A-C)+(1-\lambda)(A-B)].\end{aligned}$$

$\therefore \quad Q-[\lambda C+(1-\lambda)B]=W[\lambda(A-C)+(1-\lambda)(A-B)].$

$\therefore \quad |Q-[\lambda C+(1-\lambda)B]|=\lambda|A-B+\lambda(B-C)|.$

易见,这是一个圆的方程,圆心为 $\lambda C+(1-\lambda)B$,即为 BC 延长线上的点 D,使得 $BD=\lambda BC$,半径为

$$\lambda|A-B+\lambda(B-C)|=\lambda|A-[B+\lambda(C-B)]|=\lambda|A-D|,$$

即为 λAD. 这表明点 Q 的轨迹是以点 D 为心,λAD 为半径的圆上的一段弧,端点的确定同解 1.

第十一章　作图问题

(一)求作点

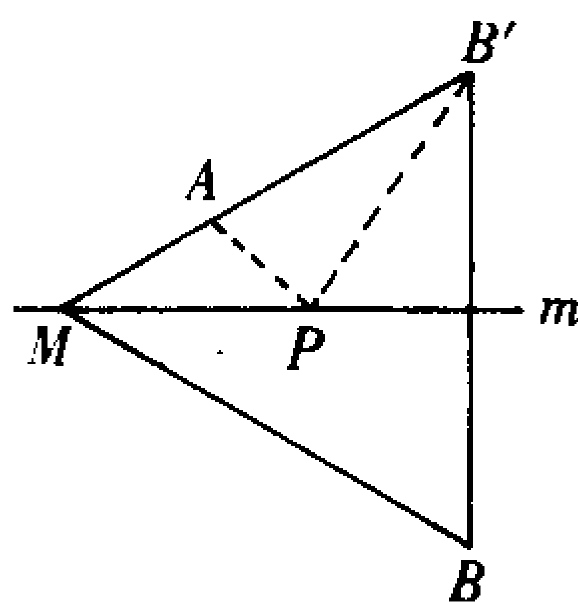
11·1　已知:平面上一条直线 m 及这直线两侧的两个点 A、B.在直线 m 上求一点 M,使它到点 A、B 的距离之差最大.

(波兰数学奥林匹克,1954 年)

[解]　设点 B' 与点 B 关于直线 m 对称.

如果 P 是直线 m 上的任意一点,那么

$$|AP-BP|=|AP-BP'|\leqslant AB'.$$



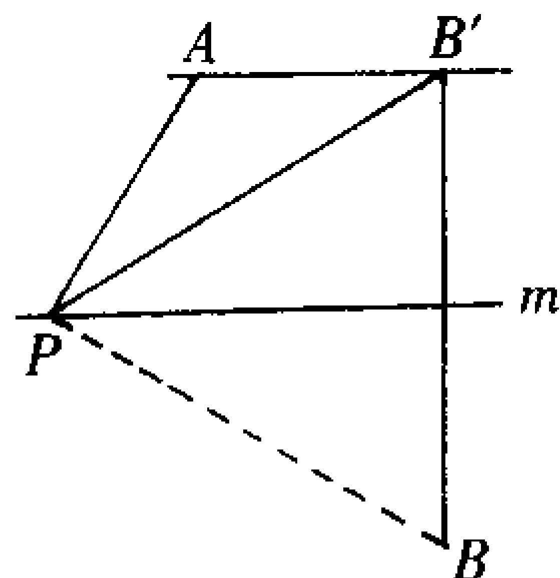
由点 A 和点 B 相对于直线 m 的不同位置,有下列三种可能情形:

(1)点 A 和点 B 与直线 m 的距离不相等,那么点 B' 与点 A 互异,设直线 AB' 与直线 m 相交于点 m.

从而　$|AM-B'M|=AB'$,

故　$|AM-BM|=AB'$.

而对于直线 m 上任何异于 M 的点 P,则有 $|AP-B'P|<AB'$.



所以点 M 是本题的惟一解.

(2)点 A 和点 B 与直线 m 等距离,但它们不关于直线 m 对称.

这时,点 B' 与点 A 互异,直线 AB' 平行于直线

m,这时对直线 m 上任何一点 P 都有

$$|AP-B'P|=|AP-BP|<AB'.$$

于是　此时无解.

(3)点 A 和点 B 关于直线 m 对称,则点 B' 和点 A 重合.

这时,直线 m 上任一点 P 都适合等式 $AP-BP=0$.

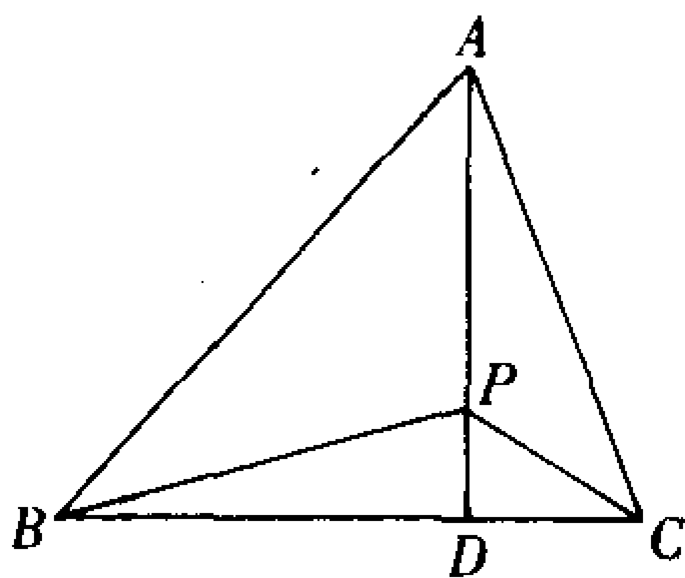
因此,直线 m 上任何一点都是问题的解.

11·2　已知:锐角$\triangle ABC$,(1)若 AD 是 BC 上的高,试在 AD 上求一点 P,使得$\triangle APB$、$\triangle BPC$、$\triangle CPA$ 都是钝角三角形;(2)试在$\triangle ABC$ 的内部求出所有的点 Z,使得$\triangle AZB$、$\triangle BZC$、$\triangle CZA$ 都是钝角三角形.

(中国广州、福州、重庆、武汉初中数学联赛,1986 年)

[**解**]　(1)不妨设 $BD\geqslant CD$,在 AD 上取 $DP<CD$,连结 BP、CP,在$\triangle PDC$ 中,

由于　$\angle PDC=90°$,而　$\angle DPC>\angle DCP$,可知　$\angle DPC>45°$.



同理　$\angle BPD>45°$. 故　$\angle BPC>90°$.

即　$\triangle BPC$ 是钝角三角形.

又∵　$\angle APC=180°-\angle DPC>90°$,

∴　$\triangle APC$ 是钝角三角形.

同理可证　$\triangle APB$ 是锐角三角形.

(2)以 AC 为直径作圆与 BC、AB 交于 D 和 F,易知 F 是 AB 边上的高的垂足.

同理,分别以 AB、BC 为直径作半圆分别与其他两边交于垂足 D、E 及 E、F,则三劣弧$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FD}$所围成的封闭图形的点(不包括边界)即为所求.

证明如下:因 Z 是半圆 BFC 内的点.连 BZ 交半圆周 BFC 于一点 T,连 CT,则$\angle BTC=90°$.

而　$\angle BZC>\angle BTC$.　∴　$\triangle BZC$ 是钝角三角形.

同理可证$\triangle CZA$、$\triangle AZB$ 也是钝角三角形.

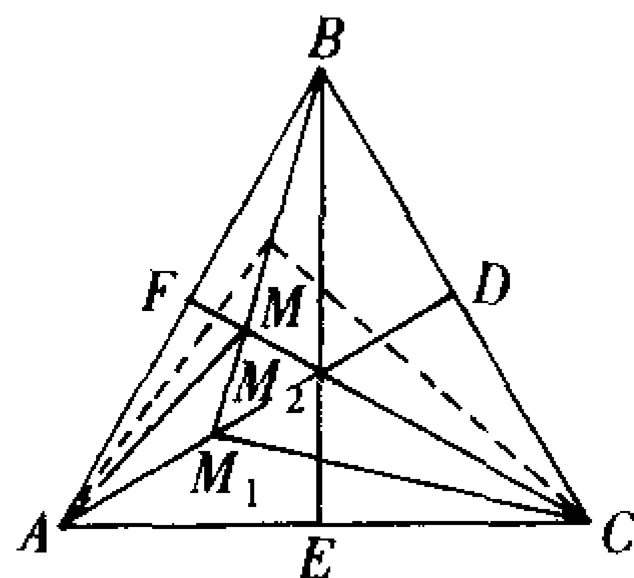
反之,若点 Z 满足条件,则$\triangle AZC$ 是钝角三角形,从而 Z 在半圆 AC 内部.

同理可证点 Z 也在半圆 AB、BC 内,因此点 Z 一定在上述封闭图形内.

11.3 求等边$\triangle ABC$内满足$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=90°$的点$M$的几何位置.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978年)

[解] 等边$\triangle ABC$的高上的每个点都满足题目的条件.



设M_1是高AD上的一个点,则

$\angle M_1AB+\angle M_1BC+\angle M_1CA$

$=\angle M_1AB+\angle M_1BC+\angle M_1BA$

$=\angle M_1AB+\angle ABC$

$=90°$.

因此,等边三角形ABC上的每边上的高上的每一点都符合题目要求.

下面证明,其他的点不合条件.

否则,设点M满足题目的条件,但不在任意一条高上,则直线BM分别与高AD和CF交于M_1和M_2.

如果三个点M、M_1、M_2都满足条件,则应有

$\angle MAM_1=\angle MCM_1$, $\angle MAM_2=\angle MCM_2$.

但这时,点C关于直线BM的对称点C'将在$\triangle AMM_1$的外接圆周上,同时也在$\triangle AMM_2$的外接圆周上.因此这两个圆周同时过三个不同的点A、M、C'($C'\neq A$,因为直线BM不与边AC垂直),从而两圆重合,但这是不可能的,因为同一直线上的三点M、M_1、M_2不可能在一个圆上.

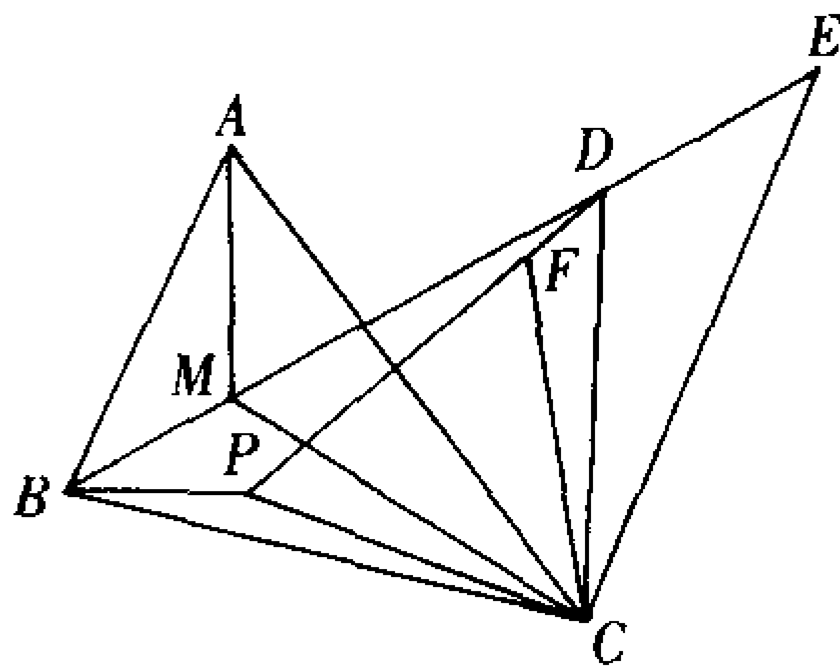
11.4 已知:一锐角三角形,试在这三角形中求一点,使这点到三个顶点的距离之和为最小.

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[解] 在锐角$\triangle ABC$中,取一点M,使

$\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$.

(该点叫费尔马点),我们证明M点到三顶点A、B、C的距离最小.



设P是$\triangle ABC$内异于M的一点.

作正三角形CPF和正三角形CMD,且使F与B在直线PC的异侧,D与B在直线MC的异侧.

由于 $\angle BMC=120^\circ$，所以 D 在直线 BM 上.

延长 BD 到 E,使 $DE=MA$.

又 $MC=CD$，$\angle AMC=\angle CDE=120^\circ$，则

$\triangle AMC\cong\triangle EDC$.

于是 $CE=CA$，$\angle ACM=\angle ECD$，$\angle ACE=\angle MCD=60^\circ$，

连 FE,则由于 $\angle ACP=\angle ECF=60^\circ-\angle ACF$，

且 $CA=CE$，$CP=CF$，

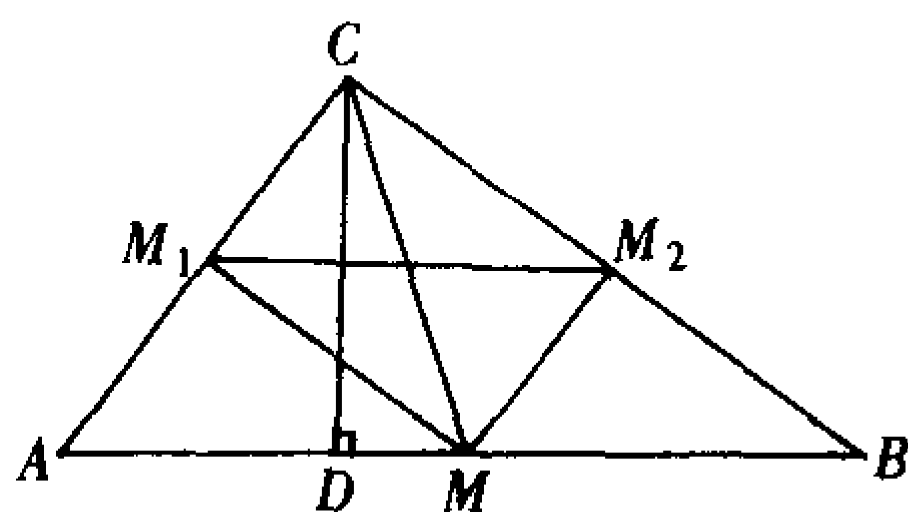
$\therefore$ $\triangle ACP\cong\triangle ECF$，$PA=FE$. 因而有

$MB+MC+MA=BE<PB+PF+FE=PA+PB+PC$.

因此 M 到三个顶点的距离最小.

11.5 已知:一个直角三角形,在它的斜边上求一点,使得这个点在两条直角边上的射影之间的距离最短.

(基辅数学奥林匹克,1976 年)



[解] 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$CD\perp AB$ 于D.

设 M 在AB 上,$MM_1\perp AC$ 于M_1,$MM_2\perp BC$ 于M_2,如图.

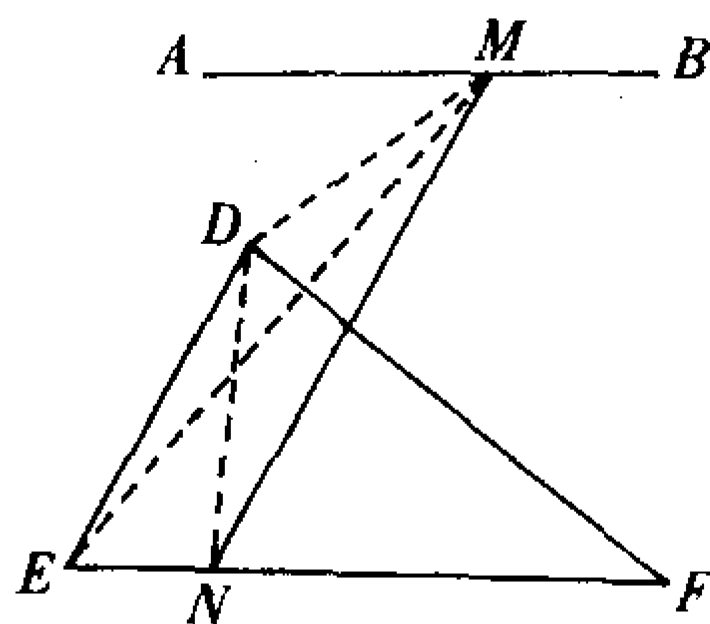
四边形 MM_1CM_2 是矩形,

今欲 $M_1M_2=MC$ 最短,由于 $MC\leqslant CD$,所以可取 M 点为D 点.

11.6 已知:直线 AB 和$\triangle DEF$,试在直线 AB 上找一点 M,使$\triangle MDE$ 的面积为$\triangle DEF$ 面积的四分之一(要求写出作法及证明,并保留作图痕迹).

(缙云杯数学邀请赛,1992 年)

[作法] 如图,



(1)四等分线段 EF,设和 E 相邻的四分点为N.

(2)过点 N 作直线平行于ED 与AB 交于点M.

(3)点 M 即为所求.

[证] 连 DN、ME、MD,因为 $MN\parallel DE$,所以 $S_{\triangle MDE}=S_{\triangle DEN}$.

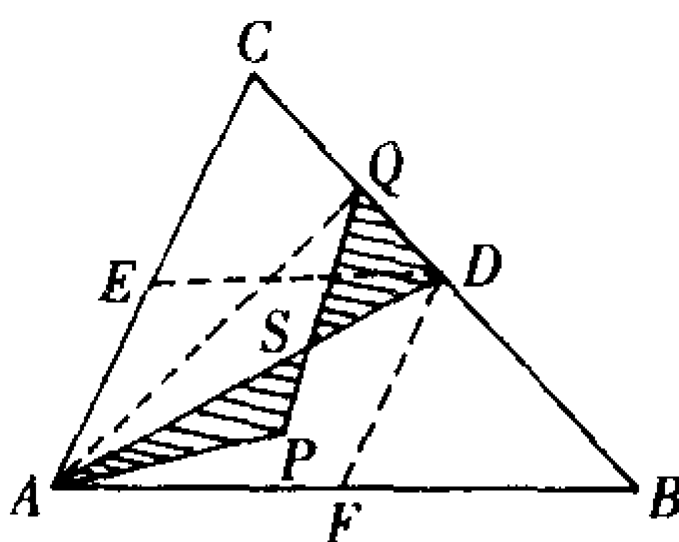
又　$EN=\frac{1}{4}EF$，故　$S_{\triangle DEN}=\frac{1}{4}S_{\triangle DEF}$.

所以　$S_{\triangle MDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle DEF}$，$M$ 符合要求.

11.7　已知：P 是$\triangle ABC$ 内部的一点，在$\triangle ABC$ 的边上求一点 Q，使折线 APQ 平分$\triangle ABC$ 的面积.

（波兰数学奥林匹克，1954 年）

［**解**］　我们来研究$\triangle APB$ 和$\triangle APC$.



（1）$\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 的面积都小于$\triangle ABC$ 的面积的一半.

取 BC、AC 和 AB 的中点 D、E 和 F，这时 P 点在平行四边形 $AFDE$ 内部.

如果点 P 在平行四边形 $AFDE$ 的对角线 AD 上，因为 AD 是$\triangle ABC$ 的中线，则 AD 平分$\triangle ABC$ 的面积，于是所求的点 Q 即为点 D.

现在设点 P 位于$\triangle AFD$ 或$\triangle AED$ 的内部，例如 P 在$\triangle AFD$ 的内部.

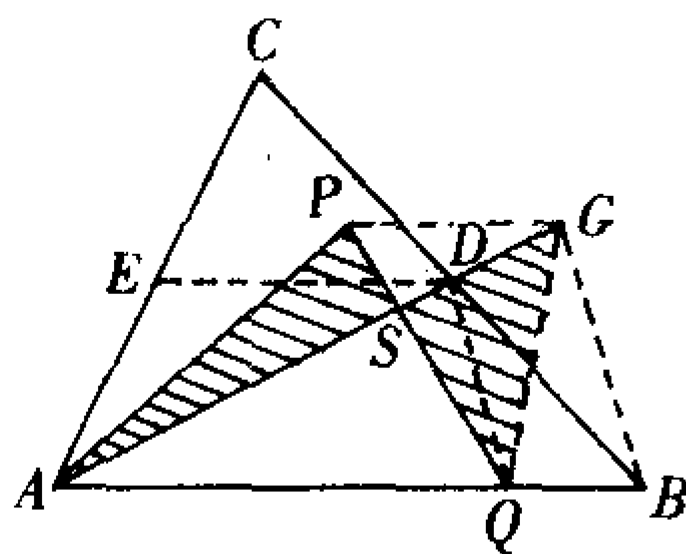
如果折线 APQ 符合题意，那么点 Q 在线段 CD 的内部，设线段 PQ 与 AD 交于点 S，那么四边形 $ABQP$ 的面积等于$\triangle ABD$ 的面积，所以 $S_{\triangle ASP}=S_{\triangle QSD}$.

于是　$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ADQ}$，$AQ/\!/PD$.

因此可以取过顶点 A 与直线 PD 平行的直线与 CD 的交点 Q，则 Q 为所求.

（2）$\triangle APB$ 和$\triangle APC$ 中的一个的面积等于$\triangle ABC$ 面积的一半，设 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则折线 APB 为所求.

（3）$\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 中的一个，例如$\triangle APB$ 的面积大于$\triangle ABC$ 面积的一半.



这是点 P 位于$\triangle CDE$ 的内部.

如果折线 APQ 适合题意，那么点 Q 落在 AB 边上，且不与顶点 A、B 重合.

设线段 PQ 与线段 AD 交于 S.

这时　$S_{\triangle AQP}=S_{\triangle ABD}$. 因而　$S_{\triangle ASP}=S_{SQBD}$.

过顶点 B 作直线与四边形 $SQBD$ 的对角线 QD 平行，这直线与直线 AD 交于 G，连 PG，

则　$S_{QQDG}=S_{\triangle QDB}$，于是　$S_{SQBD}=S_{\triangle SQG}$，$S_{\triangle APG}=S_{\triangle QPG}$，

因此　　$PG /\!/ AB$.

于是我们得到折线 APQ 的作法如下：

过 P 点作直线与 AB 平行，与 AD 延长线交于 G，连 BG，过 D 作直线 $DQ /\!/ BG$ 交 AB 于 Q. 这时

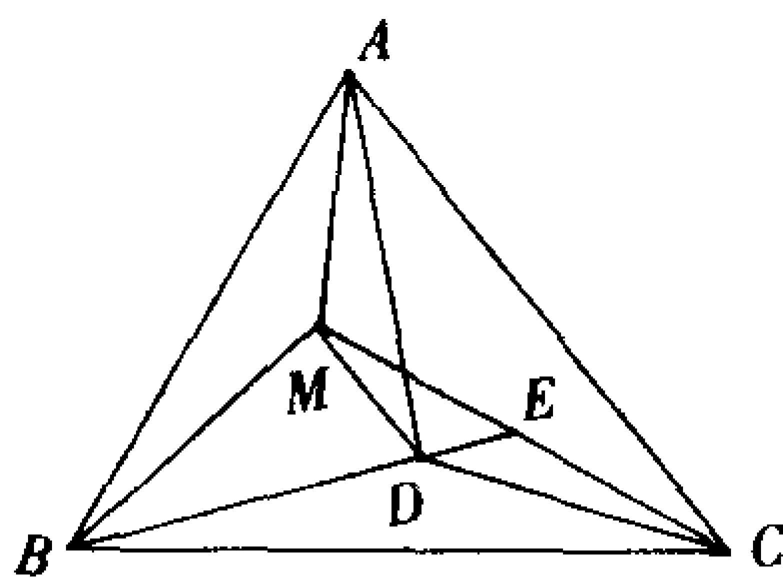
$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ASQ}+S_{\triangle APS}=S_{\triangle ASQ}+S_{\triangle SQG}=S_{\triangle ASQ}+S_{SQBD}$$

$$=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

11.8　给定了 A、B、C、D 四个点，试求一点 O，使它到四个点的距离之和最小.

（莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

[解]　分下面三种情况：



第 1 种情况：若 A、B、C、D 形成凸四边形，则两对角线的交点 O 即为所求.

第 2 种情况：若某一点在其他三点所形成的三角形内(上). 不失一般性，设 D 点在 $\triangle ABC$ 内，则 D 点即为所求的 O 点. 如图.

设 M 是 $\triangle ABC$ 内任一点，则 D 必在 $\triangle AMB$、$\triangle BMC$、$\triangle AMC$ 中之一，设 D 在 $\triangle BMC$ 内，延长 BD 与 MC 相交于 E.

$$MB+MC=MB+ME+EC.\ >BE+EC=BD+DE+EC$$
$$>BD+CD,$$

又　$MA+MD>AD$,

$\therefore$　$MA+MB+MC+MD>AD+BD+CD$.

第 3 种情况：如果 A、B、C、D 四点共线，不失一般性，假定 C、D 在 A、B 之间，则线段 CD 上任何一点 O 均为所求.

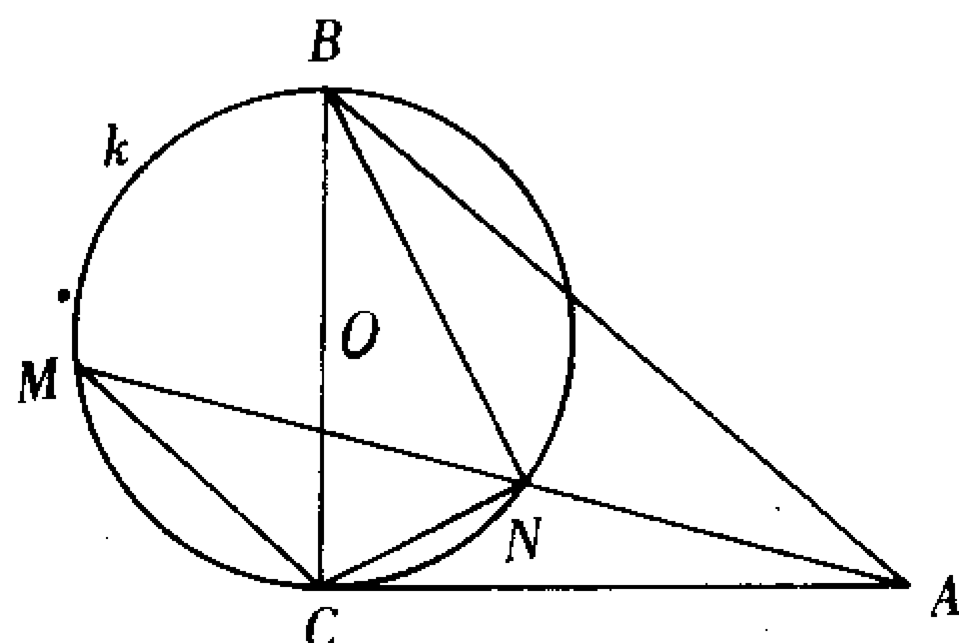
11.9　给定一个直角 $\triangle ABC$，在这个三角形内求一点 N，使 $\angle NBC$、$\angle NCA$、$\angle NAB$ 相等.

（匈牙利数学奥林匹克，1895 年）

[解] 若直角三角形 ABC 内的一点 N 符合题目要求,则

$\angle NBC=\angle NCA=\angle NAB$,

设$\angle ACB$ 为直角,则



$$\begin{aligned}\angle BNC&=180^\circ-\angle NBC-\angle NCB\\&=180^\circ-\angle NCA-\angle NCB\\&=90^\circ.\end{aligned}$$

因此,N 一定在 BC 为直径的圆 k 上,延长 AN 交圆 k 于 M,则有

$$\angle M=\angle NBC=\angle NAB,$$

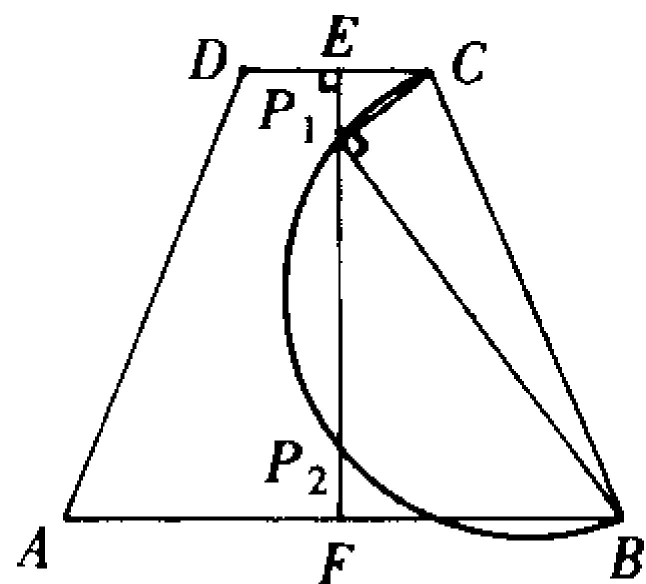
于是 $MC /\!/ AB$.

[作法] 以 BC 为直径作圆 k,过 C 作 $CM /\!/ AB$ 交圆 k 于 M,连 AM 交圆 k 于 N,不难证明,N 即为所求.

11.10 已知:一等腰梯形,它的两底和高分别为 a、b 和 h.(1)在梯形的对称轴上求作一点 P,使这三点对梯形的腰所张的视角为直角.(2)求 P 点到梯形两底边的距离.(3)在什么条件下,点 P 能够作出?

(第 2 届国际数学奥林匹克,1960 年)

[解] (1)以腰 BC 为直径作圆与等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴 EF 交于 P 点.



则由直径上的圆周角是直角可得$\angle BPC=90^\circ$,P 点即为所求.

(2)设 P 点到上底 CD 的距离 $PE=x_1$,到下底 AB 的距离 $PF_2=x_2$,则

$$x_1+x_2=EF=h, \qquad ①$$

又因为 $\angle PCE=\angle BPF$、$\triangle PCE$ 和$\triangle BPF$ 都是直角三角形,

$$\therefore\quad \triangle PCE\backsim\triangle BPF,\ 有\ \frac{PE}{BF}=\frac{CE}{PF},\ 即\ \frac{x_1}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{x_2},$$

或 $$x_1x_2=\frac{1}{4}ab. \qquad ②$$

由①、②可知,x_1 和 x_2 是方程

$$x^2-hx+\frac{1}{4}ab=0.$$

的两个根.

当 $h^2-ab\geqslant 0$ 时,方程的根为

$$x_1=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},\ x_2=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}.$$

于是,P 到梯形上、下底的距离分别为

$$PE=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},\ PF=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},$$

或 $$PE=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},\ PE=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}.$$

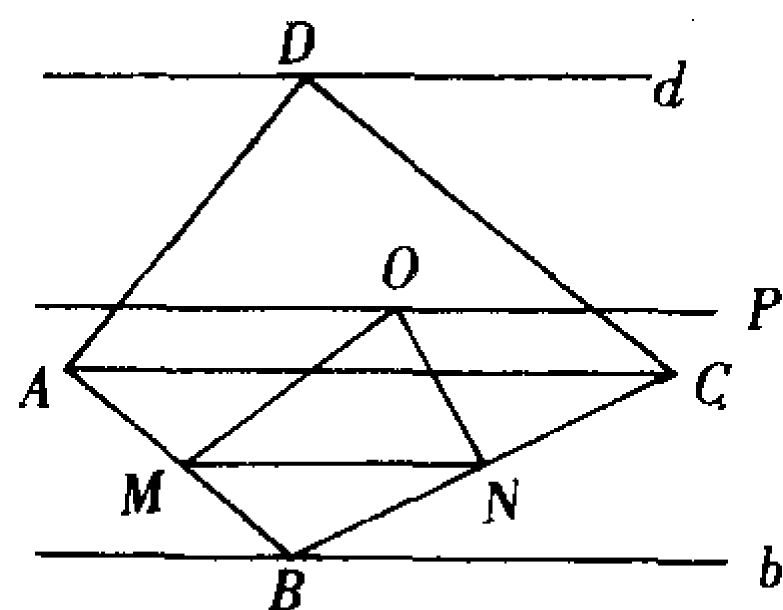
当且仅当 $h^2-ab=0$ 时,$PE=PF$,即 P 是 EF 的中点.

(3)由(2)可知,当 $h^2\geqslant ab$ 时,P 点可以作出,并且当 $h>ab$ 时,有两点 P_1、P_2;当 $h^2=ab$ 时,有一点.

当 $h^2<ab$ 时,P 点不能作出.

11.11 在已知凸四边形的内部求一点,使该点与四边形各边中点连线将四边形面积四等分.

(波兰数学奥林匹克,1961 年)



[解] 设已知凸四边形 $ABCD$,M 和 N 是边 AB 和 BC 的中点.

于是 $MN/\!/AC$,$MN=\frac{1}{2}AC$.

设 O 是满足题目要求的点,O 在四边形 $ABCD$ 的内部,

过点 B、O、D 作直线 b、p、d 平行于直线 AC.

设直线 b 和 d 之间的距离为 h、b 和 p 之间的距离为 h_1,则

$$S_{OMBN}=S_{\triangle BMN}+S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}MN\cdot h_1=\frac{1}{4}AC\cdot h_1.$$

$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot h.$$

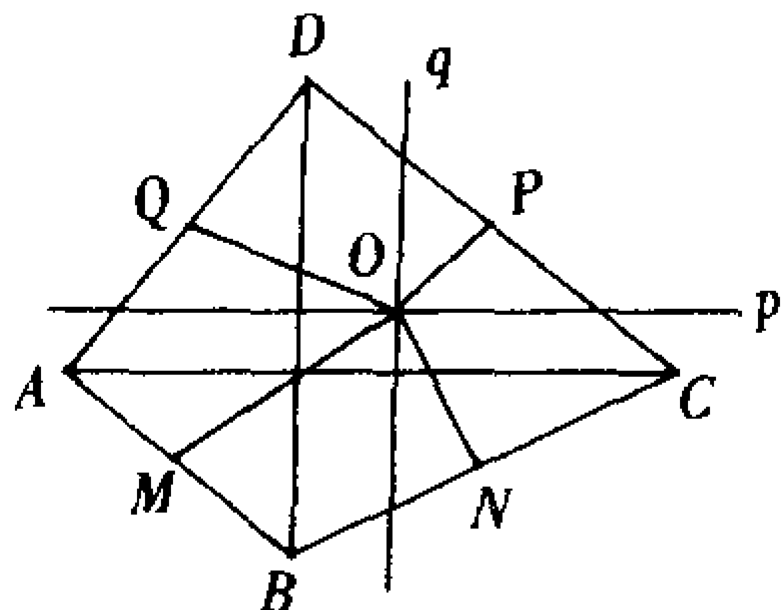
$$\because\quad S_{OMBN}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

有 $\frac{1}{4}AC\cdot h_1=\frac{1}{8}AC\cdot h$,则 $h_1=\frac{1}{2}h$.

于是直线 p 与直线 b 和 d 等距,因此直线 p 经过线段 BD 的中点.

即点 O 应当位于经过对角线 BD 的中点而且平行于对角线 AC 的直线 p 上.

同理可证,点 O 也应当位于经过对角线 AC 的中点,且平行于对角线 BD 的直线 q 上.



因此,作出直线 p、q,其交点就是所求的点 O.

设 $ABCD$ 各边中点为 M、N、P、Q.

因为直线 p、q 总是相交的,所以作图永远可行.

因为四边形 $ABCD$ 是凸的,所以平行四边形 $MNPQ$ 完全在四边形 $ABCD$ 的内部.

因为平行四边形 $MNPQ$ 的边长等于 AC 和 BD 的一半,所以对角线 AC 和 BD 的中点在这个平行四边形内部,

于是,直线 p、q 的交点 O 不仅在四边形 $ABCD$ 的内部,而且在平行四边形 $MNPQ$ 的内部.

线段 OM、ON、OP、OQ 将四边形 $ABCD$ 分划为四个四边形,由于

$$S_{OMBN}=\frac{1}{2}MN\cdot h_1=\frac{1}{8}AC\cdot h.$$

并同理可证 S_{OMBN}、S_{ONCP}、S_{OPDQ}、S_{OQAM} 都等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

因此,点 O 满足题目的一切要求,这样的点仅有一个.

11.12 给定$\triangle ABC$,试求一点,使它关于三角形三边所在直线的对称点都在三角形的外接圆上.

(莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

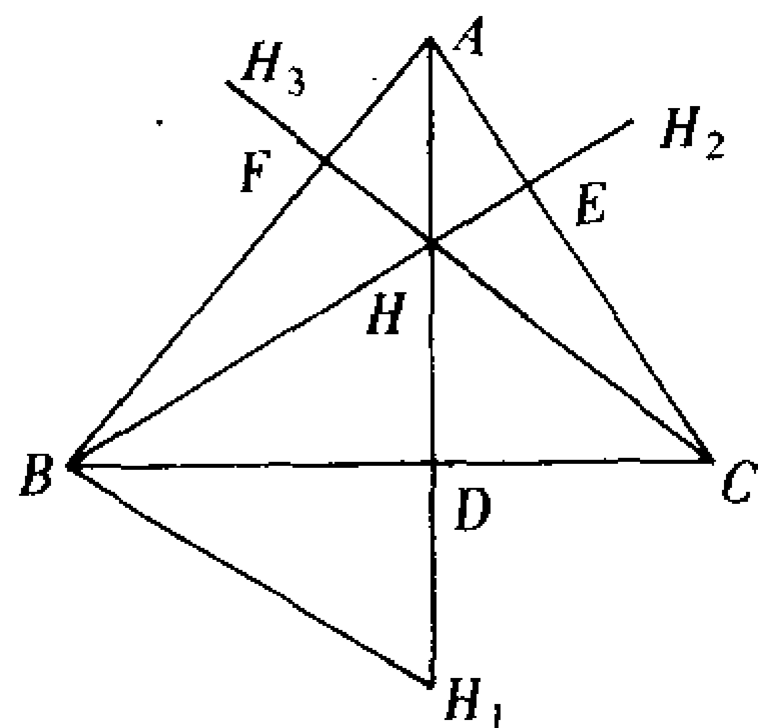
[解] 设 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条高线,H 是垂心,则垂心 H 即为所求的点.

[证] 设 H_1、H_2、H_3 分别为 H 关于三边的对称点.如图.

$\because$ H、D、C、E 四点共圆,

$\therefore$ $\angle ACB=\angle BHH_1=\angle BH_1A$,

$\therefore$ A、B、H_1、C 四点共圆.

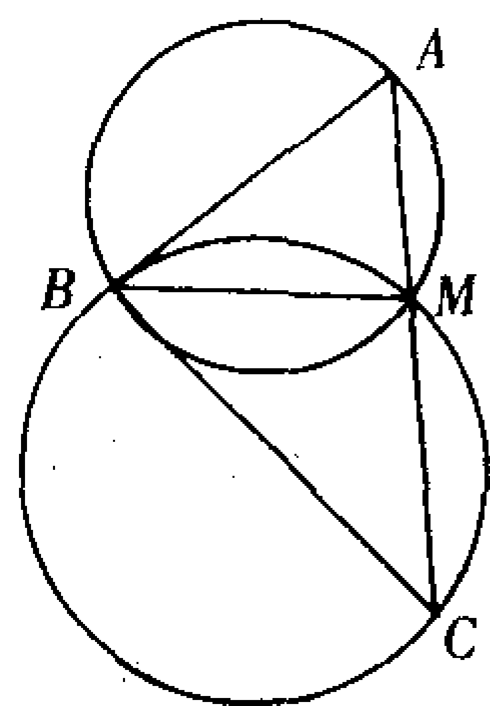


同理可证　H_2、H_3 均在$\triangle ABC$的外接圆上.

11.13　给定三点 A、B、C 在直线 AC 上求一点 M,使得$\triangle ABM$的外接圆半径与$\triangle CBM$的外接圆半径之和为最小.

（基辅数学奥林匹克,1967 年）

[解]　设$\odot O_1(R_1)$,$\odot O_2(R_2)$分别是$\triangle ABM$与$\triangle BMC$的外接圆,由正弦定理知



$$\frac{1}{2}AB=R_1\sin\angle AMB\leqslant R_1,$$

$$\frac{1}{2}BC=R_2\sin\angle BMC\leqslant R_2.$$

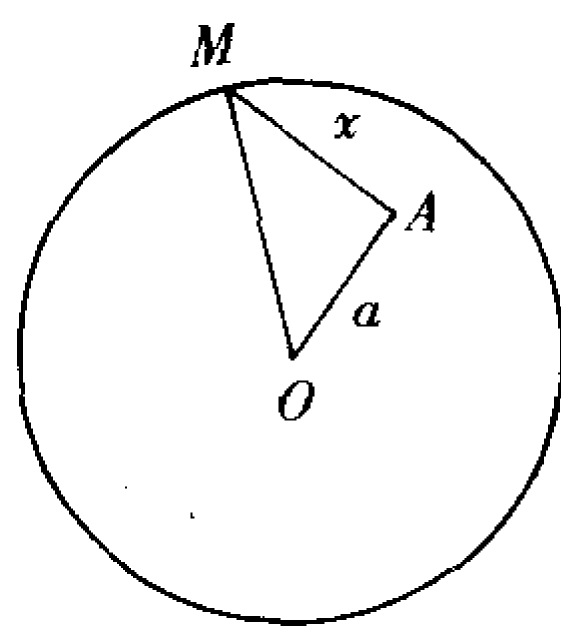
符号当且仅当$\angle AMB=\angle BMC=90^\circ$时成立.即当 $BM\perp AC$,M 为垂足时,两圆的半径和最小.此时

$$R_1+R_2=\frac{1}{2}(AB+BC).$$

11.14　在圆心为 O 的圆内给出一点 A,在圆周上求作点 M,使得$\angle AMO$达到最大.

（基辅数学奥林匹克,1969 年）

[分析]　设 M 是$\odot O(r)$中的动点,$MA=x$,$OA=a$,$\angle OMA=\alpha$,由余弦定理有



$$a^2=r^2+x^2-2rx\cos\alpha,$$

故　$$\cos\alpha=\frac{1}{2r}\left(\frac{r^2-a^2}{x}+x\right).$$

∵　$\cos\alpha$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 上是减函数,所以当 $\cos\alpha$ 取最小值时,α 达到最大值.

又　$$\cos\alpha\geqslant\frac{1}{2r}\cdot 2\sqrt{\frac{r^2-a^2}{x}\cdot x}=\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r}},$$

等号当且仅当$\frac{r^2-a^2}{x}=x$ 即在 $x^2+a^2=r^2$ 时成立,$\cos\alpha$ 达到最小值.

即　$\angle OAM=90^\circ$时,α 达到最大.

[作法]　连 OA,作 $AM\perp OA$ 交$\odot O(r)$于 M.

则 M 点即为所求(本题总有两解).

[证明] 略(下同).

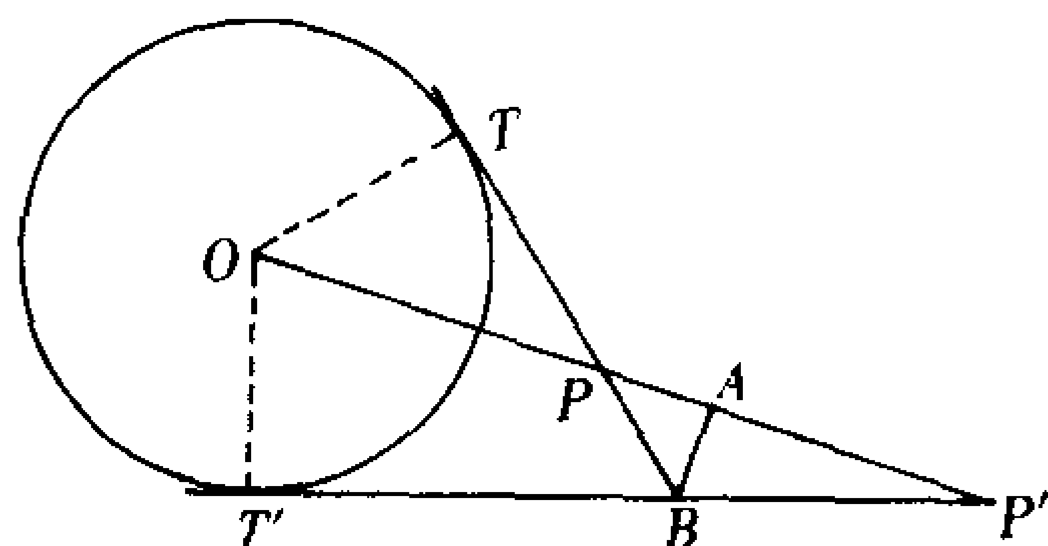
11.15 设 A 为圆 O 外面的一点,试叙述如何在 OA 直线上求一点 P,使得在通过 P 点的切线上在切点与 P 之间的线段之长等于 PA 的 k 倍(k 为正整数).

(中国北京市数学竞赛,1957 年)

[解] (1)过 A 点作 OA 的垂线,并在垂线上截取 $AB=\frac{r}{k}$(r 为圆 O 的半径);

(2)过 B 作圆 O 的切线 BT(T 为切点),交 OA 于 P 点.

我们证明 P 就是所求的点.



根据作图,可得

$$\triangle PTO \backsim \triangle PAB,$$

$$\therefore \quad PT:PA=TO:AB$$

$$=r:\frac{r}{k}=k.$$

$\therefore$ P 是所求的点.

$k>1$ 时,此题有两解,一解在线段 OA 上,另一解在线段 OA 的延长线上;$k=1$ 时,此题有一解.因为这时圆中 $T'B /\!/ OA$,点 P' 不存在.

11.16 给定一锐角以及它内部的一个圆,在圆上求一点,使它到角的两边的距离之和最大.

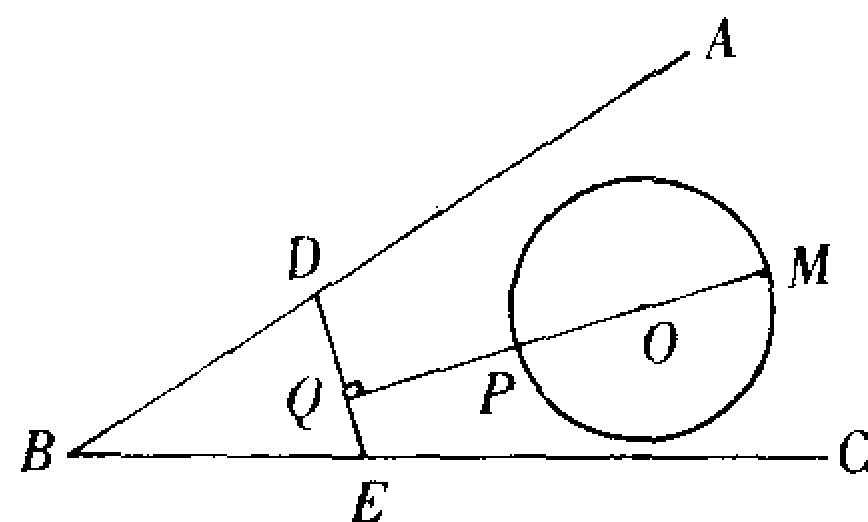
(基辅数学奥林匹克,1959 年)

[解] 设⊙O 为已知角$\angle ABC$ 内的一个已知圆.

分别在 BA、BC 上截取 $BD=BE$.

作 $OQ\perp DE$ 与⊙O 交于 M 点(离点 B 较远的那一点),如图.

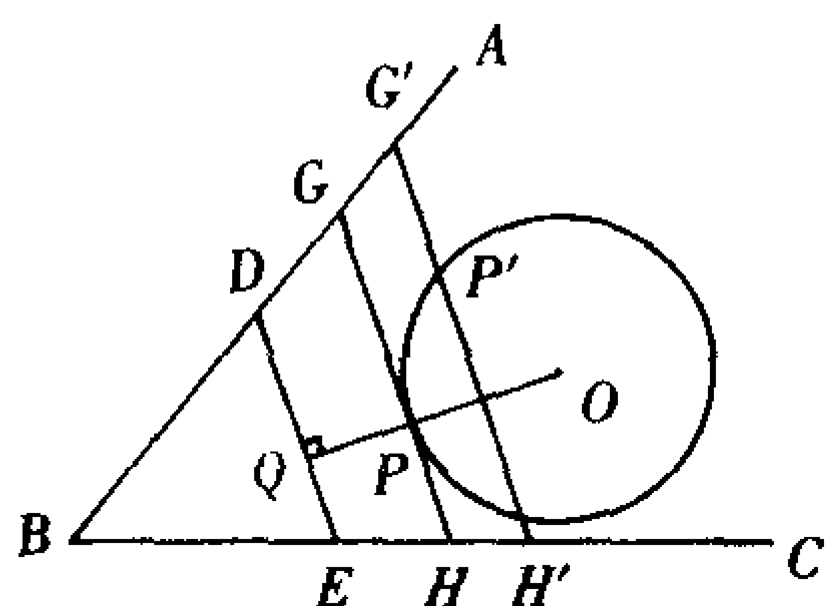
则 M 点即为所求.



11.17 给定一锐角和角的内部的一个圆,在圆上求一点,使该点到锐角的两边的距离之和为最小.

(基辅数学奥林匹克,1959 年)

[解] 设⊙O 为已知角$\angle ABC$ 内的一个已知圆.



分别在 BA、BC 上截取 $BD=BE$，

作 $OQ\perp DE$ 与 $\odot O$ 交于 P 点，则 P 点即为所求. 如图

下面给予证明：

过 P 点作 $GH\perp OQ$ 分别交 AB、BC 于 G、H，则 P 点到 BA、BC 的距离之和为等腰 $\triangle BGH$ 腰上的高.

而 $\odot O$ 上另一点 P' 到 BA、BC 的距离之和为等腰 $\triangle BG'H'$ 腰上的高，显然要大些.

11.18　给定一圆，圆上一点 A 和圆内一点 P，在圆上求这样的点 B 和点 C，使得 P 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心.

（基辅数学奥林匹克，1962 年）

［解］　假定 $\triangle ABC$ 已作出，AD、BF 是 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线分别交给定圆于 D、F，如图.

则　$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FC}$.

且　$\angle FBD \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{FC}+\overset{\frown}{CD})$，

又　$\angle BPD \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{BD})$，

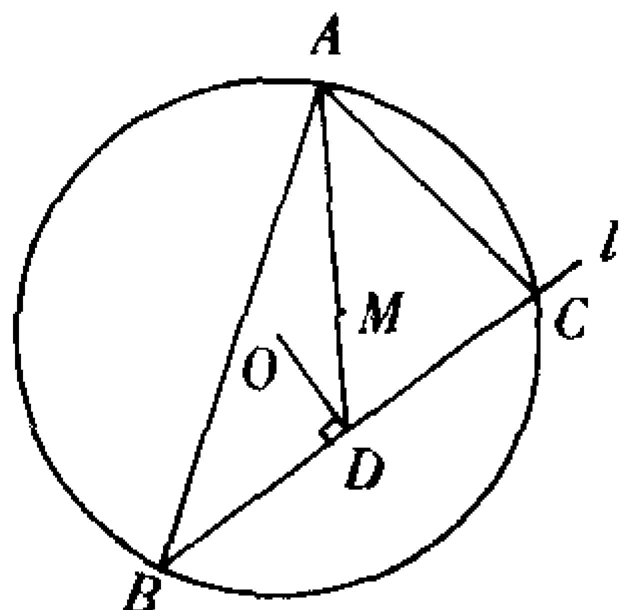
$\therefore$　$\angle FBD=\angle BPD$，$BD=PD=DC$.

为此，连 AP 与已知圆交于 D 点，以 D 为圆心，DP 为半径，作 $\odot D$ 交已知圆于 B、C.

则 $\triangle ABC$ 即为所求.

11.19　给定一圆，及该圆上的点 A 和圆内的点 M. 求圆上这样的点 B 和点 C，使得点 M 是三角形 ABC 的重心.

（基辅数学奥林匹克，1962 年）



［解］　已知 A 是 $\odot O$ 上一点，M 是 $\odot O$ 内一点.

延长 AM 到 D 使　$MD=\dfrac{1}{2}AM$.

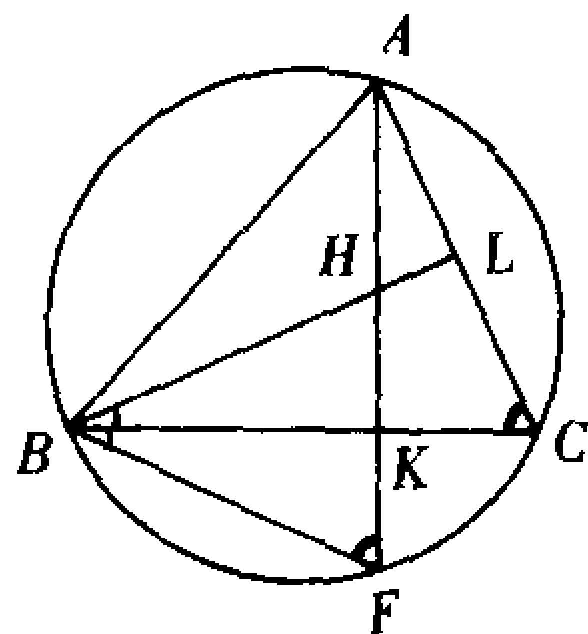
连 OD，过 D 作 $l\perp OD$，设 v 与 $\odot O$ 交于 B、C，连 AB、AC.

则 $\triangle ABC$ 即为所求，如图.

11.20 给定一圆,圆上的一点 A 和圆内一点 H,在圆上求点 B 和点 C,使得点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

(基辅数学奥林匹克,1962 年)

[解] 连 AH 与给定圆 $\odot O$ 交于点 F,作 HF 的垂直平分线交 $\odot O$ 于 B、C.



则 $\triangle ABC$ 即为所求(如图).

下面给予证明:

$\because \quad BH = BF,$

$\therefore \quad \angle LBC = \angle KBF = 90° - \angle F = 90° - \angle C.$

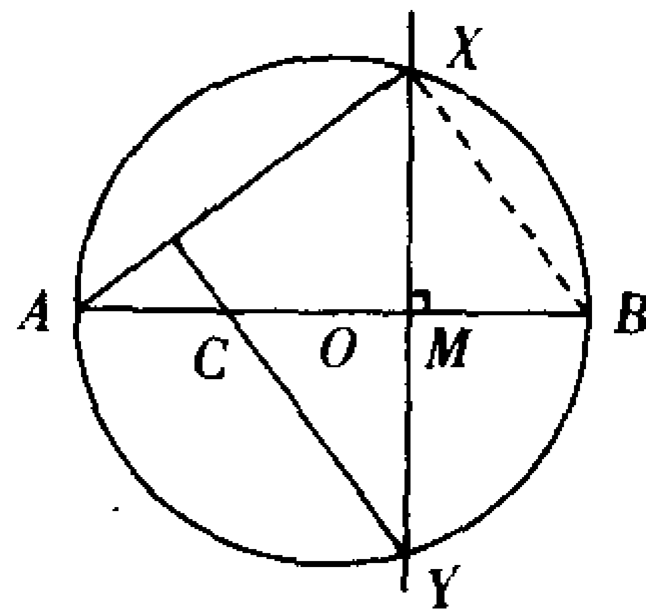
$\therefore \quad \angle LBC + \angle C = 90°.$

故 $\angle BLC = 90°$,即 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

11.21 已知:C 为圆的直径 AB 上一点,在圆上求两个关于 AB 对称的点 X 和 Y,使得 $YC \perp XA$.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[解] 过 CB 中点 M 作 CB 的垂线交圆于点 X、Y,则 X、Y 两点即为所求作的点.



事实上,X、Y 两点显然关于直线 AB 是对称的.

连 BX、YC,易知 $\triangle BMX \cong \triangle CMY$.

$\therefore \quad \angle BXM = \angle CYX$, $\therefore \quad YC \parallel BX$.

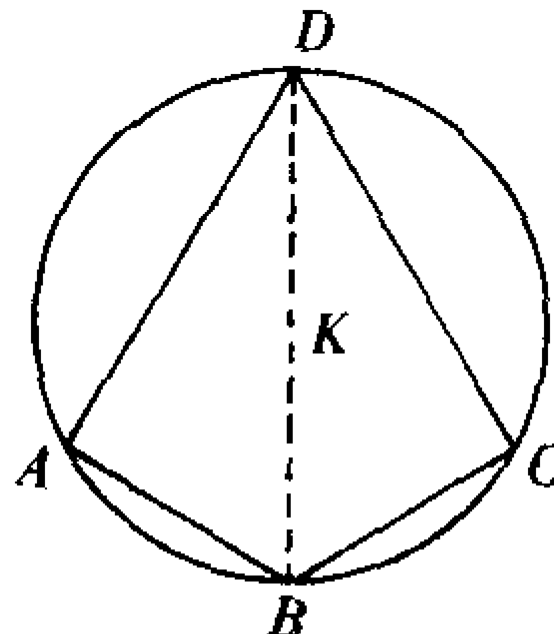
又 $\angle AXB = 90°$, $\therefore \quad YC \perp AX$.

11.22 设 A、B、C 为圆周 k 上的三个已知点,在圆周 k 上求第四点 D(只用圆规直尺),使四边形 $ABCD$ 有内切圆.

(第 4 届国际数学奥林匹克,1962 年)

[解] 假设 D 点已作出,由于有内切圆的四边形 $ABCD$ 的对边之和相等,即

$$AD + BC = AB + CD. \qquad ①$$



不失一般性,设 $BC \geqslant AB$.

下面分两种情况进行讨论:

(1)若 $BC = AB$,则由①式可得 $AD = CD$.

于是 B、D 都在弦 AC 的垂直平分线上,四边形 $ABCD$ 是等形,从而有内切圆.

于是只要在 A、B、C 的外接圆上，过 B 作直径 BD，则 D 为所求.

(2)若 $BC>AB$，则由①得

$CD-AD=BC-AB$ 为一定值.

以 C 为圆心，以 $(BC-AB)$ 为半径的圆交 CD 于 E，

由于 $BC-AB=CD-AD$，

所以 $\triangle ADE$ 为等腰三角形，即 $AD=DE$.

$$\angle AEC=\pi-\angle AED=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle ADE=\pi-\frac{1}{2}\angle ABC.$$

所以 E 点在以 AC 为弦，所含圆周角为 $\pi-\frac{1}{2}\angle ABC$ 的弓形弧上.

因此，只要作出以 AC 为弦，所含圆周角为 $\pi-\frac{1}{2}\angle ABC$，且在 B 点另一侧的弓形弧及以 C 为圆心，以 $(BC-AB)$ 为半径的圆，则它们的交点即为 E，连 CE 交圆周 k 于 D，则 D 即为所求.

下面证明这样得到的 D 点，使四边形 $ABCD$ 有内切圆.

$\because\ \angle ADC+\angle ABC=\pi$，及 $\angle AEC=\pi-\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore\ \angle AED=\pi-\angle AEC=\frac{1}{2}\angle ABC$.

又 在 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{aligned}\angle DAE&=\pi-\angle ADC-\angle AED\\&=\pi-(\pi-\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle ABC.\end{aligned}$$

于是 $AD=DE$.

又由作法 $CE=BC-AB$，$CE=CD-AD$.

$\therefore\ CD-AD=BC-AB$，$AB+CD=BC+AD$.

所以四边形 $ABCD$ 有内切圆.

[讨论] 由于 $\pi-\frac{1}{2}\angle ABC>\pi-\angle ABC$，所以所作弓形弧 $\overset{\frown}{AC}$ 在

圆 k 内.

又∵ $BC-AB<AC$, ∴ $CE<AC$.

于是圆 C 与弓形弧$\overset{\frown}{AC}$有且仅有一个交点E,因此本题恒有一解.

11.23 以锐角$\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 为直径向外作三个半圆,在这三个半圆上求点 C_1、A_1、B_1,使 $AB_1=AC_1$,$BA_1=BC_1$,$CA_1=CB_1$.

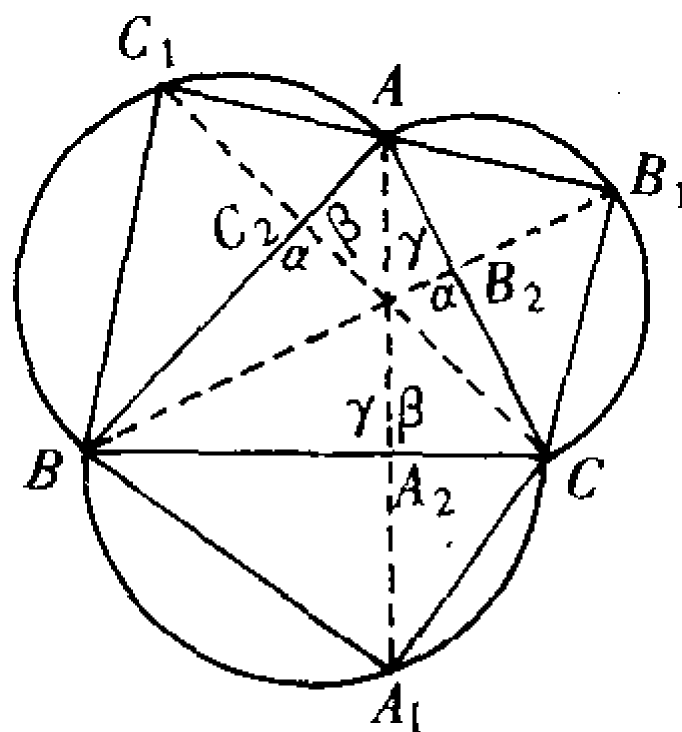
(匈牙利数学奥林匹克,1939 年)

[解] 假设点 A_1、B_1、C_1 满足本题要求.

从 A_1、B_1、C_1 向$\triangle ABC$ 的三边作垂线,设垂足为 A_2、B_2、C_2.

因为 AB、AC、BC 是半圆的直径,

所以$\triangle AC_1B$、$\triangle AB_1C$、$\triangle BA_1C$ 是直角三角形.



由直角三角形的射影定理有

$$AB_1^2=AB_2\cdot AC,\quad AC_1^2=AC_2\cdot AB,$$

于是有 $AB_2\cdot AC=AC_2\cdot AB$.

由割线定理的逆定理可知 B_2、C_2、B、C 四点共圆,同理 A_2、B_2、A、B 四点以及 A_2、C_2、A、C 四点共圆.

连 AA_2、BB_2、CC_2,则有

$$\angle BB_2C=\angle CC_2B=\alpha,\quad \angle CC_2A=\angle AA_2C=\beta,$$

$$\angle AA_2B=\angle BB_2A=\gamma,$$

∴ $\alpha+\beta=180°$, $\beta+\gamma=180°$, $\gamma+\alpha=180°$.

则 $\alpha=\beta=\gamma=90°$.

即 AA_2、BB_2、CC_2 是$\triangle ABC$ 的高,且 A、A_2、A_1 三点共线,B、B_2、B_1 三点共线,C、C_2、C_1 三点共线.

于是,所要求的点只能是三角形的高所在的直线和以它的边为直径向外作半圆的交点.

(二)求作线段或直线

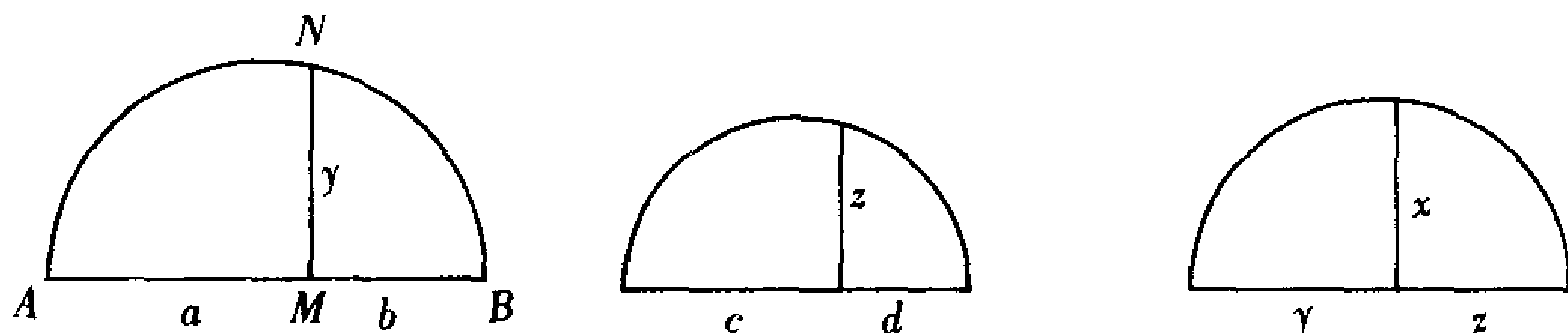
11·24 给定线段 a、b、c、d,作线段 $x=\sqrt[4]{abcd}$.

(基辅数学奥林匹克,1936 年)

[解] 以 $a+b$ 为直径作半圆,再过 M 作 $MN\perp AB$(如图),即作 $y=\sqrt{ab}$.

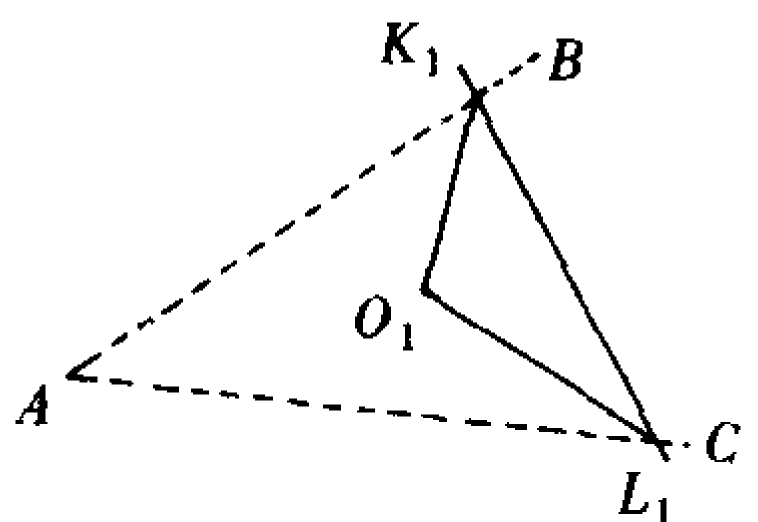
同理作 $z=\sqrt{cd}$.

再作 $x=\sqrt{yz}$, 即 $x=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$.



11·25 作顶点在图纸外的角的平分线

(基辅数学奥林匹克,1958 年)

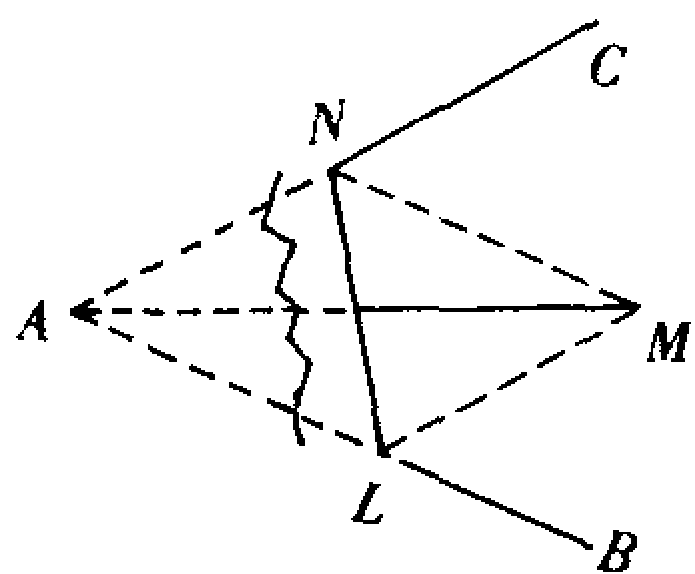


[解] 假设$\angle BAC$的顶点A在图纸外,在AB上任取一点K_1,在AC上任取一点L_1,作 $\angle AK_1L_1$ 和$\angle AL_1K_1$ 的平分线,设交点为O_1,由于O_1是$\triangle AK_1L_1$的内心,故O_1点在$\angle A$的平分线上.如图.

仿此再找一点O_2,则O_1O_2即为所求.

11·26 已知:$\angle BAC$,顶点A不可达到(在图之外),以及角内部的一点M.过点M作直线,使它经过顶点A.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)



[解] 过点M作$MN /\!/ AB$和$ML /\!/ AC$.如图.

取NL的中点O,连OM.

$\because$ $ALMN$是平行四边形.

$\therefore$ AM、LN互相平分于O点.

故 直线MO即为所求的直线.

11·27 设有一个小于180°的角及角外一点M.试过M作一直线,使它在该角与所截出的三角形的周长等于预先给定的值.

(莫斯科数学奥林匹克,1936 年)

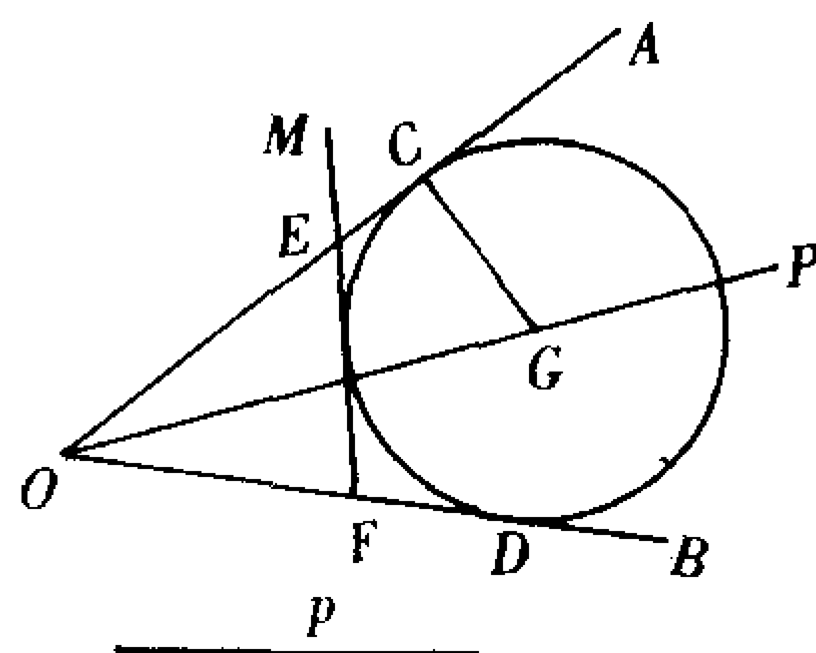
[解] 在已知角$\angle AOB$的一边OA上截取$OC=p$.其中预先给定的值为$2p$.

作$\angle AOB$的平分线OP,过C点作$CG\perp OA$与OP交于G点.

作$\odot G$(半径为CG).

过M点作$\odot G$的切线与OA、OB分别交于E、F.如图.

则　ME即为所求的直线.



11·28　已知:一角和角内的点M和N.找一条最短的路径从M到N,但经过角的两边.

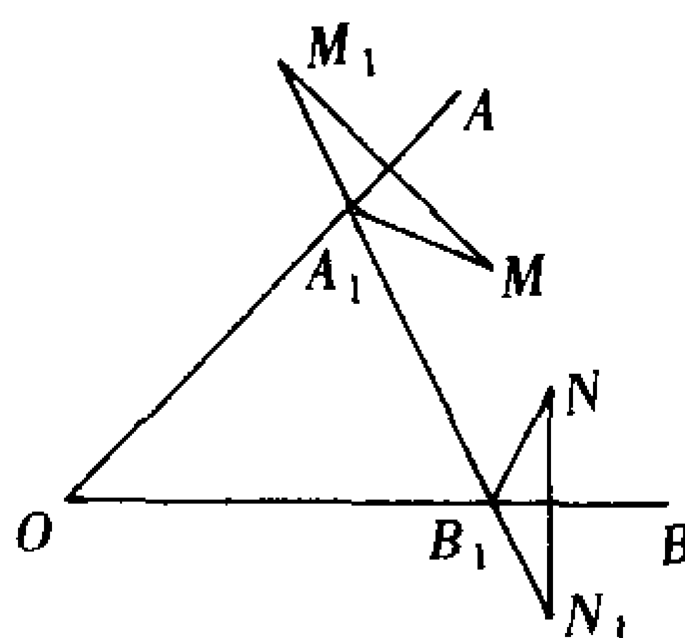
(基辅数学奥林匹克,1960年)

[解]　在$\angle AOB$内,作M点关于OA的对称点M_1;作N点关于OB的对称点N_1.

连　M_1N_1分别与OA、OB交于A_1、B_1,

连　MA_1、NB_1,

则　MA_1B_1N是最短的路径.如图.



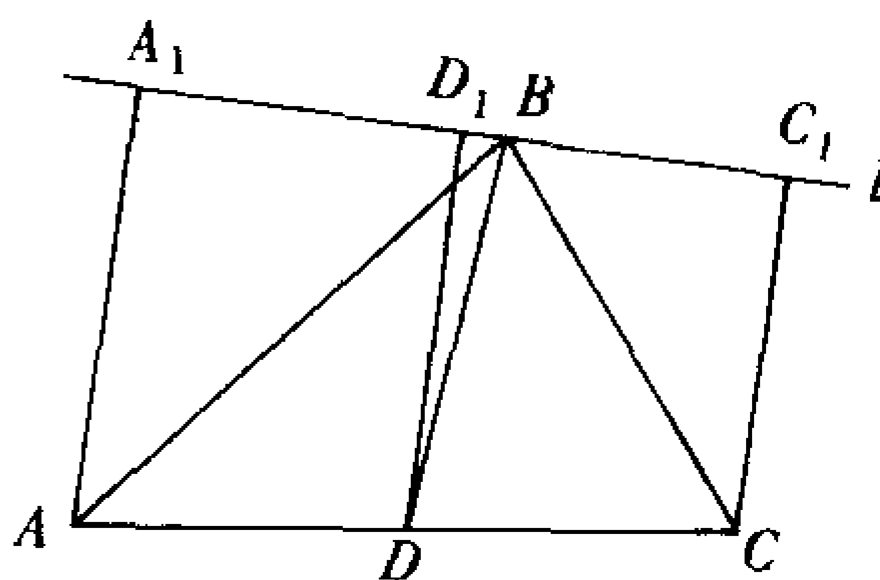
11·29　过一三角形的某一顶点作一条直线,使得从三角形其他两个顶点到该直线的距离之和为最大.

(基辅数学奥林匹克,1968年)

[解]　在$\triangle ABC$中,l是过B点的直线.

作　$AA_1\perp l$于A_1,　$CC_1\perp l$于C_1.

设　D是AC的中点,作$DD_1\perp l$于D_1.如图.



则　DD_1是梯形ACC_1A_1的中位线

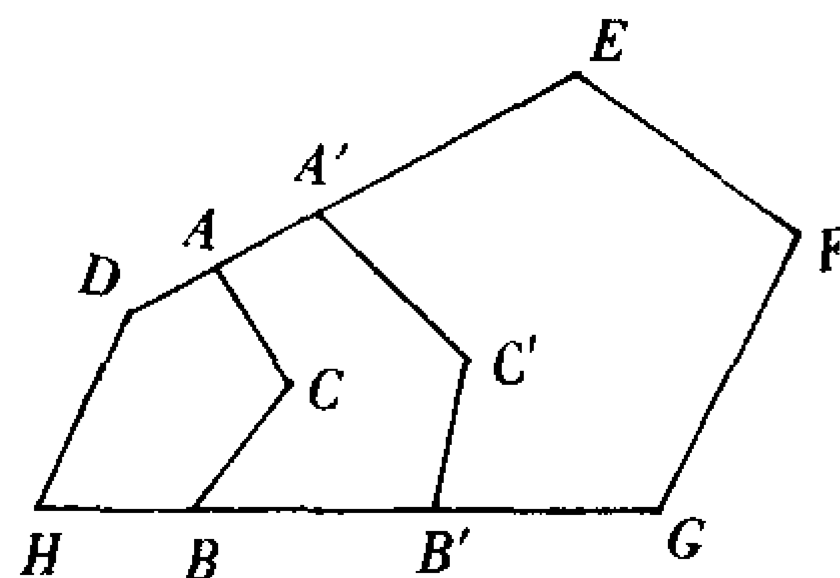
$$AA_1+CC_1=2DD_1\leqslant 2DB,$$

其中等号当且仅当D_1与B重合时,

即$BD\perp l$,也就是l垂直于$\triangle ABC$的过B点的中线时成立.

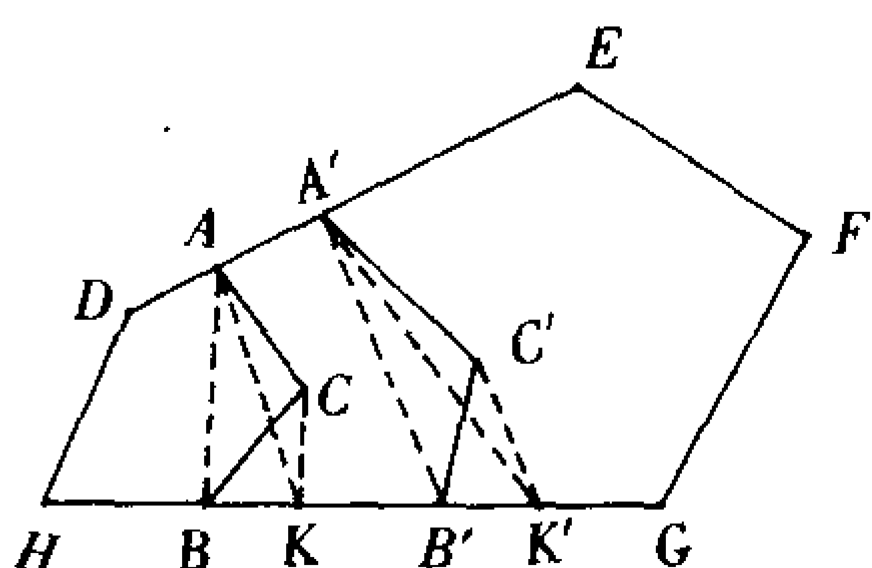
此时AA_1+CC_1取得最大值.

11·30　两块水田之间有一条曲折的水沟(如图),今要把水沟的两岸变成直线,而每块水田的面积不变.(a)如果A、A'两



点不变,则水沟应如何配置?(b)如果 A 点不变,而要求水沟两岸平行,则水沟又应如何配置?各说明其方法.

(中国上海市数学竞赛,1956 年)

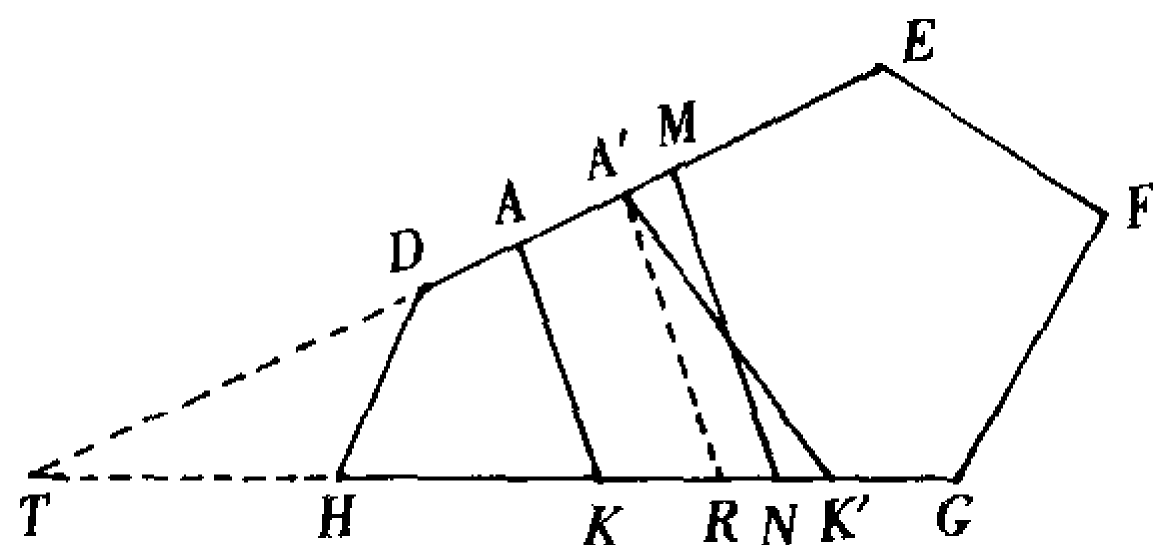


[解] (a)它的要求是把多边形变成边数少 1 的等积多边形,且 A、A' 两点不变.

连 AB,作 $CK \parallel AB$,连 AK. 仿此作出 $A'K'$.

(b)它的要求可从(a)所得的四边形 $AA'K'K$ 变成一等积的梯形 $AKNM$,使 $NM \parallel AK$.

令 MN 为所求作的线,如下图.



(1)如 DA' 不平行于 HK',则延长 $A'D$ 及 $K'H$ 使相交于 T.

作 $A'R \parallel AK$, 有 $\triangle TA'R \backsim \triangle TMN$,

$\therefore$ $S_{\triangle TA'R} : S_{\triangle TMN} = \overline{TR}^2 : \overline{TN}^2$,

但 $\triangle TMN \sim \triangle TA'K'$, $\therefore$ $S_{\triangle TA'R} : S_{\triangle TA'K'} = \overline{TR}^2 : \overline{TN}^2$;

又 $\triangle TA'R$ 与 $\triangle TA'K'$ 若分别以 TR 与 TK' 为底时,则为等高的三角形,

$\therefore$ $S_{\triangle TA'R} : S_{\triangle TA'K'} = TR : TK'$.

因此得 $\overline{TR}^2 : \overline{TN}^2 = TR : TK'$,或 $\overline{TN}^2 = \dfrac{\overline{TR}^2 \cdot TK'}{TR} = TR \cdot TK'$,

$\therefore$ $TN = \sqrt{TR \cdot TK'}$.

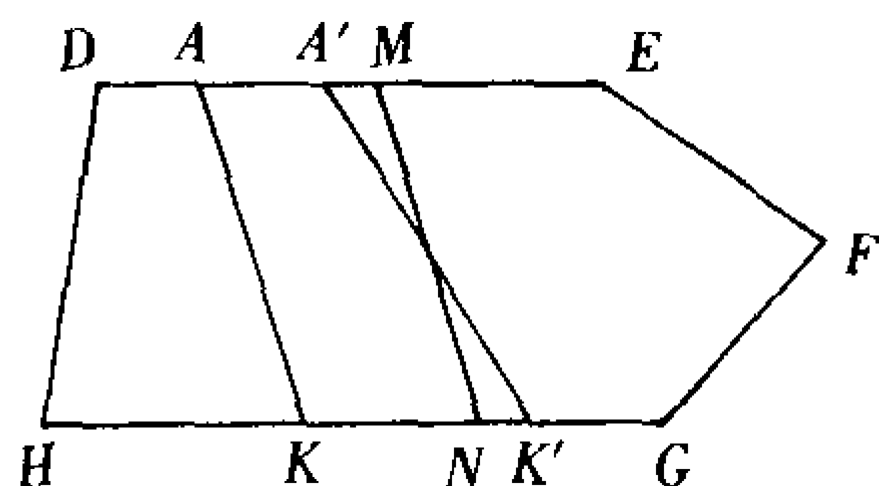
这样可得到下面的作法:

延长 $A'D$ 与 $K'H$ 相交于 T,

作 $A'R \parallel AK$,交 TK' 于 R.

作 TR 及 TK' 的比例中项,并在 TK' 上截 TN 等于这个比例中项.

作 $NM \parallel RA'$，则 NM 即为所求水沟的一边.



(2)如 $DA' \parallel HK'$，则只需求 $A'K'$ 的中点 L，过 L 作 AK 的平行线 MN.

即 $\triangle LNK' \cong \triangle LMA'$.

$\therefore$ MN 即所求水沟的一边.

11·31 有一块长方形的土地 $ABCD$(如图 1)，用两条直线 EF、GH 分其为三部分.现在要把这三部分都调整为长方形，分别与原来面积相等，如图 2 一样，问如何作法?

(中国上海市数学竞赛，1957 年)

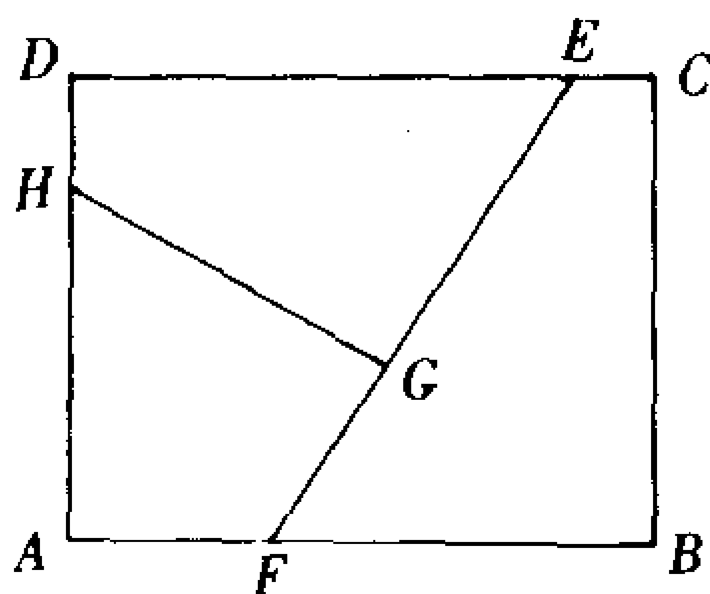


图 1

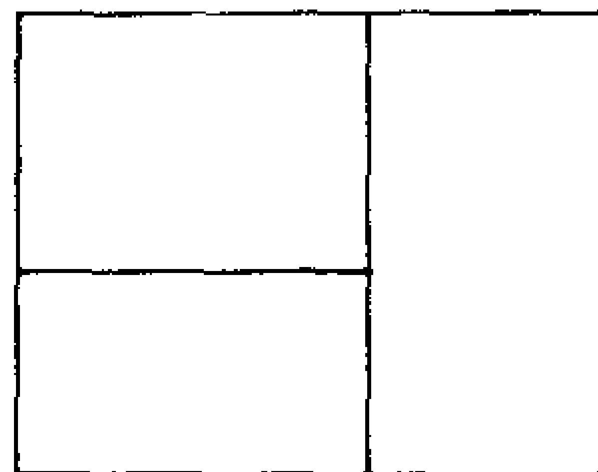
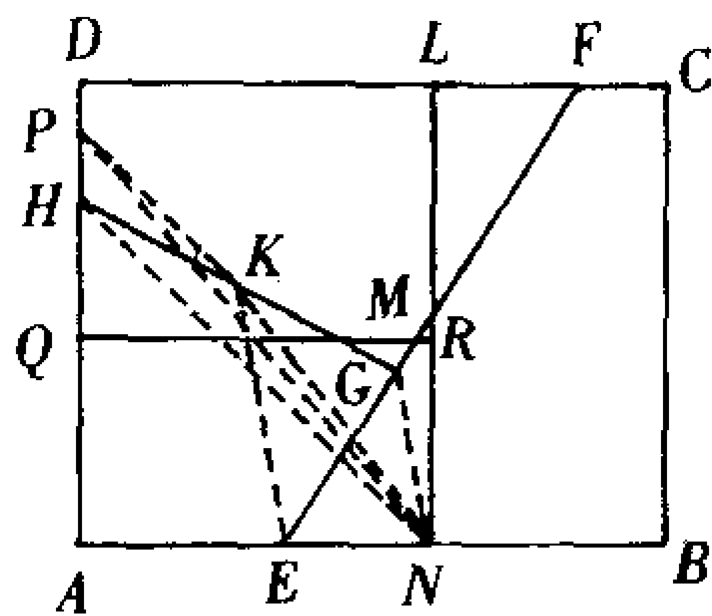


图 2

[解 1] (1)过 EF 中点 M，作 $LN \perp AB$，即 $S_{LNBC} = S_{FEBC}$.



(2)连 GN. 作 $EK \parallel NG$ 交 HG 于 K，连 KN. 则 $S_{\triangle GKE} = S_{\triangle NKE}$，

$\therefore$ $S_{AEGH} = S_{ANKH}$.

(3)连 HN. 作 $KP \parallel HN$ 交 AD 于 P，连 NP，则 $S_{\triangle PHN} = S_{\triangle KHN}$，

$\therefore$ $S_{\triangle ANP} = S_{\text{四边形}ANKH}$.

(4)过 AP 中点 Q，作 $QR \parallel AN$，则 $S_{AQRN} = S_{\triangle ANP} = S_{AEGH}$.

[解 2] (1)$x \cdot BC = \frac{1}{2} BC(EB + FC)$，$\therefore$ $x = \frac{EB + FC}{2}$，

取 $BN = \frac{EB + FC}{2}$，作 $NL \perp AB$.

(2)用等积变形法,把四边形 $AEGH$ 变成一个三角形.

令其底与高为 b 和 h,再使 $y\cdot AN=\frac{1}{2}bh$,应用第四比例项作法,作出 y.

截 $AQ=y$,作 $QR/\!/AN$,即得所求的图形.

11·32 已知:角 A 和这角内的已知点 P,求过 P 作直线交角 A 的两边于 B、C,使 $\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}$ 最大.

(第 8 届美国数学奥林匹克,1979 年)

[解] 如图,设 $\angle APB=\alpha$, $\angle BAP=\beta$, $\angle CAP=\gamma$.

由正弦定理得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{AP\sin\gamma}\\&=\frac{1}{AP}(\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta+\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{ctg}\gamma-\cos\alpha)\\&=\frac{1}{AP}\sin\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma).\end{aligned}$$

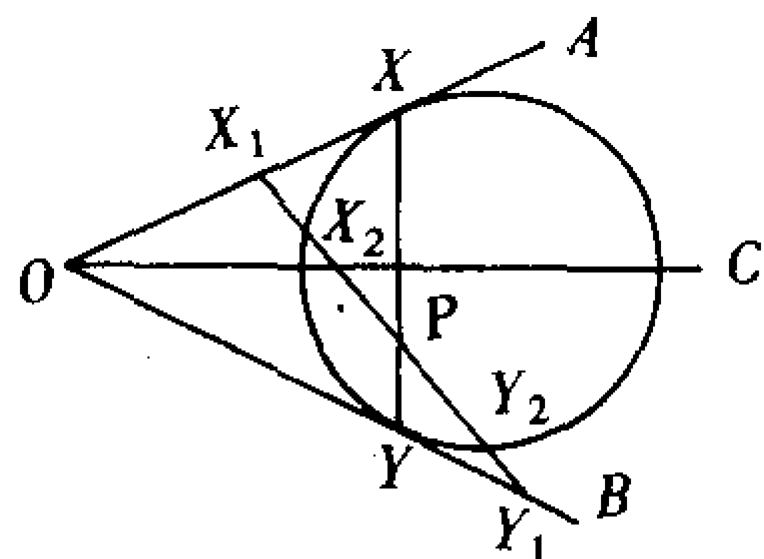
因为 β 和 γ 为定角,所以 当 $\alpha=90°$ 时,即 $\sin\alpha=1$ 时,$\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}$ 最大.

因此,连 AP,过 P 作 $BC\perp AP$ 交角 A 于 B、C.

则 直线 BC 即为所求.

11·33 P 是射线 OA 与 OB 为边的角的内点,过 P 点求线段 XY,其中 X 在 OA 上,Y 在 OB 上,使得乘积 $PX\cdot PY$ 最小.

(第 37 届美国普特南数学竞赛,1976 年)



[解] 作 $\angle AOB$ 的平分线 OC,

过 P 作 OC 的垂线交 OA 于 X,交 OB 于 Y,则 $OX=OY$.

作圆 K 与 OA 切于 X,与 OB 切于 Y.

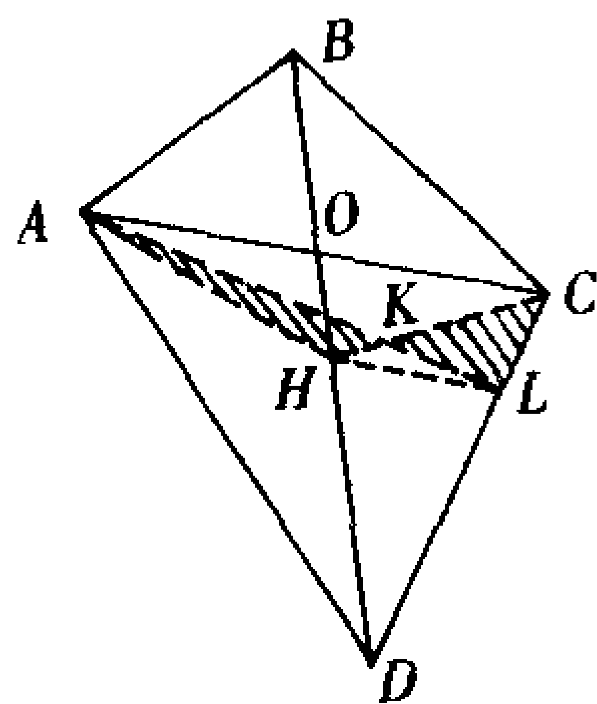
过 P 作异于 XY 的另一直线交 OA 于

X_1，交 OB 于 Y_1，交圆 C 于 X_2、Y_2. 于是由相交弦定理

$$PX \cdot PY = PX_2 \cdot PY_2 < PX_1 \cdot PY_1.$$

所以线段 XY 为所求.

11·34 已知：一凸四边形 $ABCD$，用圆规和直尺经过顶点 A 引一直线将该四边形的面积二等分.



（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

［解］ 设 O 为四边形 AC 和 BC 的交点，H 是 BD 的中点.

(1)若 H 与 O 重合，则 AL 即 AC 为所求.

(2)若 H 与 O 不重合，不妨设 H 在线段 OD 上. 则

$$S_{AMCB} = S_{AHCD}.$$

过 H 作 $HL /\!/ AC$ 交 CD 于 L，连 CH、AL，则

$$S_{\triangle AHL} = S_{\triangle CHL}, \quad S_{\triangle AHK} = S_{\triangle KLC}.$$

因此有 $$S_{AHCD} - S_{\triangle KLC} + S_{\triangle AHK} = S_{AHCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

即 $$S_{\triangle ALD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

所以直线 AL 即为所求.

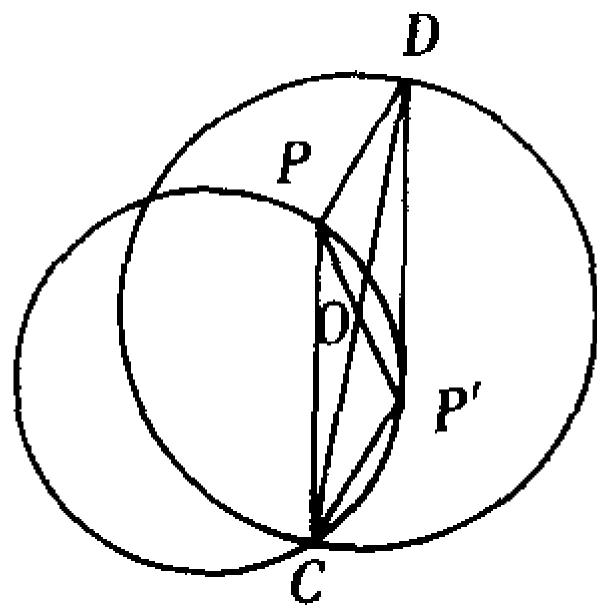
11·35 设有一个圆及其内部一点 P，试用圆规和直尺求作该圆的一条直径，使它对 P 点所张的视角等于预先给定的值.

（莫斯科数学奥林匹克，1936 年）

［解］ 显然预先给定的角 $\alpha > 90^\circ$.

作 P 点关于圆心 O 的中心对称点 P'.

以 PP' 为弦作 $\overparen{AB}$，使其所含圆周角为 $180^\circ - \alpha$.



设 $\overparen{AB}$ 与 $\odot O$ 的一个交点为 C，作直径 CD. 如图. 则 CD 即为所求.

下面给予证明：

$\because$ $PO = P'O$, $DO = CO$, $\angle POD = \angle P'OC$

$\therefore$ $\triangle POD \cong \triangle P'OC$,

$\angle PDO = \angle P'CO$.

故 $\angle CPO = \angle 180° - (\angle PCD + \angle PDC)$

$= 180° - (\angle PCD + \angle P'CD)$

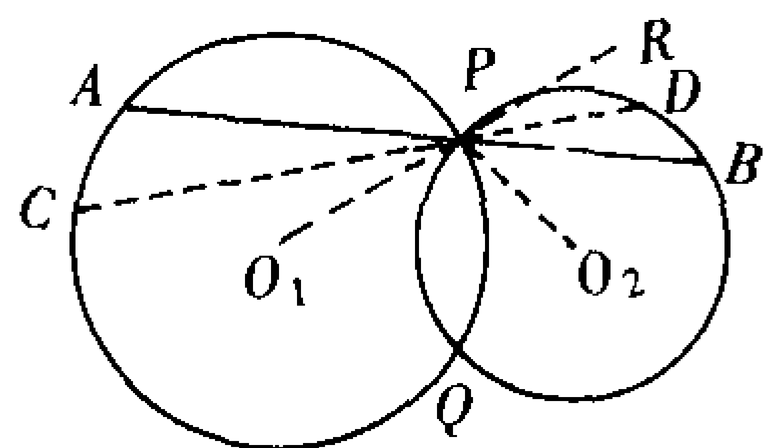
$= 180° - \angle PCP' = 180° - (180° - \alpha)$

$= \alpha$.

则 CD 就是所求的直径.

11·36　两个给定圆相交于 P、Q 两点,说明怎样作出一条线段 AB,过点 P 且分别交两圆于 A、B,使得 $AP \cdot PB$ 最大.

(第4届美国数学奥林匹克,1975年)



[解1]　设两圆的圆心为 O_1、O_2.

连 O_1P 延长 O_1P,连 O_2P,作$\angle O_2PR$ 的平分线,这条平分线交$\odot O_1$ 于 A,交$\odot O_2$ 于 B..

我们证明线段 APB 就是我们所求的线段.

过 P 作线段 PCD 交$\odot O_1$ 于 C,交$\odot O_2$ 于 D,且设 PC 在$\angle O_1PA$ 内.

我们证明　$PA \cdot PB > PC \cdot PD$.

设　$\odot O_1$ 的半径为 r_2,$\odot O_2$ 的半径为 r_2.

又设　$\angle O_1PC = \alpha$,　$\angle O_2PB = \beta$.

则　　$\angle DPR = \alpha$,　$\angle O_2PR = 2\beta$,　$\angle O_1PA = \beta$.

于是　$PC = 2r_1\cos\alpha$,　$PD = 2r_2\cos\angle O_2PD = 2r_2\cos(2\beta - \alpha)$,

$PA = 2r_1\cos\beta$,　$PB = 2r_2\cos\beta$.

$\therefore$　$PC \cdot PD = 2r_1\cos\alpha \cdot 2r_2\cos(2\beta - \alpha)$

$= 2r_1r_2[\cos 2\beta + \cos(2\beta - 2\alpha)]$

$< 2r_1r_2(\cos 2\beta + 1) = 2r_1r_2 \cdot 2\cos^2\beta$

$= (2r_1\cos\beta) \cdot (2r_2\cos\beta) = PA \cdot PB$.

[解2]　作大圆 O,使$\odot O_1$、$\odot O_2$ 都与它内切,且切$\odot O_1$ 于 A,切$\odot O_2$ 于 B.

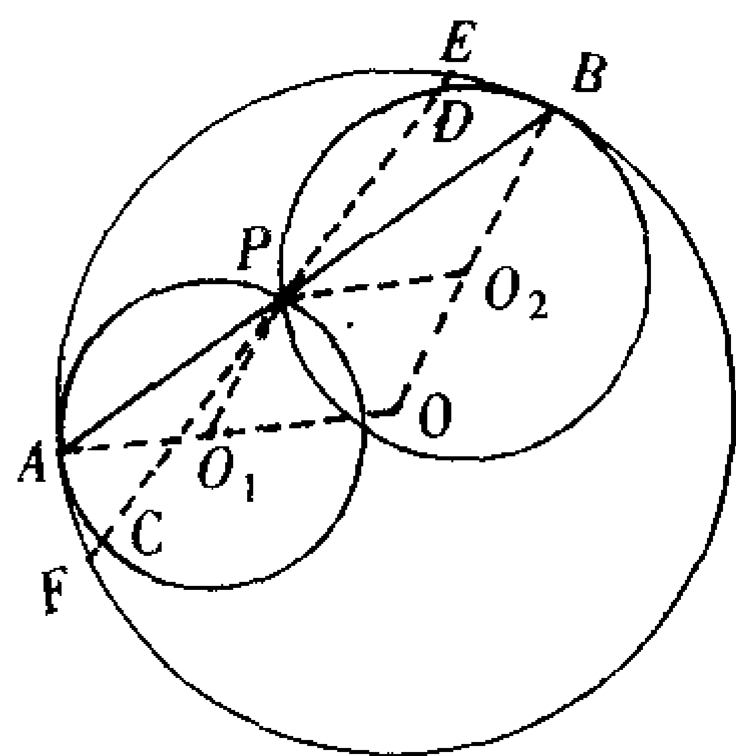
设大圆半径为 R,$\odot O_1$ 半径为 r_1,$\odot O_2$ 半径为 r_2,则

$R = r_1 + r_2$.

连　PA、PB,我们首先证明 A、P、B 三点共线.

因为 A、O_1、O 三点共线，B、O_2、O 三点共线，连 O_1P、O_2P，由于

$$OO_2=r_1,\quad OO_1=r_2,\quad O_1P=r_1,$$
$$O_2P=r_2.$$



则四边形 O_1OO_2P 为平行四边形.

设 $\angle O_1AP=\angle O_1AP=\alpha$,

$\angle O_2BP=\angle O_2PB=\beta$,

则 $\angle PO_1O=2\alpha$, $\angle PO_2O=2\beta$,

又由 $\angle PO_1O=\angle PO_2O$, 则 $\alpha=\beta$.

于是 $\angle APB=\alpha+\beta+\angle O_1PO_2=180°$.

即 A、P、B 三点共线.

过 P 作直线交大圆于 E、F，交⊙O_1 于 C，交⊙O_2 于 D，由于 C、D 在大圆内部，则有

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF>PC\cdot PD.$$

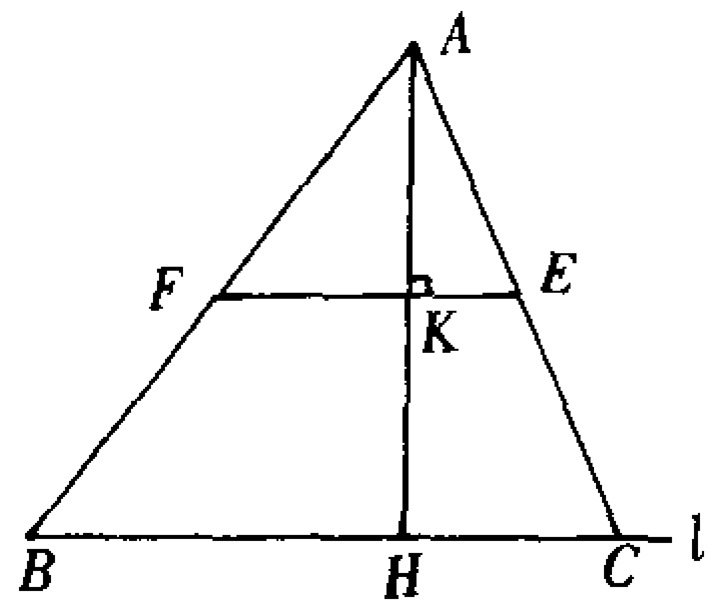
于是线段 AB 为所求的线段.

(三)求作三角形

11·37 根据三个已知点 H、E、F 作△ABC，其中 H 是 BC 边上的高 AH 的垂足.，E 和 F 是边 AC 和 AB 的中点.

(基辅数学奥林匹克，1961 年)

[解] 连结 E 和 F，过点 H 作直线 $l /\!/ EF$.



作 $HK\perp EF$ 于 K.

在 HK 的延长线上截取 $KA=HK$.

连 AE 与 l 交于 C，连 AF 与 l 交于 B.

则 △ABC 即为所求.

11·38 已知：三角形底边的长，这边上高线的长及顶角平分线的长，求作这个三角形.

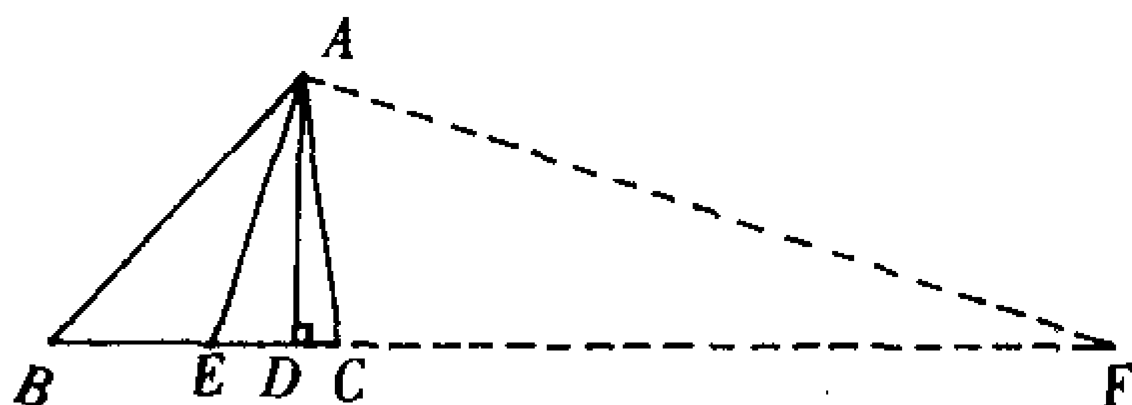
(中国福建省福州市数学竞赛，1958 年)

[解] 设所求作△ABC 底边 $BC=a$，高 $AD=h$，角平分线 $AE=t$.

若　$t=h$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，易作.

若　$t\neq h$，则 $t>h$，先以 t 为斜边，h 为直角边作直角三角形 AED.

作　$AF\perp AE$ 交 BC 延长线于 F，则 AF 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 的外角平分线，这时 EF 的长为定值 p.



设　$BE=x$，　则 $EC=a-x$，$BF=x+p$，$CD=x+p-a$.

$\because$　$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BF}{FC}$，　$\therefore$　$\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{x+p}{x+p-a}$，

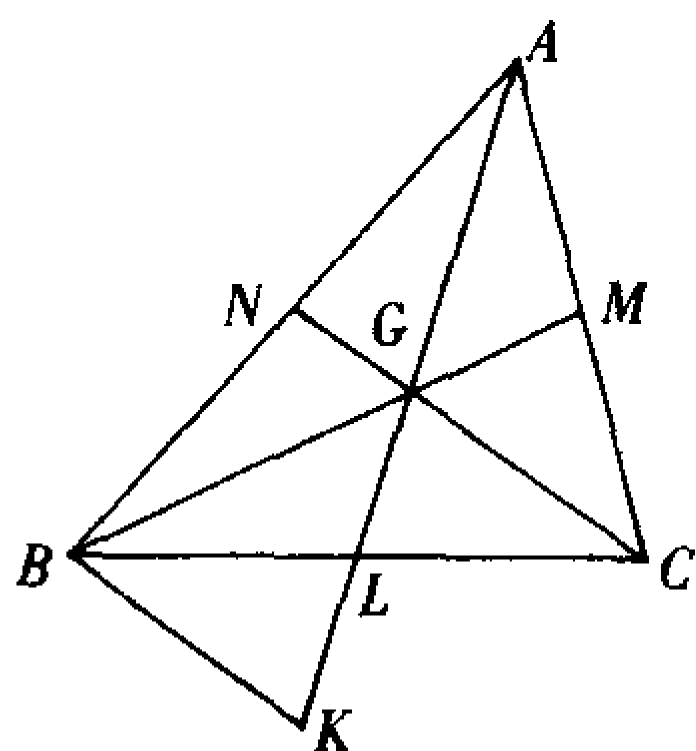
整理得　$2x^2+2(p-a)x-ap=0$，

解得　$x=\dfrac{-(p-a)+\sqrt{p^2+a^2}}{2}$.（已舍负根）

据此即可作出 BE，于是 $\triangle ABC$ 便可作出.

11·39　试根据直角三角形两条直角边上的中线长度，求作该直角三角形.

（莫斯科数学奥林匹克，1941 年）



[解]　(1)已知 m_a、m_b、m_c，可求作 $\triangle ABC$.

作　$\triangle GBK$，使 $GK=\dfrac{2}{3}m_a$，$BG=\dfrac{2}{3}m_b$，$BK=\dfrac{2}{3}m_c$.

再取 GK 的中点 L，连 BL 并延长至 C，使 $LC=LB$；又延长 KG 至 A，使 $GA=GK$.

最后连 AB、AC. 如图.

则　$\triangle ABC$ 即合所求.

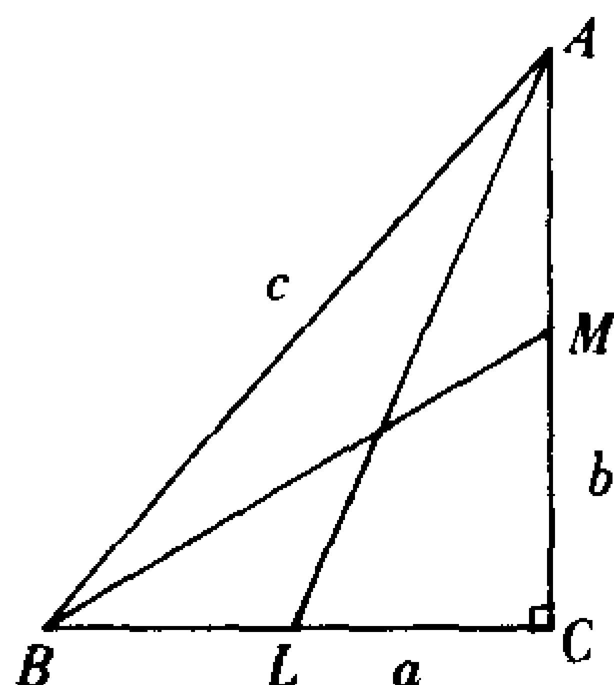
(2)本题实际上已知 m_a、m_b、m_c. 这是因为：m_a、m_b 已知，这样可由

$${m_a}^2+{m_b}^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}a^2+b^2\right)+\left(\frac{1}{4}b^2+a^2\right)$$

$$=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}c^2=5m_c{}^2.$$

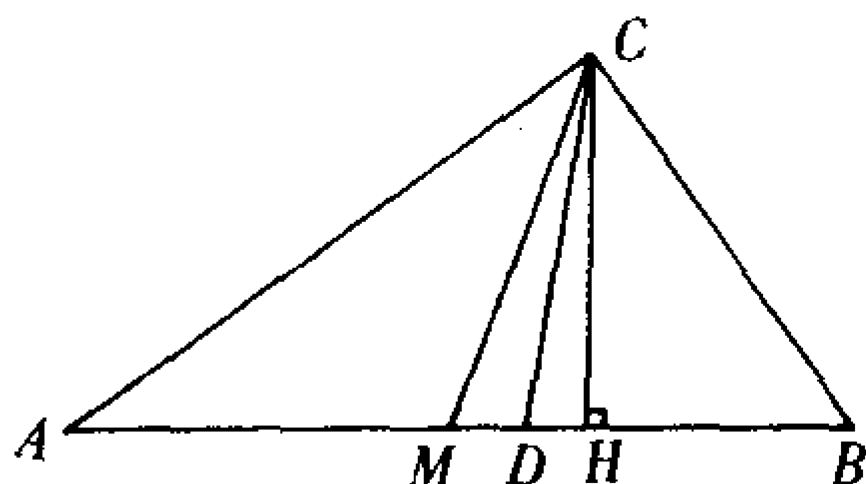
$\therefore\quad m_c=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{m_a{}^2+m_b{}^2}$ 也可作出.



11·40 已知：一直线上三个不同的点 M、D、H. 求作一个直角三角形，使它的斜边的中点是点 M，直角平分线与斜边的交点是点 D，斜边上的高的垂足是点 H.

（波兰数学奥林匹克，1955 年）

[解] 设△ABC 是所求作的直角三角形，其中∠$ACB=90°$，CM 为斜边的中线，CD 为∠ACB 的平分线，CH 是斜边的高.



由于 M、D、H 是三个不同的点，则直角边 AC 与 BC 不同，不妨设 $AC>BC$，则 D 落在 MB 内，H 落在 DB 内，因此 D 在 MH 内.

由于 $\angle MCD=\angle ACD-\angle ACM=45°-\angle A$,

及 $\angle DCH=\angle ACH-\angle ACD=90°-\angle A-45°=45°-\angle A$

因此 $\angle MCD=\angle DCH$，CD 是∠MCH 的平分线，

于是 $\frac{MD}{DH}=\frac{MC}{CH}$,

由于 $MC>CH$，则 $MD>DH$.

因此，如果问题有解，点 D 必须位于点 M 和 H 之间，并且 $MD>DH$.

对线段 MH，按比值 $\frac{MD}{DH}$ 作阿波罗尼圆，过 H 作 $CH\perp MH$ 与阿波罗尼圆交于 C，连 MC，则△MCH 可以作出.

在直线 MH 上，在 M 的两侧作 $MA=MC$，$MB=MC$，得到 A、B 两点，这样得到的△ABC 即为所求.

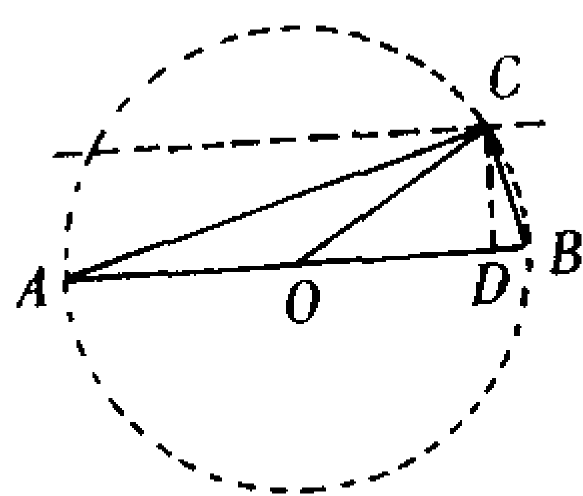
事实上，因为 $MA=MC=MB$，则∠ACB 是直角，CM 是 AB 的中线，又 $CH\perp AB$，则 CH 是 AB 上的高.

$\because \quad \angle ACD=\angle ACM+\angle MCD=\angle A+\angle MCD$
$$=\angle BCH+\angle HCD=\angle BCD,$$
$\therefore \quad CD$ 是角 C 的平分线.

由以上，当且仅当 D 位于 M 和 H 之间，且 $MD>DH$ 时，有两个直角三角形符合要求，这两个直角三角形关于直线 MH 对称.

11·41 求作一个直角三角形，使其斜边等于给定的线段 c，斜边上的中线是两条直角边的比例中项.

（第 1 届国际数学奥林匹克，1959 年）



[解 1] 分析假定△ABC 已作出，且 AB 为斜边，$AB=c$.

显然，顶点 C 在以 AB 为直径的圆周上，设 AB 中点为 O，则

$$CO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c.$$

由题设，CO 满足 $\quad CO^2=CA\cdot CB.$ ①

作斜边 AB 的高 CD，则

$$CA\cdot CB=CD\cdot AB=c\cdot CD. \quad ②$$

由①、②得 $\left(\frac{1}{2}c\right)^2=c\cdot CD.$

有 $\quad CD=\frac{1}{4}c.$

于是点 C 在和 AB 距离为 $\frac{1}{4}c$ 的平行线上，即点 C 在以 AB 为直径的圆和与 AB 距离为 $\frac{1}{4}c$ 的平行线的交点，从而 C 点可作出.

[作法] （1）作线段 $AB=c$.

（2）以 AB 为直径作圆 O.

（3）作直线 $l /\!/ AB$，使 l 与 AB 的距离为 $\frac{1}{4}c$.

（4）设 l 交圆 O 于点 C. 连 CA、CB.

则△ABC 即为所求.

证明略.

[解 2] 用代数法作图.

设$\triangle ABC$的斜边为$AB=c$，AB中点为O，$BC=a$，$AC=b$.

则由题设有　$ab=\left(\frac{c}{2}\right)^2$，

又　$a^2+b^2=c^2$. 从而　$a+b=\frac{\sqrt{6}}{2}c$.

由此解得　$a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c$，$b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c$.

于是a、b可作出，从而$\triangle ABC$可作出.

11·42　给定长度a，角θ，比例$k>1$，试作一个$\triangle ABC$，使得$BC=a$，$\angle C-\angle B=\theta$，且$\frac{AB}{AC}=k$.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991年）

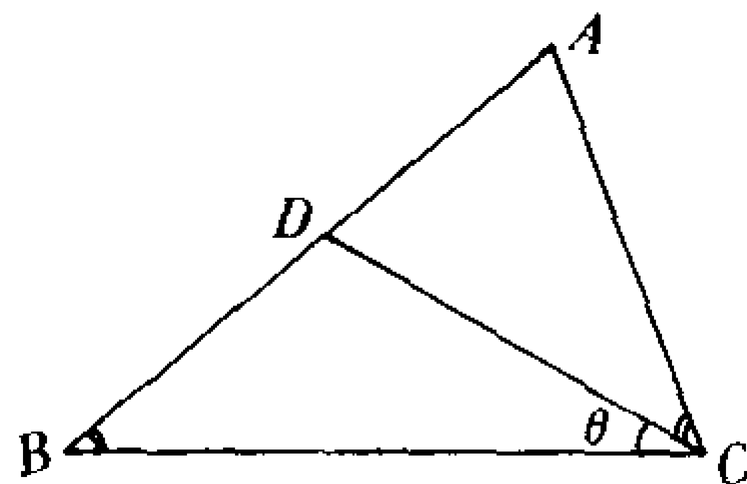
[解]　稍稍分析可有下面作法：

(1) 作线段$BC=a$;

(2) 以C为顶点作$\angle BCD=\theta$;

(3) 在射线CD上截$CD=\frac{1}{k}a$;

(4) 连BD;



(5) 以C为顶点作$\angle DCA=\angle B$，使CA与BD的延长线交于A.

则$\triangle ABC$即为所求.

下面我们证明$\triangle ABC$满足题目要求.

首先$BC=a$，$\angle BCD=\theta=\angle ACB-\angle B$.

在$\triangle ACD$和$\triangle ABC$中，因为　$\angle ACD=\angle B$，

$\angle ADC=\angle B+\theta=\angle ACB$.

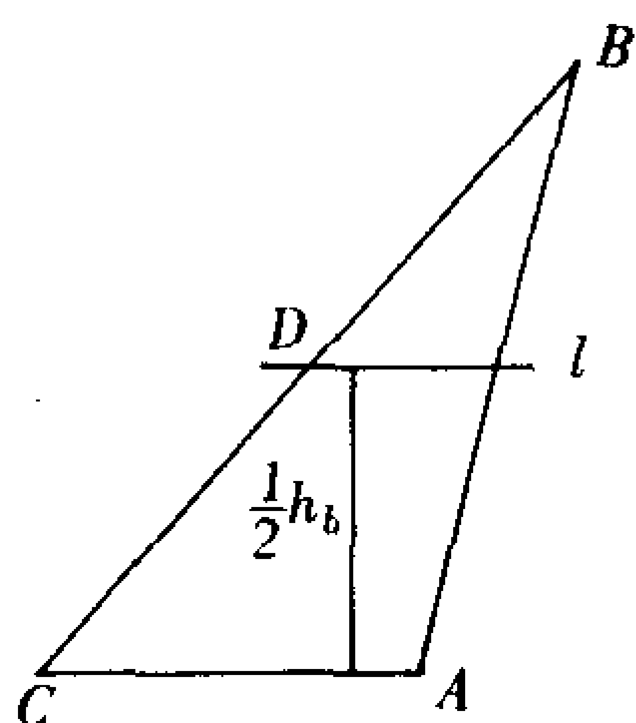
$\therefore$　$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，有　$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}=k$.

因此$\triangle ABC$符合要求.

11·43　已知：三角形的一边及该边上的高和另一边上的中线，求作三角形.

（基辅数学奥林匹克，1964年）

[解]　设三角形一边$AC=b$，BC边中线为m_a，AC边上的高为h_b.



作 $AC=b$，再作 $l/\!/AC$ 且使 l 与 AC 相距 $\frac{1}{2}h_b$.

以 A 为圆心，以 m_a 为半径作⊙A 交 l 于 D.

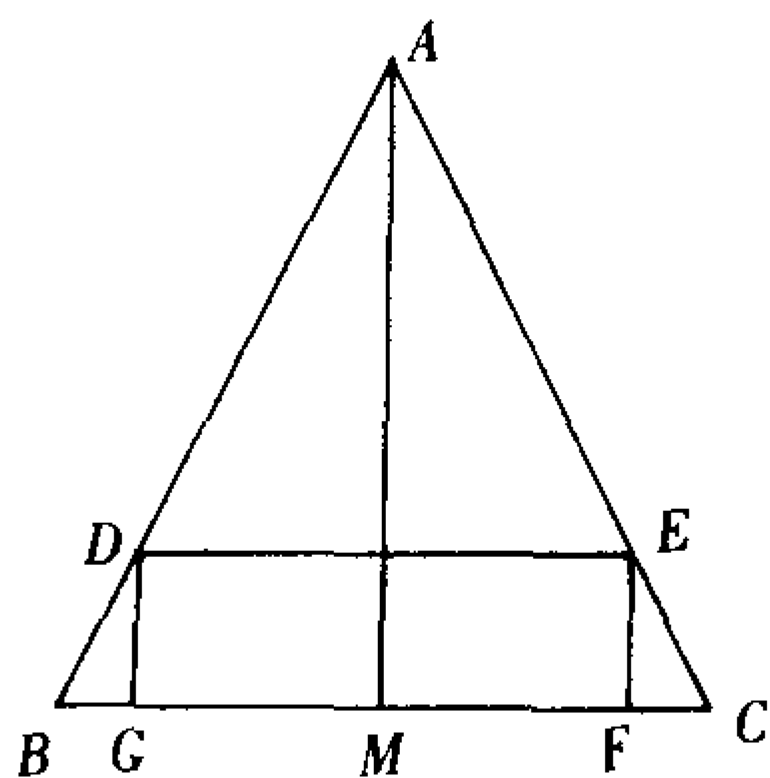
连 CD，且延长之，再截取 $BD=CD$.

连 AR，则△ABC 即为所求.

11·44 试作一个等腰三角形，使任何内接于它的、有两个顶点位于它的底边上的矩形的周长为一常数.

（莫斯科数学奥林匹克，1936 年）

［解］ 设内接矩形的周长定为 $2a$，截取 $BC=a$，过 BC 的中点 M 作 $MA\perp BC$，截取 $MA=a$（如图），则△ABC 即为所求.



下面给予证明.

显然 $AB=AC$.

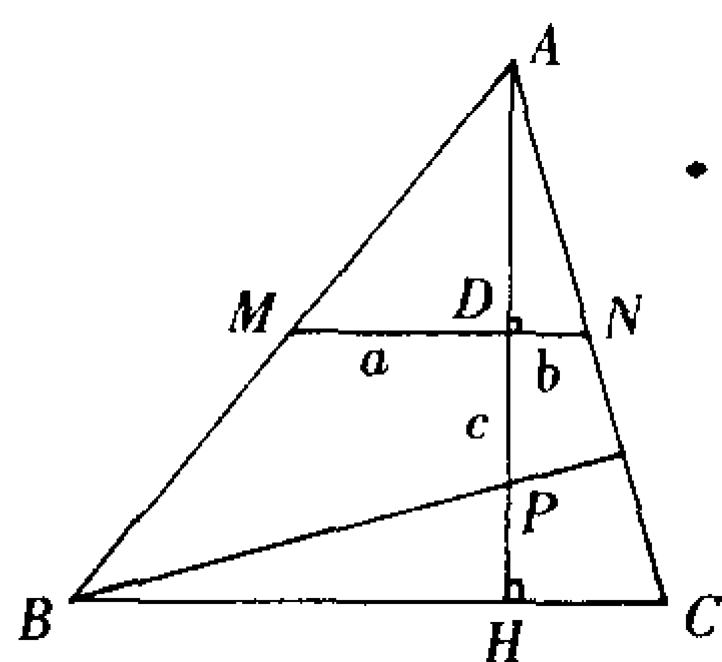
任作△ABC 内接矩形 $DEFG$，则

$$\begin{aligned}&DE+EF+FG+GD\\&=2GF+2BG+2FC\\&=2(BG+GF+FC)=2BC=2a.\end{aligned}$$

11·45 已给三个不共线的点 M、N、P，点 M 和 N 分别是△ABC 的两条边的中点，P 为△ABC 的垂心，求作△ABC.

（第 6 届拉丁美洲地区数学奥林匹克，1991 年）

［解］ 不妨设 M、N 分别为 AB、AC 的中点，AH 为 BC 边上的高，AH 交 MN 于 D，则



MD、DN 和 DP 均为已知线段.

设 $MD=a$，$DN=b$，$DP=c$.

令 $AD=x$，则 $DH=x$，$PH=x-c$.

由 $\angle HAC=\angle PBH$ 可得

直角△ADN∽直角△BHP，

于是 $\dfrac{AD}{DN}=\dfrac{BH}{PH}$，有 $\dfrac{x}{b}=\dfrac{2a}{x-c}$.

即　　$x^2-cx-2ab=0$，

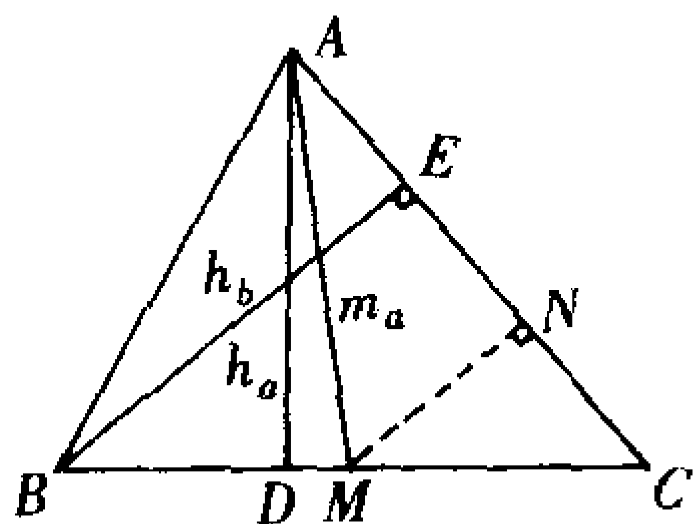
解得　$x=\frac{c+\sqrt{c^2+8ab}}{2}$.

所以 $AD=x$ 能够作出，$AH=2x$ 能作出，从而 H 点能作出，由 $BC\perp AH$ 及 B 在直线 AM 上，C 在直线 AN 上，于是$\triangle ABC$ 可以作出.

11·46　已知：h_a、h_b 和 m_a，求作$\triangle ABC$，使 BC、AC 边上的高分别为 h_a、h_b，BC 边上的中线为 m_a.

（第 2 届国际数学奥林匹克，1960 年）

[解]　假设$\triangle ABC$ 已作出，其中 AC 边上的高 $BE=h_b$，BC 边上的高 $AD=h_a$，BC 边上的中线 $AM=m_a$.



在直角$\triangle ADM$ 中，由于 $AD=h_a$、$AM=m_a$ 为已知，则$\triangle ADM$ 可作.

过 M 作 $MN\parallel EB$ 交 AC 于 N，因为 M 是BC 的中点，则 MN 是$\triangle EBC$ 的中位线.

$MN\perp AC$，$MN=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}h_b$.

由于 $AM=m_a$，$MN=\frac{1}{2}h_b$ 为已知，则直角三角形 AMN 可作.

又因为 C 是AN 和DM 所在直线的交点，则 C 点可作.

由 $BM=CM$，则 B 点可作.

于是$\triangle ABC$ 可作.

[作法]　（1）作直角$\triangle ADM$，使$\angle ADM$ 为直角，$AD=h_a$，$AM=m_a$，；

（2）以 AM 为直径作图，以 M 为圆心，$\frac{h_a}{2}$为半径画弧交此图于 N（和 N'），连 AN（和 AN'）；

（3）直线 AN（AN'）交直线 DM 于C（C'）；

（4）在直线 DM 上MC（和 MC'）的另一侧截 $BM=CM$（$B'M=C'M$），连 AB（和 AB'）；

则$\triangle ABC$（和$\triangle AB'C'$）即为所求.

证明略.

[讨论]　对于 m_a 与 h_a、h_b 大小可有下面几种情形：

(1) 当 $m_a > h_a$，$h_b < 2m_a$ 时，有两解；

(2) 当 $m_a > h_a$，$h_b = 2m_a$ 时，有一解；

(3) 当 $m_a > h_a$，$h_b > 2m_a$ 时，无解；

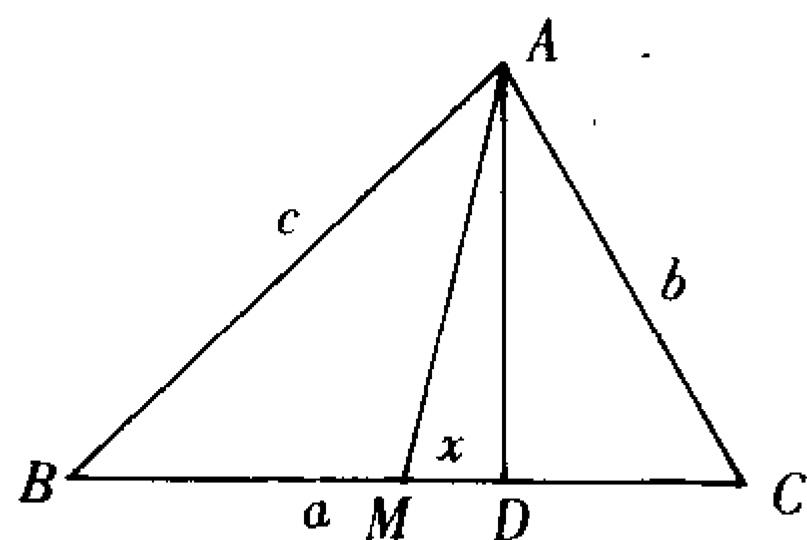
(4) $m_a = h_a$，$h_b < 2m_a$ 时，有一解，此时 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

(5) 当 $m_a = h_a$，$h_b \geqslant 2m_a$ 时，无解；

(6) 当 $m_a < h_b$ 时，无解.

11·47　已知：$\triangle ABC$ 的边 a 及该边的高 h_a，求 a 与 h_a 的关系，使得能用圆规直尺作$\triangle ABC$，它的三条高构成一个以 h_a 为斜边的直角三角形.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）



[解]　设 $AB = c$，$AC = b$.

BC 边的中点为 M，BC 边上的高为 AD，设 $DM = x$. 则由勾股定理得

$$c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2, \qquad ①$$

$$b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2, \qquad ②$$

若三角形的三条边上的高 h_a、h_b、h_c 组成一个以 h_a 为斜边的直角三角形，则

$$h_a^2 = h_b^2 + h_c^2.$$

即
$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad ③$$

将①、②代入③　得

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + \frac{1}{h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}.$$

整理得

$$x^4 + \left(2h_a^2 - \frac{5}{2}a^2\right)x^2 + h_a^4 - \frac{3}{2}a^2h_c^2 - \frac{7}{16}a^4 = 0.$$

解得
$$x^2 = \frac{5}{4}a^2 - h_a^2 \pm a\sqrt{2a^2 - h_a^2} \qquad ④$$

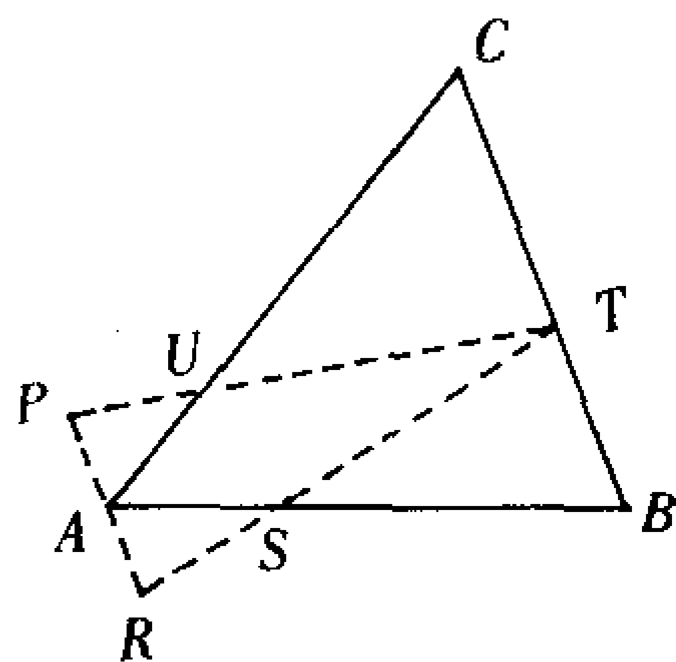
由 $\begin{cases}2a^2-h_a^2\geqslant 0,\\ x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 可得 $h_a\leqslant\frac{\sqrt{7}}{2}$.

于是在 $h_a\leqslant\frac{\sqrt{7}}{2}a$ 时，x 有解，从而 x 能用圆规直尺作出，进而 $\triangle ABC$ 可用圆规直尺作出.

11·48 设 S 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的一点，T 是 BC 边上的一点，U 是 CA 边上的一点，使得下列式子成立：$\frac{AS}{SB}=\frac{1}{2}$，$\frac{BT}{TC}=\frac{2}{3}$，$\frac{CU}{UA}=\frac{3}{1}$，假定 S、T、U 是已知给定的点，求作 $\triangle ABC$.

（前联邦德国数学奥林匹克，1986 年）

[解] 给出 $\triangle ABC$ 如下作法：



(1) 连接 TU，延长 TU 到 P，使得

$$\frac{PU}{UT}=\frac{1}{3};$$

(2) 连接 TS，延长 TS 到 R，使得

$$\frac{RS}{ST}=\frac{1}{2};$$

(3) 取线段 PR 的中点 A，连接 AU，延长 AU 到 C，使得

$$\frac{AU}{UC}=\frac{1}{3};$$

(4) 连 AS，延长 AS 与 CT 的延长线交于 B.

则 $\triangle ABC$ 即为所求.

下面我们证明 $\triangle ABC$ 为所求.

$$\frac{PU}{UT}=\frac{AU}{UC}=\frac{1}{3}.\quad\therefore\quad\triangle PAU\backsim\triangle TCU,$$

于是 $\frac{CT}{PA}=\frac{3}{1}$， ①

$\because$ $CT/\!/PA$. $\therefore$ $\frac{AS}{SB}=\frac{RS}{ST}=\frac{1}{2}$，有 $\frac{TB}{AR}=\frac{2}{1}$.

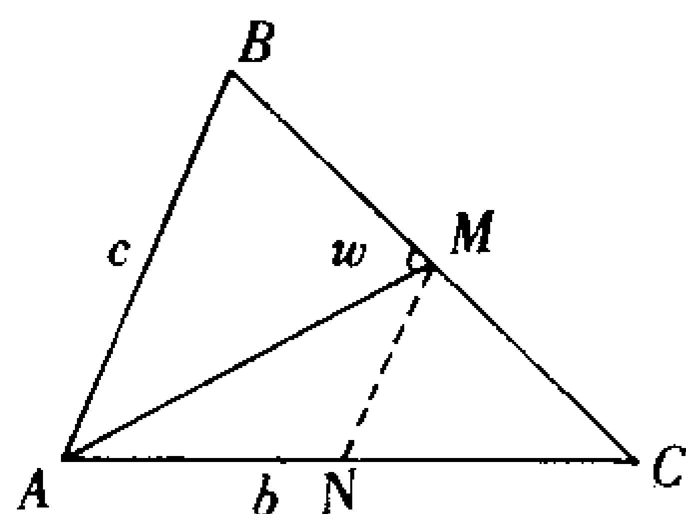
即 $\frac{TB}{PA}=\frac{2}{1}$， ②

由①、②可得 $\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{2}{3}$.

所以$\triangle ABC$即为所求.

11·49 求作$\triangle ABC$，使 $AC=b$，$AB=c$，$\angle AMB=\omega$，这里 M 是 BC 的中点，并且 $\omega<90°$. 并证明当且仅当 $b\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}\leqslant c<b$ 时，本题有解. 又在什么情况下等号成立?

（第 3 届国际数学奥林匹克，1961 年）



[解] 假定$\triangle ABC$已作出，并满足题设条件.

由 $\angle AMB=\omega<90°$ 可得

$\angle AMC=180°-\omega>90°$.

过 M 作 $MN /\!/ AB$ 交 AC 于 N，则 MN 是$\triangle ABC$ 的中位线，$MN=\dfrac{1}{2}c$.

在$\triangle AMC$ 中，由于 $AC=b$，$NM=\dfrac{c}{2}$，$\angle AMC=180°-\omega$ 为已知，所以$\triangle AMC$ 可作，从而$\triangle ABC$ 可作.

[作法]

(1) 作 $AC=b$，在线段 AC 上作圆周角等于 $180°-\omega$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$;

(2) 取 AC 的中点 N，以 N 为圆心，以$\dfrac{c}{2}$为半径作弧与弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 交于 M;

(3) 连 CM，延长 CM 到 B，使 $BM=CM$;

(4) 连 AB.

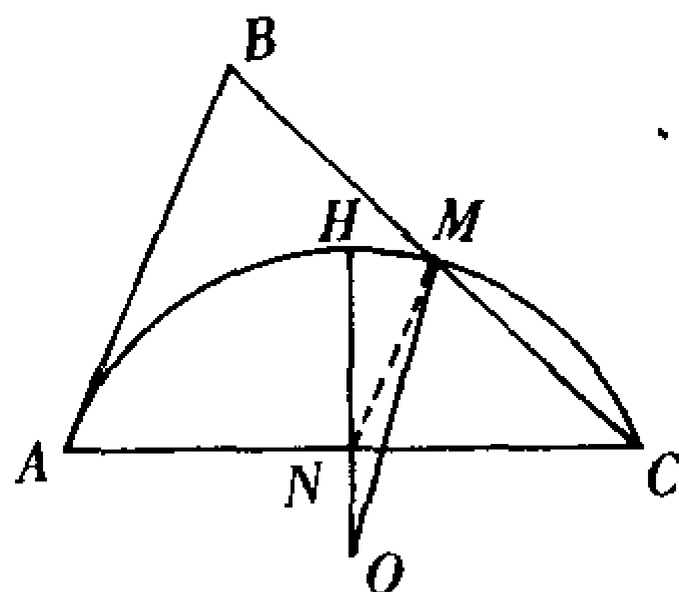
则$\triangle ABC$ 即为所求.

证明略.

[讨论] 我们证明：当且仅当 $b\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}\leqslant c<b$ 时，本题有解.

若本题有解，则 BC 的中点 M 必定在弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 上，且 $NM=\dfrac{1}{2}c$.

设弓形弧$\overset{\frown}{AkC}$的圆心为O，半径为R，对称轴为OH. 如图.



于是，要使M存在，必须

$OM \leqslant ON + NM$.　$R \leqslant ON + \frac{c}{2}$.　㊉

又　$ON = OH - NH = R - NC\text{tg}ACH$.

即　$ON = R - \frac{b}{2}\text{tg}\frac{\omega}{2}$.

代入㊉式得　$R \leqslant R - \frac{b}{2}\text{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{c}{2}$.

即　$b\text{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant c$.

又因为在$\triangle ACM$和$\triangle ABM$中，$AM = AM$，$CM = BM$，

$\angle AMB = \omega < 90° < 180° - \omega = \angle AMC$.

$\therefore$　$AB < AC$，即　$c < b$.

于是可得本题有解的必要条件是$b\text{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant c < b$.

下面证明　$b\text{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant c < b$是$\triangle ABC$可以作出的充分条件.

事实上，由$c < b$可得　$AN = \frac{b}{2} > \frac{c}{2}$.

即　A在以N为圆心，$\frac{c}{2}$为半径的圆N外.

又由$b\text{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant c$可知　$NH = \frac{b}{2}\text{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant \frac{c}{2}$. 即$H$点不在圆$N$外.

当$b\text{tg}\frac{\omega}{2} < c$时，$NH < \frac{c}{2}$，此时$H$点在圆$N$内，这时$\overset{\frown}{AkC}$上有一点$A$在圆$N$外，又有一点$H$在圆$N$内，所以$\overset{\frown}{AkC}$与圆$N$必定相交，从而$M$点可作，进而$\triangle ABC$可作. 因为这时$\overset{\frown}{AkC}$与圆$N$有两个交点，所以本题有两解.

当$b\text{tg}\frac{\omega}{2} = c$时，$NH = \frac{c}{2}$，$\overset{\frown}{AkC}$与圆$N$只有一个公共点$H$，此时$M$与$H$重合，由此可得$\triangle ABC$为直角三角形.

综上所述：

当且仅当 $b\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}<c<b$ 时，本题有两解；

当且仅当 $b\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=c<b$ 时，本题仅有一解，且$\triangle ABC$ 为以 A 为直角的直角三角形.

11·50　已知:$\triangle DEF$ 为$\triangle ABC$ 的内接相似三角形,其中 D、E、F 分别在 BC、CA、AB 边上,且$\angle D=\angle B$,$\angle E=\angle C$.(1)作出$\triangle ABC$ 的一个内接相似$\triangle DEF$;(2)求证这个构图中存在这样一点 O,绕着点 O 把$\triangle DEF$ 旋转一个适当角度到$\triangle D'E'F'$,这时点 F'、D'、E'便分别在射线 OA、OB、OC 上,且 $F'D'/\!/AB$,$D'E'/\!/BC$,$E'F'/\!/CA$.

(中国国家集训队测验题,1994 年)

[解]　(1)在 AB、AC 上取点 F'、E',再取点 D',使

$$\angle D'F'E'=\angle A,\quad \angle D'E'F'=\angle C,$$

连接 AD',并延长交 BC 于 D,过点 D 分别作 $D'F'$、$D'E'$ 的平行线,交 AB、AC 于 F、E.于是

$$\frac{AF'}{AF}=\frac{AD'}{AD}=\frac{AE'}{AE},$$

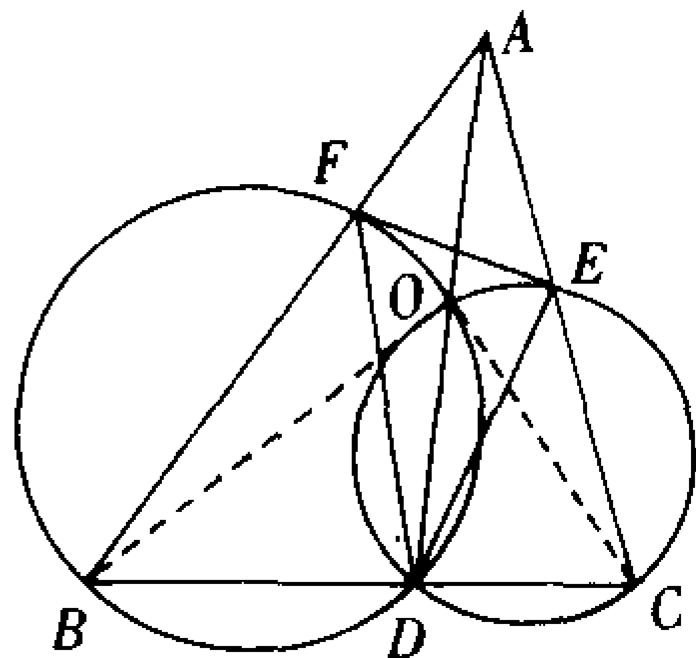
从而有　$EF/\!/E'F'$. 即有　$\triangle DEF\backsim\triangle D'E'F'$

而显然有$\triangle D'E'F'\backsim\triangle ABC$.

则$\triangle DEF$ 是$\triangle ABC$ 的一个内接相似三角形.

(2)从(1)可知　$\angle EDF=\angle B<\angle B+\angle C$.

所以,$\triangle BDF$ 与$\triangle CDE$ 的外接圆不相切于 D,从而这两圆还有一个异于 D 的交点,我们证明,这个交点就是题目中要求的点 O.如图,



由于

$$\begin{aligned}&\angle FAE+\angle FOE\\&=\angle BAC+360^\circ-\angle FOD-\angle EOD\\&=\angle BAC+(180^\circ-\angle FOD)\\&\quad+(180^\circ-\angle EOD)\\&=\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ,\end{aligned}$$

于是点 O 也在$\triangle AEF$ 的外接圆上.

因此　$\angle OFE=\angle OAE$.

同理　$\angle OED=\angle OCD$，$\angle ODF=\angle OBF$.

又　$\angle DFE=\angle BAC$，$\angle DEF=\angle ACB$，$\angle EDF=\angle ABC$，

从而$\angle OFD=\angle OAB$，$\angle OEF=\angle OCA$，$\angle ODE=\angle OBC$.

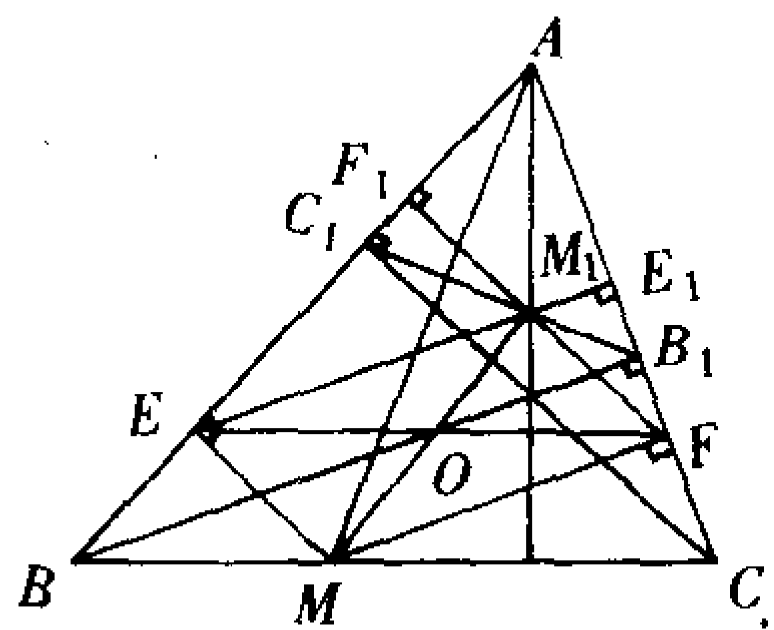
由此　$\triangle OFE\backsim\triangle OAC$，$\triangle OED\backsim\triangle OCB$，$\triangle ODF\backsim\triangle OBA$.

记　$\alpha=\angle FOA$，将$\triangle DEF$绕点O顺时针旋转角α到$\triangle D'E'F'$，则点F'在射线OA上，点E'、D'分别在射线OC、OB上，并且有$F'D'/\!/AB$，$O'E'/\!/BC$，$E'F'/\!/CA$.

11·51　已知：点A、M、M_2及有理数$\lambda(\lambda\neq-1)$，试作$\triangle ABC$，使M在BC上，M_1在B_1C_1上，这里B_1、C_1是B、C在边AC、AB上的垂足，并且　$\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{B_1M_1}{M_1C_1}=\lambda$.

（第31届国际数学奥林匹克候选题，1990年）

［解］　假设$\triangle ABC$已作出.设E、F分别为M在AB、AC上的射影.



E_1、F_1分别为E在AC上，F在AB上的射影.

由于　$EM/\!/CC_1$，所以　$\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{BE}{EC_1}$.

设EE_1与B_1C_1交于M'，由于$EM'/\!/BB_1$，则

$$\frac{B_1M'}{M'C_1}=\frac{BE}{EC_1}=\frac{B_1M_1}{M_1C_1}.$$

于是M_1与M'重合.

同理可证FF_1与B_1C_1交于M_1.

在$\triangle AEF$内，高EE_1、FF_1相交于M_1，所以$AM_1\perp EF$.

易知MFM_1E是平行四边形，所以MM_1与EF的交点O平分MM_1.因而O点可作出，从而$\triangle ABC$可作出.

由以下可得出下面的作法：

(1)以AM为直径作圆；

(2)过MM_1的中点O作AM_1的垂线交圆于E、F.

(3)作直线AE、AF.

(4)过M作$MP/\!/AF$交AE于P.

(5)由 $\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}=\lambda$ 作出点B.

(6)直线 AF 交BM 于C.

则$\triangle ABC$ 即为所求.

11·52 已知:等边$\triangle ABC$,求作它的外接等边三角形且使面积最大.

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

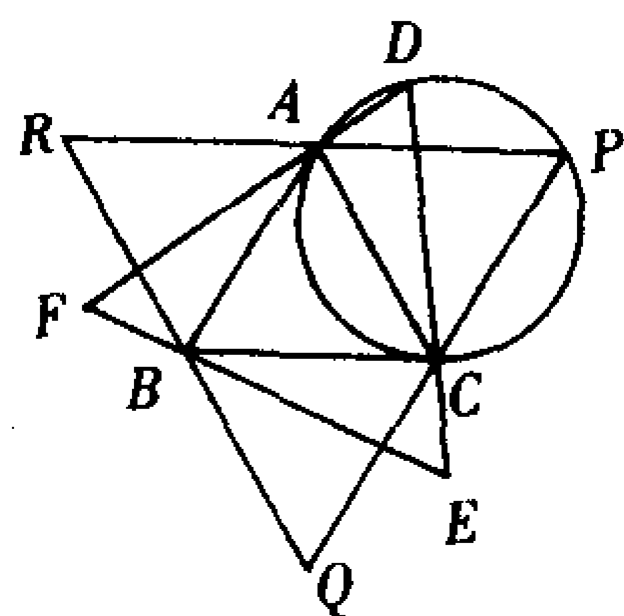
[解] 如果经过 A、B、C 三点,分别作三直线 DF、FE、ED 使与$\triangle ABC$ 的三边成相等的角,即

$$\angle DAC=\angle FBA=\angle ECB.$$

则 $\triangle DAC\cong\triangle FBA\cong\triangle ECB$.

因此可得 $DF=FE=ED$,则$\triangle DFE$ 为等边三角形.

但 $\triangle DEF=\triangle ABC+\triangle DAC+\triangle FBA+\triangle ECB$
$=\triangle ABC+3\triangle DAC$.



欲使$\triangle DEF$ 的面积为最大,必须使$\triangle DAC$的面积为最大,现 AC 为定长,$\angle ADC$ 为定角且等于 60°,则 D 在以 AC 为弦,圆周角为 60°的一个在$\triangle ABC$ 外侧的弓形弧上,显然若 D 在$\overset{\frown}{AC}$的中点P 的位置上,它到 AC 的距离为最大.亦即以 AC 为底,顶点在$\overset{\frown}{AC}$上的三角形中以$\triangle PAC$的面积为最大,但此时$\angle PAC$ 等于 60°,故 AP 平行于BC.因此得到下面作法.

[作法] 过等边$\triangle ABC$ 各顶 A、B、C 分别作平行于对边的直线,两两相交于 P、Q、R.则$\triangle PQR$ 即为所求三角形.

11·53 已知:两个锐角三角形$\triangle A_0B_0C_0$ 与$\triangle A_1B_1C_1$,求作一个$\triangle ABC$,使$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$($A$ 与A_1,B 与B_1,C 与C_1 分别为对应顶点),$\triangle ABC$ 外接于$\triangle A_0B_0C_0$(C_0 在 AB 上,B_0 在 AC 上,A_0 在 BC 上),并且$\triangle ABC$ 是满足上述条件的三角形中面积最大的一个.

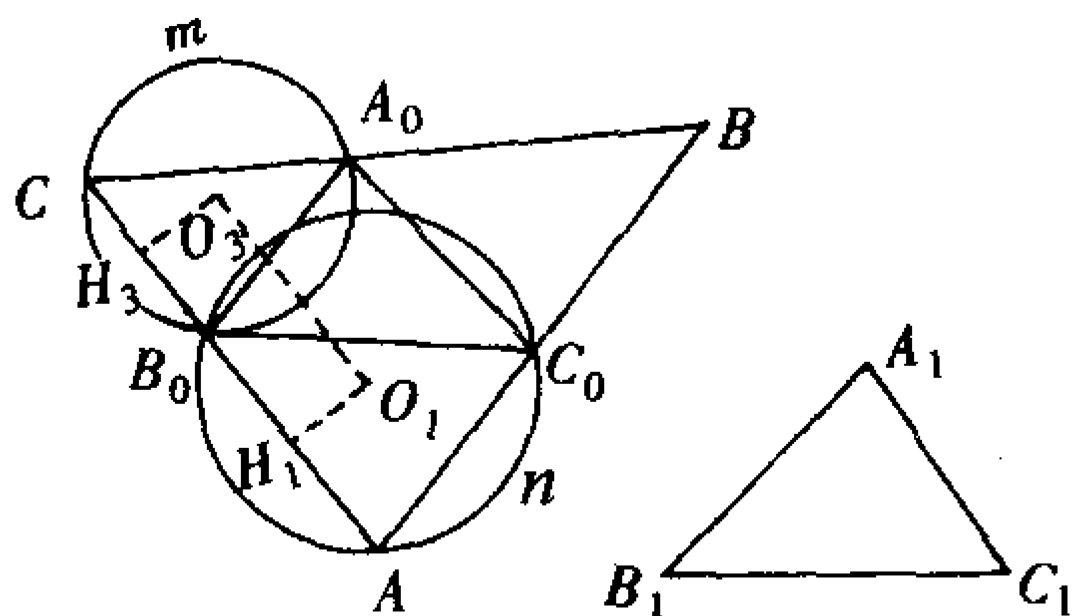
(第 9 届国际数学奥林匹克,1967 年)

[解] 假设$\triangle ABC$ 已作出,且满足条件.

则$\triangle ABC$ 外接于$\triangle A_0B_0C_0$, 且$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

即 $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$.

这样，点 A 必在以 B_0C_0 为弦，所含圆周角等于 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 上，点 C 必在以 A_0B_0 为弦，所含圆周角等于 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 上.



这时，过 B_0 任意作一直线与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$，$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 交于 A、C 点，连 CA_0 并延长，连 AC_0 并延长，两延长线相交于 B，得到 $\triangle ABC$.

这样得到的 $\triangle ABC$ 满足了题设的两个条件，即 $\triangle ABC$ 外接于 $\triangle A_0B_0C_0$ 以及 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

下面的问题是，如何使作出的 $\triangle ABC$ 是面积最大的一个.

从上面的作法可以看出，这取决于过 B_0 所作直线 AC 的位置.

因为上面所作出的 $\triangle ABC$ 都是相似的，所以只要作出的 AC 边最长就可以了.

过 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 的圆心 O_1 作 $O_1H_1 \perp AC$，垂足为 H_1，过 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 的圆心 O_3 作 $O_3H_3 \perp AC$，垂足为 H_3，则有

$$B_0C = 2B_0H_3, \quad B_0A = 2B_0H_1.$$

$$AC = 2(B_0H_3 + B_0H_1) = 2H_2H_3.$$

为使 AC 最大，就需使 H_1H_3 最大，显然当 $H_1H_3 /\!/ O_1O_3$ 时，H_1H_3 最大，此时 $H_1H_3 = O_1O_3$.

［作法］ (1)在 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外部，分别作以 B_0C_0 为弦，所含圆周角等于 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 和以 A_0B_0 为弦，所含圆周角等于 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$，并说这两个弧的圆心为 O_1 和 O_3.

(2)连 O_1O_3，过 B_0 作 $AC /\!/ O_1O_3$，与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$、$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别交于点 A、C.

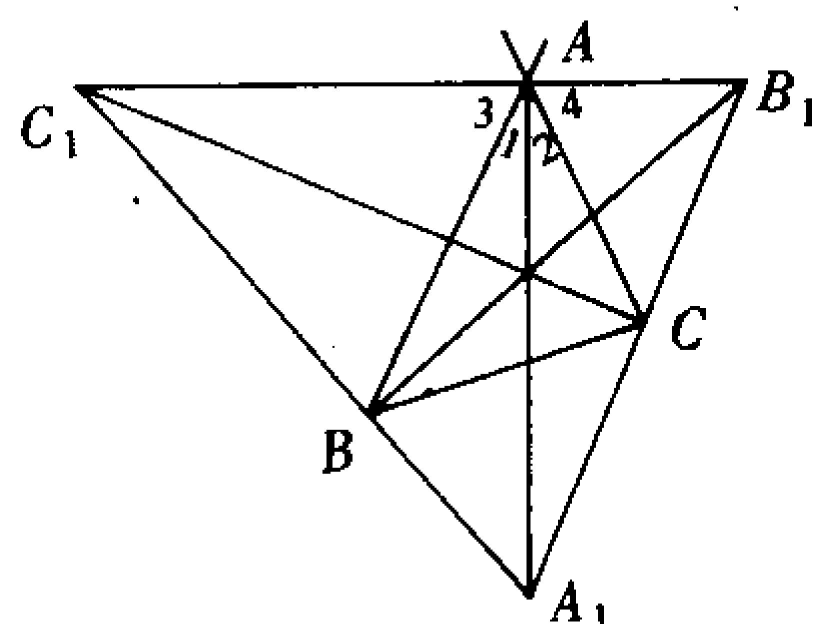
(3)连结 CA_0、AC_0，并延长相交于点 B.

则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

证明略.

11·54 已知:三点,求作三角形使这三点是该三角形的三个旁心.

(基辅数学奥林匹克,1957 年)



[解] 假设$\triangle ABC$为所求作的三角形,它的三个旁心为A_1、B_1、C_1,如图.

∵ A_1是旁心, ∴ $\angle 1=\angle 2$.

又 B_1、C_1是旁心,

∴ $\angle 3=\angle 4$均为$\angle BAC$的邻补角的一半,

∴ $\angle A_1AC_1=\angle 1+\angle 3=90^\circ$.

即 C_1、A、B_1共线,且$AA_1\perp B_1C_1$.

其他同理可证.

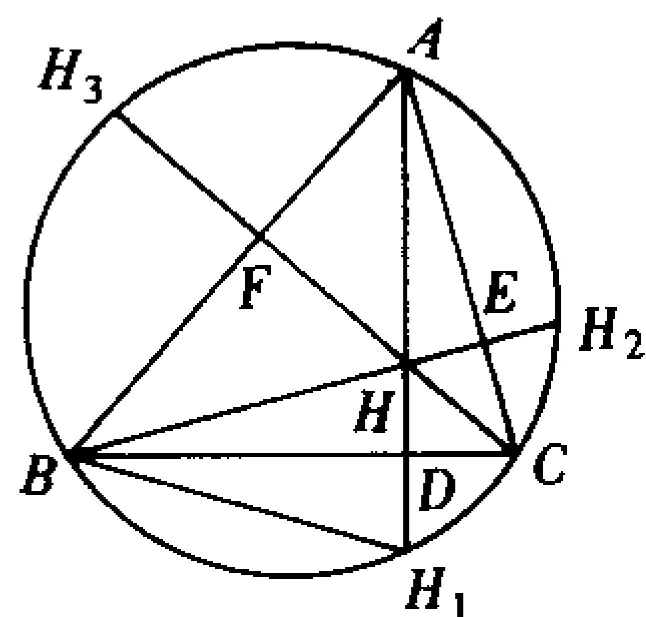
为此,可得到下面的作法:

作$A_1A\perp B_1C_1$于A;作$B_1B\perp A_1C_1$于B;作$C_1C\perp A_1B_1$于C.

连AB、BC、CA,则$\triangle ABC$即为所求.

11·55 已知$\triangle ABC$的垂心关于其三边的对称点分别是H_1、H_2、H_3,试根据这三点作出$\triangle ABC$.

(莫斯科数学奥林匹克,1941 年)



[解] 如图,∵ H、D、C、E四点共圆,

∴ $\angle ACB=\angle BHH_1=\angle BH_1A$,

故 A、B、H_1、C四点共圆,

同理可证:H_2、H_3均在$\triangle ABC$的外接圆上.

又 $\overset{\frown}{AH_3}=180^\circ-\overset{\frown}{BC}$,

且 $\overset{\frown}{AH_2}=180^\circ-\overset{\frown}{BC}$,

∴ $\overset{\frown}{AH_3}=\overset{\frown}{AH_2}$,

即 A是$\overset{\frown}{H_2H_3}$的中点.

同理可证 B是$\overset{\frown}{H_1H_3}$的中点,C是$\overset{\frown}{H_1H_2}$的中点.

据此分析不难作出$\triangle ABC$.

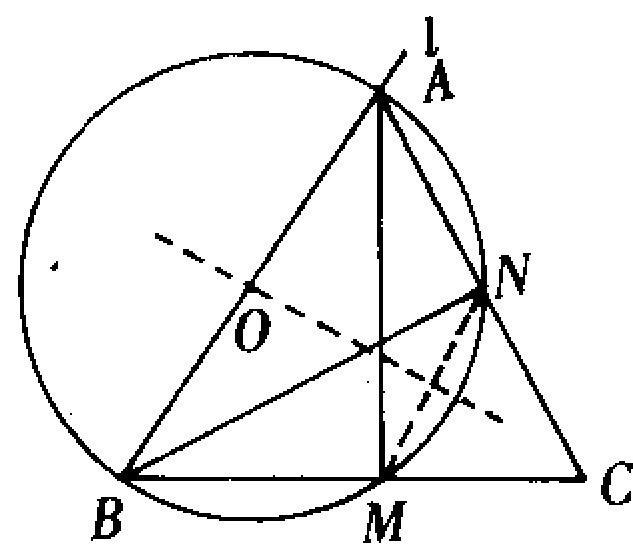
11·56 试根据$\triangle ABC$的高AM和BN的垂足M和N,及边AB所在的直线,求作$\triangle ABC$.

(莫斯科数学奥林匹克,1941 年)

[解] 设AB所在的直线为l.

作 MN 的垂直平分线与 l 交于 O，

作⊙O(半径为 ON)与 l 分别交于 A、B，设 AN、BM 的交点为 C. 如图.

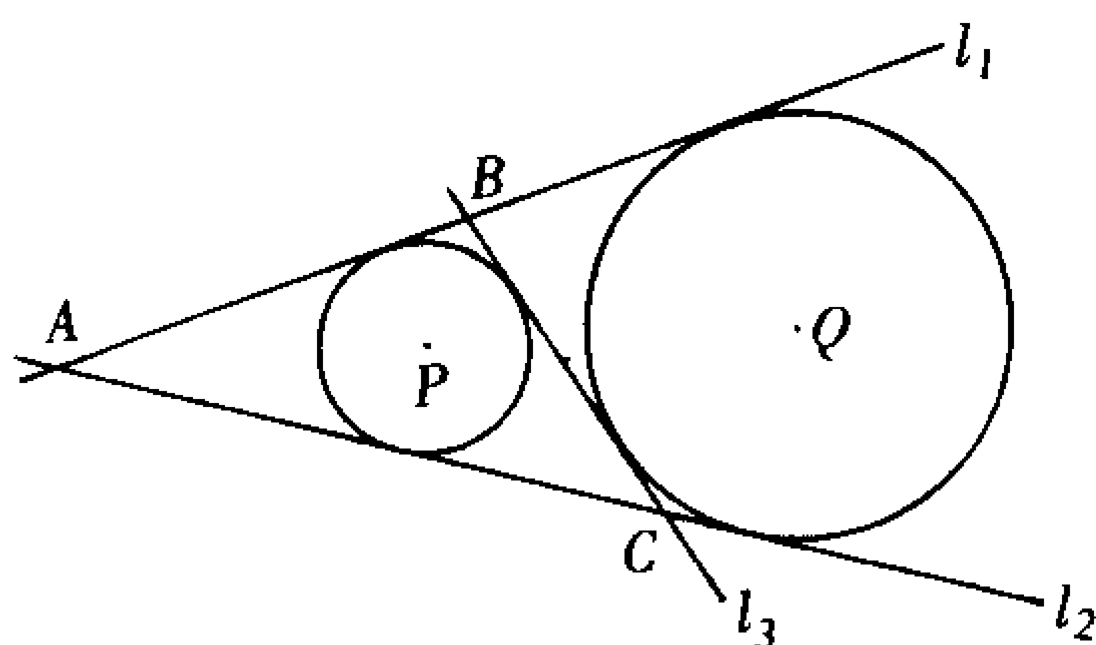


则△ABC 即为所求.

11·57　已知：一条直线和两点，求作三角形，使它的一边在这条直线上，两点是这个三角形的内心和一个旁心.

（基辅数学奥林匹克，1961 年）

［解］　已知一条直线 l 和两点 P、Q.



作⊙P 与⊙Q 使它们都与 l 相切，且 l 为两圆的外公切线.

再作⊙P、⊙Q 的另一条外公切线 l_1 及一条内公切线 l_2.

设　l、l_1、l_2 的交点分别为 A、B、C.

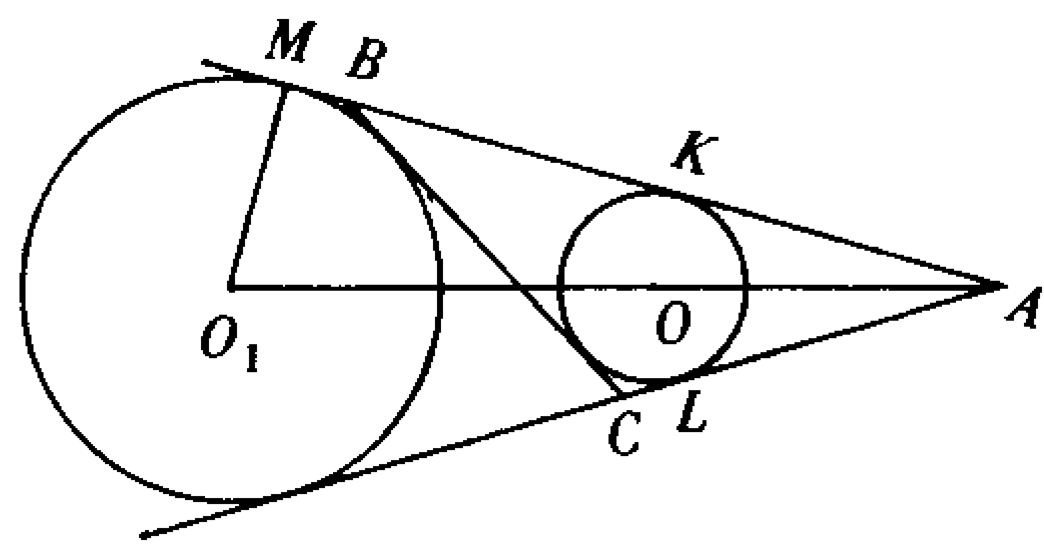
则△ABC 即为所求.

11·58　已知：三角形的底边、顶角和内切圆半径，求作此三角形.

（基辅数学奥林匹克，1963 年）

［解］　设顶角为 α，底边长为 a，内切圆半径为 r.

作顶角$\angle A=\alpha$，



作⊙O(半径 r)与$\angle A$ 的两边相切于 K、L.

在 AK 的延长线上截取 $KM=a$，

作 $MO_1\perp AM$ 与 AO 交于 O_1 点.

作⊙O_1(半径 O_1M).

再作⊙O、⊙O_1 的内公切线分别交两圆的外公切线于 B、C. 如图.

则△ABC 即合所求.

11·59　作直角三角形，已知其内切圆半径 r 及斜边上的高 h.

（基辅数学奥林匹克，1946 年）

［解］ 假设这样的 Rt$\triangle ABC$ 已作好，$\angle ACB=90^\circ$，$\odot O$ 切三边于 E、N、P，CD 是高．如图．

作 $OK\perp CD$ 于 K，

$\because$ $CK=CD-DK=h-r$．

又 $CO=\sqrt{OP^2+CP^2}=\sqrt{2}r$，

$\therefore$ Rt$\triangle OKC$ 可作，因而 $\triangle ABC$ 可作．

为此可得到下面的作法，作$\angle LCM=90^\circ$

作$\odot O(r)$使其切 LC 于 N，MC 于 P

由 $CO=\sqrt{2}r$，$CK=h\cdot r$ 作 Rt$\triangle OKC$，在 CK 的延长线上截取 $KD=r$．

过 D 作 CD 的垂直线分别交$\angle LCM$ 的两边于 A、B．

则$\triangle ACB$ 即为所求．

11·60 给定一圆和圆内两点 P 和 Q．在圆内作一个内接直角三角形使它的两条直角边分别经过点 P 和 Q．

（基辅数学奥林匹克，1965 年）

［解］ 设给定圆为$\odot O$．

以 PQ 为直径作圆$\odot O_1$，设与$\odot O$ 相交于 R．

则 R 即为所求直角三角形的直角顶．

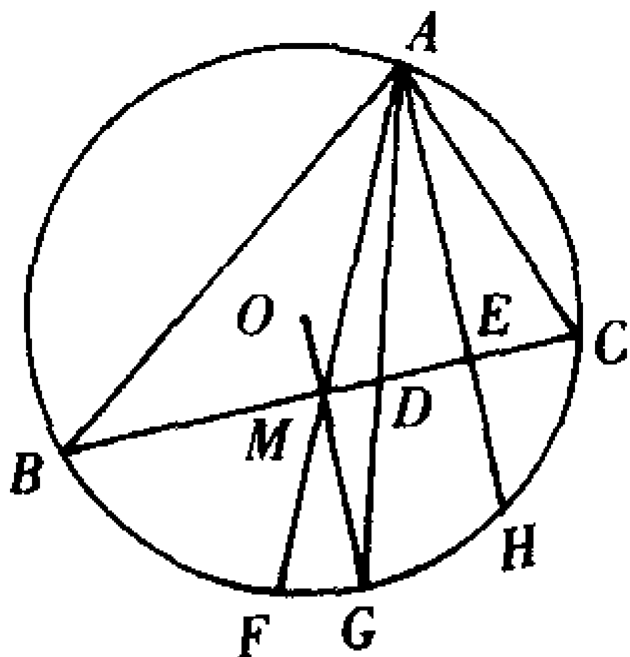
(1)当$\odot O_1$ 与$\odot O$ 内含时无解；

(2)当$\odot O_1$ 与$\odot O$ 内切时一解；

(3)当$\odot O_1$ 与$\odot O$ 相交时两解．

11·61 已知：自三角形的同一顶点引出的中线、角平分线、高同该三角形外接圆的交点，试作出这个三角形．

（莫斯科数学奥林匹克，1935 年）



［解］ 设中线、角平分线、高同该三角形的外接圆的交点分别为 F、G、H．

则该外接圆$\odot O(r)$可确定．如图．

连 OG，作 $HA\parallel OG$ 与$\odot O$ 交于 A．

连 AF 与 OG 交于 M，过 M 点作 OM 的垂线与$\odot O$ 分别交于 B、C．

则　$\triangle ABC$ 即为所求.

11·62　已知:三角形的一条高和引自同一顶点的中线,以及三角形的外接圆半径,试作出该三角形.

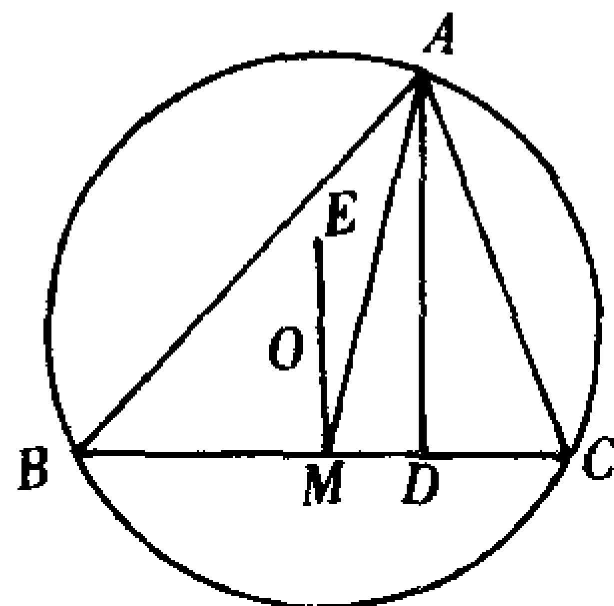
(莫斯科数学奥林匹克,1941 年)

[解]　作 Rt$\triangle AMD$,使 $AD=h_a$,$AM=m_a$,

过 M 点作 $ME\perp MD$,

作$\odot A$(半径 r)交 ME 于 O 点,

再作$\odot O$(半径 r)与 MD 的延长线分别交于 B、C,连 AB、AC.如图.



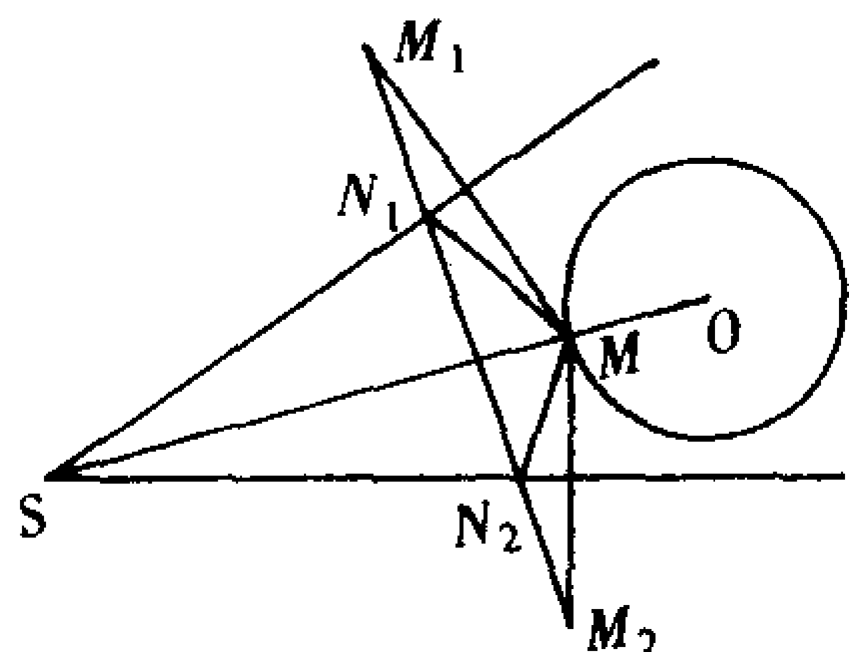
则　$\triangle ABC$ 即为所求.

11·63　在一个已知锐角内有一个圆.两个顶点在角的两边上,第三个顶点在圆上的所有三角形中,找一个周长最短的三角形.

(基辅数学奥林匹克,1956 年)

[解]　设 M 是圆上某点,M_1 和 M_2 是点 M 关于已知角的两边 SL_1 和 SL_2 的对称点.

M_1M_2 与 SL_1 和 SL_2 分别交于 N_1、N_2,如图.



(1)当一个顶点与 M 重合,其他两顶点在角的两边上的一切三角形中,$\triangle MN_1N_2$ 的周长最小,这个周长等于 M_1M_2 的长.

(2)因为　$\angle M_1SM_2=2\angle L_1SL_2$,

则 M_1M_2 是两腰为 $SM_1=SM_2=SM$ 的等腰$\triangle M_1SM_2$ 的底边.

故当 SM 最小,即当点 M 最接近 S 时 M_1M_2 最小.即 M 是$\odot O$ 与 SO 的交点.

为此,得到下面的作法:

连 SO 与$\odot O$ 交于 M 点,

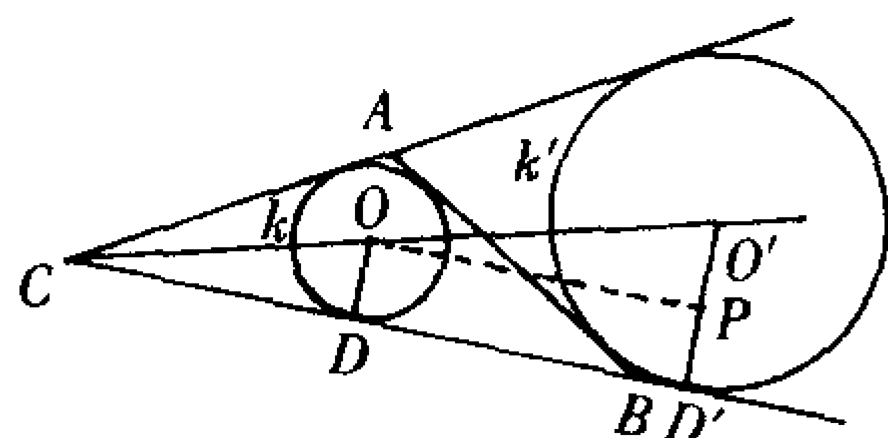
作 M 关于 SL_1 的对称点 M_1,M 关于 SL_2 的对称点 M_2.

设 M_1M_2 分别与 SL_1、SL_2 交于点 N_1、N_2.

则　$\triangle MN_1N_2$ 即为所求之三角形,即它的周长最小.

11·64　已知:边 AB,内切圆半径 r 以及边 AB、边 CA 及 CB 的延长线相切的旁切圆的半径 r_c,求作$\triangle ABC$.

(匈牙利数学奥林匹克,1900 年)



[解]　设 D 是$\triangle ABC$ 的内切圆 k 和边 BC 相切的切点,D'是旁切圆 k' 和边 BC 的延长线相切的切点.

设 $AB=c, BC=a, CA=b$,则由切线长定理得

$$CD=\frac{a+b-c}{2},\quad CD'=\frac{a+b+c}{2},$$

于是　$DD'=CD'-CD=\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{a+b-c}{2}=c.$

过 O 作 $OP\perp O'D'$,垂足为 P,则　$OO'\geqslant r_c+r$,

又　$OO'=\sqrt{OP^2+O'P^2}=\sqrt{c^2+(r_c-r)^2}$,

即　$(r_c+r)^2\leqslant c^2+(r_c-r)^2$,

于是　$rr_c\leqslant\dfrac{c^2}{4}$.

于是当已知条件满足 $rr_c\leqslant\dfrac{c^2}{4}$时,可获得如下作法:

(1)取长为 c 的线段 DD',过 D 作 DD'的垂线,截 $OD=r$,过 D'作 DD'的垂线截 $O'D=r_c$,且 O 和 O'在直线 DD'的同侧;

(2)分别以 O 及 O'为圆心;以 r 及 r_c 为半径作圆 k 及圆 k';

(3)延长 $O'O$ 与直线 DD'交于点 C;

(4)作圆 k 及圆 k'的内公切线,过 c 作圆 k 和圆 k'的另一条外公切线(DD'是其中一条),则内公切线与两条外公切线交于 A 点和 B 点.

则　$\triangle ABC$ 为所求.

11·65　已知:$\triangle ABC$ 的边 $BC=a$,外接圆的半径 $R(2R>a)$及差 $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}$,这里 $c=AB, b=AC$.求作$\triangle ABC$.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[解]　作以 R 为半径的圆,并截弦 $BC=a$,则角 A 可以确定($\overset{\frown}{BC}$

所对的圆周角).

设 $\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{l}$，则$\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{\sin B}=\frac{2R}{l}$，

即 $l(\sin B-\sin C)=2R\sin B\sin C$,

$$2l\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}=R[\cos(B-C)-\cos(B+C),],$$

$$2l\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}=R\left(1-2\sin_1^2\frac{B-C}{2}+\cos A\right).$$

记 $x=\sin\frac{B-C}{2}$，则 $2lx\sin\frac{A}{2}=R(1-2x^2+\cos A)$.

解关于 x 的方程

$$2kx^2+2lx\sin A-R-R\cos A=0.$$

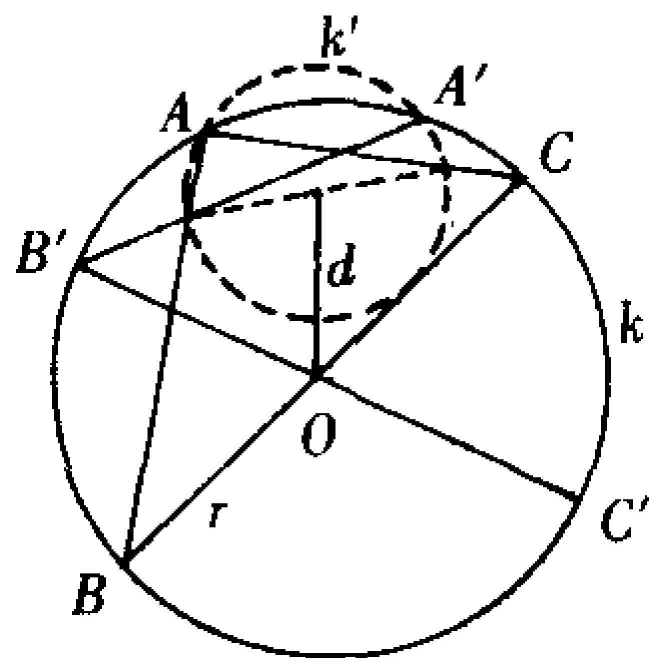
得 $x=\frac{\sin\frac{A}{2}(\sqrt{l^2+4R^2}-l)}{2R}$.

于是 $B-C$ 可确定，又 $B+C$ 可确定，因而 B、C 可确定，$\triangle ABC$ 可作出.

11·66 给定一个圆和圆内的点 P 和 Q，求作内接于这个圆的直角三角形，使它的一个直角边通过点 P，另一个直角边通过点 Q，点 P 和 Q 在什么位置时，本题无解？

(匈牙利数学奥林匹克，1894 年)

[解] 对线段 PQ 所张的角为直角的点的轨迹是以 PQ 为直径所作的圆 K'，圆 K' 和已知圆 K 的交点为 A，在圆 K 内作过 A、P 的弦 AB 和过 A、Q 的弦 AC，则 $\triangle ABC$ 即为所求.



为了使得直角边本身而不是它们的延长线通过点 P 和 Q，因此 P 和 Q 应该在已知圆 K 内.

如果点 P 和 Q 在已知圆 K 内，则圆 K 与圆 K' 有几个交点，本题就有几个解：

设 r 是圆 K 的半径，d 是圆 K 的圆心到线段 PQ 的中点的距离，则

(1)如果 $\frac{1}{2}PQ>r-d$，则有两个解；

(2)如果$\frac{1}{2}PQ=r-d$,则只有一解;

(3)如果$\frac{1}{2}PQ<r-d$,则无解.

11·67 在已知圆内求作内接等腰三角形,使这等腰三角形的底与其底上的高的和为极大.

(中国上海市数学竞赛,1956 年)

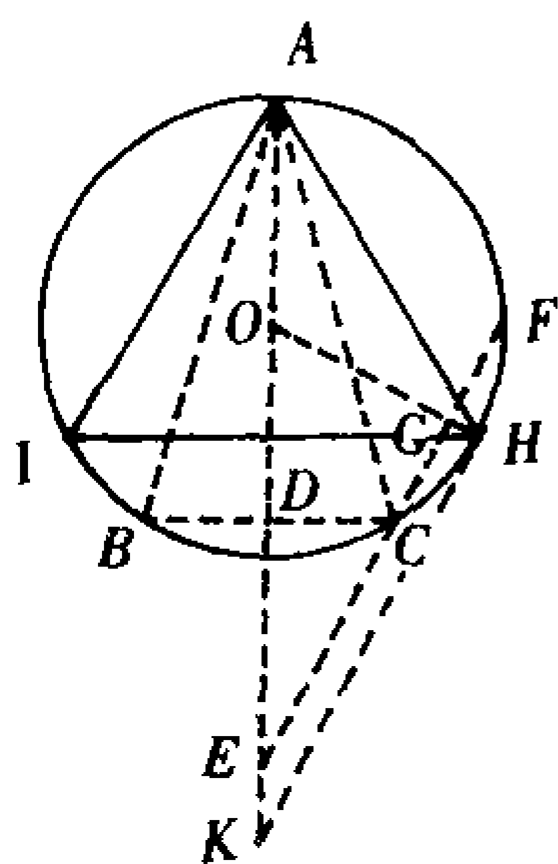


图 1

[解 1] 令$\triangle ABC$为圆内接等腰三角形,(图 1)则高 AD 必过圆心 O. 延长 AD 至 E,使 $DE=BC$,则 AE 为底与底上的高的和.

连 EC,有 $DC:DE=1:2$,

$\therefore$ EC 的方向确定.

在与 EC 平行的各直线中,能使 AE 的长为最大,且与圆有公共点的为圆 O 的切线.

下面作出这个等腰三角形.

作圆内接等腰$\triangle ABC$,并作高 AOD. 延长 AD 至 E 使 $DE=BC$,连 EC 并延长之,使交圆于另一点 F.

作 $OG\perp EF$,并延长之使交圆于 H,连 AH. 并在圆上截取 AI 使 $AI=AH$,连 IH.

则$\triangle AIH$为所求作的三角形. 下面给予证明:

$AH=AI$, $\therefore$ $\triangle AIH$ 是圆内接等腰三角形.

由作法知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AI}=\overset{\frown}{AH}$, 故 $IH /\!/ BC$,

因此 $AD\perp IH$,则 AL 是 IH 上的高.

作 $HK\perp OH$,则 HK 切圆 O 于 H,且 $HK /\!/ CE$,

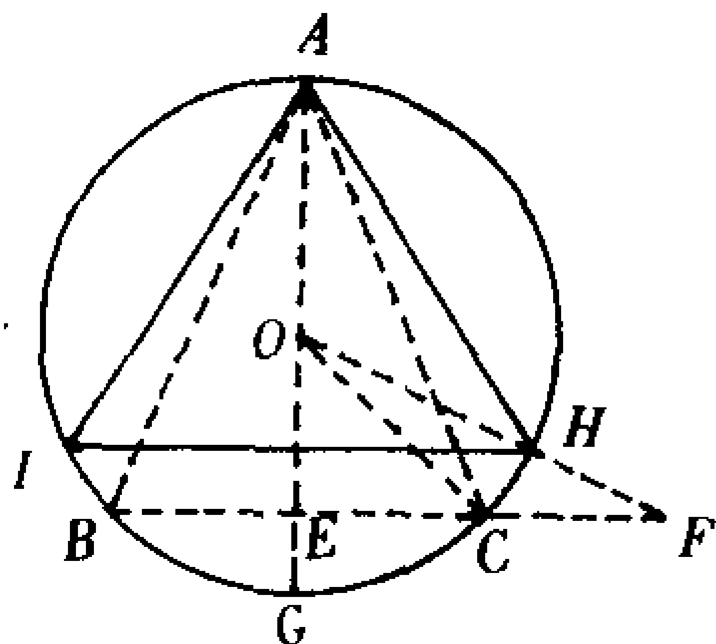


图 2

$\therefore$ $LH:LK=1:2$,

$\therefore$ $LK=IH$. 有 $AK=AL+IH$.

HK 是同方向各线中截直线 AOK 所成线段 AK 是最大可能的一条直线.

$\therefore$ $\triangle AIH$ 是能使底与高的和为极大的圆内接等腰三角形.

[解 2] 令一个圆内接等腰$\triangle ABC$,高是 AE,则 AE 过圆心 O.(图 2)

令$\angle OCE=\alpha$，则 $OE=r\sin\alpha$，$EC=r\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad BC+AE&=2r\cos\alpha+(r+r\sin\alpha)\\&=r+r(\sin\alpha+2\cos\alpha)\\&=r+\sqrt{5}r\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\alpha+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)\\&=r+\sqrt{5}r(\sin\alpha\cos\phi+\cos\alpha\sin\phi)\\&=r+\sqrt{5}r\sin(\alpha+\phi).\ (这里\ \phi=\operatorname{arctg}2)\end{aligned}$$

当 $\alpha+\phi=90^\circ$，即 $\alpha=90^\circ-\phi$ 时，$\sin(\alpha+\phi)=1$ 为最大，即底和底边上的高有极大值 $r(1+\sqrt{5})$.

这时 $\quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(90^\circ-\phi)=\operatorname{ctg}\phi=\dfrac{1}{2}$.

为此，得到下面的作法：

在直径 AOG 上，取任意长 OE，作 $EF\perp OE$，

且令 $EF=2OE$，连 OF 交圆于H，连 AH，并在圆上截取 AI 使 $AI=AH$，连 IH，则$\triangle AIH$ 为所求的三角形.

［**解 3**］ 令底边为 $2x$，(图 3)则高为 $r+\sqrt{r^2-x^2}$.

令底与高的和为 y，则 $y=2x+r+\sqrt{r^2-x^2}$，而 r 为定值，要令 y 为极大，只要 $2x+\sqrt{r^2-x^2}$为极大.

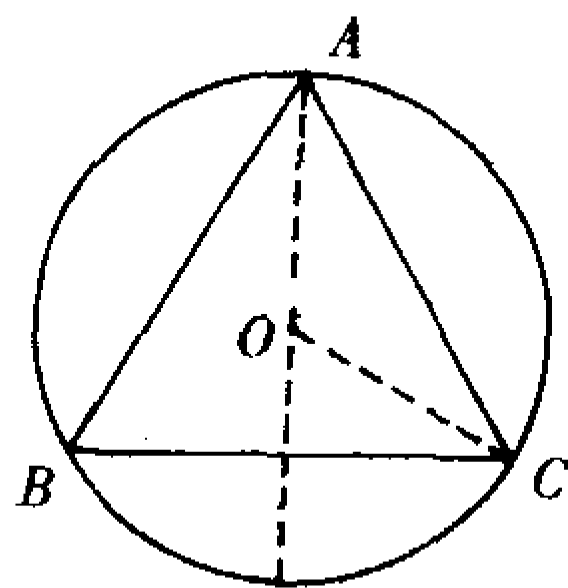


图 3

令 $\quad y_1=2x+\sqrt{r^2-x^2}$，

有 $\quad y_1-2x=\sqrt{r^2-x^2}$，

即 $\quad y_1^2-4y_1^2x+4x^2=r^2-x^2$，

故 $\quad 5x^2-4y_1x+y_1^2-r^2=0$，

$$\therefore\quad x=\frac{2y_1\pm\sqrt{4y_1^2-5(y_1^2-r^2)}}{5}=\frac{2y_1\pm\sqrt{5r^2-y_1^2}}{5},$$

要 x 有实值，则 $5r^2-y_1^2\geqslant 0$，即 $\quad(\sqrt{5}r+y_1)(\sqrt{5}r-y_1)\geqslant 0$，

$\therefore\quad -\sqrt{5}r\leqslant y_1\leqslant\sqrt{5}r$，即 $\quad y_1$ 的极大值为$\sqrt{5}r$.

因此 y 的极大值为 $r+y_1=r+\sqrt{5}r$.

则 $\quad x=\dfrac{2y_1}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}r}{5}$.

用代数作图法,可选求出 $2x=\frac{4\sqrt{5}}{5}r$,再作出所求的三角形.

11·68　求一个直角三角形,它的边长都是整数,并且它的每个角都可以用圆规和直尺将它三等分.

(美国纽约数学奥林匹克,1976 年)

[解]　取角 α,使得 $6\alpha<90^\circ$,且 $\mathrm{tg}\alpha$ 是有理数(例如适合 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{4}$ 的锐角 α),则

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad \mathrm{tg}3\alpha=\frac{\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha},$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},\quad \sin2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$\cos6\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^23\alpha}{1+\mathrm{tg}^23\alpha},\quad \sin6\alpha=\frac{2\mathrm{tg}^3\alpha}{1+\mathrm{tg}^23\alpha}.$$

都是有理数.

因此,当直角$\triangle A_1B_1C_1$ 适合

$\angle C_1=90^\circ$,$\angle A=6\alpha$,$A_1B_1=1$,$A_1C_1=\cos6\alpha$,$B_1C_1=\sin6\alpha$.

时,各边长都是有理数.

因此,一定存在一个边长都是整数的$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 相似.

(例如,当 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{4}$ 时,$\triangle ABC$ 的边长为 $AB=4913$,$AC=495$,$BC=4888$).

另一方面,适合

$\angle C_2=90^\circ$,$\angle A_2=2\alpha$.$A_2B_2=1$,$A_2C_2=\cos2\alpha$,$B_2C_2=\sin2\alpha$

的三角形的各边长也都是有理数,因此可以借助圆规和直尺作出角 $2\alpha=\frac{1}{3}\angle A$,即将$\triangle ABC$ 中的$\angle A$ 三等分.

同时等于 $30^\circ=\frac{1}{3}\angle C$ 的角同样可以作出,而$\frac{1}{3}\angle B=\frac{1}{3}(\angle C-\angle A)=30^\circ-2\alpha$.

所以$\triangle ABC$ 的每一个角都可以用圆规和直尺三等分.

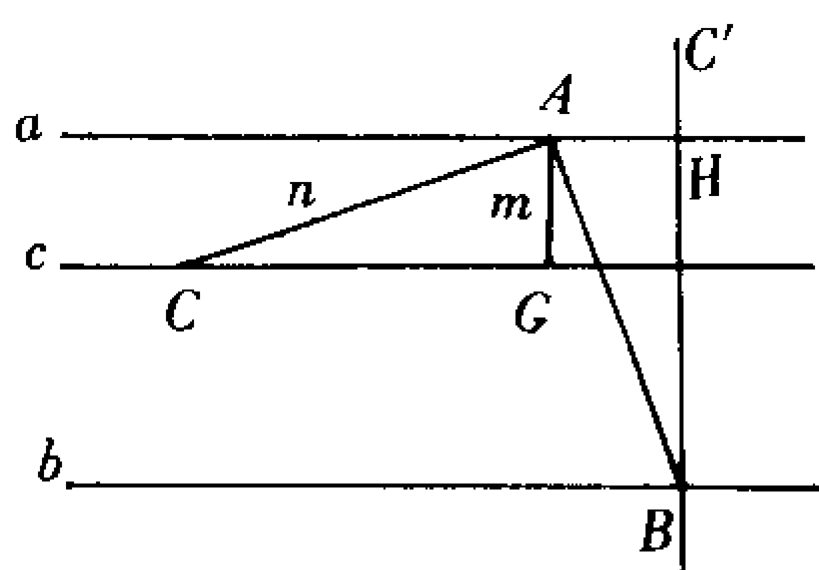
因此$\triangle ABC$ 满足所需的条件.

(四)求作多边形、圆及其他

11·69　试求作一个正方形,使它的三个顶点分别位于三条已知的平行直线上.

(莫斯科数学奥林匹克,1935 年)

[解]　设三条直线 $a /\!/ b /\!/ c$,如图.



在 a 上任取一点 A,作 $AG \perp c$ 于 G.

设 $AG = m$ 作$\odot A(m)$交 a 于H,则 c 旋转至 c'.

设 c'与 b 交于 B 点,设 $AB = m$.

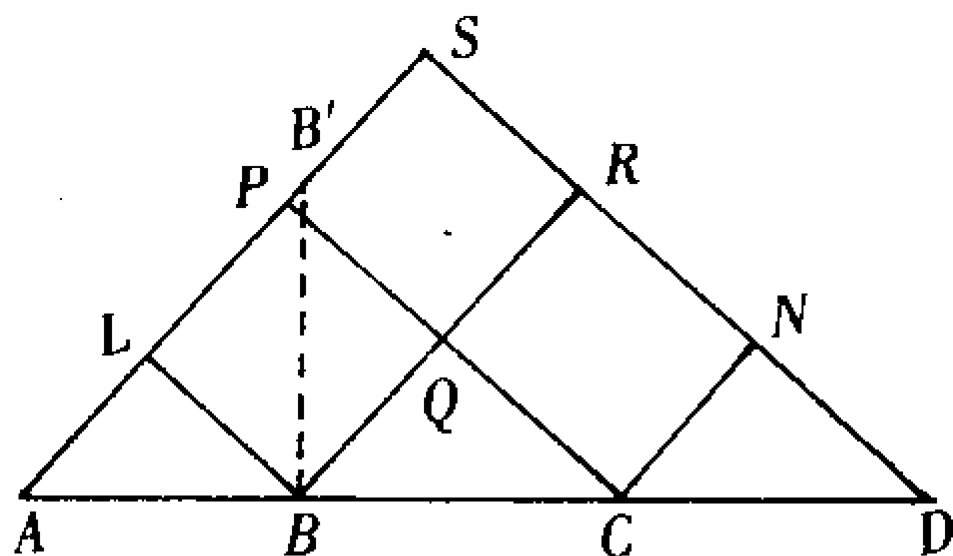
作$\odot A(n)$交 c 于 C 点.

则 A、B、C 为满足所求作一个正方形的三个顶点.

11·70　给定在一直线上的四个点 A、B、C、D,求作一个正方形,使得正方形的一组对边的延长线和这直线相交于点 A 和 B,而另一组对边的延长线和这直线相交于 C 和 D.

(匈牙利数学奥林匹克,1898 年)

[解]　假设 $PQRS$ 是满足题目要求的正方形,



过 B 作 $BB_1 \perp AB$ 交直线 AS 于 B_1,作 $BL \perp AS$ 于L,过 C 作 $CN \perp DS$ 交DS 于N.

则　　$BL = PQ = QR = CN$,

又　　$\angle D = \angle AB_1B$,

则　$\triangle BLB_1 \cong \triangle CND$.　于是　$BB_1 = CD$.

由以上可得作法如下:

(1)过 B 作 $BB_1 \perp AB$;

(2)截取 $BB_1 = CD$;

(3)作直线 AB_1;

(4)过 C 作 $CP \perp AB_1$ 于 P,过 D 作 $DS \perp AB_1$ 于 S;

(5)过 B 作 $BR /\!/ AB_1$,交 CP 于Q,交 DS 于R;

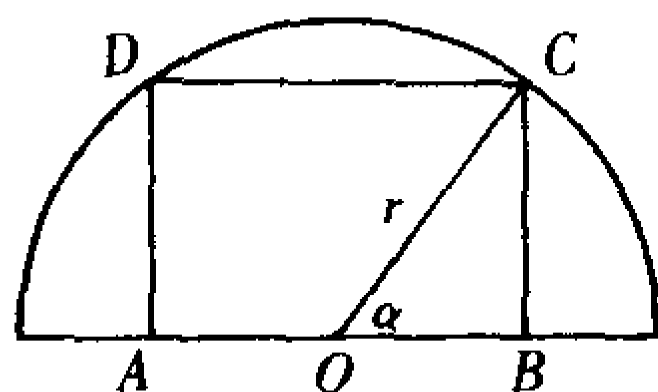
则　四边形 $PQRS$ 为所求的正方形.

容易证明正方形 $PQRS$ 符合要求.

由于由点 B 可以向直线 AD 两侧作垂线,因此可以得到关于 A、B、C、D 所在直线对称的两个正方形.

11·71 在已知半圆内作一个周长最大的矩形.

(基辅数学奥林匹克,1956 年)



[解] 假设 $ABCD$ 是半圆$\odot O(r)$中所要求的内接矩形,如图.

设$\angle COB=\alpha$,则矩形 $ABCD$ 的周长 p 为

$$p=4r\cos\alpha+2r\sin\alpha$$
$$=2\sqrt{5}r\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\alpha\right)$$
$$=2\sqrt{5}r\cos(\alpha-\varphi),$$

这里 $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

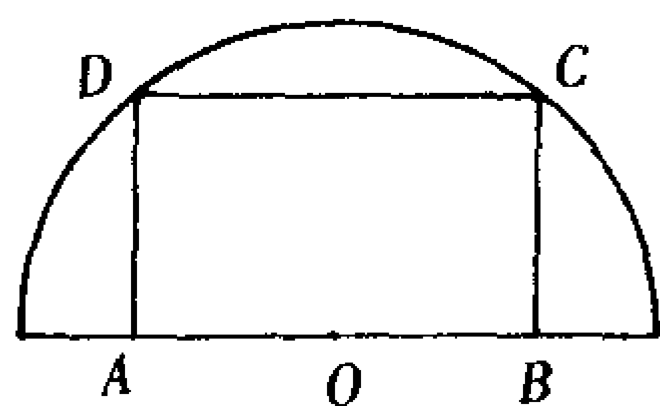
当 $\alpha-\varphi=0$, 即 $\cos\alpha=\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$时,

$$p_{\max}=2\sqrt{5}r\cos 0=2\sqrt{5}r.$$

11·72 在已知半圆中作一个面积最大的内接矩形.

(基辅数学奥林匹克,1956 年)

[解] 假设 $ABCD$ 是所求的半圆中的内接矩形.如图.



设半圆的圆心为 O,半径为 r,$OB=x$,则

$$\sqrt{r^2-x^2}=BC,$$
$$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=2x\sqrt{r^2-x^2}$$
$$=2\sqrt{\frac{r^2}{4}-\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right)^2}.$$

当 $x^2-\frac{1}{2}r^2=0$, 即当 $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}r$ 时矩形面积有最大值

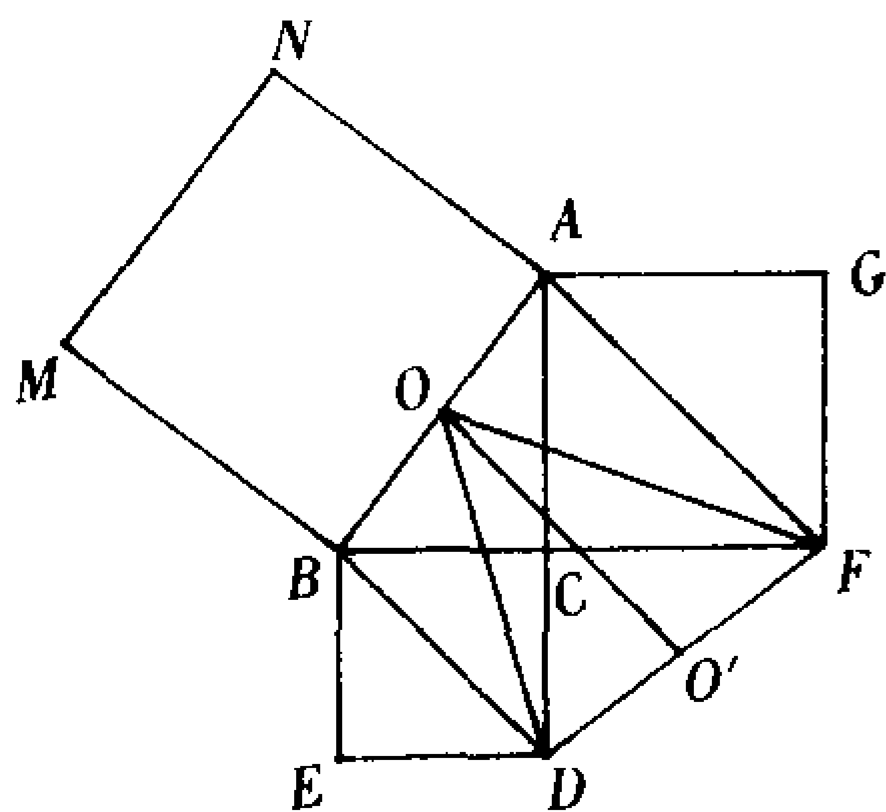
$$S_{矩形ABCD}=r.$$

11·73 以直角三角形的每一条边为边各朝外作一个正方形,然后再作所得图形(俗称“毕达哥拉斯短裤”)的外接圆,试问,对于怎样的直角三角形,才能作出这种外接圆?

(第 30 届莫斯科数学奥林匹克,1967 年)

[解] 该三角形应为等腰直角三角形.

(1)必要条件. 假若在 Rt$\triangle ABC$ 的各边上向外作正方形,如果所得图形有外接圆$\odot O$(如图)



则 MN、ED、FG 的垂直平分线必交于AB 边的中点O,圆心为 O 点.

设 DF 的中点为O',则 OO'是等腰梯形$ABDF$ 的中位线,

又 $OD=OF$, $\therefore$ $OO'\perp DF$

故 $ABDF$ 是矩形,从而 $BD \mathrel{\underline{\parallel}} AF$ 知$AC=BC$

因此必要条件是$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

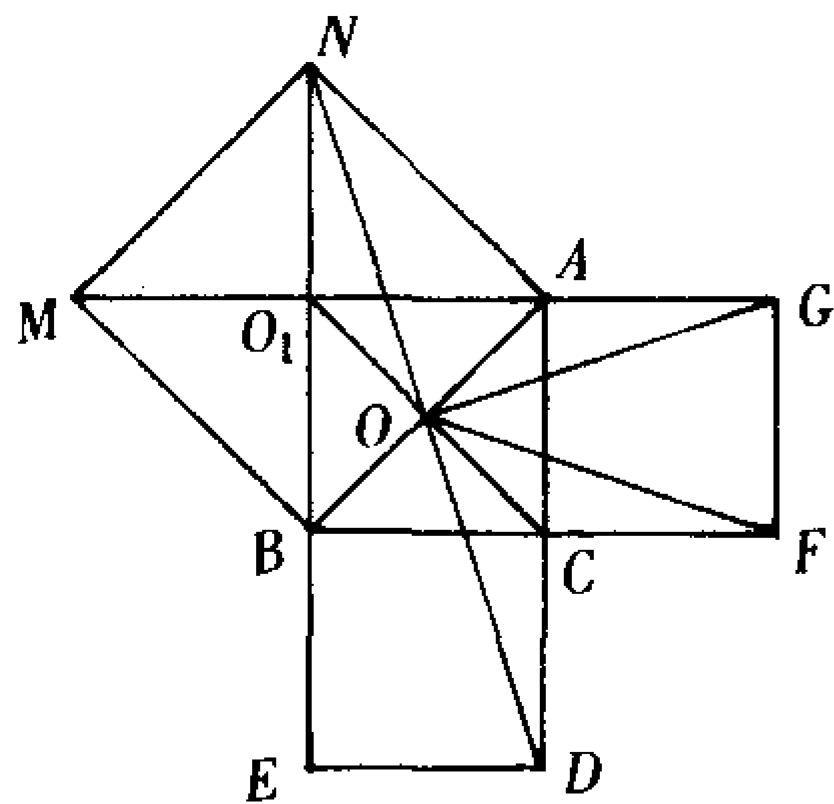
(2)充分条件. 下面证明,$AC=BC$ 是M、N、G、F、D、E 六点共圆的充分条件.

$\because$ $\angle OCD=\angle OCF=90^\circ+45^\circ=135^\circ$,

$OC=OC$, $CD=BC=AC=CF$,

$\therefore$ $\triangle OCD\cong\triangle OFC$, $OD=OF$.

故 E、D、F、G 在$\odot O$ 上,如图.



设 $AC=BC=a$, 则 $AB=\sqrt{2}a$,

$\because$ $O_1O=OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

$O_1N=AG=a$,

$\angle OO_1N=\angle OAG=135^\circ$.

$\therefore$ $\triangle OO_1N\cong\triangle OAG$, $ON=OG$,

故 M、N 也在$\odot O$ 上.

11·74 给定不在同一直线上的三个点,试过其中每两个点作一个圆,使得三个圆在它们彼此间的各个交点处都具有互相垂直的切线.

(莫斯科数学奥林匹克,1937 年)

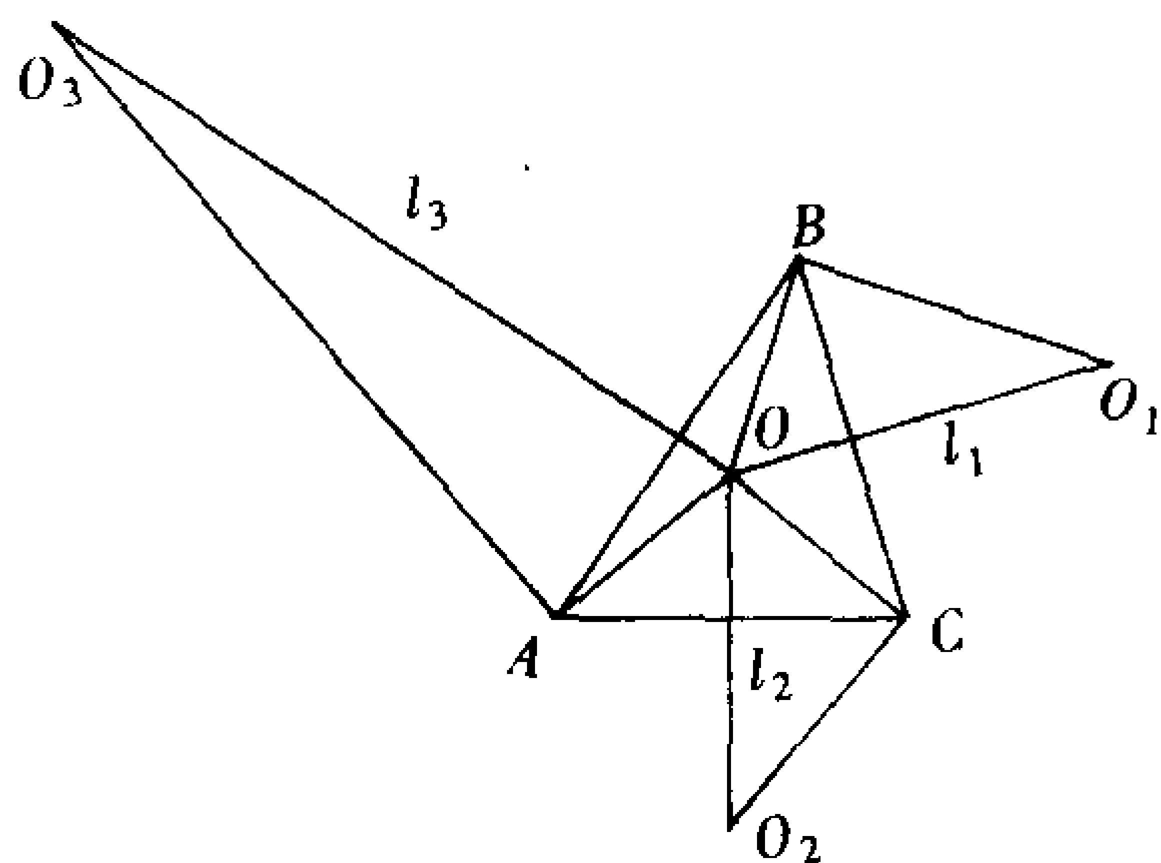
[解] 设不在同一直线上的三个点为 A、B、C.

设$\triangle ABC$ 三边的垂直平分线分别为l_1、l_2、l_3,外心为 O.

连 OA、OB、OC,

作 $AD\perp OA$ 交 l_3 于 O_3，作 $BE\perp OB$ 交 l_1 于 O_1，作 $CF\perp OC$ 交 l_2 于 O_2，如图.

则三个圆$\odot O_1(O_1B)$、$\odot O_2(O_2C)$、$\odot O_3(O_3A)$即为所求.



11·75　两圆 C_1、C_2 相切，P 在它们的根轴(也就是与连心线垂直的公切线)上，试用直尺圆规作出所有过点 P 并且与圆 C_1、C_2 都相切的圆 C.

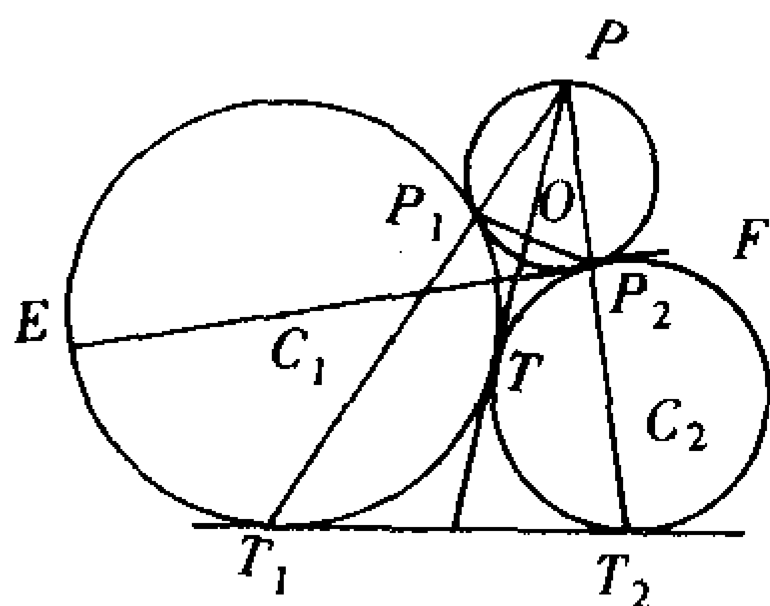
(亚太地区数学奥林匹克，1991 年)

[解]　(1)当 P 恰为 C_1 与 C_2 的切点时，在连心线上任取一点(不同于 C_1、C_2 的圆心)为圆心，过 P 点作圆，则此圆过 P 点且与圆 C_1、C_2 都相切.

(2)当 P 不为切点时.

若圆 C_1、C_2 内切，则不能作出与圆 C_1、C_2 都相切的圆.

若圆 C_1、C_2 外切，切点为 T.



设 T_1、T_2 为两圆的外公切线(T_1、T_2 为切点).

连 PT_1、PT_2，分别交两圆于另一点 P_1、P_2，过 P、P_1、P_2 作圆 O.

我们证明该圆 O 与圆 C_1、C_2 都相切.

$\because$　$PT_1\cdot PP_1=PT^2=PT_2\cdot PP_2$，

$\therefore$　P_1、T_1、P_2、T_2 四点共圆.

故　$\angle PP_1P_2=\angle PT_2T_1$，

设圆 C_2 在 P_2 处的切线为 EF，则

$\angle PT_2T_1=\angle EP_2T_2=\angle PP_2F$，$\angle PP_2F=\angle PP_1P_2$.

因此　EF 也与圆 O 相切，于是圆 O 与圆 C_2 相切.

同理　圆 O 与圆 C_1 相切.

反之，若圆 O 过 P 并且与圆 C_1、C_2 分别切于 P_1、P_2.

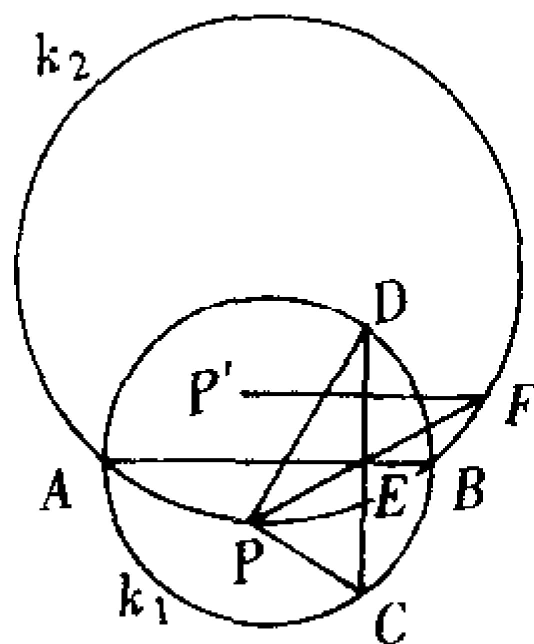
设 PP_1、PP_2 分别再交圆 C_1、C_2 于 T_1、T_2，则易知 T_1T_2 是圆 C_1、C_2 的外公切线.

因此，在圆 C_1、C_2 外切且 P 不是切点时，恰可作出两个合乎要求的圆.

11·76　平面上的两个相交圆，圆 k_1 和圆 k_2，它们的公共弦 AB 是圆 k_1 的直径. 点 P 是一个定点，且点 P 在圆 k_2 上，在圆 k_1 内，请用“丁字尺”(一种能过两点作一直线及过线上或线外一点作该线的垂线的工具)在圆 k_1 上作出点 C、点 D，使得 $CD\perp AB$，且 $\angle CPD$ 为直角.

（第 15 届美国数学奥林匹克，1986 年）

[解]　分析：设 C、D 两点已作出，则 $CD\perp AB$，$\angle CPD$ 是直角.



设 CD 交 AB 于 E，连结 PE 并延长交圆 k_2 于 F，则有

$PE\cdot EF=AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

又因为$\triangle CPD$ 为直角三角形，AB 是圆 k_1 的直径，$CD\perp AB$，则 $CE=ED$.

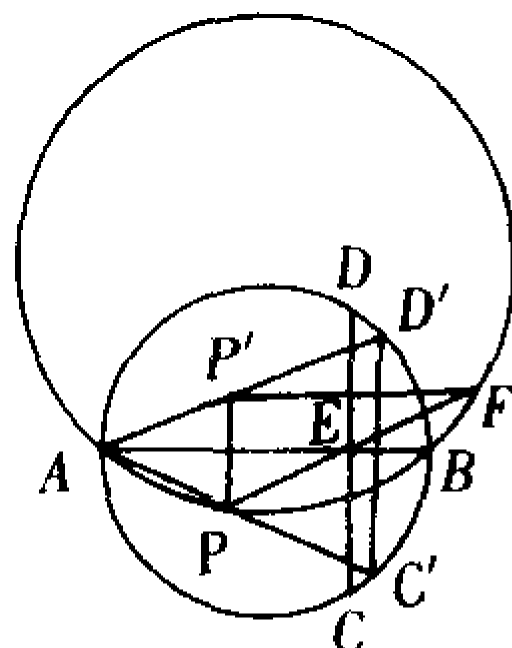
$$\therefore\quad PE=\frac{1}{2}CD=CE=ED.$$

从而　$EF=CE=ED$，这样就有　$PE=EF$.

设 P'为 P 关于 AB 的对称点，则

由 $P'E=PE=\frac{1}{2}PF$，可得 $P'F\,/\!/\,AB$.

于是只要作出 P'，就可作出 F，进而作出 PF 与 AB 的交点 E，再得到 C、D.



[作法]　(1)连 AP 并延长交圆 k_1 于 C'；

(2)过 C' 作 $C'D\perp AB$，交圆 k_1 于 D'；

(3)连 AD'；

(4)过 P 作 $PP'\perp AB$ 交 AD' 于 P'；

(5)过 P' 作 $P'F\perp PP'$ 交圆 k_2 于 F；

(6)连 PF 交 AB 于 E；

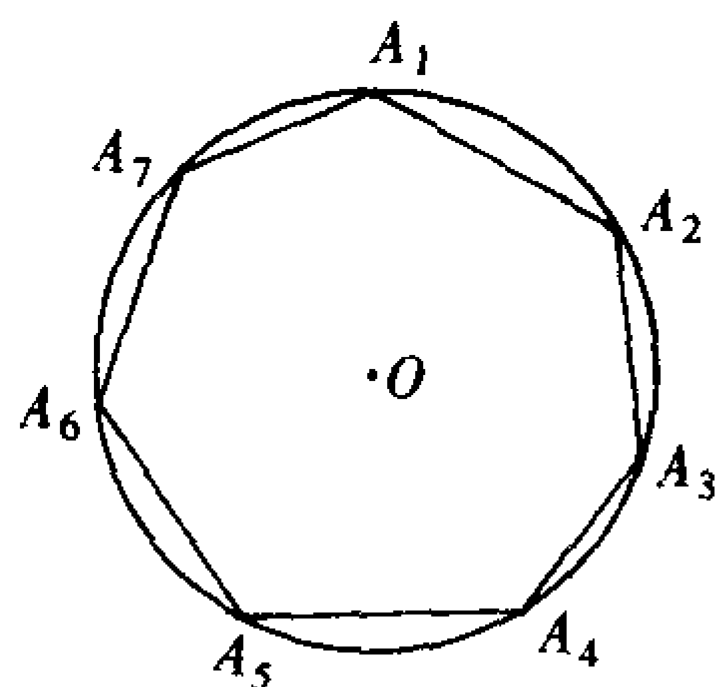
(7)过 E 作 $CD \perp AB$ 交圆 k_1 于 C、D.

则 C、D 两点即为所求.

证明略.

11·77 试问，能否作出这样的一个圆内接凸七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，使其各角大小分别为 $\angle A_1 = 140°$，$\angle A_2 = 120°$，$\angle A_3 = 130°$，$\angle A_4 = 120°$，$\angle A_5 = 130°$，$\angle A_6 = 110°$，$\angle A_7 = 150°$？

（莫斯科数学奥林匹克，1968 年）



［解］ 若已知 $\odot O$ 的内接七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 能够作出（如图），依题意应有

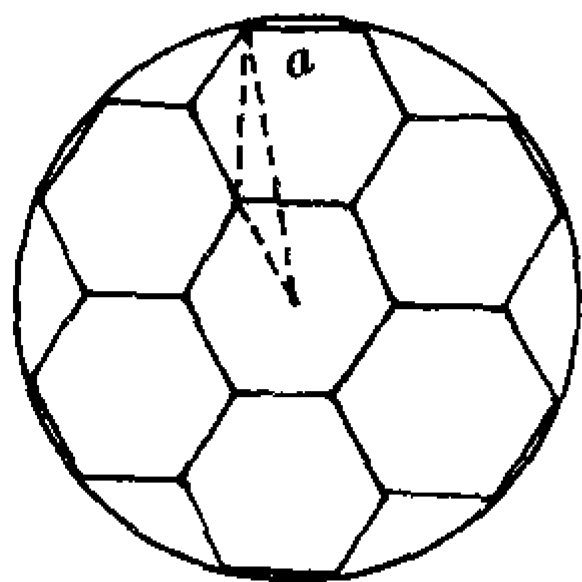
$$\overset{\frown}{A_1A_2A_3}+\overset{\frown}{A_3A_4A_5}+\overset{\frown}{A_5A_6A_7}+\overset{\frown}{A_7A_1}$$
$$\overset{m}{=} \frac{1}{2}(360° - 120°) + \frac{1}{2}(360° - 120°)$$
$$+ \frac{1}{2}(360° - 110°) + \overset{\frown}{A_7A_1}$$
$$\overset{m}{=} 120° + 120° + 125° + \overset{\frown}{A_7A_1} \overset{m}{=} 365° + \overset{\frown}{A_7A_1} > 360°，矛盾.$$

$\therefore$ 不能作出这样的圆内接凸七边形.

11·78 在一个已知半径为 R 的圆内，试作七个全等的正六边形，它们的位置如下：一个在中间，它的中心和圆心重合，另外六个各有一边和中间的一个的一边重合，且每一个还有一边是圆的弦.

（中国上海市数学竞赛，1958 年）

［解 1］（位似法）先以适当的长度为边作出七个相互位置如题所述的全等的正六边形及整个图形的外接圆. 再以圆心为中心，经位似变换变为半径等 R 的圆及其内接图形，即为所求.



［解 2］设正六边形的边长为 a，则

$$R^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 - 2a\sqrt{3}a\cos 150°$$
$$= a^2 + 3a^2 + 3a^2 = 7a^2,$$

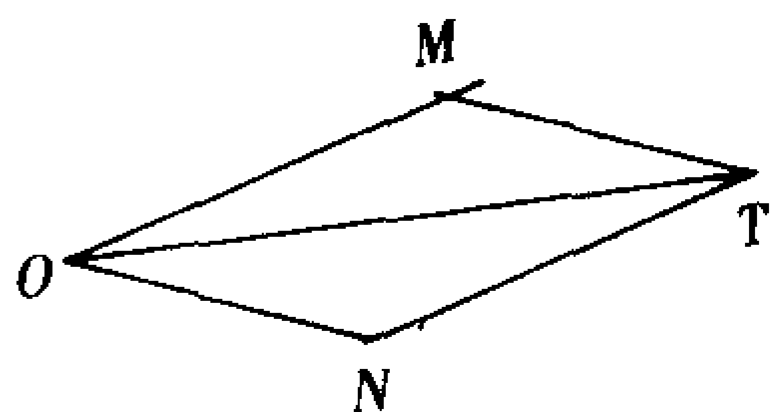
$$\therefore \quad a = \frac{1}{\sqrt{7}}R.$$

作出 a 后，不难作出所求的七个正六边形.

11·79 一把两边平行的直尺可用来作两条彼此平行的直线.其间的距离正好是尺宽，设 $ABCDEFGHI$ 是一个正九边形.(1)给定顶点 A、B、C、D，请用此直尺作出这个正九边形的其余顶点.(2)如果四个顶点任意给定，问能否用此直尺作出这个正九边形的其余顶点.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）

[解] 首先，对于任何一个角，都可用两边平行的尺作出它的角平分线.



具体作法是：

已知$\angle AOB$，用两边平行的尺分别作出与$\angle AOB$ 的两边平行的直线 MT 和 NT，这两条直线相交于 T，连 OT，则 OT 就是$\angle AOB$ 的平分线.

由于在正九边形 $ABCDEFGHI$ 中，BG 是$\angle ABD$ 的平分线，CG 是$\angle ACD$ 的平分线，AE 是$\angle GAC$ 的平分线，BE 是$\angle GBC$ 的平分线等等，因此已知正九边形的四个顶点（可得到四个角）通过作角平分线的交点即可得到其他顶点.

(1)已知 A、B、C、D.

作$\angle ABD$ 的平分线和$\angle ACD$ 的平分线，它们的交点就是 G；

作$\angle GAC$ 的平分线和$\angle GBC$ 的平分线，它们的交点就是 E；

作$\angle GAE$ 的平分线和$\angle GBE$ 的平分线，它们的交点就是 F；

作$\angle FEA$ 的平分线和$\angle FCA$ 的平分线，它们的交点就是 H；

作$\angle HEA$ 的平分线和$\angle HCA$ 的平分线，它们的交点就是 I.

这样，E、F、G、H、I 都可作出.

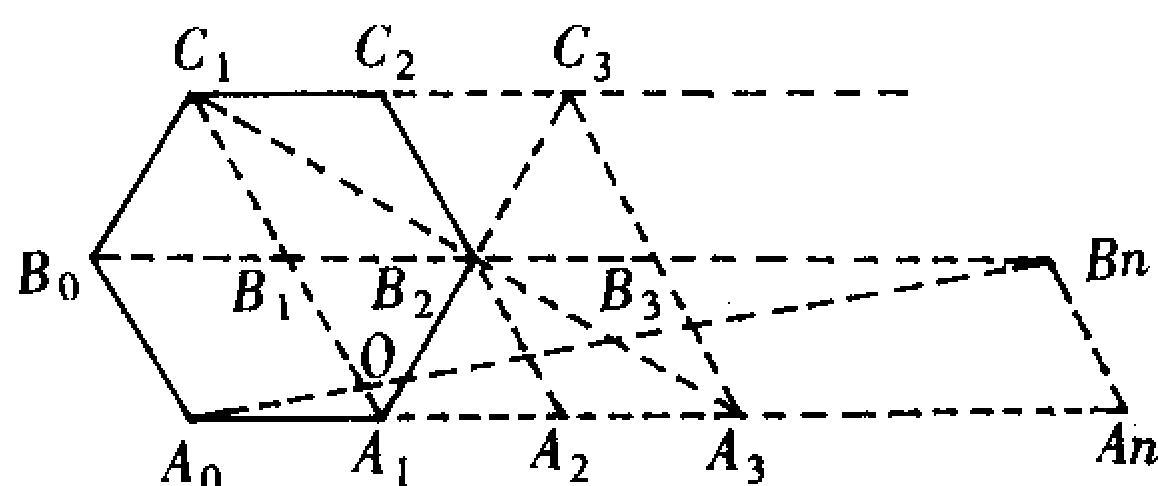
(2)已知任意四个顶点，作法类似.

11·80 平面上有一正六边形，其边长为 a，对每个大于 1 的自然数 n，试限用一根直尺作出一条长为$\frac{a}{n}$的线段.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1976 年）

[解] 从正六边形 $A_0A_1B_2C_2C_1B_0$ 出发，利用直尺可以作出下列的点：A_2 和 A_3，它们分别是直线 A_0A_1 与直线 C_2B_2 及 C_1B_2 的交点.

并用直尺作出 C_1C_2 与 A_1B_2 的交点 C_3，B_0B_2 与 A_1C_1 的交点 B_1，B_0B_2 与 A_3C_3 的交点 B_3.



因为 $A_1A_2C_2C_1$ 为平行四边形，所以 $A_1A_2=C_1C_2=a$.

且 $A_2A_3=C_1C_2=a$（因为$\triangle A_2A_3B_2\cong\triangle C_2C_1B_2$），

及 $C_2C_3=A_1A_2=a$（因为$\triangle C_2C_3B_2\cong\triangle A_2A_1B_2$）.

又因为 $A_1A_2C_2C_1$ 和 $A_2A_3C_3C_2$ 都是平行四边形，且 $B_0B_2\parallel A_0A_1$，则 $B_1B_2=B_2B_3=a$.

于是得到正六边形 $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$.

现在对正六边形 $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$ 进行类似作图得到点 A_4、B_4、C_4，进而又可类似得到 A_5、B_5、C_5，等等.

在作出点 B_n之后，再用直尺作出 A_0B_n与A_1B_1 的交点 O，

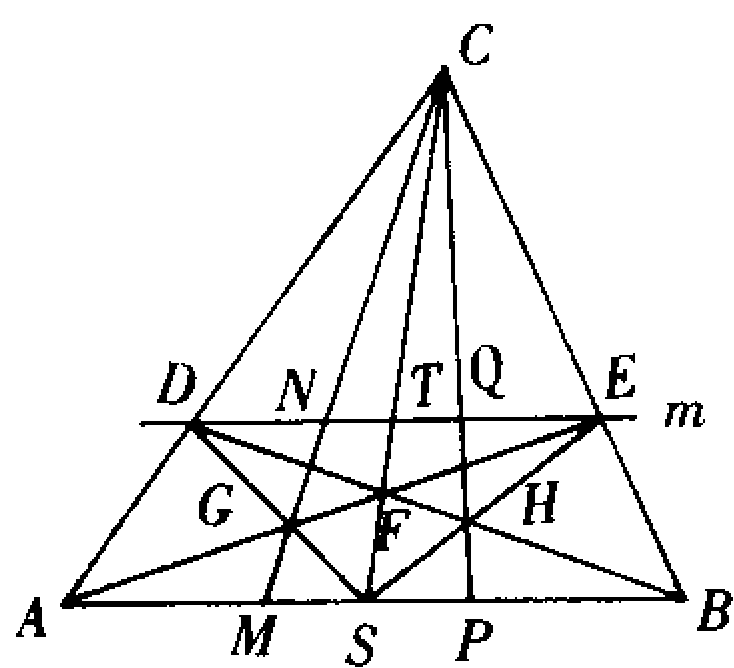
由于 $\triangle A_0A_1O\backsim\triangle A_0A_nB_n$，

$$\therefore\quad A_1O=\frac{A_nB_n\cdot A_0A_1}{A_0A_n}=\frac{a\cdot a}{na}=\frac{a}{n}.$$

故 A_1O 即为所求.

11·81 已知线段 AB 及与它平行的直线 m，只用直尺将线段 AB 三等分.

（波兰数学奥林匹克，1956 年）



[解] (1)取点 C，使它与 AB 分别处于直线 m 的两侧；

(2)连 CA、CB 交直线 m 于点D、点 E；

(3)连 AE 和BD，AE 与BD 交于F；

(4)连 CF 交 m 于 T，交 AB 于S；

(5)连 SD 交AE 于G，连 SE 交BD 于H；

(6)连 CG 交 m 于N，交 AB 于M，连 CH 交m 于Q，交 AB 于P.

则 M、P 即为所求的分点.

下面我们证明 M 和P 三等分线段AB.

由直线 $m\parallel AB$ 可得

$$\frac{AS}{SB}=\frac{DT}{TE},\qquad ①$$

及 $\frac{AS}{SB}=\frac{ET}{DT}$. ②

由①、②可得 $\left(\frac{AS}{SB}\right)^2=1$,

于是 $AS=SB=\frac{1}{2}AB$. ③

再由直线 $m \parallel AB$ 得

$\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DE}$, ④

及 $\frac{DN}{DE}=\frac{SM}{SA}$. ⑤

由④、⑤可得 $\frac{AM}{AB}=\frac{SM}{SA}$.

再由③式得 $AM=2MS$.

从而有 $AM=\frac{1}{3}AB$.

类似地可证 $BP=\frac{1}{3}AB$.

于是 M 和 P 即为所求的 AB 三等分点.

11·82 试仅借助于角尺将线段二等分(利用角尺可以画直线和作垂线).

(莫斯科数学奥林匹克,1953 年)

[解] 将所要等分的线段记作 AB.

过 A 点作 AB 的垂线 l,过 B 点作 AB 的垂线 l'.

在 l 上取定两点 C 和 D,然后过 C 和 D 两点分别作 l 的垂线,使它们分别与 l' 相交于 C' 和 D'.

设 AD'、BD 的交点为 X,AC'、BC 的交点为 Y.

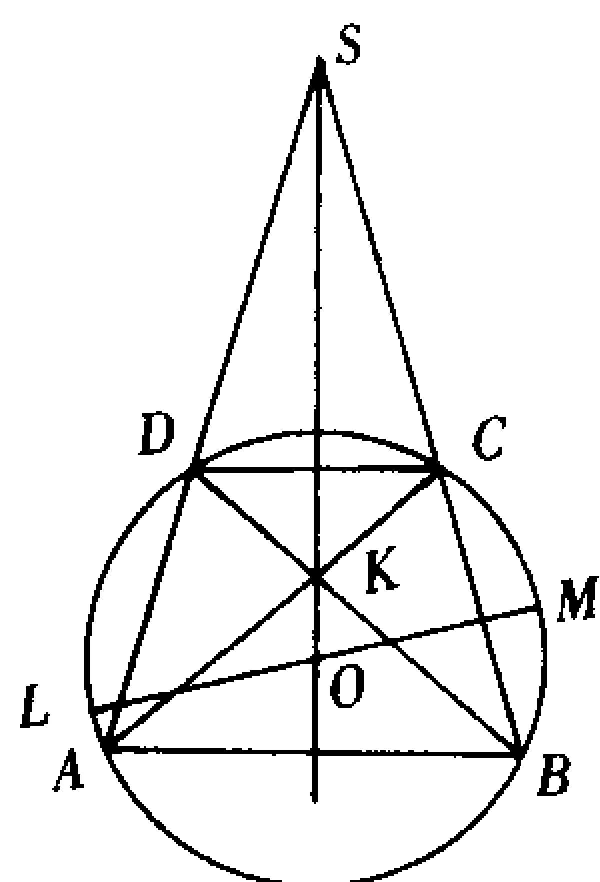
则直线 XY 穿过线段 AB 的中点.

11·83 在圆中作两条平行弦,再作一条与它们不垂直的直径,只用直尺求出圆心.

(基辅数学奥林匹克,1956 年)

[解] 假设 AB 和 DC 是圆内给定的两条平行弦,LM 是给定的直径且 LM 不垂直 AB. 如图.

延长 AD、BC 交于点 S,



连 AC、BD 相交于 K 点，

连 SK，则 $SK \perp AB$，且 SK 不同于 LM.

设 SK 与 LM 交于 O 点，则 O 即为所求的圆心.

11·84　作一个圆周，要求只用圆规（不许用直尺），把这圆周四等分.

（中国上海市数学竞赛，1956 年）

[解 1] 令圆心为 O，半径为 R.

在圆周上任取一点 A 为圆心，以 R 为半径连续作弧可以得 B、C、D 等点，则 $AB=R$，$AC=\sqrt{3}R$，$AD=2R$（因 AC 是圆内接等边三角形的一边，而 AD 是直径）.

本题的关键是求得 $\sqrt{2}R$ 的长.

如果能以 $\sqrt{3}R$ 及 R 分别作为直角三角形的斜边及一直角边，则本题即可解.

但因不能作出直角，所以需要改变办法，作 $2R$ 为底 $\sqrt{3}R$ 为腰的等腰三角形；O 为底边 AD 的中点是已知的，则 EO 为等腰 $\triangle ADE$ 的底边上的高，

$$\therefore \quad EO=\sqrt{3R^2-R^2}=\sqrt{2}R.$$

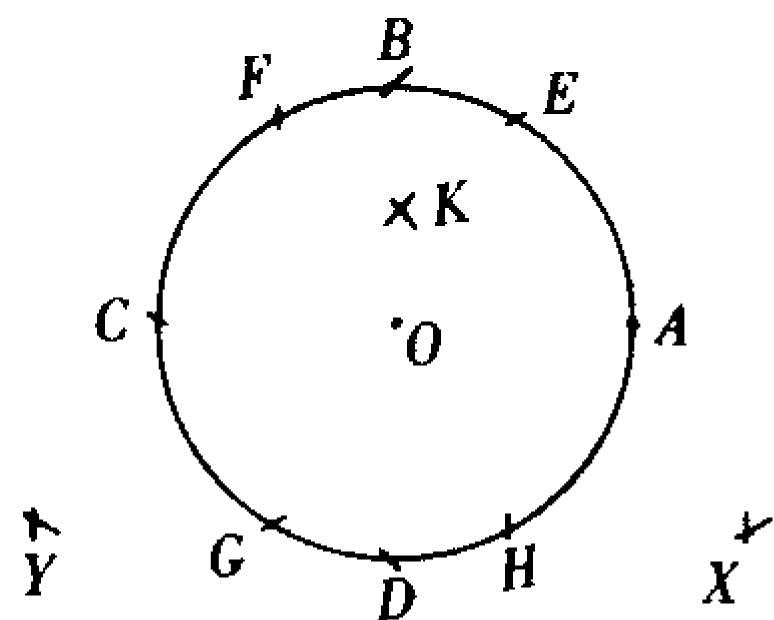
所以得作法如下：

取圆周上任意点 A 为圆心，R 为半径连续截圆周得 B、C、D 三点.

以 A 及 D 分别为圆心，以 AC 的长（$\sqrt{3}R$）为半径作两弧相交于 E.

以 A 为圆心 EO 为半径作圆弧交圆周于 M 及 N，即 A、M、D、N 把圆周四等分.

证明从略.



[解 2] 在 O 圆周上任取一点 A 为圆心，以 R 为半径作圆弧，把圆周六等分得分点为 A、E、F、C、G、H.

以 A、H 各为圆心，AH 为半径画两弧交

于 X 点;以 C、G 各为圆心,CG 为半径画两弧交于 Y 点.

再以 X、Y 各为圆心,XG(或 YH)为半径画两弧交于 K,再以 KG(或 KH)为半径,以 A 为圆心截圆周于 B、D,于是得把圆周四等分的点 A、B、C、D.

下面给予证明:

$\triangle AXH$ 为正三角形, $\therefore\ \angle AHX=60^\circ$.

又 EG 为 O 圆的直径, $\angle EGH=60^\circ$, $EG /\!/ AH$.

$\therefore\ X$、H、G 共线,且 $XH=HG$.

同理 可证 Y、G、H 也共线,且 $YG=HG$.

因此 得 X、H、G、Y 共线,且 $XG=YH$,则 $KX=KY$,

于是知$\triangle KXY$ 为一等腰三角形.

若从 K 作 XY 的垂线,它的垂足必为 GH 的中点(记为 M),

但 $KX=XG=2R$, $XM=1\dfrac{1}{2}R$, $HM=\dfrac{1}{2}R$.

$\therefore\ \overline{KX}^2-\overline{KH}^2=\overline{XM}^2-\overline{HM}^2$,

即 $(2R)^2-\overline{KH}^2=\left(\dfrac{3}{2}R\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}R\right)^2$,

或 $\overline{KH}^2=2R^2$, $\therefore\ KH=R\sqrt{2}$.

故 A、B、G、D 为所求的四等分点.

11·85 已知:一角大小为$\dfrac{180^\circ}{n}$,其中 n 为不能被 3 整除的正整数. 试证:这个角可以用欧几里德的作图工具(圆规与直尺)三等分.

(第 10 届美国数学奥林匹克,1981 年)

[**证**] 因为 n 是不能被 3 整除的正整数,所以 $n=3k+1$,或者 $n=3k-1$,其中 k 是正整数.

如果 $n=3k+1$,那么有

$$\frac{180^\circ}{3}-k\cdot\frac{180^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{3n}(n-3k)=\frac{180^\circ}{3n},$$

如果 $n=3k-1$,那么有

$$k\cdot\frac{180^\circ}{n}-\frac{180^\circ}{3}=\frac{180^\circ}{3n}(3k-n)=\frac{180^\circ}{3n}.$$

由于 $\dfrac{180^\circ}{n}$ 为已知角,所以 $k\cdot\dfrac{180^\circ}{n}$ 可以用圆规与直尺作出,

又由于 $\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$ 也可以用圆规与直尺作出，则它们的差也可用圆规与直尺作出，即 $\frac{180^\circ}{3n}=\frac{1}{3}\times\frac{180^\circ}{n}$ 可用圆规与直尺作出.

因此，不论 n 是 $3k+1$ 或 $3k-1$ 形式的任何正整数，$\frac{180^\circ}{n}$ 的角都可以用圆规与直尺三等分.

第十二章　几何不等式

(一)关于线段的不等式

1. 三角形中的线段不等式

12·1　已知:用长度为 a、b、c 的线段可以作成三角形,试证:用长度为$\frac{1}{a+c}$、$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{a+b}$的线段也可以作成三角形.

(莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证]　∵　可用 a、b、c 作成三角形

∴　$a+b>c, b+c>a, c+a>b$.

又　$\frac{1}{a+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{2(a+b)}$,

且　$\frac{1}{b+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{2(a+b)}$,

故　$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b}$.

同理可证　$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$, 及　$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$.

故可用 $\frac{1}{a+c}$、$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{a+b}$ 的线段作成三角形.

12·2　如果线段 a、b、c 可以组成三角形,那么线段$\sqrt[m]{a}$、$\sqrt[m]{b}$、$\sqrt[m]{c}$(m

为自然数)也可以组成三角形,试证之.

(基辅数学奥林匹克,1959年)

[证] 不失一般性,假定 $a\leqslant b\leqslant c$,则当且仅当 $a+b>c$ 即 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>1$ 时,用线段 a、b、c 可作出三角形.

如果 m 是任意自然数,则当 $x>0$ 时,函数 $\sqrt[m]{x}$ 是增函数,故

$$\sqrt[m]{a}\leqslant\sqrt[m]{b}\leqslant\sqrt[m]{c}.$$

又 $0<\frac{a}{c}\leqslant 1$,$0<\frac{b}{c}\leqslant 1$,故 $\sqrt[m]{\frac{a}{c}}\geqslant\frac{a}{c}$,$\sqrt[m]{\frac{b}{c}}\geqslant\frac{b}{c}$.

从而 $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{c}}+\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{c}}>1$,即用线段 $\sqrt[m]{a}$、$\sqrt[m]{b}$、$\sqrt[m]{c}$ 也可作出三角形.

12·3 是否存在三条高长为 1、$\sqrt{5}$、$1+\sqrt{5}$ 的三角形?

(基辅数学奥林匹克,1969年)

[解] 假若存在这种三角形.

设此 $\triangle ABC$ 的面积为 S,则 $a=\frac{2S}{h_a}$,$b=\frac{2S}{h_b}$,$c=\frac{2S}{h_c}$.

不失一般性,设 $a=\frac{2S}{1}$,$b=\frac{2S}{\sqrt{5}}$,$c=\frac{2S}{1+\sqrt{5}}$.

显然 $a>b>c$,为此只要证 $b+c>a$ 成立即可.

但若 $\frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}>1$,

只需 $\sqrt{5}+(1+\sqrt{5})>\sqrt{5}+5$,

即 $\sqrt{5}>4$,显然的矛盾!

故这种三角形不存在.

12·4 试证:对于正数 a、b、c,若方程 $c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$ 无实根,则 a、b、c 为长的线段可组成一个三角形(面积非0).

(中国北京市数学竞赛,1980年)

[证] 由设知二次方程判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=[(a^2-b^2-c^2)-4b^2c^2]\\&=-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0,\end{aligned}$$

而 $a+b+c>0$,知 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$. ⊛

无妨设 $a\geqslant b,a\geqslant c$，显然 $a+b-c>0$，$c+a-b>0$.

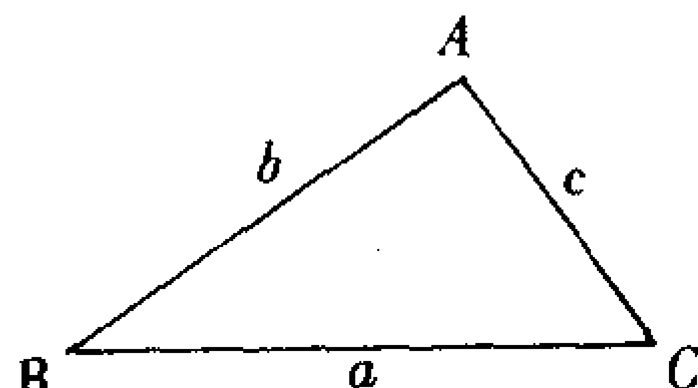
由㊀知 $b+c-a>0$.

综上,以 a、b、c 为长的线段可组成一个三角形(面积非 0).

12·5 给定面积为 1,边长为 a、b、c 的三角形,已知 $a\geqslant b\geqslant c$.求证:$b\geqslant\sqrt{2}$.

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

[证] $\because$ $1=S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{bc}{2}$，但 $a\geqslant b\geqslant c$，

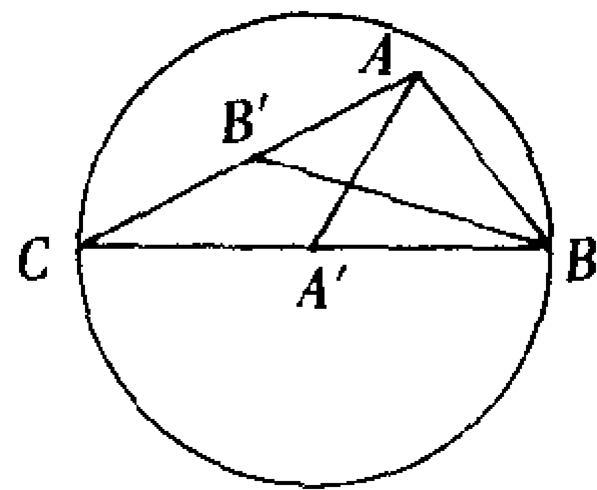


$\therefore$ $1\leqslant\frac{bc}{2}\leqslant\frac{b^2}{2}$,$\therefore$ $b^2\geqslant2$，即 $b\geqslant\sqrt{2}$.

12·6 是否存在这样的三角形,它的(1)所有三条中线的长;(2)两条中线的长,分别小于相应的边长的一半?

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[解] 这样的三角形均不存在.



设 AA'、BB' 是$\triangle ABC$ 的两条中线(见图)并满足(2).

因为 $BC\geqslant2AA'$,所以点 A 在以 BC 为直径的圆的内部或圆周上,因此 $\angle BAC\geqslant\frac{\pi}{2}$.

同理 $\angle ABC\geqslant\frac{\pi}{2}$.

这是不可能的,对于(1)的情况,更是如此.

12·7 已知:五条线段中任何三条都可以组成一个三角形,证明:这些三角形中至少有一个是锐角三角形.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[证] 设五条线段为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$.

假设这些线段中任何三条都不能组成锐角三角形,则它们构成的都是非锐角三角形.

于是有 $e^2\geqslant a^2+b^2$，$d^2\geqslant c^2+b^2$，$e^2\geqslant d^2+c^2$.

上三式相加可得:$e^2\geqslant a^2+2b^2+c^2\geqslant a^2+2ab+b^2$

即 $e^2\geqslant(a+b)^2$， $\therefore$ $e\geqslant a+b$

与 e、a、b 三条线段可以组成三角形三条边的条件相矛盾.

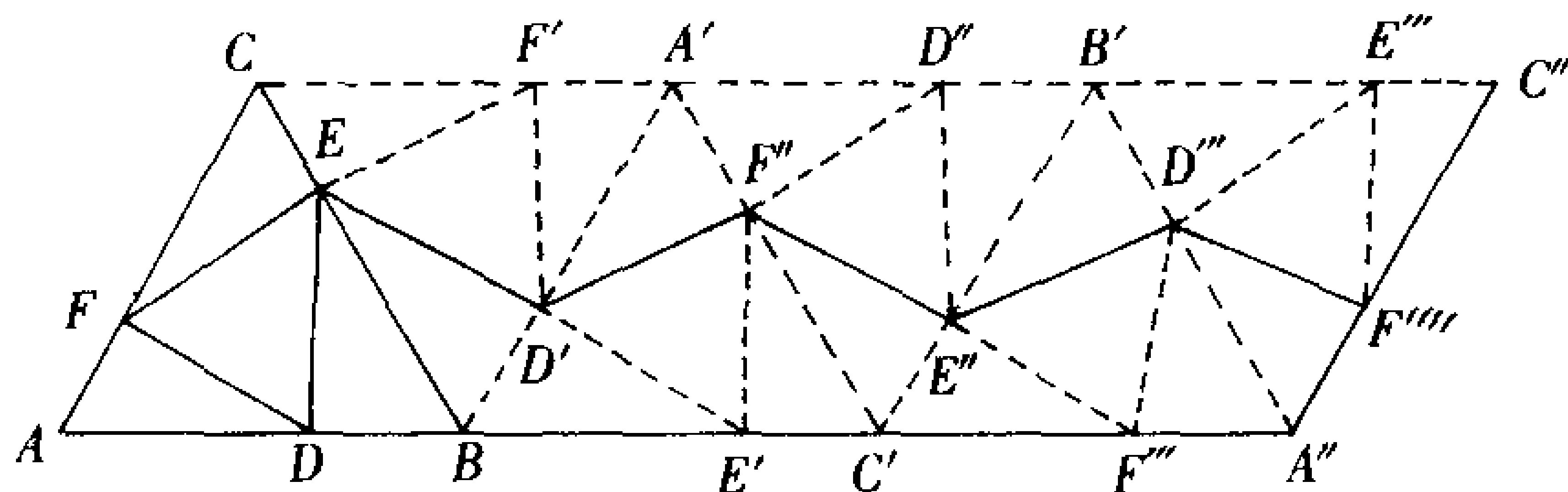
12·8　如果 D、E、F 分别是正$\triangle ABC$ 的边 BC、AC、AB 上的点，$\triangle ABC$ 的周长是 p，$\triangle DEF$ 的周长是 q，求证 $p\leqslant 2q$.

（中国辽宁省沈阳市初中数学竞赛，1990 年）

［证］　如图，将$\triangle ABC$ 沿 BC、BA'、$A'C'$、$C'B'$、$B'A''$为对称轴，依次翻转得到$\square AA''C''C$. 则 $CC''=p$.

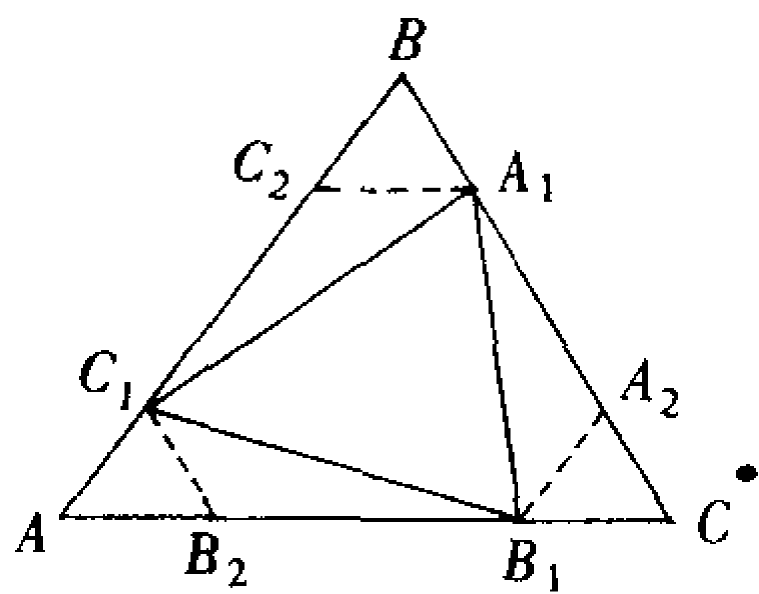
$2q$ 的长为折线 $FED'F''E''D'''F''''$.

又　$AF=A''F''''$，则 $p\leqslant 2q$，仅当 E、D、F 为中点时取等号.



12·9　点 C_1、A_1、B_1 分别取自$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 和 CA 上，且满足 $AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=1:3$. 求证$\triangle ABC$ 的周长 p 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 p'之间有不等式$\frac{1}{2}p<p'<\frac{3}{4}p$.

（第 15 届全苏数学奥林匹克，1981 年）



［证］　$A_1C-CB_1<A_1B_1$,

$B_1A-AC_1<B_1C_1$,

$C_1B-BA_1<C_1A_1$,

即　$\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}b<c_1$,

$\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}c<a_1$,

$\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}a<b_1$.

其中，a、b、c 为$\triangle ABC$ 的三边，a_1、b_1、c_1 为$\triangle A_1B_1C_1$ 的三边.

上述三个不等式相加得

$\frac{1}{2}(a+b+c)<a_1+b_1+c_1$，即　$\frac{1}{2}p<p'$.

再在△ABC 各边上截取 $A_1A_2=\frac{2}{4}a$，$B_1B_2=\frac{2}{4}b$，$C_1C_2=\frac{2}{4}c$，

易证 $A_2B_1=\frac{1}{4}c$，$B_2C_1=\frac{1}{4}a$，$C_2A_1=\frac{1}{4}b$.

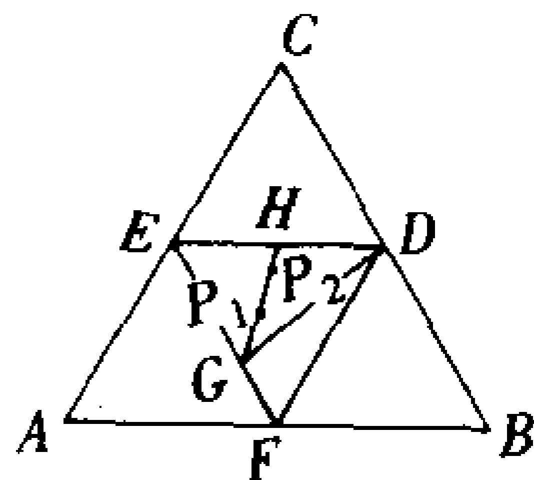
$\therefore\ \frac{2}{4}a+\frac{1}{2}c>c_1$，$\frac{2}{4}b+\frac{1}{4}a>a_1$，$\frac{2}{4}c+\frac{1}{4}b>b_1$.

相加得 $\frac{3}{4}(a+b+c)>a_1+b_1+c_1$,即 $p'<\frac{3}{4}p$.

12·10 边长为1的等边三角形内,有五个点,试证明至少有二点,其距离小于$\frac{1}{2}$.

(中国广东省数学竞赛,1978年)

[证] 如图,△ABC 是等边三角形,$AB=BC=CA=1$,设 D、E、F 分别是边 BC、CA、AB 的中点,则由三角形中位线定理知:



$$DE=EF=FD=\frac{1}{2},$$

因为 DE、EF、FD 三线把△ABC 划分成四个相同的区域,因此,△ABC 内的任意五个点中一定至少有两个点落在同一个区域内或边上,如假设 P_1、P_2 两点同在△DEF 内,则可证

$$P_1P_2<\frac{1}{2}.$$

连结 P_1、P_2 并两端延长交△DEF 的边于 G、H 两点,再连 GD 线,则因 G 在 EF 内,所以 DG 在$\angle FDE$ 内,

$\therefore\ \angle GDH<\angle FDE$,

又 $\angle GHD>\angle FED$，$\angle FED=\angle FDE$,

$\therefore\ \angle GHD>\angle GDH$，且 $GD>GH$.

又$\because\ P_1P_2<GH$，及 $\angle DGE>\angle EFD=\angle FED$,

$\therefore\ DE>GD$，$\therefore\ DE>GH>P_1P_2$,

$\therefore\ P_1P_2<\frac{1}{2}$.

若有两点落在不同边上或一个点落在边上，也可同样证明

$$P_1P_2<\frac{1}{2}.$$

若两点落在同一边上，显然有 $P_1P_2<\frac{1}{2}$.

12·11　已知：三角形的两边长 a 与 b 满足 $a>b$，它们对应的高为 h_a 与 h_b，求证：$a+h_a\geqslant b+h_b$，并确定等号何时成立.

（英国数学奥林匹克，1967 年）

［证］　设三角形的面积为 S，a 和 b 两边的夹角为 θ，则由

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta\leqslant\frac{1}{2}ab.$$

如果 $a>b$，则有　$(a+h_a)-(b+h_b)$

$$=\left(a+\frac{2S}{a}\right)-\left(b+\frac{2S}{b}\right)$$

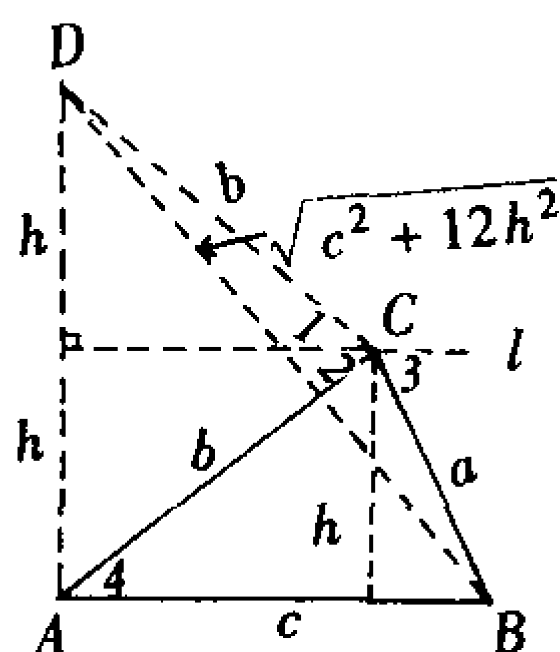
$$=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)\geqslant 0.$$

于是　$a+h_a\geqslant b+h_b$.

当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 a 和 b 的夹角为直角时，等号成立.

12·12　设 a、b、c 分别表示△ABC 中∠A、∠B、∠C 所对的边，h 表示 AB 边上的高.(1)求证 $a+b\geqslant\sqrt{c^2+4h^2}$.(2)说明当已知△$ABC$ 具备什么条件时，上述结论中的等号成立？

（缙云杯初中数学邀请赛，1992 年）



［证］　(1)如图，过 C 作 $l\parallel AB$，作 A 关于 l 的对称点 A'.

在△$A'BC$ 中，有　$A'C+BC\geqslant A'B$.

即　$a+b\geqslant\sqrt{c^2+4h^2}$.

(2)上式等号成立必须 $A'C+BC=A'B$，即 A 在 BC 的延长线上，此时

$$\angle A=\angle 2=\angle 1=\angle 3=\angle B.$$

∴　△ABC 为等腰三角形($AC=BC$)时结论中的等号成立.

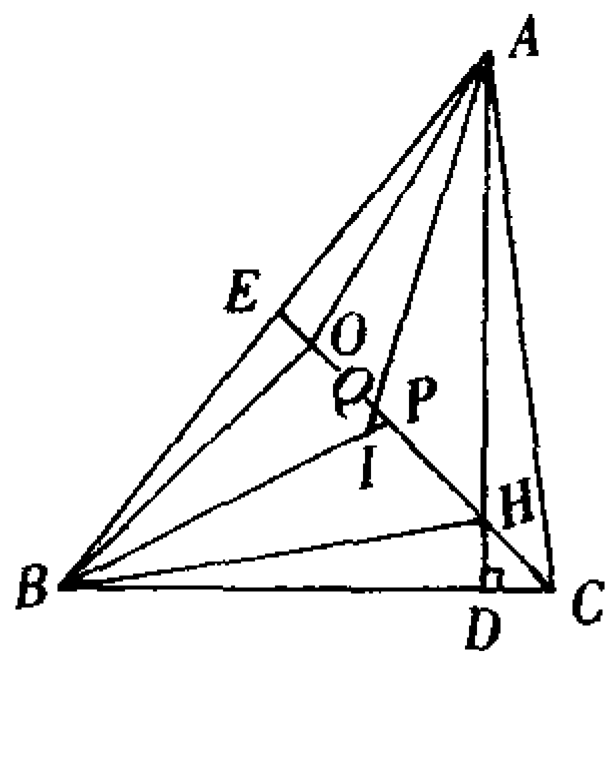
12·13　锐角$\triangle ABC$中，H是垂心，O是外心，I是内心，已知：$\angle C>\angle B>\angle A$，求证：$I$在$\triangle BOH$的内部.

（中国国家集训队选拔考试，1998年）

［证］　设$\angle B$的分角线交OH于P，则BP也是$\angle OBH$的分角线.

$$\therefore\quad \frac{BH}{BO}=\frac{HP}{OP}. \qquad ①$$

设$\angle A$的分角线交OH于Q，AQ也是$\angle OAH$的分角线.



$$\therefore\quad \frac{AH}{AO}=\frac{HQ}{OQ}. \qquad ②$$

作　$CHE\perp AB$，由　$\angle B>\angle A$，

得　$AC>BC$，$AE>BE$.

故　$AH>HB$.　③

又　$AO=BO$.　④

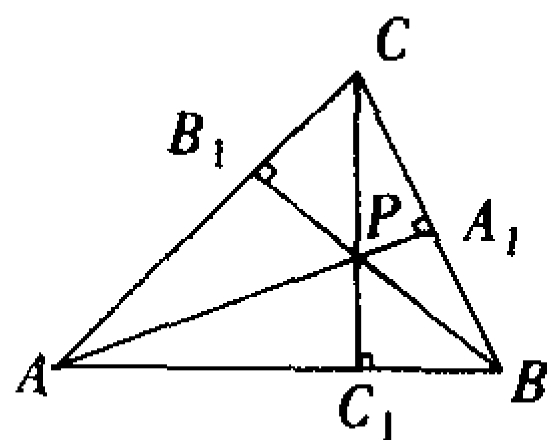
由①、②、③、④得　$\dfrac{HQ}{OQ}>\dfrac{HP}{OP}$.

从而，Q在O、P之间，AQ与BP的交点I必在$\triangle BOH$内.

12·14　假设P是锐角$\triangle ABC$内的任一点.求证点P到$\triangle ABC$的边上的点的最大距离D比最小距离d至少大一倍.在什么条件下，$D=2d$？

（匈牙利数学奥林匹克，1943年）

［证］　设P向锐角$\triangle ABC$各边所引垂线的垂足为A_1、B_1、C_1，由于$\triangle ABC$为锐角三角形，则A_1、B_1、C_1一定在AB、BC、CA内部，而不在它们的延长线上，于是线段PA、PB、PC和PA_1、PB_1、PC_1把$\triangle ABC$分成六个直角三角形.



由于以P为顶点的6个锐角之和为360°，则必有一角不小于60°，不妨设$\angle APC_1\geqslant 60°$，这时

$$d\leqslant PC_1\leqslant\frac{1}{2}PA\leqslant\frac{1}{2}D，\text{即}\quad d\leqslant\frac{1}{2}D.$$

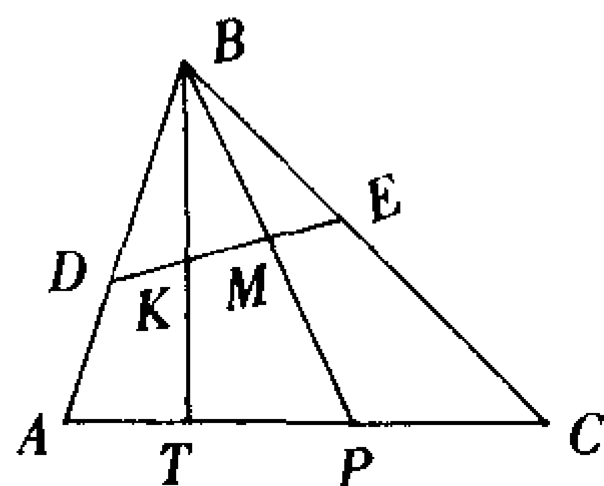
显然，当且仅当顶点P处的六个角都等于60°时，$d=\dfrac{1}{2}D$成立.

这时PA、PB、PC和$\triangle ABC$的三边之间的夹角都等于30°.因此

$\triangle ABC$ 为等边三角形,而 P 点恰为等边$\triangle ABC$ 的中心.

12·15 点 D 和 E 分别位于$\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上,点 K 和 M 将线段 DE 分为三等分,直线 BK 和 BM 分别与边 AC 相交于点 T 和 P.求证:$TP\leqslant\frac{1}{3}AC$.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)



[证] 因为 $DK=KB=ME$,

则可设 $S_{\triangle DBK}=S_{\triangle KBM}=S_{\triangle MBE}=S_0$,

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle ABT}}{S_0}=\frac{AB\cdot BT}{DB\cdot BK}, \qquad ①$$

$$且\quad \frac{S_{\triangle TBP}}{S_0}=\frac{TB\cdot BP}{KB\cdot BM}, \qquad ②$$

$$及\quad \frac{S_{\triangle PBC}}{S_0}=\frac{PB\cdot BC}{MB\cdot BE}, \qquad ③$$

由①、②、③可得

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_0}&=\frac{S_{\triangle ABT}+S_{\triangle TBP}+S_{\triangle PBC}}{S_0}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{S_{\triangle ABT}}{S_0}\cdot\frac{S_{\triangle TBP}}{S_0}\cdot\frac{S_{\triangle PBC}}{S_0}}\\&=3\sqrt[3]{\frac{AB\cdot BT}{DB\cdot BK}\cdot\frac{TB\cdot BP}{KB\cdot BM}\cdot\frac{PB\cdot BC}{MB\cdot BE}}\\&=3\cdot\left(\frac{BT\cdot BP}{KB\cdot BM}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{AB\cdot BC}{DB\cdot BE}\right)^{\frac{1}{3}}\\&=3\left(\frac{S_{\triangle TBP}}{S_0}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{S_{\triangle ABC}}{S_0}\right)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

于是 $\quad S_{\triangle ABC}\geqslant 3S_{\triangle TBP}$,

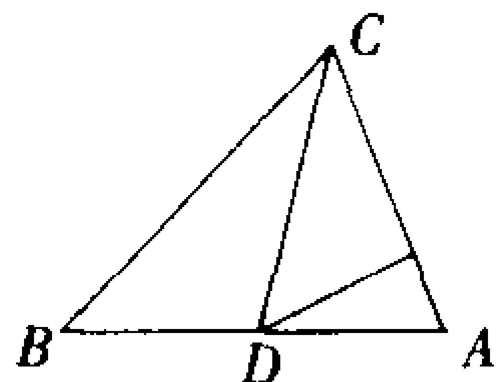
从而有 $\quad \frac{AC}{TP}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle TBP}}\geqslant 3$,

即　$AC \geqslant 3TP$，或　$TP \leqslant \frac{1}{3}AC$.

12·16　在$\triangle ABC$中，角C的平分线交AB于D.求证：线段CD的长度小于边CA和CB长度的几何平均值.

（匈牙利数学奥林匹克，1916年）

［证］　因为$\angle ADC > \angle ABC$，所以在$\angle ADC$内作$\angle EDC = \angle ABC$，DE边一定交于AC的一个内点，设该点为E.



$\therefore$　$\triangle CBD \backsim \triangle CDE$，有　$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE}$.

故　$CD^2 = CB \cdot CE < CB \cdot CA$.

12·17　设M是$\triangle ABC$内一点，并使$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$，又$P$为$\triangle ABC$内任意一点，试证：$PA + PB + PC \geqslant MA + MB + MC$.

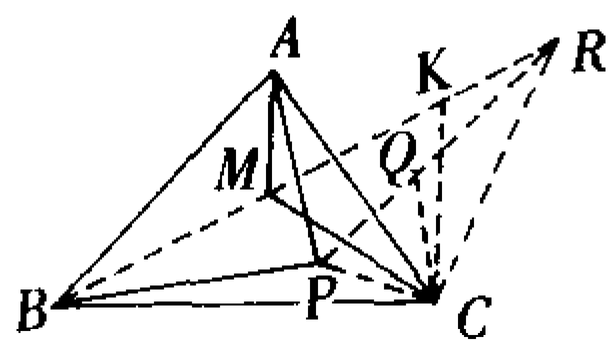
（中国陕西省数学竞赛，1978年）

［证］　延长BM到K，使$MK = MC$，连KC.

$\because$　$\angle BMC = 120°$，

$\therefore$　$\angle CMK = 60°$，$\triangle MCK$为正三角形，

$\therefore$　$MC = KC$.



再延长MK到R，使$KR = MA$，连RC，

在$\triangle MCA$与$\triangle KCR$中，

$MC = KC$，$MA = KR$，且　$\angle CMA = 120° = \angle CKR$，

$\therefore$　$\triangle MCA \cong \triangle KCR$，$\therefore$　$CA = CR$，$\angle MCA = \angle KCR$.

再以PC为一边作等边$\triangle PCQ$，连QR.

在$\triangle PCA$与$\triangle QCR$中，$PC = QC$，$CA = CR$，

而　$\angle PCA = \angle MCA + \angle PCM = \angle KCR + \angle MCK - \angle MCQ$
$= \angle KCR + \angle QCK = \angle QCR$，

$\therefore$　$\triangle PCA \cong \triangle QCR$，$\therefore$　$PA = QR$.

故　$PA + PB + PC = QR + PB + PQ \geqslant BR$.

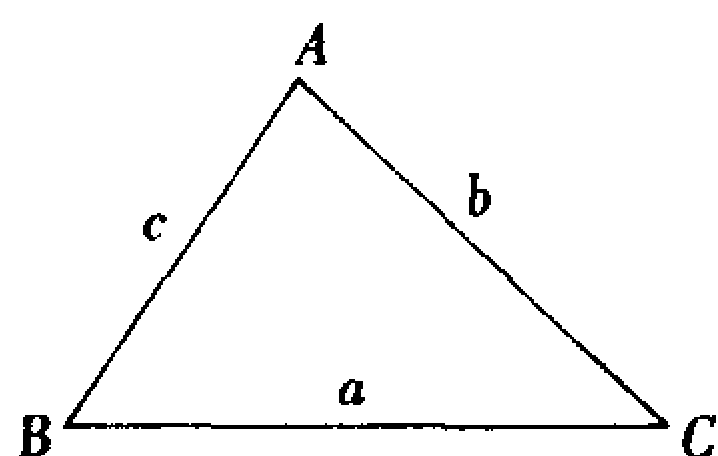
而　$BR = MB + MK + KR = MA + MB + MC$，

$\therefore$　$PA + PB + PC \geqslant MA + MB + MC$.

12·18　设a、b、c分别为三角形的三边之长，A、B、C是它们的对

角，试证：$Aa+Bb+Cc\geqslant\frac{1}{2}(Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb)$

（莫斯科数学奥林匹克，1950 年）



［证］ 不失一般性，设 $A\geqslant B\geqslant C$，则 $a\geqslant b\geqslant c$，这样有

$$(A-B)(a-b)\geqslant 0,$$
$$(B-C)(b-c)\geqslant 0,$$
$$(C-A)(c-a)\geqslant 0.$$

$$(A-B)(a-b)+(B-C)(b-c)+(C-A)(c-a)\geqslant 0,$$
$$Aa-Ba-Ab+Bb+Bb-Cb-Bc+Cc+Cc-Ac-Ca+Aa\geqslant 0,$$
$$2(Aa+Bb+Cc)\geqslant Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb,$$

即 $$Aa+Bb+Cc\geqslant\frac{1}{2}(Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb).$$

12·19 设 a、b、c 为任意三角形三边的长，$I=a+b+c$，$S=ab+bc+ac$，证明：$3S\leqslant I^2\leqslant 4S$.

（基辅数学奥林匹克，1966 年；中国天津市数学竞赛，1978 年）

［证 1］ (i) $\because\ |a-b|<c$,

$\therefore\ a^2-2ab+b^2<c^2$, ①

$\because\ |b-c|<a$,

$\therefore\ b^2-2bc+c^2<a^2$. ②

$\because\ |a-c|<b$,

$\therefore\ a^2-2ac+c^2<b^2$. ③

①＋②＋③得 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac<0$,

$\therefore\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac<4(ab+bc+ac)$,

$\therefore\ (a+b+c)^2<4(ab+bc+ac)$,

即 $I^2<4S$. ④

(ii) $\because\ (a-b)2\geqslant 0$,

$\therefore\ a^2-2ab+b^2\geqslant 0$. ⑤

$\because\ (b-c)^2\geqslant 0$,

$\therefore\ b^2-2bc+c^2\geqslant 0$. ⑥

$\because\ (a-c)^2\geqslant 0$,

$\therefore\ a^2-2ac+c^2\geqslant 0$. ⑦

⑤+⑥+⑦,得 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geqslant 3(ab+bc+ac)$,

有 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ac)$.

即 $I^2\geqslant 3S$. ⑧

由④、⑧,得 $3S\leqslant I^2\leqslant 4S$.

[证 2] 对于任意的 a、b、c,

$$I^2=(a+b+c)^2=2(bc+ca+ab)+a^2+b^2+c^2$$
$$=2S+a^2+b^2+c^2.$$

要证明 $3S\leqslant I^2\leqslant 4S$. ①

只要证明 $3S\leqslant 2S+a^2+b^2+c^2<4S$.

即 $S\leqslant a^2+b^2+c^2<2S$. ②

为了证明②,对于任意的 b、c,有 $0\leqslant(b-c)^2=b^2+c^2-2bc$,

$\therefore\quad 2bc\leqslant b^2+c^2$. ③

同样,对于任意的 c、a 和 a、b 有

$2ca\leqslant c^2+a^2$, ④

$2ab\leqslant a^2+b^2$. ⑤

由③、④、⑤可得 $S\leqslant a^2+b^2+c^2$. ⑥

由于三角形任意一边小于其余的两边之和,$\therefore\quad a<b+c$.

上式两边乘以 a,得 $a^2<ab+ca$, ⑦

同理 $b^2<bc+ab$, ⑧

$c^2<ca+bc$, ⑨

由⑦、⑧、⑨,得 $a^2+b^2+c^2<2S$. ⑩

由⑥和⑩,得 $S\leqslant a^2+b^2+c^2<2S$.

$\therefore\quad 3S\leqslant I^2<4S$.

[证 3] $\because\quad I^2-3S=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

$\therefore\quad I^2\geqslant 3S$.

$\because\quad I^2-4S=(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)$

$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=(a-b)^2+c^2-2ac-2bc$$

$<c^2+c^2-2ac-2bc$

$=2c[c-(a+b)]<0,$

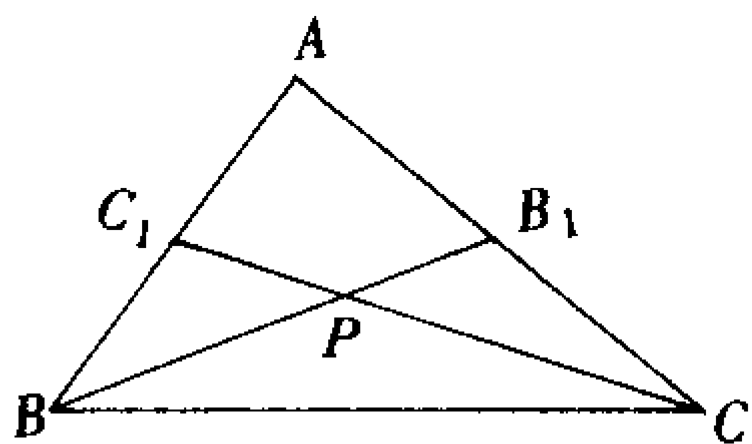
$\therefore\ \ I^2<4S$. 综上 $3S\leqslant I^2\leqslant 4S$.

12·20 BB_1 和 CC_1 是$\triangle ABC$ 的两条中线. 求证: $BB_1^2+CC_1^2>\frac{9}{8}BC^2$.

(基辅数学奥林匹克, 1976 年)

[证] 设 BB_1、CC_1 相交于 P 点. 如图.

知 $BB_1=\frac{3}{2}BP$, $CC_1=\frac{3}{2}CP$.



故 $BB_1^2+CC_1^2=\frac{9}{4}(BO^2+CP^2)$

$=\frac{9}{8}(BP+CP)^2+\frac{9}{8}(BP-CP)^2$

$\geqslant\frac{9}{8}(BP+CP)^2>\frac{9}{8}BC^2$.

12·21 求证: 任意三角形的边长 a、b、c 满足不等式 $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$.

(匈牙利数学奥林匹克, 1972 年)

[证] $c(a-b)^2+4abc=ca^2-2abc+cb^2+4abc=c(a+b)^2$.

又 $[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc]-(a^3+b^3+c^3)$

$=a[(b-c)^2-a^2]+b(c-a)^2-b^2]+c[(a+b)^2-c^2]$

$=a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+c(a+b+c)(a+b-c)$

$=(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)$

$=(a+b-c)(c^2-a^2+2ab-b^2)$

$=(a+b-c)[c^2-(a-b)^2]$

$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

由三角形两边之和大于第三边, 上述三个因式均大于零, 从而不等式得证.

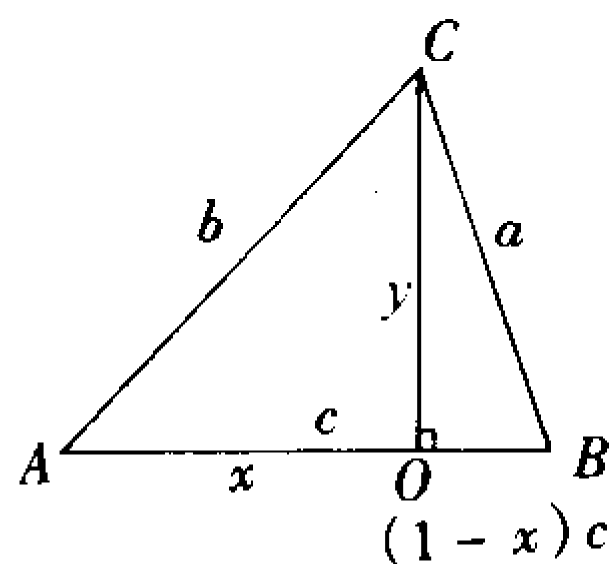
12·22 设点 O 在$\triangle ABC$ 的边 AB 上, 且与顶点不重合, 求证: $OC\cdot AB<OA\cdot BC+OB\cdot AC$.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克, 1983 年)

[证] 记 $AB=c, BC=a, CA=b, AO=x\cdot c, OB=(1-x)\cdot c, 0<x<1$. $\angle ACB=\angle C$.

在$\triangle AOC$中，由余弦定理得

$$y^2=b^2+x^2c^2-2bcx\cos A. \quad ①$$



在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad ②$$

②代入①得

$$\begin{aligned}
y^2 &= b^2+x^2c^2-(b^2+c^2-a^2)x \\
&= b^2-b^2x+a^2x+(x^2-x)c^2 \\
&= b^2-b^2x+a^2x+(x^2-x)(a^2+b^2-2ab\cos C) \\
&= b^2x^2-2b^2x+b^2+a^2x^2+2x(1-x)ab\cos C \\
&< b^2x^2-2b^2x+b^2+a^2x^2+2x(1-x)ab \\
&= b^2(1-x)^2+a^2x^2+2ax\cdot b(1-x) \\
&= [b(1-x)+ax]^2.
\end{aligned}$$

$\therefore \quad y<b(1-x)+ax$,

故 $\quad yc<b(1-x)c+a\cdot xc$,

即 $\quad OC\cdot AB<OA\cdot BC+OB\cdot AC$

12·23 求证：若 a、b、c 为三角形的三边长，且 $a+b+c=1$，则 $a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

（第23届全苏数学奥林匹克，1989年）

[证] 由 $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 得

$$4(ab+bc+ca)=2-2(a^2+b^2+c^2).$$

设三角形面积为 S，由海伦公式有

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)},$$

得

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc \\
&= -1+4(ab+bc+ca)-8abc \\
&= 1-2(a^2+b^2+c^2)-8abc>0.
\end{aligned}$$

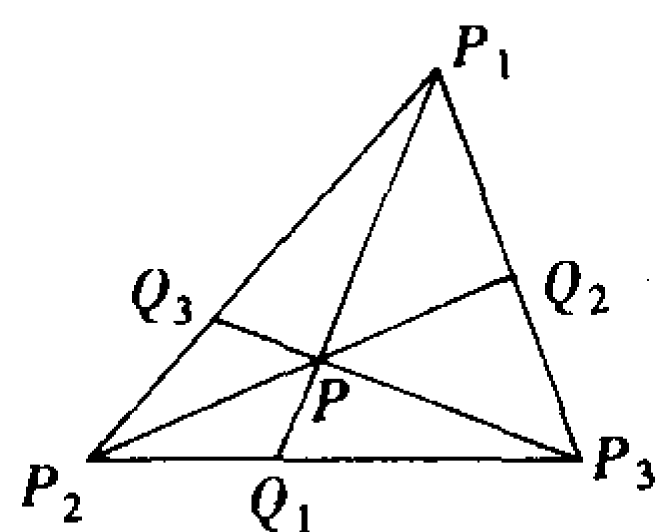
$\therefore \quad a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

12·24 已知：$\triangle P_1P_2P_3$ 及三角形内任一点 P，直线 P_1P、P_2P、

P_3P 分别交对边于 Q_1、Q_2、Q_3. 求证 在$\frac{P_1P}{PQ_1}$、$\frac{P_2P}{PQ_2}$、$\frac{P_3P}{PQ_3}$,这三个比值中,至少有一个不大于 2. 并且至少有一个不小于 2.

(第 3 届国际数学奥林匹克,1961 年)

[证] 如图,记$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle PP_2P_3$、$\triangle PP_3P_1$、$\triangle PP_1P_2$ 的面积依次为 S、S_1、S_2、S_3. 则有



$$\frac{S_1}{S}=\frac{PQ_1}{P_1Q_1},$$

$$\frac{S_2}{S}=\frac{PQ_2}{P_2Q_2},$$

$$\frac{S_3}{S}=\frac{PQ_3}{P_3Q_3}.$$

又$\because$ $S_1+S_2+S_3=S$,

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}=1.$$

即 $$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}+\frac{PQ_2}{P_2Q_2}+\frac{PQ_3}{P_3Q_3}=1.$$

因为三个正数之和为 1,则这三个数中必有一个不大于$\frac{1}{3}$,必有一个不小于$\frac{1}{3}$.

设 $$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}\leqslant\frac{1}{3},\quad \frac{PQ_2}{P_2Q_2}\geqslant\frac{1}{3}.$$

则 $$\frac{PQ_1}{P_1P}\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{PQ_2}{P_2P}\geqslant\frac{1}{2},$$

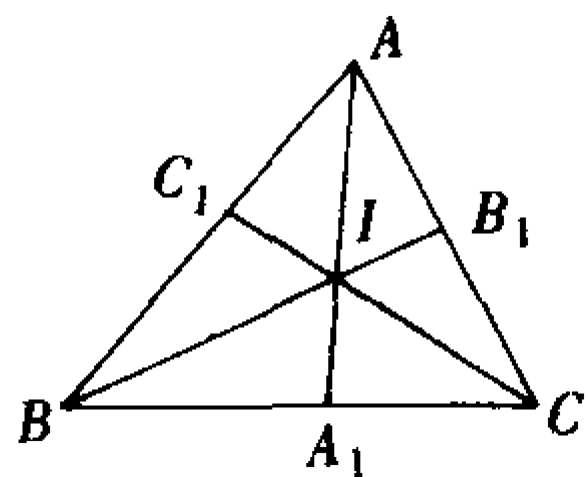
$$\frac{P_1P}{PQ_1}\geqslant 2,\quad \frac{P_2P}{PQ_2}\leqslant 2.$$

12·25 已给$\triangle ABC$,设 I 是它的内心,角 A、B、C 的内角平分线分别与其对边交于 A'、B'、C'. 求证:$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$.

(第 32 届国际数学奥林匹克,1991 年)

[证] 记 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

由三角形内角平分线性质



$$\frac{AI}{IA'}=\frac{AC}{A'C}=\frac{AB}{A'B},$$

$$\therefore \quad \frac{AI}{IA'}=\frac{AC+AB}{A'C+A'B}=\frac{b+c}{a}.$$

则 $\dfrac{AI}{AA'}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$.

同理有 $\dfrac{BI}{BB'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$, $\dfrac{CI}{CC'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$.

由平均值不等式可得

$$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right)\right]^3=\frac{8}{27}.$$

另一方面,由 $b+c>a$,

可得 $2(b+c)>a+b+c$, 即 $\dfrac{b+c}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$.

记 $x=\dfrac{AI}{AA'}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$, $y=\dfrac{BI}{BB'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$, $z=\dfrac{CI}{CC'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$,

则 $x>\dfrac{1}{2}$, $y>\dfrac{1}{2}$, $z>\dfrac{1}{2}$.

又 $x+y+z=2$.

设 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varepsilon_1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varepsilon_2}{2}$, $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varepsilon_3}{2}$, 其中 $\varepsilon_i>0, i=1,2,3$,又 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=1$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}&=xyz=\frac{1+\varepsilon_1}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon_2}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon_3}{2}\\&=\frac{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\varepsilon_1\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{8}\\&>\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

12·26 设 a、b、c 为三角形的三条边,而 m_a、m_b、m_c 是相应的中

线.求证：$\frac{m_a^2}{b^2+c^2}+\frac{m_b^2}{a^2+c^2}+\frac{m_c^2}{a^2+b^2}\leqslant\frac{9}{8}$.

（基辅数学奥林匹克，1973年）

[证] $\because\quad 2a^2+2b^2=4m_c^2+c^2$,

$$\therefore\quad \frac{m_c^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

同理 $$\frac{m_b^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{a^2+c^2},$$

$$\frac{m_a^2}{b^2+c^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{c^2}{b^2+c^2},$$

$$\therefore\quad \frac{m_a^2}{b^2+c^2}+\frac{m_b^2}{a^2+c^2}+\frac{m_c^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\left(3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}\right)$$

$$\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{b^2c^2}\sqrt{a^2c^2}\sqrt{a^2b^2}}}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\times1=\frac{9}{8}.$$

注意 $a>0,\ b>0,\ c>0$.

其中 等号当且仅当

$$\begin{cases}\frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2},\\ a^2=b^2=c^2.\end{cases}$$

即 当 $a=b=c$ 时成立.

12·27 设 a、b、c 是直角三角形的三边，c 为斜边，整数 $n\geqslant3$. 求证：$a^n+b^n<c^n$.

（中国福建省福州市数学竞赛，1964年）

[证 1] (1)当 $n=3$ 时，

$a^3+b^3<a^2c+b^2c=(a^2+b^2)\cdot c=c^3$,

不等式成立.

(2)设当 $n=k$ 时,不等式成立,即 $a^k+b^k<c^k$.

则当 $n=k+1$ 时,注意到

$a^{k+1}+b^{k+1}<a^kc+b^kc=(a^k+b^k)\cdot c=c^{k+1}$,

由(1)、(2)知原不等式成立.

[证 2] 设直角三角形一锐角为 A,则

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c}.$$

$\because$ $|\sin A|<1$, $|\cos A|<1$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant 3$ 时, $\sin^n A\geqslant\sin^2 A$, $\cos^n A<\cos^2 A$.

于是 $\sin^n A+\cos^n A<\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

即 $\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<1$, 故 $a^n+b^n<c^n$.

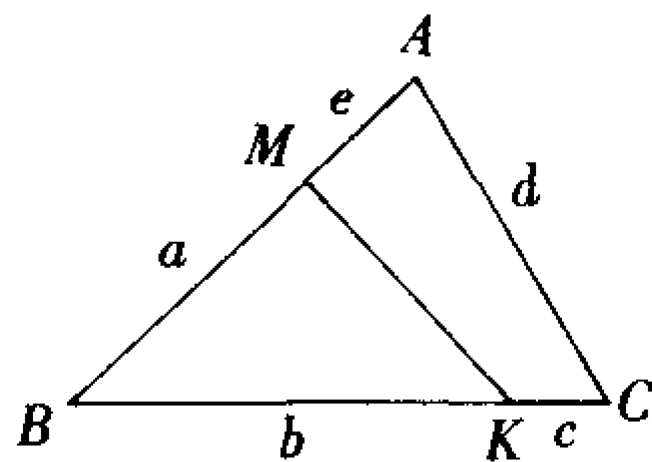
12·28 直线与$\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 分别相交于点 M 和 K. 又$\triangle MBK$ 与四边形 $AMKC$ 的面积相等. 求证: $\frac{MB+BK}{AM+CA+KC}\geqslant\frac{1}{3}$.

(莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[证] 设 $MB=a,BK=b,KC=c.CA=d,AM=e$,如图.

$\because$ $S_{\triangle BMK}>S_{\triangle MKC}$, $\therefore$ $b>c$,

$\because$ $S_{\triangle BMK}>S_{\triangle AMK}$, $\therefore$ $a>e$.



假若 $\frac{a+b}{c+d+e}<\frac{1}{3}$,

则 $3a+3b<c+d+e<b+d+a$.

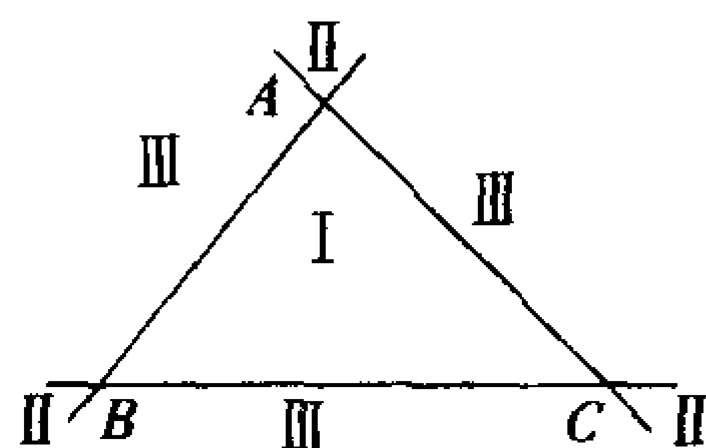
$\therefore$ $2a+2b<d$.

则 $AB+BC=(a+e)+(b+c)<(a+a)+(b+b)=2a+2b<d=AC$, 矛盾.

故 $\frac{a+b}{c+d+e}\geqslant\frac{1}{3}$.

12·29 对于平面上任意三点 P、Q、R,我们定义 $m(PQR)$为三角形 PQR 的最短的一条高线的长度(当 P、Q、R 共线时,令 $m(PQR)=0$). 设 A、B、C 为已知平面上三点,对此平面上任意一点 X, 求证: $m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$.

(第 34 届国际数学奥林匹克,1993 年)



[证 1] 不妨设 A、B、C 不共线，将 A、B、C 扩展为直线，把平面分成七个部分，如图所示，分为三种区域.

(1) X 点在区域 I 内.

记 $l(PQR)$ 为 $\triangle PQR$ 的最长边的长度.

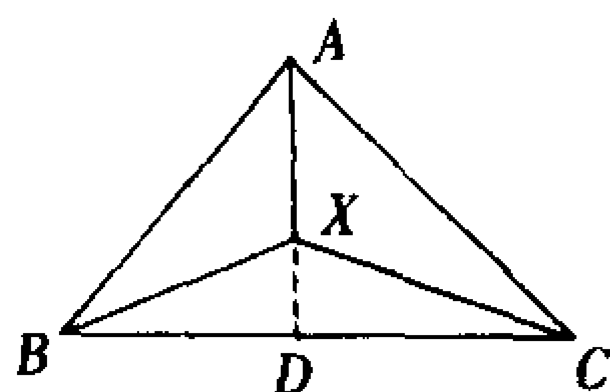
延长 AX 交 BC 于 D，则

$AX \leqslant AD \leqslant \max\{AB, AC\} \leqslant l(ABC)$.

$BX \leqslant l(ABC)$，$CX \leqslant l(ABC)$.

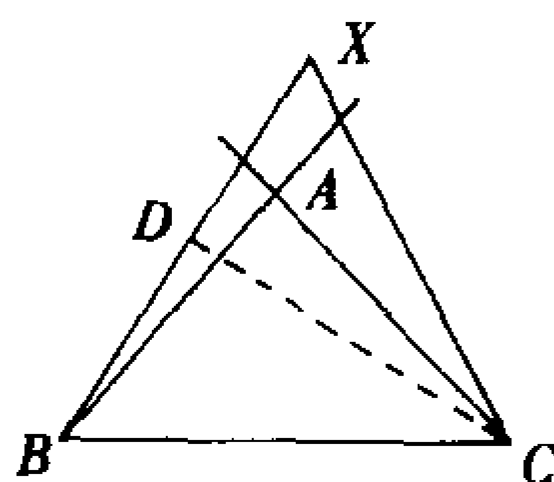
$\therefore\ l(ABX) \leqslant l(ABC)$，$l(AXC) \leqslant l(ABC)$，

$l(XBC) \leqslant l(ABC)$.



于是由面积公式得

$$\begin{aligned} & m(ABX)+m(AXC)+m(XBC) \\ = & \frac{2S_{\triangle ABX}}{l(ABC)}+\frac{2S_{\triangle AXC}}{l(AXC)}+\frac{2S_{\triangle XBC}}{l(XBC)} \\ \geqslant & \frac{2S_{\triangle ABX}}{l(ABC)}+\frac{2S_{\triangle AXC}}{l(ABC)}+\frac{2S_{\triangle XBC}}{l(ABC)} \\ = & \frac{2S_{\triangle ABC}}{l(ABC)}=m(ABC). \end{aligned}$$



(2) X 点在区域Ⅱ中.

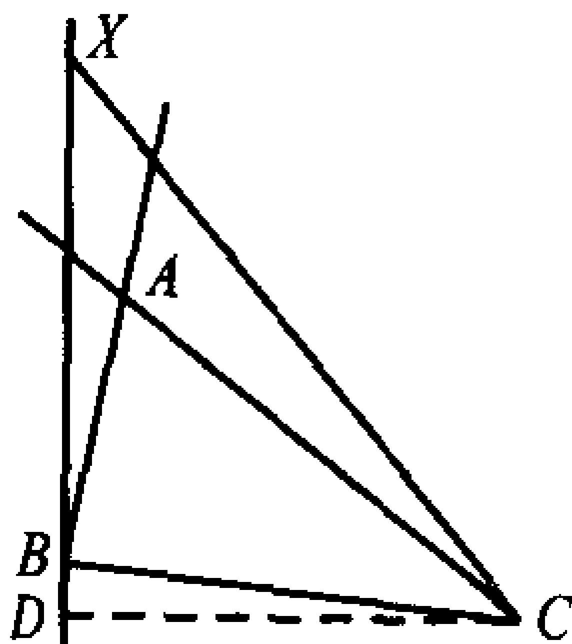
不妨设 X 在 $\angle BAC$ 所对的区域Ⅱ中.

记 BC、CA、AB 所对应的高分别为 h_a、h_b、h_c.

(i)若 $m(XBC)$ 是从 X 引出，则

$m(XBC) \geqslant h_a \geqslant m(ABC)$.

这时必有 $m(ABC) \leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$.



(ii)若 $m(XBC)$ 是从 C 点引出，设为 CD.

如果 $\angle CBX \leqslant 90^{\circ}$，则

$$\begin{aligned} CD &= BC\sin\angle CBX \geqslant BC\sin\angle ABC \\ &= hc \geqslant m(ABC). \end{aligned}$$

即 $m(ABC) \leqslant m(XBC)$.

如果 $\angle CBX \geqslant 90^{\circ}$，则

$\angle CBD = \angle BXC + \angle BCX \geqslant \angle BCX \geqslant \angle BCA$，

而　$\angle CBD=180^\circ-\angle CBX\leqslant 90^\circ$.

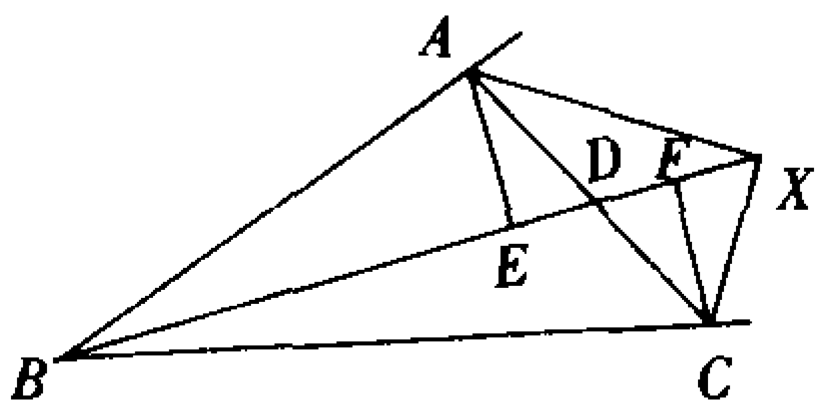
$\therefore$　$CD=BC\cdot\sin\angle CBD\geqslant BC\cdot\sin\angle BCA=h_b\geqslant m(ABC)$.

即　$m(ABC)\leqslant m(XBC)$.

(3)设 X 点在区域Ⅲ中.

不妨设在$\angle ABC$所含的区域中.

考虑 AB、BC、CA、AX、BX、CX 的最长边.



如果 AB、BC、CA 中之一为最长边,则由(1)的证明可知不等式成立.

如果 BX 最长,如图,设 BX 与 AC 交于D,且设$\angle ADB\leqslant 90^\circ$,作 $AE\perp BX$ 于E,$CF\perp BX$ 于F,则

$m(ABX)=AE$, $m(XBC)=CF$.

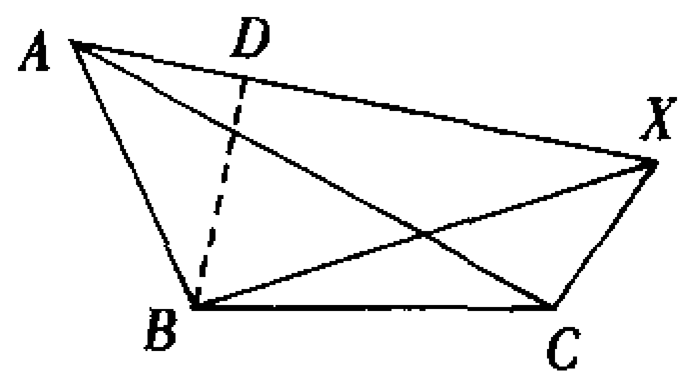
又$\because$　$\angle ADB>\angle ACB$,

$\therefore$　$AE+CF=AC\cdot\sin\angle ADB>AC\sin\angle ACB=h_a\geqslant m(ABC)$.

即　$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(XBC)$

$\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$.

如果最长边是 AX 或CX,不妨设为 AX.



在$\triangle ABX$中, $\angle ABC\geqslant\angle BAX$,

则　$90^\circ\geqslant\angle BAX\geqslant\angle BAC$.

作　$BD\perp AX$ 于D, 则

$m(ABX)=BD=AB\cdot\sin\angle BAX$

$\geqslant AB\cdot\sin\angle BAC=h_b\geqslant m(ABC)$.

$\therefore$　$m(ABC)\leqslant m(ABX)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$.

综上所述,不等式恒成立.

[证 2]　令 $BC=a,CA=b,AB=c,AX=p,BX=q,CX=r$.

显然,一个三角形的最小高在它的最长边上.

(1)若 $\max\{a,b,c,p,q,r\}\in\{a,b,c\}$.

不妨设　$\max\{a,b,c,p,q,r\}=a$, 则

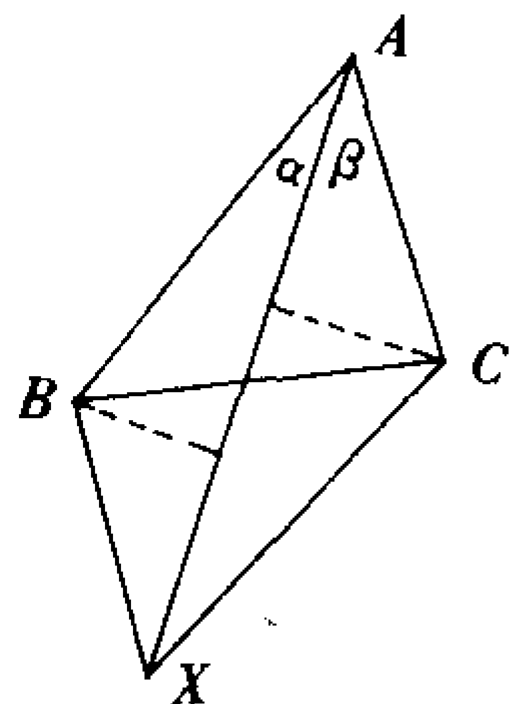
$$m(ABC)=\frac{2}{a}S_{\triangle ABC}$$

$$\leqslant\frac{2}{a}(S_{\triangle ABX}+S_{\triangle AXC}+S_{\triangle XBC})$$

$$\leqslant \frac{2S_{\triangle ABX}}{\max(c,p,q)}+\frac{2S_{\triangle AXC}}{\max(b,r,p)}+\frac{2S_{\triangle XBC}}{\max(a,q,r)}$$

$$=m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

(2)若 $\max\{a,b,c,p,q,r\}\in\{p,q,r\}$.



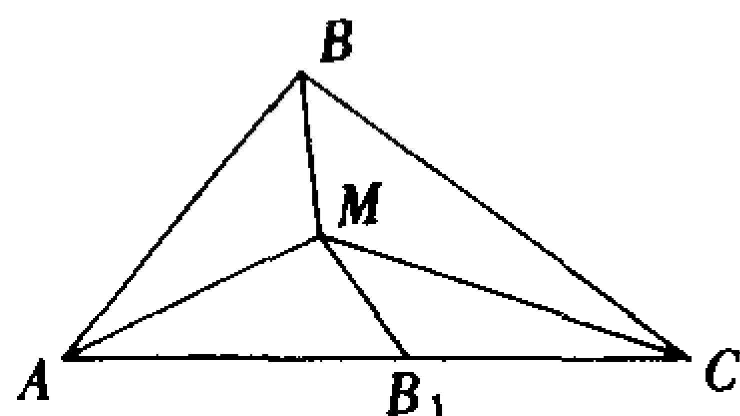
不妨设　$\max\{a,b,c,p,q,r\}=p$.

令 α 为 AB 逆时针转到 AX 所成的角，这是有向角. 若顺时针转则为负值. 不妨设 $b\leqslant c$，则

$$\begin{aligned}m(ABC)&\leqslant b|\sin(\alpha+\beta)|\\&=b|\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta|\\&\leqslant b(|\sin\alpha|+|\sin\beta|)\\&\leqslant c|\sin\alpha|+b|\sin\beta|\\&=m(ABX)+m(ACX)\\&\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).\end{aligned}$$

12·30　四个居民点 A、B、C、M 为直线道路相连，且 M 是以 A、B、C 为顶点的三角形的角平分线的交点. 必须从村庄 M 出发沿道路走遍其余三个村庄再回到 M. 若已知 $AC>BC>AB$. 指出最短的巡回路线.

（基辅数学奥林匹克，1951 年）



[解]　如图，试比较下面三条路线：

(1) $M\to A\to B\to C\to M$,

(1) $M\to B\to C\to A\to M$,

(1) $M\to C\to A\to B\to M$,

今证第一条为最短路线

$\because$　AC 最长，可在 AC 上截取 $AB_1=AB$,

$\therefore$　$\triangle MAB\cong MAB_1$.

$MB_1=MB$.

路线 $MABCM$ 的长度 − 路线 $MBCAM$ 的长度

$=(MA+AB+BC+CM)-(MB+BC+CA+AM)$

$=AB+CM-MB-CA$

$=AB+CM-MB-(AB_1+B_1C)$

$=CM-MB-B_1C=CM-(MB_1+B_1C)<0$.

故　路线 $MABCM$ 的长度＜路线 $MBCAM$ 的长度，

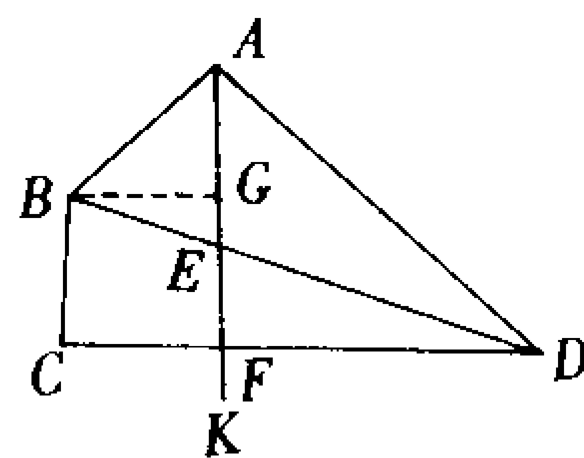
同理可证　第一条的长度短于第三条的长度.

2. 多边形中的线段不等式

12·31　在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，射线 AK 平分 $\angle BAD$，今知 $AK\parallel BC$，$AK\perp CD$，AK 与 BD 相交于点 E. 求证：$AE<\frac{1}{2}CD$.

（中国安徽省合肥市高中数学竞赛，1994 年）

［证 1］　记 AK 与 CD 的交点为 F，作 $BG\perp AK$ 于 G.



内于 AK 平分 $\angle BAD$，则 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADF$ 均为等腰直角三角形，从而

$BG=AG$，$AF=FD$.

由 $BC\parallel AK$，$BG\parallel CF$，则 $BCFG$ 为矩形，从而有

$BC=GF$，$BG=CF$，

又　$BC+CF=GF+AG=AF=FD$.

$\therefore$　$FD>CF$，

从而　$FD>\frac{1}{2}(CF+FD)=\frac{1}{2}CD$.

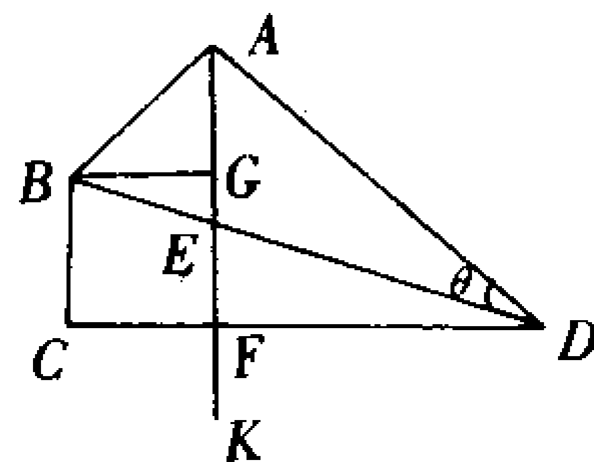
又 $\because$　$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CD}>\frac{1}{2}$.　$\therefore$ $EF>\frac{1}{2}BC$，

从而有　$CD=CF+FD=2FD-BC$

$$>2(FD-EF)=2(AF-EF)=2AE.$$

即　$AE<\frac{1}{2}CD$.

［证 2］　记 AK 与 CD 交于 F，由 AF 平分 $\angle BAD=90^\circ$，则 $\triangle AFD$ 为等腰直角三角形.



$\angle FAD=\angle ADF=45^\circ$.

设　$\angle ADB=\theta$，则　$0^\circ<\theta<45^\circ$.

容易求出　$\angle BDC=45^\circ-\theta$，$\angle ABD=90^\circ-\theta$，$\angle AED=135^\circ-\theta$.

设　$BD=1$，于是　$AD=\cos\theta$，且

$CD=\cos(45^\circ-\theta)$. ①

在$\triangle AED$中,由正弦定理,

$$AE=\frac{AD\cdot\sin\theta}{\sin(135^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{\cos(45^\circ-\theta)}=\frac{\sin2\theta}{2\cos(45^\circ-\theta)}. \quad ②$$

由①、②知,为证 $AE<\frac{1}{2}CD$,只需证

$$\frac{\sin2\theta}{\cos(45^\circ-\theta)}<\cos(45^\circ-\theta).$$

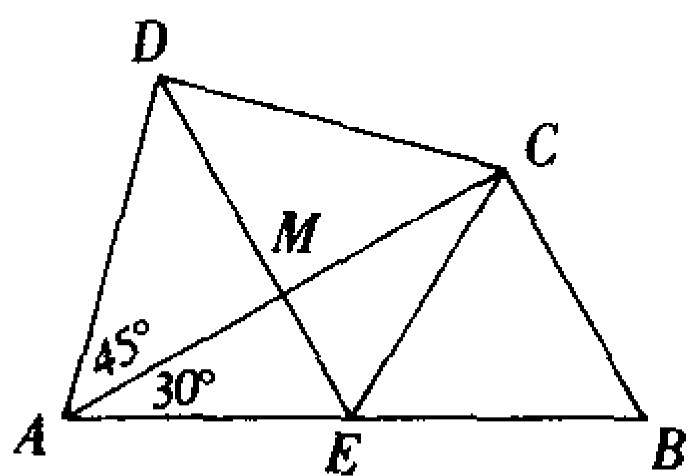
又 $0^\circ<\theta<45^\circ$,所以 $\cos(45^\circ-\theta)>0$,

为此,只要证 $\cos^2(45^\circ-\theta)>\sin2\theta$.

由于 $\cos^2(45^\circ-\theta)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)\right]^2=\frac{1}{2}(1+\sin2\theta)$

$$>\frac{1}{2}(\sin2\theta+\sin2\theta)=\sin2\theta.$$

12·32 将一副三角板拼接成如图的四边形 $ABCD$,试证:四边形周长的一半大于 AB 中点 E 到顶点,C、D 连线的和.

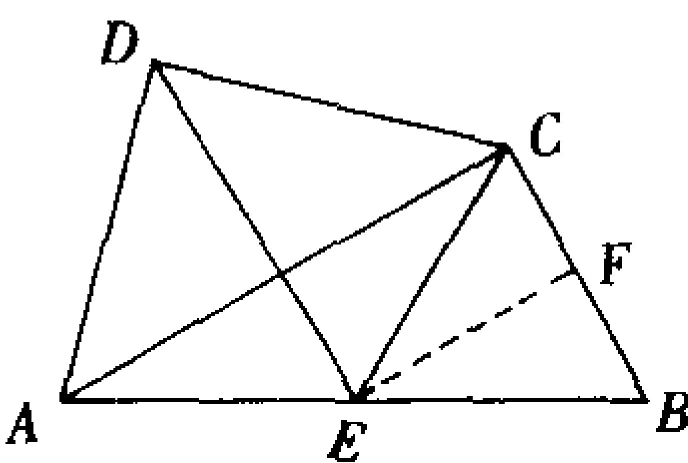


(中国湖北省武汉市数学竞赛,1985 年)

[证] 由已知条件得$\triangle ADC$为等腰直角三角形,$\angle ADC=90^\circ$.

$\because$ E 为 AB 中点,

$\therefore$ $CE=\frac{1}{2}AB=AE=EB$.



令 ED、AC 交点为 M,取 BC 中点 F,连 EF.

$\because$ $CE=EB$, $\therefore$ $EF\perp BC$.

故知 $CFEM$ 为一矩形, $\therefore$ $EM=FC=\frac{1}{2}BC$.

而 $DM=AM=MC<AD$,

$\therefore$ $ED+EC=DM+EM+EC$

$$<\frac{1}{2}(AD+DC)+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC.$$

从而得证四边形周长的一半大于 E 点到 C、D 的连线的和.

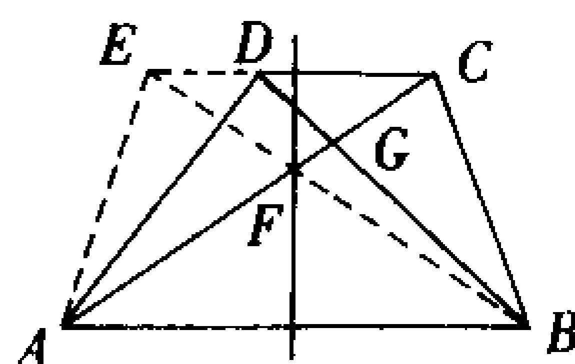
12·33 求证:如果梯形的底角不相等,那么从较小底角所引的对角线大于从另一个顶点所引的对角线.

(匈牙利数学奥林匹克,1955 年)

[证] 设梯形 $ABCD$ 的底角有

$$\angle DAB<\angle ABC.$$

作 $\angle EAB=\angle ABC$,使梯形 $ABCE$ 为等腰梯形.



由对称性,等腰梯形 $ABCE$ 的对角线交点 F 在底边 AB 的中垂线,线段 FC 及腰 BC 在中垂线的同一侧.

因为 D 是线段 EC 的内点,则线段 BD 与线段 FC 相交,所以梯形 $ABCD$ 的对角线的交点 G 也在中垂线这一侧.

底边 AB 的中垂线把平面分成两部分,包含顶点 B 的那个半平面的所有点到 B 的距离比到 A 的距离小,

因此,对点 G 有不等式 $GA>GB$.

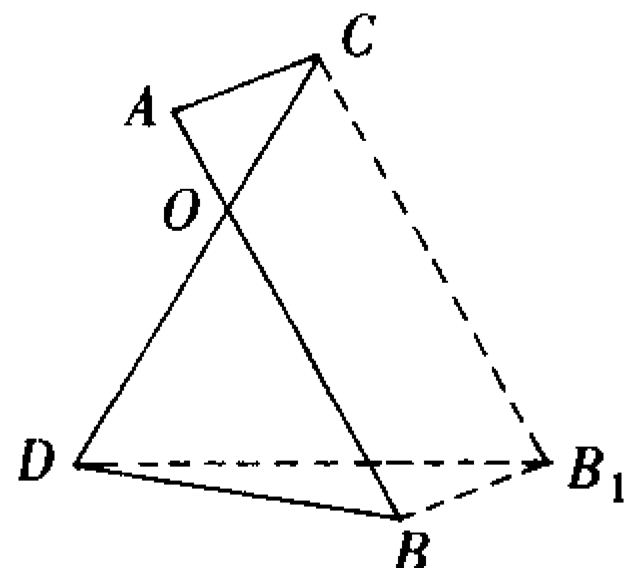
又由 $AB/\!/CD$ 得 $\triangle ABG\backsim\triangle CDG$.有 $\dfrac{GA}{GB}=\dfrac{GC}{GD}$.

于是也有 $GC>GD$. 从而有 $AC>BD$.

12·34 长为 1 的两条线段 AB 和 CD 相交于点 O,且 $\angle AOC=60°$. 试证:$AC+BD\geqslant 1$.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[证] 作线段 CB_1,使 $CB_1/\!/AB$ 且 $CB_1=AB$.则



四边形 ABB_1C 是平行四边形.

从而 $AC=BB_1$.

在 $\triangle BB_1D$ 中,$BD+BD_1\geqslant B_1D$,

即 $AC+BD\geqslant B_1D$.

其中等号在 D、B、B_1 共线时成立.

由 $\angle AOC=\angle DCB_1=60°$ 及 $CD=AB=CB$,可得 $\triangle CDB_1$ 是等边三角形,从而 $B_1D=1$.

$\therefore$ $AC+BD\geqslant 1$.

12·35　一个正方形与一个三角形有同样面积，这两者中哪一个有较大的周长？

（基辅数学奥林匹克，1969 年）

［解］　(1)对任一个$\triangle ABC$，中位线$MN=d$，高$AD=h_a$，以d、h_a为边作一个与$\triangle ABC$等积的矩形P.

显然矩形P的周长为

$$2d+2h_a=a+h_a+h_a<a+b+c,$$

其中$a+b+c$为三角形的周长.

(2)作与矩形P等积的边长为e的正方形Q.则矩形P的周长为

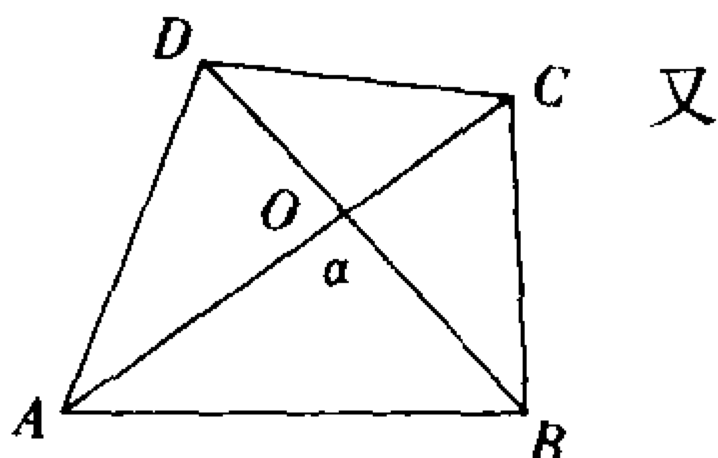
$$2d+2h_a=4\times\frac{d+h_a}{2}\geqslant 4\sqrt{dh_a}=4\sqrt{e^2}=4e,$$

其中$4e$为Q的周长.

故三角形有较大的周长.

12·36　试证：对于任何面积为1的凸四边形，它的所有边长和对角线的长度总和不小于$4+\sqrt{8}$.

（奥地利-波兰数学奥林匹克，1985 年）



［证］　记　$\angle AOB=\alpha$. 由已知$S_{ABCD}=1$，又

$$\begin{aligned}S_{ABCD}&=\frac{1}{2}(OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA)\sin\alpha\\&\leqslant\frac{1}{2}(OA+OC)(OB+OD)\\&=\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{AC+BD}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad AC+BD\geqslant\sqrt{8}. \qquad ①$$

又　$2S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$

即

$$\begin{aligned}2&=\frac{1}{2}(AB\cdot BC\sin\angle ABC+BC\cdot CD\sin\angle BCD\\&\quad+CD\cdot DA\sin\angle ADC+DA\cdot AB\sin\angle DAB)\\&\leqslant\frac{1}{2}(AB\cdot BC+BC\cdot CD+CD\cdot DA+DA\cdot AB)\end{aligned}$$

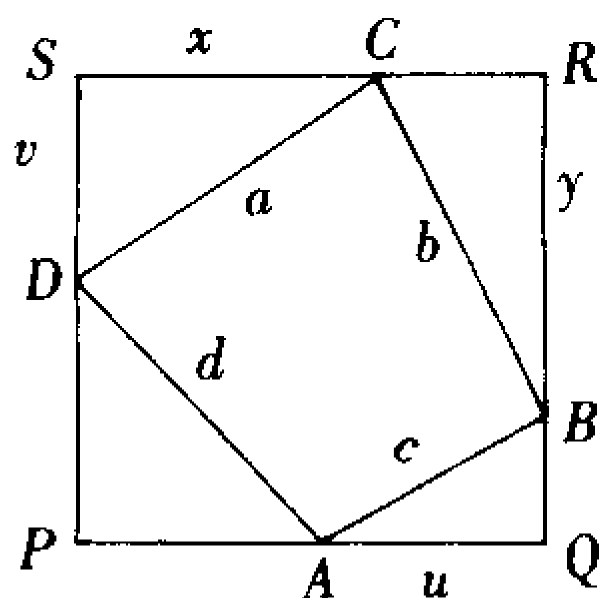
$$=\frac{1}{2}(AB+CD)(BC+AD)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{AB+CD+BC+AD}{2}\right)^2,$$
从而　$AB+CD+BC+AD\geqslant 4.$　②

由①、②得　$AB+BC+CD+DA+AC+BD\geqslant 4+\sqrt{8}.$

12·37　一个四边形在边长为1的正方形各边上各有一点，其边长为 a、b、c、d. 求证：$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4$.

（第2届加拿大数学奥林匹克，1970年）

［证］　设四边形 $ABCD$ 内接于正方形 $PQRS$.



又设　$SC=x$，$RB=y$，$QA=u$，$SD=v$. 则

$CR=1-x$，$BQ=1-y$，

$AP=1-u$，$PD=1-v$.

由勾股定理得

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$=x^2+v^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+u^2+(1-u)^2+(1-v)^2.$$

现在考虑　$f(x)=x^2+(1-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$.

$$f(x)=2x^2-2x+1=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

当　$0\leqslant x\leqslant 1$　时，$0\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore$　$\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1.$

同理　$\frac{1}{2}\leqslant y^2+(1-y)^2\leqslant 1$，

又　$\frac{1}{2}\leqslant u^2+(1-u)^2\leqslant 1$，

且　$\frac{1}{2}\leqslant v^2+(1-v)^2\leqslant 1.$

以上四式相加可得　$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4.$

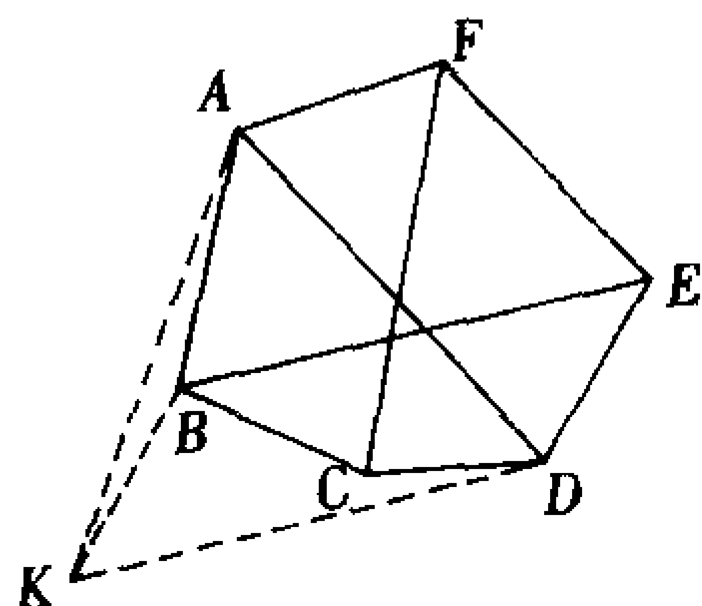
12·38　(1)已知凸六边形的每条边长都大于1.问：在这种六边形中总能存在长度大于2的对角线吗？(2)凸六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AD、BE、CF 的长度大于2.问在这种六边形中总存在长度大于1的边

吗?

（第 8 届全苏数学奥林匹克，1974 年）

[解] (1)不总存在.

例如，在边长为 2 的正三角形的各边上向形外作高为 $\frac{1}{10}$ 的等腰三角形，所得六边形的所有边都大于 1，而所有对角线不大于 2.



(2)总存在.

已知六边形 $ABCDEF$ 中，若 $AD>2$，$BE>2$，$CF>2$，AD、BE、CF 中总存在夹角不小于 $60°$ 的两条，不妨设为 AD、BE.

过 D、B 分别作 BE、ED 的平行线，得 $\square BEDK$，

则 $DK=BE>2$，$AD>2$，$\angle ADK\geqslant 60°$.

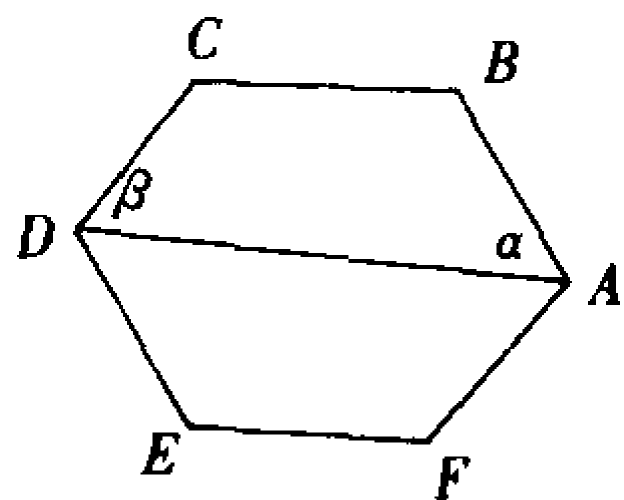
$\therefore \quad AK>2$.

但 $AB+BK\geqslant AK>2$，因此，要么 $AB>1$，要么 $ED=BK>1$.

12·39　凸六边形 $ABCDEF$ 的每边之长至多为 1，求证：对角线 AD、BE、CF 中至少有一条不超过 2.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年）

[证] 考虑下面六个和：



$\angle BAD+\angle CDA$，$\angle EDA+\angle FAD$，

$\angle EBC+\angle DEB$，$\angle EBA+\angle FEB$，

$\angle FCB+\angle AFC$，$\angle DCF+\angle EFC$.

这六个和恰为凸六边形的内角和 $(6-2)\cdot 180°=720°$，因此必有一个和不小于 $120°$，设 $\angle BAD+\angle CDA\geqslant 120°$.

且设　$\angle BAD=\alpha$，$\angle CDA=\beta$. 有

$$AD\leqslant AB\cos\alpha+BC+CD\cos\beta\leqslant 1+\cos\alpha+\cos\beta$$

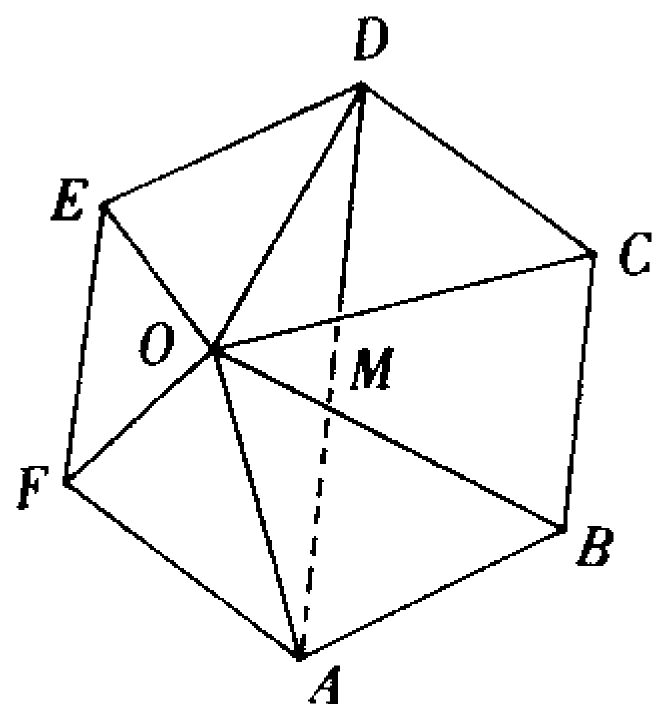
$$=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 2.$$

12·40　把边长为 1 的正六边形内部的一点 O 同它的所有顶点连结起来. 证明：在由此而将六边形分成的诸三角形中，能够找出两个三

角形来,它们的各边之长都不小于1.

(莫斯科数学奥林匹克,1974年)

[证] 设正六边形的中心为 M.如图.



则 M 必属于$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODE$、$\triangle OEF$、$\triangle OFA$ 中之一.

不失一般性,设 M 在$\triangle OBC$ 中,则

$\triangle MBC$ 为边长为1的等边三角形,又 $BC=1$,显然 $OB>1,OC>1$.连 AD,则 AD 过M 点.

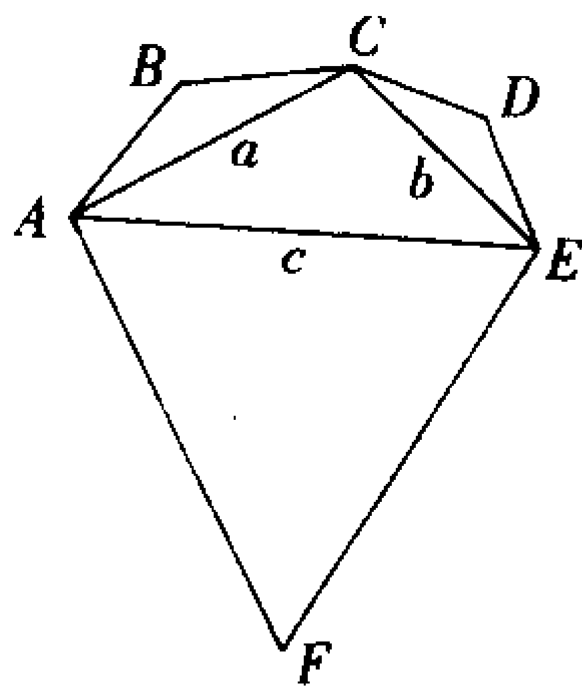
在$\triangle OAD$ 中, $OA+OD>AD=2$

$\therefore$ OA 或 OD 中至少有一边不小于1,故必在$\triangle OAB$、$\triangle OCD$ 中至少有一个满足各边之长不小于1的要求.

12·41 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB=BC,CD=DE,EF=FA$.证明:$\dfrac{BC}{BE}+\dfrac{DE}{DA}+\dfrac{FA}{FC}\geqslant\dfrac{3}{2}$.并指出等式在什么条件下成立.

(第38届国际数学奥林匹克预选题,1997年)

[证] 如图所示,记 $AC=a,CE=b,AE=c$.对四边形 $ACEF$ 运用托勒密不等式,得



$$AC\cdot EF+CE\cdot AF\geqslant AE\cdot CF.$$

$\because$ $EF=AF$, $\therefore$ $\dfrac{FA}{FC}\geqslant\dfrac{c}{a+b}$.

同理 $\dfrac{DE}{DA}\geqslant\dfrac{b}{c+a}$, $\dfrac{BC}{BE}\geqslant\dfrac{a}{b+c}$.

$$\therefore\quad \frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \qquad ①$$

要等式成立,必须①是一个等式,即每次应用 Ptolemy 不等式时也要等式成立.从而 $ACEF$、$ABCE$、$ACDE$ 都是圆内接四边形.所以 $ABCDEF$ 是圆内接六边形且$a=b=c$ 时,①式是等式.

因此,当且仅当六边形是正六边形时,等式成立.

注 不等式①是熟知的.如果不知道,可代入 $x=a+b,y=c+a,z=b+c$,此时不等式具有形式

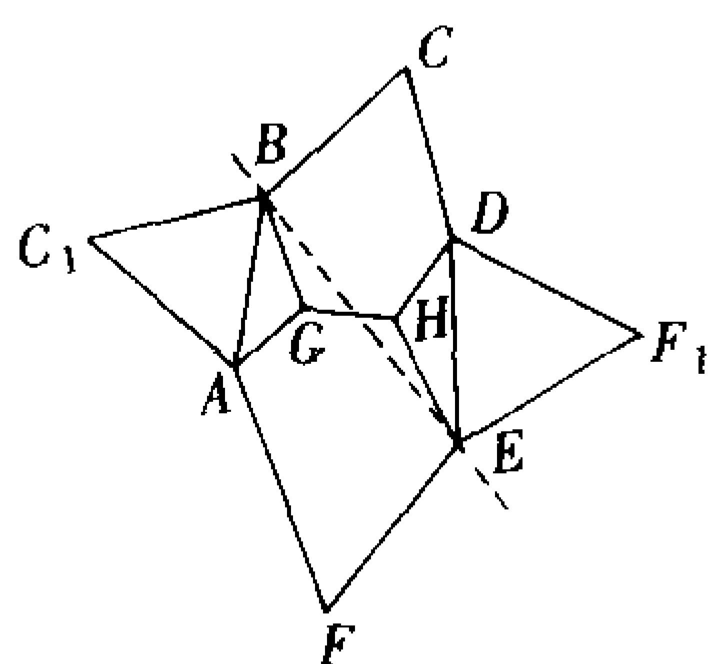
$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-3\right)$$
$$\geqslant\frac{3}{2}.$$

这是显然的.

12·42 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,满足 $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$, $\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$,设 G 和 H 是这六边形内部的两点,使得 $\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$. 求证: $AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$.

(第 36 届国际数学奥林匹克,1995 年)



[证 1] 以直线 BE 为对称轴,作 C 和 F 关于直线 BE 的对称点 C' 和 F'.

于是 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle DEF'$ 都是正三角形, $C'F'=CF$.

则 G 和 H 分别是 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle DEF'$ 外接圆上的点.

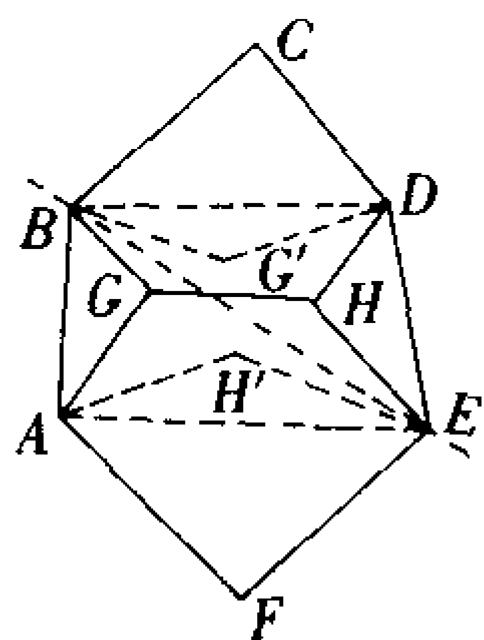
由托勒密定理得

$$C'G\cdot AB=AG\cdot C'B+BG\cdot C'A,$$
$$F'H\cdot DE=HD\cdot EF'+HE\cdot F'D.$$

于是 $C'G=AG+GB$, $HF'=DH+HE$.

则 $AG+GB+GH+DH+HE=C'G+GH+HF'\geqslant C'F=CF$

[证 2] 以直线 BE 为对称轴作 G 和 H 关于直线 BE 的对称点 G' 和 H',则 G' 和 H' 分别在正三角形 BCD 和正 $\triangle EFA$ 的外接圆上.



由托勒密定理可得

$$CG'=DG'+BG',\quad H'F=AH'+EH'.$$

于是有 $AG+GB+GH+DH+HE$

$$=DG'+G'B+G'H'+AH'+H'E$$
$$=CG'+G'H'+H'F'$$
$$\geqslant CF.$$

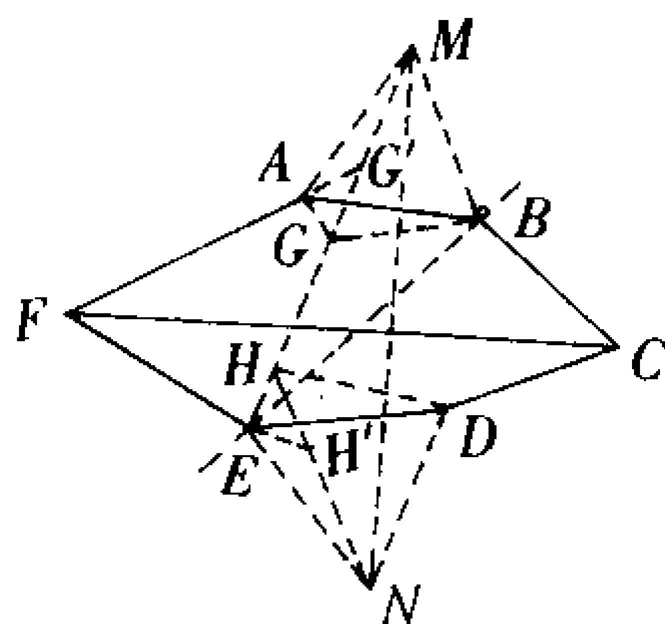
[证 3] 如图,分别以 AB、DE 为边向六边形外作正三角形: $\triangle ABM$ 和 $\triangle DEN$.

将 $\triangle AGB$ 绕 A 逆时针旋转 60° 至 $\triangle AG'M$,则 $\triangle AGG'$ 为正三角形.

则　$AG=GG'$，　$GB=G'M$.

同样将$\triangle EHD$绕E顺时针方向旋60°至$\triangle EH'N$,则$\triangle EHH'$为正三角形.

于是　$EH=HH'$，$HD=H'N$.



连MN,则多边形$AMBCDNEF$关于轴BE对称,有$MN=CF$.

再者,因两点间以线段长最短则有

$$\begin{aligned}&AG+GB+GH+DH+HE\\&=MG'+G'G+GH+HH'+H'N\\&\geqslant MN=CF.\end{aligned}$$

12·43　求证:若凸多边形的各内角相等,则至少有两条边分别不大于它的两条邻边.

（第21届全俄数学奥林匹克,1995年）

[证]　用反证法,设至多有一条边分别不大于其两邻边.我们将该多边形放在复平面上,使其最长边的一个端点A_1与原点重合,另一个端点A_2与$z=a$重合($a=|A_1A_2|$),其余顶点顺次标号为$A_3,A_4,\cdots,A_n$,它们对应的复数依次为$z_3,z_4,\cdots,z_n$.不妨设最短边为A_kA_{k+1} $\left(k\leqslant\frac{n}{2}\right)$,则根据所设前提有

$$|A_kA_{k+1}|<|A_{k+1}A_{k+2}|<|A_{k+2}A_{k+3}|<\cdots<|A_nA_1|\leqslant|A_1A_2| \quad ①$$

和 $$|A_kA_{k+1}|<|A_{k-1}A_k|<|A_{k-2}A_{k-1}|<\cdots<|A_2A_3|\leqslant|A_1A_2| \quad ②$$

且最后两个非严格不等号中至少有一个是严格的.

我们不妨设　$\arg(z_3-a)=\dfrac{2\pi}{n}$，则我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{k-1}(|A_tA_{t+1}|-|A_kA_{k+1}|)\cdot e^{i\frac{2(t-1)}{n}\pi}\\&=\sum_{j=1}^{n-k+1}(|A_{n-j}A_{n-j+1}|-|A_kA_{k+1}|)\cdot e^{i\frac{n-j}{n}2\pi}.\end{aligned}$$

将上式两端和式的每一项都乘上$e^{i\frac{2(1-k)}{n}\pi}$，得

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{k-1}(|A_tA_{t+1}|-|A_kA_{k+1}|)\cdot e^{i\frac{2(t-1)}{n}\pi}\\&=\sum_{j=1}^{n-k+1}(|A_{n-j}A_{n-j+1}|-|A_kA_{k+1}|)\cdot e^{i\frac{n+1-k-j}{n}\cdot 2\pi}.\end{aligned}$$

考虑两端点各项的虚部,由 Abel 恒等式知,

$$\sum_{t=1}^{k-1}(|A_tA_{t+1}|-|A_kA_{k+1}|)\cdot\sin\frac{2(t-k)}{n}\pi$$

$$=\sum_{t=1}^{k-2}(|A_tA_{t+1}|-|A_{t+1}A_{t+2}|)\cdot\sum_{j=1}^{t}\sin\frac{2(t-k)}{n}\pi+(|A_{k-1}A_k|-|A_kA_{k+1}|)\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\sin\frac{2(t-k)}{n}\pi$$

$$<0.$$

同理可知右端和式>0,矛盾!

12·44 在平面上给定一点 O 和一个多边形 F,F 不一定是凸的. p 为 F 的周长,D 为 O 点到 F 的各顶点的距离之和,H 为 O 点到 F 的各边所在直线的距离之和. 证明:$D^2-H^2\geqslant\frac{p^2}{4}$.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证] 设 F 各顶点依次为 A_1、A_2、…、A_n,O 点到边 A_kA_{k+1} 所在直线的垂线的垂足为 H_k,$k=1,2,\cdots,n$(视 $A_{n+1}=A_1$). 由勾股定理,有

$$OA_k^2-OH_k^2=A_kH_k^2,\quad OA_{k+1}^2-OH_k^2=A_{k+1}H_k^2.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & 4(D^2-H^2)\\
&=[(D+H)+(D+H)]\cdot[(D-H)+(D-H)]\\
&=[(\sum_{k=1}^{n}OA_k+\sum_{k=1}^{n}OH_k)+(\sum_{k=1}^{n}OA_{k+1}+\sum_{k=1}^{n}OH_k)]\\
&\quad\cdot[(\sum_{k=1}^{n}OA_k-\sum_{k=1}^{n}OH_k)+(\sum_{k=1}^{n}OA_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}OH_k]\\
&=[\sum_{k=1}^{n}(OA_k+OH_k)+\sum_{k=1}^{n}(OA_{k+1}+OH_k)]\cdot\sum_{k=1}^{n}(OA_k-OH_k)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}(OA_{k+1}-OA_k)]\\
&\geqslant[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(OA_k+OH_k)(OA_k-OH_k)}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(OA_{k+1}+OH_k)(OA_{k+1}-OH_k)}]^2
\end{aligned}$$

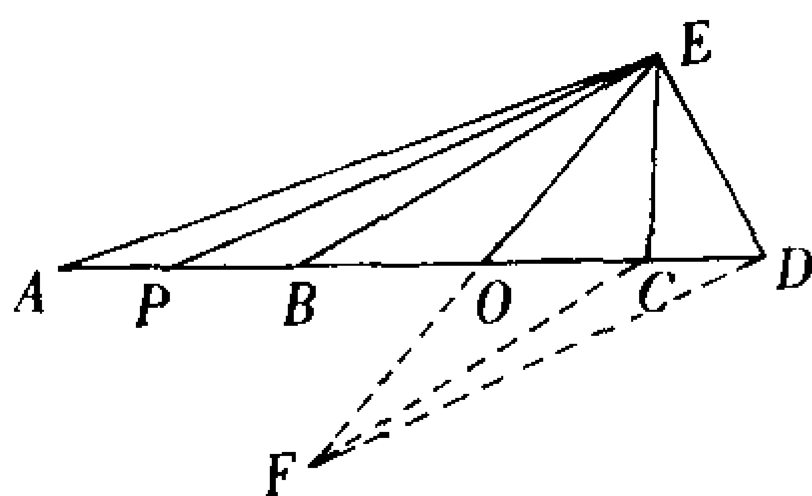
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} A_kH_k + \sum_{k=1}^{n} A_{k+1}H_k\right)^2$$
$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} A_kA_{k+1}\right)^2$$
$$= p^2,$$

即 $D^2 - H^2 \geqslant \frac{p^2}{4}$.

12·45 有四个点在一直线上,它们依次是 A、B、C、D.求证:对不在这直线上的任意点 E,$AE+ED+|AB-CD|>BE+CE$.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] 不失一般性,假定 $AB \geqslant CD$,在 AB 上取点 P,



使 $AP=AB-CD$.连 EP,取 BC 中点 O,连 EO,延长到 F,使 $OF=OE$,连 FC、FD.

则 $CF=EB$, $DF=EP$,

$\because$ $DF+ED>FC+EC$, $\therefore$ $PE+ED>BE+CE$.

但 $AE+AP>PE$, $\therefore$ $AE+ED+AP>BE+CE$.

即 $AE+ED+|AB-CD|>BE+CE$.

12·46 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线,如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分,试证:这个曲线段的长度不小于 1.

(中国高中数学联赛,1979 年)

[证] 设 M、N 是正方形周界上的两点,曲线段 $\overset{\frown}{MN}$ 把这个正方形分成面积相等的两部分,下面分几种情况讨论:

(1)若点 M 及 N 分别在两条对边上(如图 1),因为连接两个定点的所有曲线段中以直线段为最短,所以 $\overset{\frown}{MN} \geqslant MN$,这里用 $\overset{\frown}{MN}$ 表示曲线段 $\overset{\frown}{MN}$ 的长度,又显然 $MN \geqslant 1$, $\therefore$ $\overset{\frown}{MN} \geqslant 1$.

(2)若点 M、N 分别在一双邻边上(可设 M 在 BC 上,N 在 CD 上,见图 2),那么 $\overset{\frown}{MN}$ 一定要和对角线 BD 相交(否则 $\overset{\frown}{MN}$ 分成的两部分显然面积不等).

若从 M 出发 $\overset{\frown}{MN}$ 与 BD 的第一个交点是 E,作 $\overset{\frown}{ME}$ 关于 BD 的对称图 $\overset{\frown}{M'E}$,则 M' 在 AB 上,据(1)的结果有 $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MEN}=\overset{\frown}{M'EN} \geqslant 1$.

(3)若点 M、N 在同一条边 BC 上(M、N 可以重合,如图 3),那么 $\overset{\frown}{MN}$一定要和 BC 的两个邻边的中线 EF 相交(否则$\overset{\frown}{MN}$分成的两部分面积不等).若从 M 出发$\overset{\frown}{MN}$与 EF 的第一个交点是 G,作$\overset{\frown}{MG}$关于 EF 的对称图形$\overset{\frown}{M'G}$,则 M'在 AD 上,据(1)的结果有$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MGN}=\overset{\frown}{M'GN}\geqslant 1$.

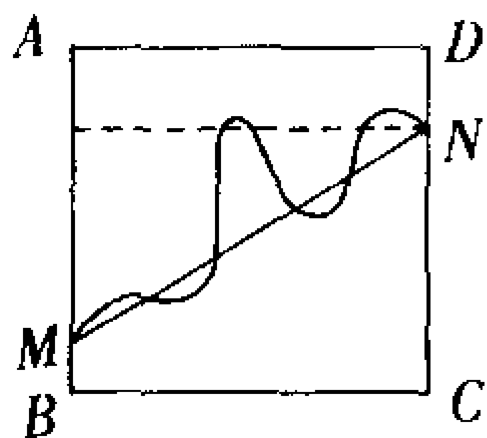


图 1

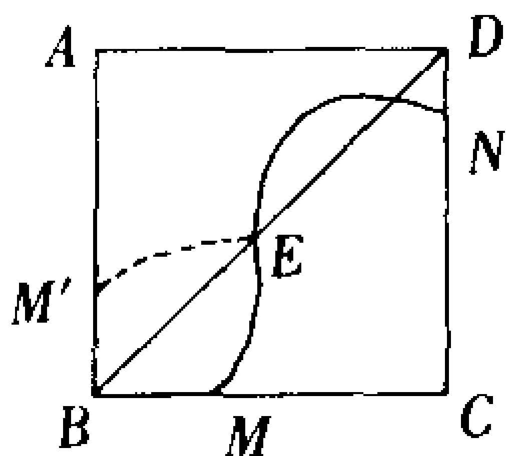


图 2

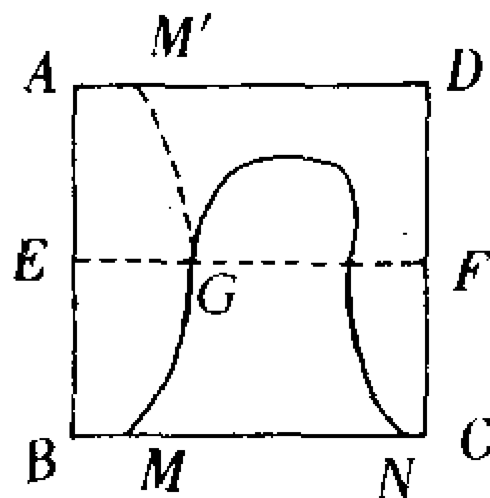


图 3

12·47 平面上任给五个相异的点,它们之间的最大距离及最小距离之比记为 λ,求证:$\lambda\geqslant 2\sin 54°$,并讨论等号成立的充要条件.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[证] 先证明如下的命题:

在$\triangle ABC$ 中,若$\angle C\geqslant 108°$且 $a\leqslant b$,则$\dfrac{c}{a}\geqslant 2\sin 54°$,等号当且仅当$\angle C=108°$且 $a=b$ 时成立.

由余弦定理有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\geqslant a^2+b^2-2ab\cos 108°$$
$$\geqslant 2a^2(1-\cos 108°)=4a^2\sin^2 54°$$

$$\therefore\quad \frac{c}{a}\geqslant 2\sin 54°,$$

等号成立的条件由上证明过程显然可见.

记五点中两点间最大距离为 p,最小距离为 q,下面分几种情况讨论:

1)设五点是一正五边形的顶点.

因正五边形每个内角为 108°,且五条对角线长相等,故由前述命题,得

$$\lambda=\frac{p}{q}=\frac{\text{对角线长}}{\text{边长}}=2\sin 54°.$$

2)设五点不是正五边形顶点,又分两种情况:

a)五点是某凸五边形顶点,若此凸五边形有一内角$>108°$,则存在

三点(设为 A、B、C),

在$\triangle ABC$中,$\angle C>108°$,$a\leqslant b$,于是 $\lambda=\frac{p}{q}\geqslant\frac{c}{a}>2\sin54°$.

若此凸五边形每个内角$=108°$,则必至少有两相邻边长不等,即存在三点 A、B、C,

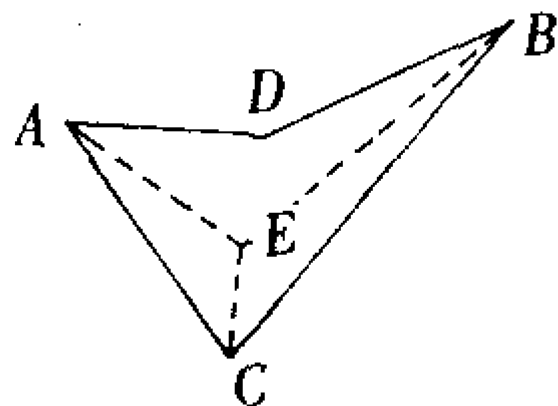
在$\triangle ABC$中,$\angle C=108°$,且 $a\leqslant b$,

于是 $\lambda=\frac{p}{q}\geqslant\frac{c}{a}>2\sin54°$.

b)五点不是凸五边形的顶点,这时又有两种可能:

一种是有三点共线,则显然 $\lambda\geqslant2>2\sin54°$;

另一种是某点 E 在其余四点 A、B、C、D 为顶点四边形(凹或凸)的内部(如图),此时必在某三点(设为 A、B、C)为顶点的三角形内,于是$\angle AEB$、$\angle AEC$、$\angle BEC$ 中至少有一个不小于 $120°$,



设$\angle AEC\geqslant120°$,又不妨设 $CE\leqslant AE$,

于是 $\lambda=\frac{p}{q}\geqslant\frac{AC}{CE}>2\sin54°$.

综上所述,证得 $\lambda\geqslant2\sin54°$,等号成立的充要条件是题设五点是一正五边形的顶点.

12·48 在平面上任意给定六点,求证:这六点中,两点间最远距离与两点间最近距离的比不小于$\sqrt{3}$.

(第 25 届美国普特南数学竞赛,1964 年)

[证] (1)若已知的六点中有三点共线,例如点 B 在线段 AC 上,则不等式

$$AC\geqslant2BC \quad 或 \quad AC\geqslant2AB$$

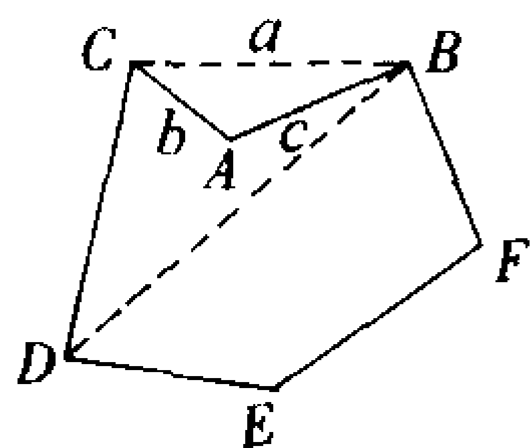
总有一个成立,因而本题论断正确.

(2)若已知的六点只能构成凹六边形(如图),则其中必有一点(设为 A)位于其他五点构成的某个三角形(设为$\triangle BCD$)内.

考察$\triangle BAC$、$\triangle CAD$、$\triangle DAB$,则其中必有一个三角形的一个内角不小于 $120°$,设$\angle BAC\geqslant120°$,且 $AC=b\leqslant AB=c$,又设 $BC=a$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&\geqslant b^2+c^2-2bc\cos120°\end{aligned}$$



$=b^2+c^2+bc\geqslant 3b$.

$\therefore\quad \frac{a}{b}\geqslant\sqrt{3}$.

(3)若已知的六点构成一个凸六边形，则此六边形必有一个内角为不小于120°的钝角，由(2)的计算，亦可证明结论正确.

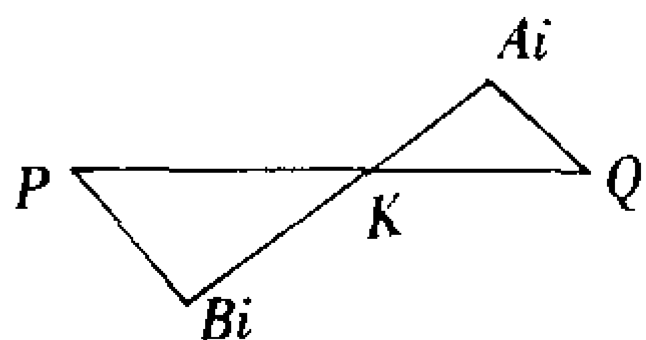
12·49　点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不在同一条直线上，假设 P 和 Q 是这样的两个点(它们不同于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且彼此不相重合)，使得有 $A_1P+A_2P+\cdots+A_nP=A_1Q+A_2Q+\cdots+A_nQ=S$. 求证：存在这样一个点 K，使得 $A_1K+A_2K+\cdots+A_nK<S$.

(匈牙利数学奥林匹克，1937年)

［证］　我们证明：线段 PQ 内的任意点都可以作为点 K.

设 K 是线段 PQ 内的任意一点，并设 $\frac{PK}{KQ}=\lambda$.

连 A_iK 并延长，过 P 作 $PB_i\parallel A_iQ$ 交 A_iK 延长线于 B_i，则 $\triangle B_iPK\backsim\triangle A_iQK$.



有　$\frac{B_iK}{A_iK}=\frac{B_iP}{A_iQ}=\frac{PK}{KQ}=\lambda$.

即　$B_iK=\lambda A_iK$，$B_iP=\lambda A_iQ$.

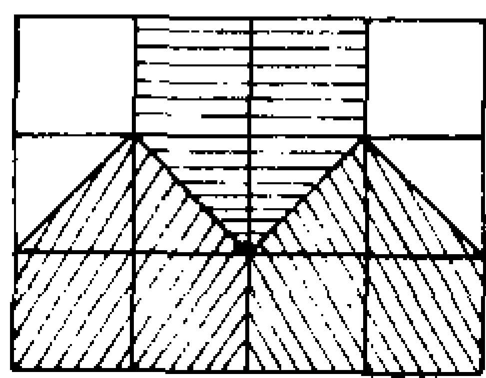
在 $\triangle A_iB_iP$ 中得到不等式

$A_iB_i=(1+\lambda)A_iK\leqslant A_iP+B_iP=A_iP+\lambda A_iQ$.

取 $i=1,2,\cdots,n$，并把 n 个不等式相加，注意到 A_i 不在同一直线上，则有

$$(1+\lambda)(A_1K+A_2K+\cdots+A_nK)$$
$$<(A_1P+A_2P+\cdots+A_nP)+\lambda(A_1Q+A_2Q+\cdots+A_nQ)$$
$$=(1+\lambda)S.$$

$\therefore\quad A_1K+A_2K+\cdots+A_nK<S$.



12·50　在 3×4cm 的长方形中，放置六个点，试证：总可以找到两点，其相距不大于 $\sqrt{5}$cm.

(第15届全苏数学奥林匹克，1981年)

［证］　我们如图将 3×4 长方形分成五个区域，

三个是全等的如阴影的区域，两个是未涂阴影的小区域．这五个区域中任两点间最大距离均不超过$\sqrt{5}$.

现放入六个点，根据抽屉原则，至少有两个点属于同一个区域，这两个点间的距离就不大于$\sqrt{5}$cm.

12·51　有一个扳手，其孔洞形状是一个边长为 a 的正六边形，要求能够用它来拧松一个截面形状是一个边长为 b 的正方形的螺母．为使问题有解，线段长 a 与 b 应满足什么样的条件？

（波兰数学奥林匹克，1949年）

[解]　当且仅当满足下列条件时，才能拧松螺母：

(1)螺母(正方形 Q)内接于扳手的孔洞(正六边形 S)；

(2)在旋转扳手时，扳手要"抓住"螺母，这导致下列条件：螺母的两点间的最大距离亦即正方形 Q 的对角线，大于扳手孔洞的两点间的最小距离亦即六边形 S 的对边间的距离．

设 b_0 是可以放进六边形 S 中的最大正方形的边长．

于是条件(1)可以表示成不等式　$b \leqslant b_0$,

条件(2)可写成不等式　$b\sqrt{2} > a\sqrt{3}$．或　$b > a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

合并这两个不等式得　$a\sqrt{\frac{3}{2}} < b \leqslant b_0$.

下面求 b_0.

为此，我们证明：能改进正六边形 S 中的最大正方形是这样的正方形 $ABCD$，它的边分别平行于六边形 S 的两条对称轴，而顶点落在六边形的边上．

C P
B
N
O
R
L
D
F
E
M A
K

设 Q 是能放进六边形 S 中的任意一个正方形．

有下列两种情形：

第一种情形：正方形 Q 的中心与正六边形的中心 O 相重合，正方形 Q 的两条对角线位于互相垂直的两直线 MP 和 NR 上．

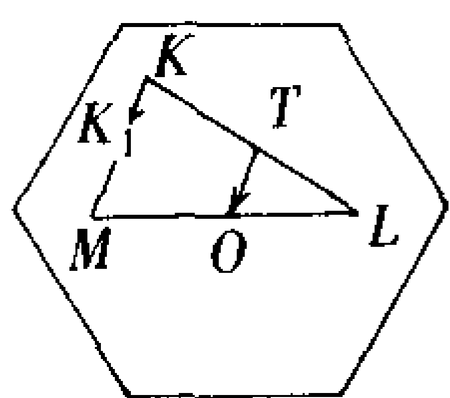
MP 和 NR 把六边形分为四部分，这四部分中的某些部分包含六边形 S 的整条边，所以直线 MP 和 NR 与六边形的六条边中的不多于四条边相交．

设$\angle MON$ 含有正六边形 S 的边 KL．不失一般性，可以假定正方

形 $ABCD$ 的边 AB 平行于六边形的边 KL(不然的话,可以将正方形 $ABCD$ 绕 O 旋转一个适当的角度).

此时,或者线段 OM、ON 与线段 OA、OB 重合,从而 $OM=OA$,或者线段 OM、ON 之一(比如线段 OM)落在$\angle AOB$ 内,从而 $OM<OA$,在这两种情况下都有 $OM\leqslant OA$.

除此之外,正方形 Q 的对角线不大于线段 $PM=2OM$,据上面所证,$PM\leqslant 2OA$ 或 $PM\leqslant AC$,因此正方形 Q 不大于正方形 $ABCD$.



第二种情形:正方形 Q 的中心 T 不与正六边形 S 的中心 O 重合.

我们将正方形 Q 沿向量 $\overrightarrow{TO}$ 平行移动,得到与正方形 Q 全等但中心在点 O 的正方形 Q_1.

设 K 是正方形 Q 的任意一点,L 是点 K 关于 T 的对称点,M 是点 L 关于中心 O 的对称点,点 L 属于正方形 Q,因而也属于 S,于是 M 也属于 S.

由于正六边形 S 是一个凸图形,因而连接六边形 S 的两点 M,K 的线段中点 K_1 也属于六边形 S. 由于 $\overrightarrow{KK_1}=\overrightarrow{TO}$,所以点 K_1 是点 K 在上面所作的平移变换下的象.

因此,正方形 Q 在上面的平移变换下的象 Q 在正六边形 S 的内部.

再由第一种情形,正方形 Q_1 不大于正方形 $ABCD$,所以正方形 Q 不大于正方形 $ABCD$.

由以上,b_0 等于正方形 $ABCD$ 的边长.

在$\triangle DEF$ 中, $DF=\frac{1}{2}b_0$, $EF=a-\frac{1}{2}b_0$, $\angle DEF=60°$, 于是

$$\frac{1}{2}b_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{1}{2}b_0\right).$$

即 $$b_0=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}+1}=(3-\sqrt{3})a.$$

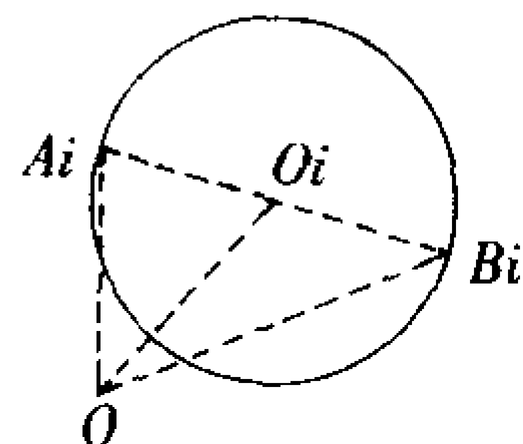
因此,当且仅当 a、b 适合条件

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}<b\leqslant(3-\sqrt{3})a.$$

扳手能够拧松螺母.

12·52　在桌子上放着50块准确走时的手表,试证:在某一时刻,从桌子中心到分针末端的距离之和大于从桌子中心到手表中心的距离之和.

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)



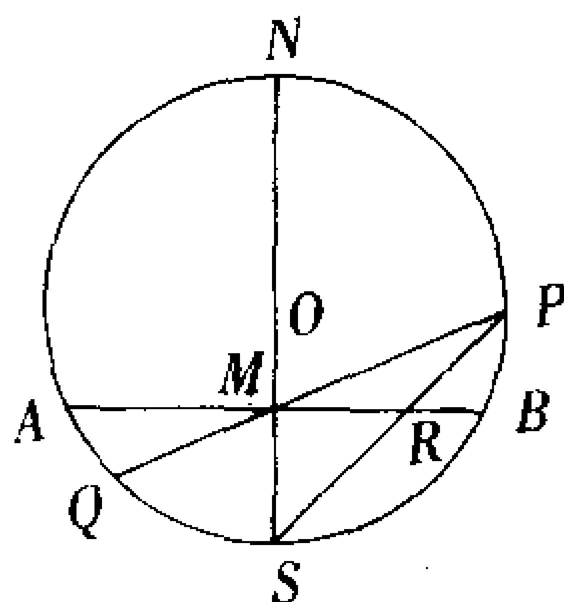
[解]　设第 i 块表在时刻 t 与 $t+30$ 分钟端点位置为 A_i 和 B_i,第 i 块表的中心位置为 O_i,桌子的中心为 O.这时,对任意 i,有 $OO_i\leqslant\frac{1}{2}(OA_i+OB_i)$.显然,在某个时刻 A_i 和 B_i 不在直线 OOi 上,即50个不等式至少有一个是严格的.从而有

$$\sum_{i=1}^{50}OO_i<\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{50}OA_i+\sum_{i=1}^{50}OB_i\right).$$

要么　$OO_1+OO_2+\cdots+OO_{50}<OA_1+OA_2+\cdots+OA_{50}$　成立,

要么　$OO_1+OO_2+\cdots+OO_{50}<OB_1+OB_2+\cdots+OB_{50}$　成立.

3. 直线形与圆中的线段不等式



12·53　如图,NS 是圆 O 的直径,弦 AB 和 NS 垂直,且交 NS 于 M,P 为弧$\overset{\frown}{ANB}$上异于 N 的任一点,PS 交 AB 于 R,PM 的延长线交圆 O 于 Q.求证:$RS>MQ$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1991年)

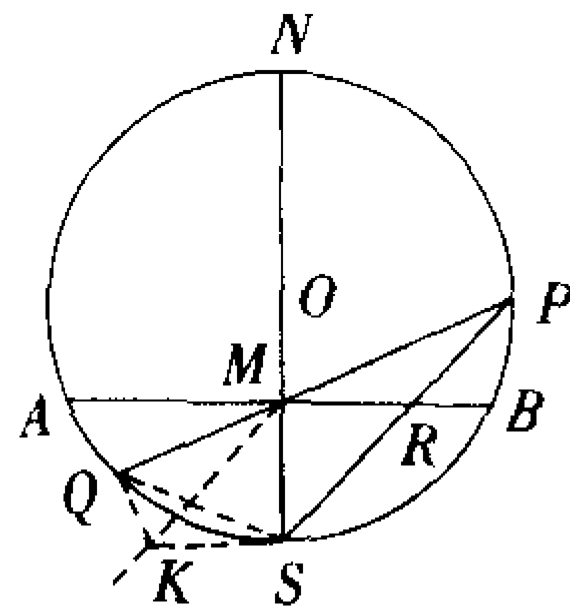
[证]　作 $MK\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}RS$,连接 QK、KS、QS.

∵　$KSRM$ 为平行四边形,$KS/\!/MR$,而 $MR\perp NS$,所以 $KS\perp NS$,从而 KS 是⊙O 的切线.

∴　$\angle QPS=\angle QSK$.

又∵　$MK/\!/RS$,则　$\angle QMK=\angle QPS$.

因此　$\angle QMK=\angle QSK$,故 Q、K、S、M 四点共圆,且 MK 为此圆直径.

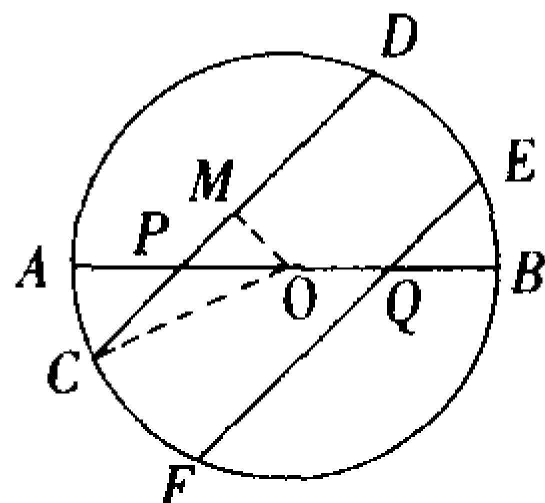


则有　$\angle MQK=90°$,$MK>MQ$.

∴　$RS>MQ$.

12·54　在圆 O 内，弦 CD 平行于弦 EF，且与直径 AB 交成 $45°$ 角.若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q，且圆 O 的半径长为 1，求证：$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$.

（中国高中数学联赛，1981 年）



［证 1］　作 $OM\perp CD$，连 OC，则 $CM=MD$，$PM=MO$.

$$\begin{aligned}PC^2+PD^2&=(CM-PM)^2+(MD+PM)^2\\&=2(CM^2+PM)^2\\&=2(CM^2+MO)^2\\&=2CO^2=2,\end{aligned}$$

同理　$QE^2+QF^2=2$，

$\because$　$2PC\cdot QE\leqslant PC^2+QE^2$，$2PD\cdot QF\leqslant PD^2+QF^2$，

$\therefore$　$2(PC\cdot QE+PD\cdot QF)\leqslant PC^2+QE^2+PD^2+QF^2$

$=(PC^2+PD^2)+(QE^2+QF^2)=4$.

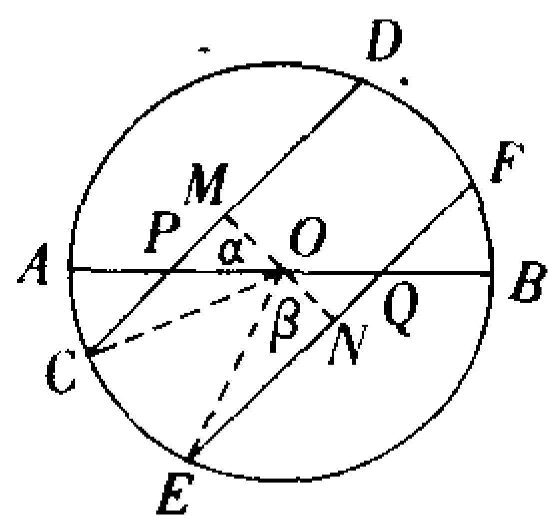
即　$PC\cdot QE+PD\cdot QF\leqslant 2$.

仅当 $PC=QE$ 及 $PD=QF$ 时，上式等号成立.

如等号成立，则 $PC\ \underline{\underline{/\!/}}\ QE$，$PD\ \underline{\underline{/\!/}}\ QF$，从而 $PCEQ$ 与 $PDFQ$ 都是平行四边形，即

$CE/\!/PQ/\!/DF$，且 $CDEF$ 是矩形，这与 CD、EF 与 AB 交成 $45°$ 角矛盾，因此等号不能成立，即

$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$.



［证 2］　过 O 作 CD、EF 的垂线，分别交 CD、EF 于 M、N，则

$CM=MD$，$EN=NF$，$PM=MO$，

$QN=NO$.

令　$\angle COM=\alpha$，$\angle EON=\beta$，有

$PC=CM-PM=CM-MO=\sin\alpha-\cos\alpha$，

$QE=EN+QN=EN+NO=\sin\beta-\cos\beta$，

$PC\cdot QE=\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$，

$PD=MD+PM=CM+MO=\sin\alpha+\cos\alpha$，

$QF=NF-QN=EN-NO=\sin\beta+\cos\beta$，

$PD \cdot QF = \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$,

于是 $PC \cdot QE + PD \cdot QF = 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$$= 2\cos(\beta - \alpha) \leqslant 2.$$

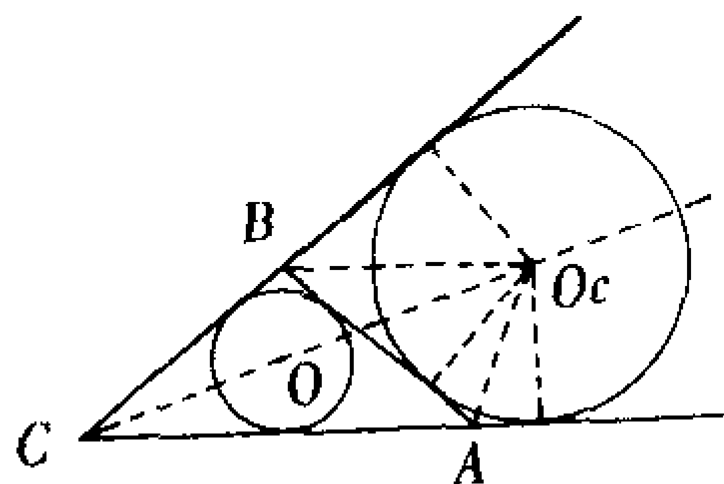
仅当 $\beta = \alpha$ 时，上式等号成立，但当 $\beta = \alpha$ 时，E 与 C 重合，与题设不符，故等号不能成立，

即 $PC \cdot QE + PD \cdot QF < 2$.

12·55 在和$\triangle ABC$ 的边相切的四个圆(一个内切圆，三个旁切圆)中，我们研究和边 AB 相切的两个圆(两个切点在顶点 A 和 B 之间). 求证：这两个圆的半径的几何平均值不超过边 AB 的长的一半.

(匈牙利数学奥林匹克，1927 年)

[证] 设$\triangle ABC$ 三边的长 $BC = a, CA = b, AB = c$，内切圆半径为 r，AB 边的旁切圆半径为 r_c，三角形 ABC 的半周长为 $p = \frac{a+b+c}{2}$，面积为 S，又设 AB 边的旁切圆圆心为 O_C，则



$$S = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a+b+c) = rp.$$

另一方面 $S = S_{\triangle AO_CC} + S_{\triangle BO_CC} - S_{\triangle O_CAB} = \frac{1}{2}r_c(a+b-c)$

$$= r_c(p-c).$$

于是 $r = \frac{S}{p}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$.

$$\therefore \quad rr_c = \frac{S^2}{p(p-c)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)}$$

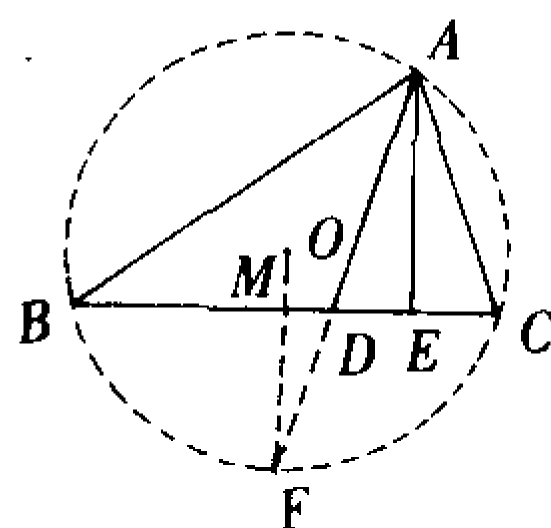
$$= (p-a)(p-b) \leqslant \left[\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right]^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

即 $\sqrt{rr_c} \leqslant \frac{c}{2}$.

12·56 求证：任何非等腰三角形的角平分线都位于自同一顶点引出的中线和高之间.

(莫斯科数学奥林匹克，1939 年)

[证] 设 AD 是$\angle A$ 的平分线，$AE \perp BC$ 于 E，M 是 BC 的中点.



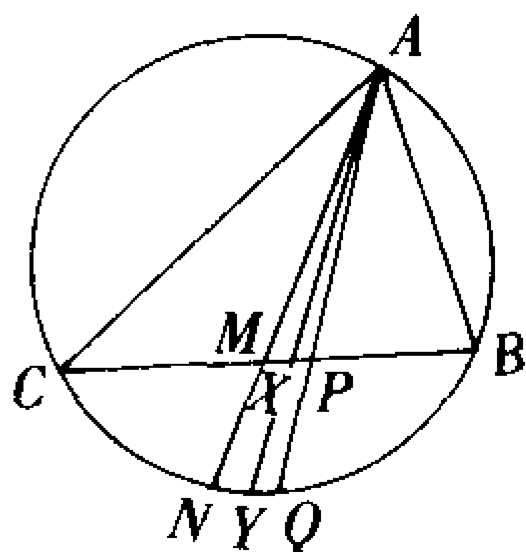
作$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$，设OM的延长线与$\odot O$交于F.

由$OM\perp BC$知$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FC}$，故$F$在$AD$的延长线上.

又$AE /\!/ OM$，故知D在M、E之间.

12·57　X是$\triangle ABC$的BC边上一点，Y是AX与$\triangle ABC$外接圆的交点. 证明或否定：当XY的长为最大时，AX位于从A点引出的中线和$\angle BAC$的平分线之间.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1992年）



[解]　不妨设$AB\leqslant AC$.

若AP是$\angle BAC$的平分线，AM是BC的中线，P和M在BC上.

设直线AP交外接圆于Q，直线AM交外接圆于N.

(1)如果X在M与C之间，则

$$AX\cdot XY=BX\cdot XC<BM\cdot MC=AM\cdot MN.$$

$\because\quad AX>AM$，$\therefore\quad XY<MN$.

(2)如果X在B和P之间，则

$AX\cdot XY=BX\cdot XC<BP\cdot PC=AP\cdot PQ$.

若　$AX>AP$，则　$XY<PQ$.

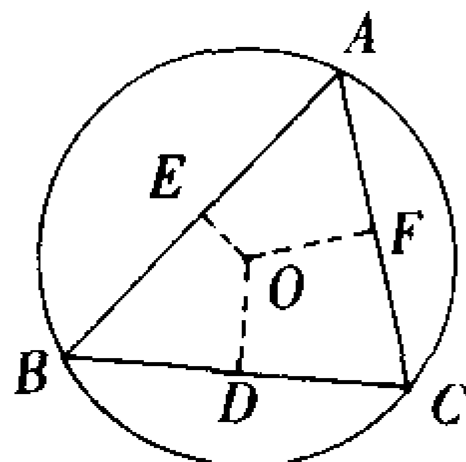
若$AX\leqslant AP$，若t是切点在Q的外接圆的切线，则$t /\!/ BC$，从而$\triangle PAX\backsim\triangle QAZ$. 其中$Z$是$AX$与切线$t$的交点.

因为　$AX\leqslant AP$，有　$XY<XZ\leqslant PQ$.

由(1)、(2)，当X不在PM上，则XY不能最大，因此，假如XY最大，则X必位于线段PM上，即AX在AP与AM之间.

12·58　求证：在一个非钝角三角形中，其最大的高不小于其内切圆半径与外接圆半径之和.

（匈牙利数学奥林匹克，1978年）



[证]　设$\triangle ABC$的外接圆圆心为O，半径为R，内切圆半径为r，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且AB上的高为h_c，BC上的高为h_b，CA上的高为h_b. 面积为S，三角形的半周长为p.

又设 BC 上的高 h_a 为最大的高，即 BC 边最小.

过 O 作 $OD\perp BC$ 于 D，$OF\perp AC$ 于 F，$OE\perp AB$ 于 E.

由托勒密定理及三角形中位线性质得

$$OB\cdot DE=OD\cdot BE+OE\cdot BD,$$

即 $$\frac{b}{2}R=OD\cdot\frac{c}{2}+OE\cdot\frac{a}{2},$$

同理 $$\frac{c}{2}R=OD\cdot\frac{b}{2}+OF\cdot\frac{a}{2},$$

$$\frac{a}{2}R=OE\cdot\frac{b}{2}+OF\cdot\frac{c}{2}.$$

又∵ $$S=pr=\frac{1}{2}(OD\cdot a+OE\cdot c+OF\cdot b)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (R+r)p&=R\cdot\frac{a}{2}+R\cdot\frac{b}{2}+R\cdot\frac{c}{2}+rp\\&=(OD+OE+OF)\cdot\frac{a+b+c}{2}\\&=(OD\cdot OE+OF)p.\end{aligned}$$

即 $$OD+OE+OF=R+r.$$

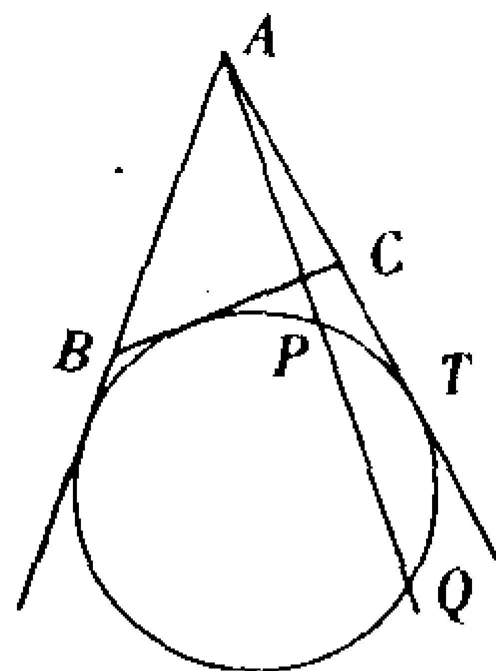
由于 $OD\cdot a+OE\cdot c+OF\cdot b=2S$，则最大的高为

$$\begin{aligned}h_a&=\frac{2S}{a}=\frac{OD\cdot a+OE\cdot c+OF\cdot b}{a}\\&\geqslant\frac{OD\cdot a+OE\cdot a+OF\cdot a}{a}\\&=OD+OE+OF\\&=R+r.\end{aligned}$$

12·59　自△ABC 的顶点 A 任作一直线，与∠A 内的旁切圆相交于 P 和 Q，试证：$AP+AQ>AB+BC+CA$.

（中国陕西省数学竞赛，1978 年）

［证］　如图，T 是切点.



$$\because\quad AP\cdot AQ=AT^2=\left(\frac{AB+BC+CA}{2}\right)^2=\text{常量},$$

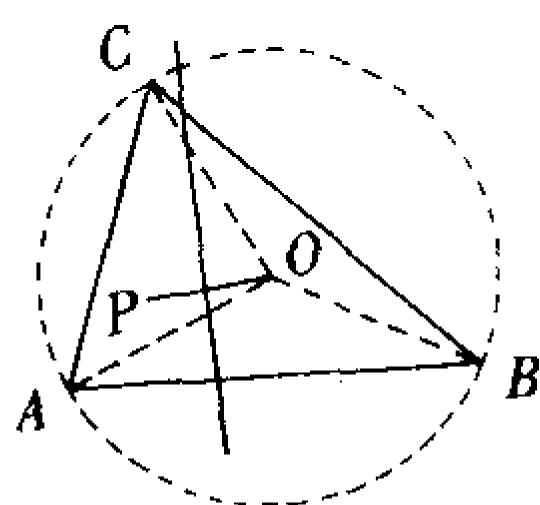
∴　当 $AP=AQ=AT=\dfrac{AB+BC+CA}{2}$ 时，

$AP+AQ$ 有最小值,其值为 $AB+BC+CA$.

$\therefore\quad AP+AQ>AB+BC+CA$.

12·60 假设 P 是锐角$\triangle ABC$ 内不和外接圆圆心重合的任意一点.求证:在线段 AP、BP、CP 中,有一个线段的长大于 R,还有一个的长小于 R(这里 R 是$\triangle ABC$ 的外接圆的半径).

(匈牙利数学奥林匹克,1930 年)

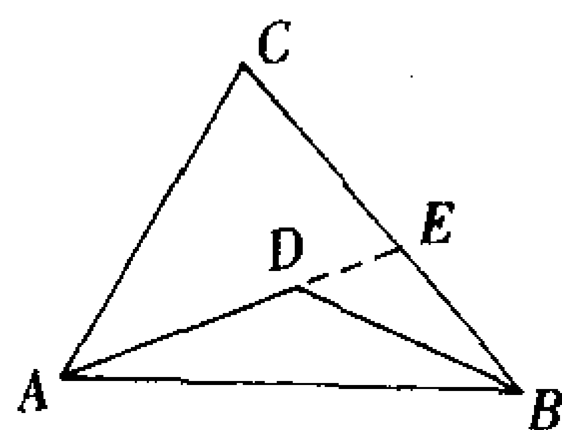


[证 1] 假设 O 是$\triangle ABC$ 的外心因为点 O 到$\triangle ABC$ 的三个顶点的距离都等于 R,于是本题等价于:在三角形的顶点之中,有一个顶点到点 P 的距离比到点 O 的距离近,还有一顶点到点 P 的距离比到点 O 的距离远.

作 OP 的垂直平分线,则垂直平分线上的任意一点与 O 和 P 的距离相等,因此,在这直线 O 点一侧的点到 P 的距离比到 O 的距离远,相反,在这直线 P 点一侧的点到 P 的距离比到 O 的距离近,我们只需证明:

在 OP 中垂线的两侧都至少有一个$\triangle ABC$ 的顶点即可.

事实上,因为$\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以外心 O 在三角形的内部,因此线段 OP 的中点也在三角形的内部,从而线段 OP 的中垂线通过$\triangle ABC$ 的内部,并和它的边有两个交点,这两个交点中至少有一个不与三角形的顶点重合,这个交点所在的三角形的边的两个端点即位于 OP 中垂线的两侧.

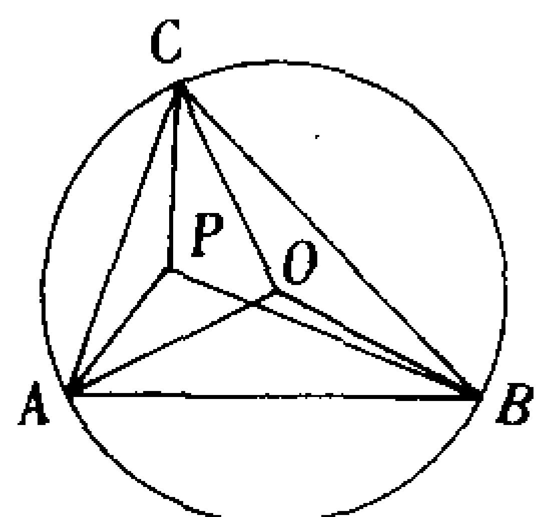


[证 2] 首先证明下面的结论:

在三角形内部或边上(但不是三角形的顶点)的任意一点到两个顶点的距离之和小于相交于第三个顶点的三角形的两边之和.

事实上

$$\begin{aligned}AC+CB&=(AC+CE)+BE\\&\geqslant AE+BE\\&=AD+(DE+BE)\\&\geqslant AD+DB.\end{aligned}$$



由以上结论可知:

设 P 在$\triangle AOB$ 内,则

$AP+PB<AO+OB=2R$,

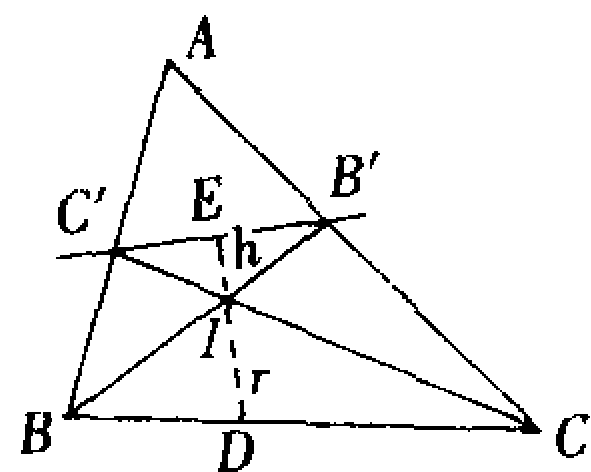
于是 AP 和 PB 中较小的线段一定小于外接圆半径 R.

又 O 在 $\triangle APC$ 内,则 $AP+PC>AD+OC=2R$.

于是 AP 和 PC 中较大的线段一定大于外接圆半径 R.

12·61 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交对边于 B'、C'.求证:直线 $B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的内切圆相交.

(奥地利数学奥林匹克,1988 年)



[证] 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,过 I 作 $ID\perp BC$ 于 D, $IE\perp B'C'$ 于 E.设 $ID=r$, $IE=h$.

由于 $\angle IB'C'+\angle IC'B'=\angle CIB'$

$$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB,$$

所以 $\angle IB'C'$ 与 $\angle IC'B'$ 中必有一角不大于 $\frac{1}{2}\angle ABC$ 与 $\frac{1}{2}\angle ACB$ 中的较大者,不妨设 $\angle IB'C'\leqslant\frac{1}{2}\angle ABC$.

又 $$\frac{h}{r}=\frac{IB'\sin\angle IB'C'}{IB\sin\frac{1}{2}\angle ABC}\leqslant\frac{IB'\sin\frac{1}{2}\angle ABC}{IB\sin\frac{1}{2}\angle ABC}=\frac{IB'}{IB}=\frac{B'C}{BC}=\frac{AB'}{AB}$$

$$=\frac{AB'+B'C}{AB+BC}=\frac{AC}{AB+BC}<1.$$

于是 $h<r$.因此直线 $B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的内切圆相交.

12·62 求证:直角三角形的内切圆半径 r 小于任一直角边的一半和斜边的四分之一.

(匈牙利数学奥林匹克,1925 年)

[证] 设直角 $\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边依次为 a、b、c,则 $a<c$,$b<c$.

又直角三角形内切圆半径等于两直角边之和与斜边的差的一半,即

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

由 $$r-\frac{a}{2}=\frac{a+b-c}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-c}{2}<0$$

可得 $$r<\frac{a}{2},$$

同理 $r<\frac{b}{2}$.

考察 $r-\frac{c}{4}$，则 $r-\frac{c}{4}=\frac{2a+2b-3c}{4}$.

由于 $a=c\sin A$，$b=c\cos A$，

则 $2a+2b-3c=2c(\sin A+\cos A)-3c$

$=2\sqrt{2}c\left(\sin A+\frac{\pi}{4}\right)-3c\leqslant 2\sqrt{2}-3<0$.

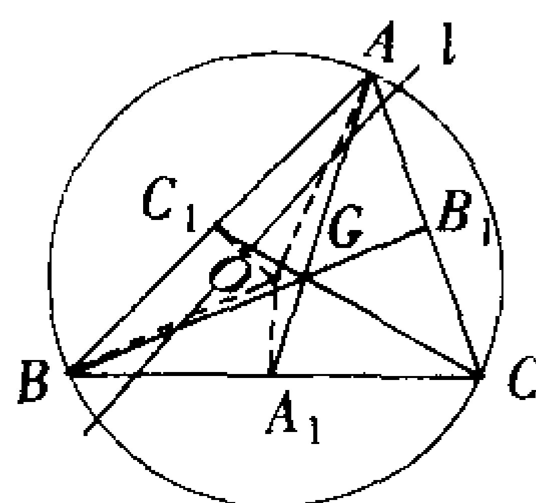
于是 $r<\frac{c}{4}$.

12·63 如果三角形不是钝角三角形,那么它的中线之和不小于外接圆半径的4倍.

(匈牙利数学奥林匹克,1963年)

[证] 设 G 是$\triangle ABC$ 的重心.

因为$\triangle ABC$ 是锐角三角形或直角三角形,所以其外心 O 或者在三角形的内部或者在某条边上.因此外心 O 至少属于$\triangle GAB$,$\triangle GBC$,$\triangle GCA$ 中的一个,为了确定起见,设外心 O 在$\triangle GAB$ 内(或 AB 边上).



因为$\triangle OAB$ 在$\triangle GAB$ 的内部,则有

$$GA+GB\geqslant OA+OB,$$

其中等号仅当 G 与 O 重合时成立.

又设$\triangle ABC$ 三边中线为 m_a、m_b、m_c,则有

$$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b\geqslant R+R=2R,$$

即 $m_a+m_b\geqslant 3R$,

若点 O 与点 C_1 重合,则 $m_c=R$,此时有

$$m_a+m_b+m_c\geqslant 4R.$$

若点 O 不与点 C_1 重合,作 OC_1 的中垂线 l,则 O 与 C_1 关于直线 l 对称,而 C 与 O 在 l 的一侧,C_1 在 l 的另一侧,显然有 $CO<CC_1$,即 $m_c>R$.亦有 $m_a+m_b+m_c\geqslant 4R$.

12·64 设 S,T 分别是$\triangle ABC$ 的外心和重心,M 是$\triangle ABC$ 所在平面内的一点,满足$\frac{\pi}{2}\leqslant SMT<\pi$,又 A_1、B_1、C_1 分别是 AM、BM、

CM 与外接圆的交点.求证:$MA_1+MB_1+MC_1 \geqslant MA+MB+MC$.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[证] 设外接圆半径为 R.由相交弦定理

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1 = (R+MS)(R-MS)$$
$$= R^2 - MS^2 = k.$$

记 $F(M) = (MA_1+MB_1+MC_1)-(MA+MB+MC)$.

$$\therefore \quad F(M) = \left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)\cdot k-(MA+MB+MC)$$
$$= \left[k-\frac{1}{3}(MA^2+MB^2+MC^2)\right]\cdot \left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)+\frac{1}{3}(MA^2+MB^2+MC^2) \cdot\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)-(MA+MB+MC).$$

由 Leibnitz 公式有

$$3MT^2 = MA^2+MB^2+MC^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

其中 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的三边长.(该公式易用解析几何证明)所以

$$k-\frac{1}{3}(MA^2+MB^2+MC^2)$$
$$= R^2-MS^2-\frac{1}{3}\left[3MT^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\right]$$
$$= R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)-MS^2-MT^2$$
$$= ST^2-MS^2-MT^2.$$

由 $\frac{\pi}{2} \leqslant \angle SMT < \pi$ 得 $ST^2-MS^2-MT^2 \geqslant 0$.

$$\therefore \quad \left[k-\frac{1}{3}(MA^2+MB^2+MC^2)\right]\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right) \geqslant 0.$$

又 $\frac{1}{3}(MA^2+MB^2+MC^2)\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)-(MA+MB+MC)$

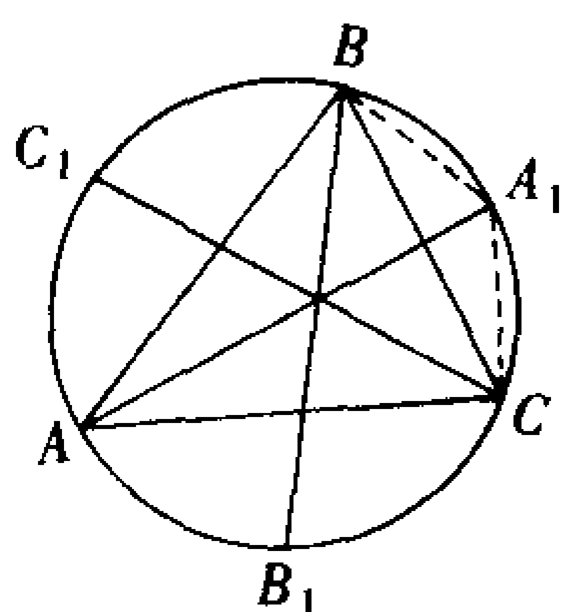
$$= \frac{1}{3}(MA+MB)\cdot\left(\frac{MA}{MB}+\frac{MB}{MA}-2\right)+(MB+MC)$$

$$\cdot\left(\frac{MB}{MC}+\frac{MC}{MB}-2\right)+(MA+MC)\left(\frac{MC}{MB}+\frac{MB}{MC}-2\right)\geqslant 0.$$

于是　$F(M)\geqslant 0$，即　$MA_1+MB_1+MC_1\geqslant MA+MB+MC$.

12·65　试证:设$\triangle ABC$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的三条角平分线分别交$\triangle ABC$的外接圆于点A_1、B_1、C_1,则$AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+CA$.

(澳大利亚数学奥林匹克,1982年)



[证]　我们证明　$AA_1>\dfrac{AB+AC}{2}$.

连A_1B、A_1C.由AA_1是$\angle A$的平分线可知,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_1C}$，从而　$A_1B=A_1C>\dfrac{BC}{2}$.

由托勒密定理得

$$AA_1\cdot BC=AB\cdot A_1C+AC\cdot A_1B$$

$$=A_1B(AB+AC)>\frac{BC(AB+AC)}{2}.$$

于是　　$AA_1=\dfrac{AB+AC}{2}$.

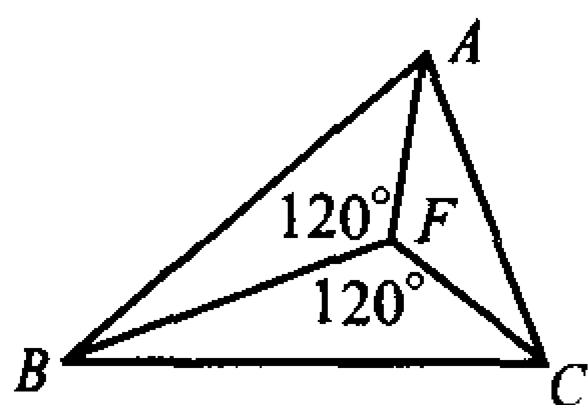
同理　　$BB_1>\dfrac{BA+BC}{2}$，$CC_1>\dfrac{CA+CB}{2}$.

三式相加得　$AA_1+BB_1+CC_1>\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

12·66　试证:对$\triangle ABC$内任一点P,$PA+PB+PC$至少为$\triangle ABC$的内切圆半径的6倍.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[证]　(1)若$\triangle ABC$的各角均小于$120°$.



这时,在$\triangle ABC$内存在费尔马点F,满足

$$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120°,$$

并且$PA+PB+PC$　在P与F重合时最小.

设$FA=x$,$FB=y$,$FC=z$,$AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,则由余弦定理可得

$$a=\sqrt{y^2+z^2+yz}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(y+z),$$

$$b=\sqrt{x^2+z^2+xz}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(x+z),$$

$$c=\sqrt{x^2+y^2+xy}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y).$$

设$\triangle ABC$的内切圆半径为r.则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$

$$S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}xy\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}xy,$$

$$S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}yz\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}yz,$$

$$S_{\triangle CFA}=\frac{1}{2}zx\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}zx.$$

于是由 $\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AFB}+S_{\triangle BFC}+S_{\triangle CFA}$

得 $\quad\frac{\sqrt{3}}{2}(xy+yz+zx)=r(a+b+c).$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{a+b+c}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{3}(x+y+z)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

由 $\quad(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$$\geqslant3(xy+yz+zx).$$

$$\therefore\quad\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\leqslant\frac{x+y+z}{3},$$

即 $\quad 6r\leqslant x+y+z\leqslant PA+PB+PC.$

(2)若$\triangle ABC$有一个角不小于120°,

不妨设$\angle A\geqslant120^\circ$.

这时,$PA+PB+PC$在P与A重合时最小,上面的证明仍然有效,只需注意$x=0,y=c,z=b$并将一些等号改为"$\leqslant$"号即可.

12·67 如图,设$\triangle ABC$的外接圆O的半径为R,内心为I,$\angle B=60^\circ$, $\angle A<\angle C$,$\angle A$的外角平分线交圆O于E,试证:

(1)$IO=AE$;

(2)$2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

（中国高中数学联赛,1994年）

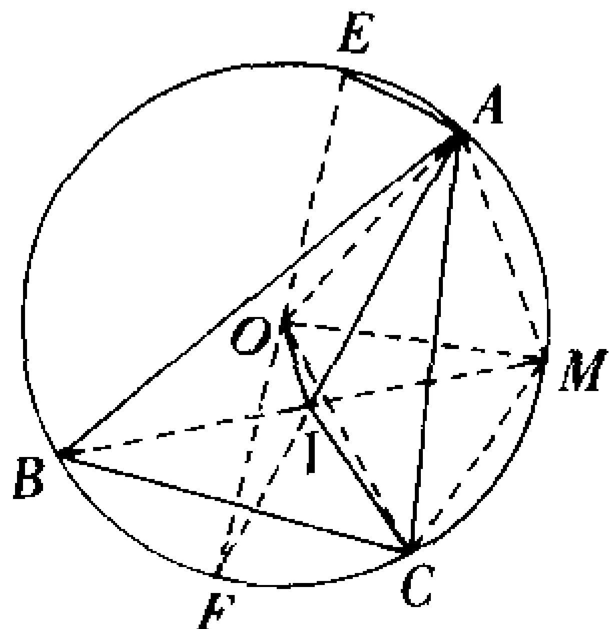


图1

［证1］ (1)如图1,设射线 BI 与圆 O 交于 M,连结 MA、MC,易知 M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,$MA=MC$.

连结 OA、OC、OM. 易知 $\angle AOM=\angle B=60^\circ$,

故 $\triangle AOM$ 为正三角形,$MC=MA=MO=R$.

由 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,M 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,知

$$\angle MAI=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\angle MIA,$$

有 $MI=MA=R$.

故 A、O、I、C 在以 M 为圆心,R 为半径的圆 M 上,圆 M 与圆 O 为等圆.

设 AI 的延长线与 $\overset{\frown}{BC}$ 交于 F,连结 EF.

因 AF、AE 分别为 $\angle A$ 及其外角平分线,

故 $\angle EAF$ 为直角,EF 为圆 O 的直径,又

$\angle OFA=\angle OAF=\angle OCI$.

依"在同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弦相等",即知

$AE=IO$.

(2)如(1)中所述,圆 M 与圆 O 是等圆. 在圆 M 中,

$$IO=2R\sin\frac{1}{2}\angle IMO=2R\sin\frac{1}{2}(\angle IMA-\angle OMA)$$

$$=2R\sin\frac{1}{2}(C-60^\circ)=2R\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right),$$

$$IA=2R\sin\frac{1}{2}\angle IMA=2R\sin\frac{1}{2}C,$$

$$IC=2R\sin\frac{1}{2}A.$$

$\therefore$ $IO+IA+IC$

$$=2R\left[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right)+\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}A\right]$$

$$=2R\left[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^{\circ}\right)+2\sin\frac{1}{4}(C+A)\cdot\cos\frac{1}{4}(C-A)\right]$$

$$=2R\left[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^{\circ}\right)+\sin\left(90^{\circ}-\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}A\right)\right]$$

$$=2R\cdot 2\sin\frac{1}{2}\left(60^{\circ}+\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}A\right)\cdot\cos\frac{1}{2}\left(120^{\circ}-\frac{3}{4}C+\frac{1}{4}A\right)$$

$$=2R\cdot 2\sin 45^{\circ}\cos\frac{1}{2}(150^{\circ}-C)$$

$$=2\sqrt{2}\ R\sin\left(15^{\circ}+\frac{1}{2}C\right).$$

由 $\angle A<\angle C$ 知 $60^{\circ}<\angle C<120^{\circ}$，

有 $30^{\circ}<\frac{1}{2}<\angle C<60^{\circ}$.

而 $\sin 75^{\circ}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

故 $2\sqrt{2}\ R\sin 45^{\circ}<IO+IA+IC<2\sqrt{2}\ R\sin 75^{\circ}$.

此即 $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

[证 2] (1)如图 2，设射线 BI、AI 分别与圆 O 交于 M 及 F，易知 M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，连结 OA、OM、AM.

由 $\angle AOM=\angle B=60^{\circ}$

知$\triangle OAM$ 为正三角形，且 $\angle AMO=60^{\circ}$，$\angle AMB=\angle C$.

有 $\angle IMO=\angle AMB-\angle AMO$
$=\angle C-60^{\circ}$.

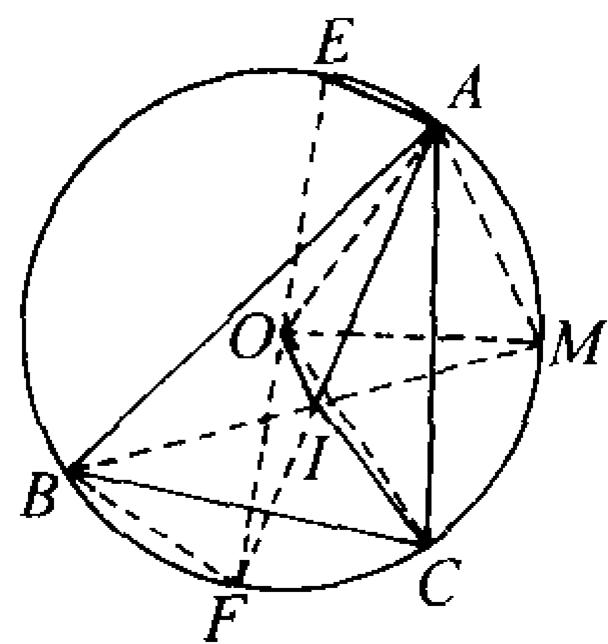


图 2

连结 EF、FB.

因 AF、AE 分别为$\angle A$ 及其外角的平分线，故$\angle EAF$ 为直角，EF 为圆 O 的直径.

$$\angle AEF=\angle ABF=\angle B+\frac{1}{2}\angle A.$$

则 $\angle AOE=180^{\circ}-2\left(\angle B+\frac{1}{2}\angle A\right)=\angle C-60^{\circ}$.

$\therefore\ \angle IMO=\angle AOE$，

从而 两等腰三角形$\triangle MIO\cong\triangle OAE$， $IO=AE$.

(2)连结 OC． $\angle AOC=2\angle B=120°$，

有 $\angle OAC=\angle OCA=30°$， $\angle AIC=\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$

$$=120°.$$

∴ $\angle AOC=\angle AIC$，故 A、O、I、C 共圆

∴ $\angle OCI=\angle OAF=\angle OFA$；

$\angle OIC=180°-\angle OAC=150°$；

且$\angle AIO=\angle ACO=30°$ 得 $\angle OIF=150°$．

∴ $\triangle OIC\cong\triangle OIF$， $IC=IF$．

如(1)中所述，$\angle EAF$ 是直角，EF 是圆 O 的直径，

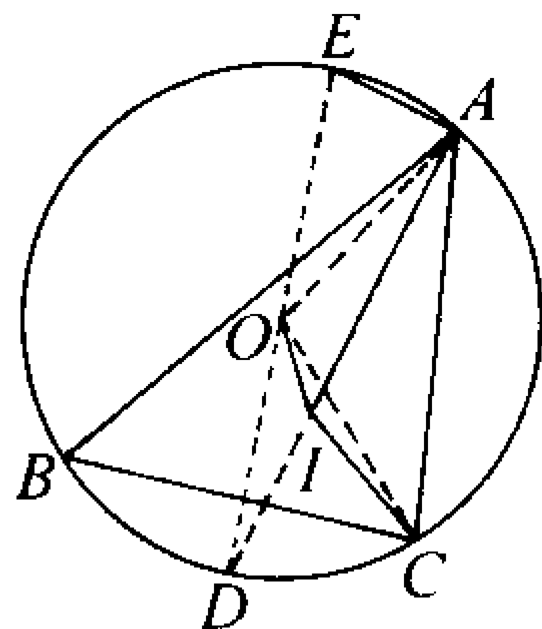
$$\begin{aligned}\therefore\quad IO+IA+IC&=AE+AF=2R(\sin\angle OFA+\cos\angle OFA)\\&=2\sqrt{2}\ R\sin(\angle OFA+45°)\\&=2\sqrt{2}\ R\sin(\angle OAF+45°)\\&=2\sqrt{2}\ R\sin\left(30°-\frac{1}{2}A+45°\right)\\&=2\sqrt{2}\ R\sin\left[75°-\frac{1}{2}(120°-C)\right]\\&=2\sqrt{2}\ R\sin\left(15°+\frac{1}{2}C\right).\end{aligned}$$

由 $\angle A<\angle C$ 知 $60°<\angle C<120°$，

有 $30°<\frac{1}{2}\angle C<60°$． 而 $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ，

故 $2\sqrt{2}\ R\sin 45°<IO+IA+IC<2\sqrt{2}R\sin 75°$，

此即 $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$．



[证 3] (1)延长 AI 交$\overparen{BC}$于点 D，连结 OA、OC、OD、OE．

∵ AI 和 AE 分别平分$\angle A$ 及其外角，

∴ $\angle EAD=90°$． ∴ EOD 为一条直径．

∵ $\angle AOC=2\angle B=120°$，

$$\begin{aligned}\angle AIC&=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)\\&=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle B)=120°,\end{aligned}$$

$\therefore$ A、O、I、C 四点共圆.

$\therefore$ $\angle ICO=\angle IAO=\angle IDO$，$\angle OIC=180°-\angle OAC=150°$.

在 $\triangle OIC$ 中应用正弦定理有

$$OI=\frac{OC\cdot\sin\angle OCI}{\sin\angle OCI}=2R\sin\angle OCI=2R\sin\angle ODI=AE.$$

(2) $\because$ $\angle OID=180°-\angle OIA=180°-\angle OCA$

$=150°=\angle OIC$.

$\therefore$ $\triangle OID\cong\triangle OIC$. $\therefore$ $ID=IC$.

$\therefore$ $2R=ED<AE+ED=AE+AI+IC$.

记 $\angle ICO=\alpha$，于是有

$AE+AD=2R(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

$\because$ $\alpha=30°-\frac{1}{2}\angle A<30°$,

$\therefore$ $AE+AD=4R\sin45°\cos(45°-\alpha)<4R\sin45°\cos15°$

$=2R(\sin60°+\sin30°)=(1+\sqrt{3})R$.

$\therefore$ $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

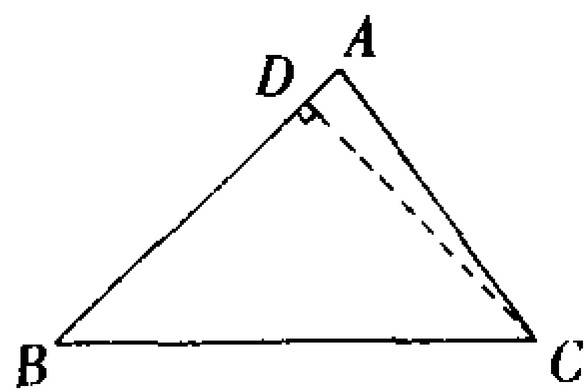
12·68 在锐角$\triangle ABC$ 中，$AC=1,AB=c$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径长$R\leqslant1$. 求证:$\cos A<C\leqslant\cos A+\sqrt{3}\sin A$.

（中国初中数学联赛,1984 年）

[证] 由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$

$=1^2+c^2-2c\cdot\cos A$,



又由正弦定理得 $BC^2=4R^2\sin^2A$,

于是 $1^2+c^2-2c\cdot\cos A=4R^2\sin^2A$.

$\because$ $0<R\leqslant1$, $\therefore$ $R^2\leqslant1$.

从而

$1^2+c^2-2c\cdot\cos A=4R^2\sin^2A\leqslant4\sin^2A$,

即 $c^2-(2\cos A)\cdot c.-4\sin^2A\leqslant0$.

解不等式得 $\cos A-\sqrt{3}\sin A\leqslant c\leqslant\cos A+\sqrt{3}\sin A$.

过 C 作$CD\perp AB$ 于D，$\because$ $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

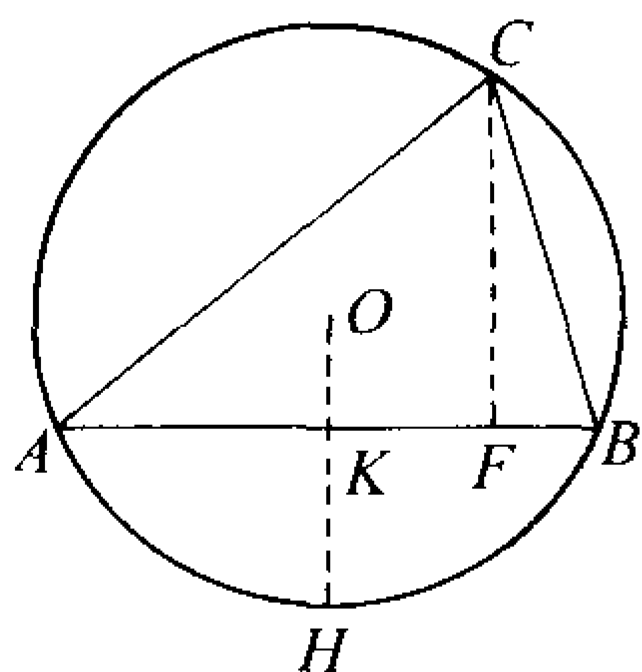
$\therefore$ D 在AB 上，故 $AB=c>AD=AC\cdot\cos A=\cos A$,

$\therefore$ $\cos A<c\leqslant\cos A+\sqrt{3}\sin A$.

12·69 设 $\triangle ABC$ 的三个内角角度分别为 α、β、γ. D 为 AB 上一点. 试证：CD 为 AD 和 BD 的几何中项的充要条件是 $\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$.

(第16届国际数学奥林匹克,1974年)

[证1] 如图所示,作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O, $OH\perp AB$ 于 K,半径 $OA=OH=R$,作 $CF\perp AB$ 于 F.



$\because$ $CF=AC\sin\alpha$,

$AC=2R\sin\beta$,

$\therefore$ $CF=2R\sin\alpha\sin\beta$. ①

又 $HK=OH-OK=R-R\cos\angle AOH$

$=R(1-\cos\gamma)$,

即 $HK=2R\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$. ②

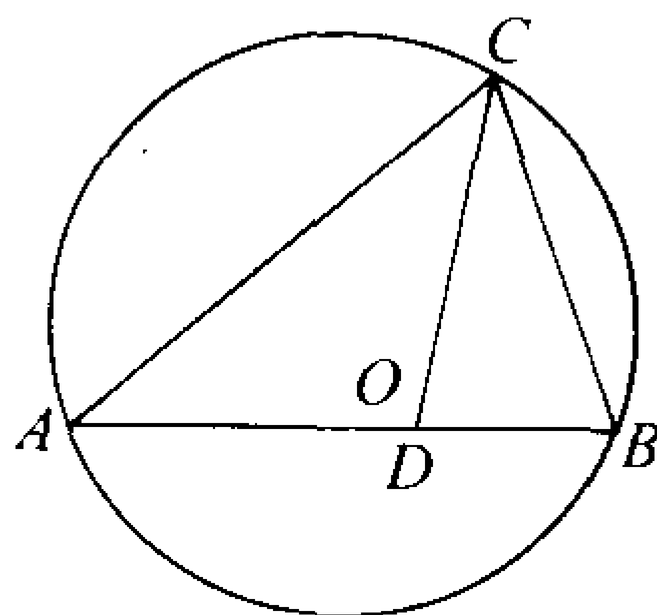
将①、②代入 $CF\leqslant HK$(这一点易证明)中,我们就得到:

$$2R\sin\alpha\sin\beta\leqslant 2R\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

即 $\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$.

因此,命题得证.

[证2] 设 D 为 AB 上一点,CD 分 γ 为 γ_1 和 γ_2(如图)



则由正弦定理,得:

$$\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}. \quad ③$$

$$\frac{CD}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}. \quad ④$$

③×④有

$$\frac{CD^2}{AD\cdot BD}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}. \quad ⑤$$

由⑤易知,$CD^2=AD\cdot BD$ 的充要条件是:

$\sin\alpha\ \sin\beta=\sin\gamma_1\sin\gamma_2$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma],$$

即 $\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)=\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

12·70 求证:三角形两边之积大于它的内切圆与外接圆直径之积.

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[证] 设该三角形为$\triangle ABC$,角A、B、C的对边为a、b、c.面积为S,内切圆半径为r,外接圆半径为R.则由

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$

以及 $a+b>c$, $a+b+c>2c$, $2R=\frac{c}{\sin C}$.

可得 $ab=\frac{2S}{\sin C}=\frac{r(a+b+c)}{\sin C}>\frac{2\cdot r\cdot c}{\sin C}=2r\cdot 2R$.

12·71 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为顶点A、B、C所对边的长,A、B、C到内切圆的切线长分别为u、v、w.求证:$\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\geqslant\frac{3}{2}$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[证] 设 $s=\frac{a+b+c}{2}$.由柯西不等式得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9,$$

即 $s\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{9}{2}$.

又 $\because$ $u=s-a$, $v=s-b$, $w=s-c$

$$\therefore\ \frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}=\frac{s-a}{a}+\frac{s-b}{b}+\frac{s-c}{c}$$

$$=\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}-3=s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3$$

$$\geqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

12·72 确定$\triangle ABC$所需满足的充分必要条件,使得GA^2+GB^2

$+GC^2>\frac{8}{3}R^2$.这里的 G 为$\triangle ABC$ 的重心,R 为它的外接圆半径.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[解] 设 AD 为BC 边上的中线,则由中线长公式得

$$4AD^2=2AB^2+2AC^2-BC^2,$$

即 $9AG^2=2AB^2+2AC^2-BC^2$,

同理 $9BG^2=2BC^2+2AB^2-AC^2$,

$$9CG^2=2AC^2+2BC^2-AB^2,$$

相加得 $3(GA^2+GB^2+GC^2)=AB^2+BC^2+CA^2$.

设 AB 为最长边. 若$\triangle ABC$ 为直角三角形,则

$$AB^2+BC^2+CA^2=2AB^2=8R^2,$$

即 $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{8}{3}R^2$. ①

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,则

$$AB^2+BC^2+CA^2<2AB^2<8R^2,$$

即 $GA^2+GB^2+GC^2<\frac{8}{3}R^2$. ②

①与②都与

$$GA^2+GB^2+GC^2>\frac{8}{3}R^2 \quad ③$$

矛盾.因此,当③成立时,$\triangle ABC$ 必为锐角三角形.

反之,当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时.

设 AE 为外接圆的直径,则 $\angle BEC=180°-\angle BAC>90°$.

从而 $\triangle BEC$ 是钝角三角形.因而有

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=AB^2+BC^2+(AE^2-CE^2)\\&>AB^2+AE^2+BE^2=8R^2,\end{aligned}$$

再由 $3(GA^2+GB^2+GC^2)=AB^2+BC^2+CA^2$,

得 $3(GA^2+GB^2+GC^2)>8R^2$,

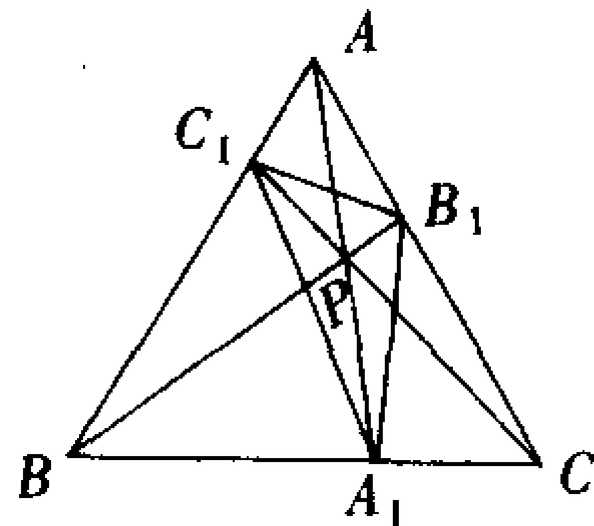
即 $GA^2+GB^2+GC^2>\frac{8}{3}R^2$.

综上,$GA^2+GB^2+GC^2>\frac{8}{3}R^2$ 成立的充分必要条件是$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

12·73 设△ABC是等边三角形，P是其内部一点，线段AP、BP、CP依次交三边BC、CA、AB于A_1、B_1、C_1三点．证明：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$.

（第37届国际数学奥林匹克预选题，1996年）

［证］ 由余弦定理



$$\begin{aligned}A_1B_1^2&=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C\\&\geqslant 2A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C\\&=A_1C\cdot B_1C.\end{aligned}$$

同理 $B_1C_1^2\geqslant B_1A\cdot C_1A$，$C_1A_1^2\geqslant C_1B\cdot A_1B$.

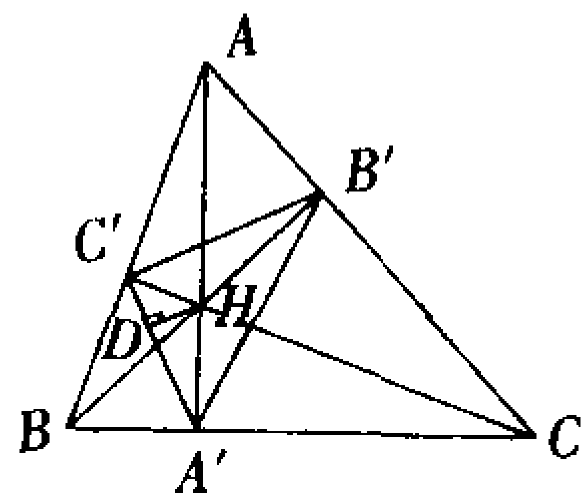
由塞瓦定理得 $\dfrac{A_1C}{A_1B}\cdot\dfrac{B_1A}{B_1C}\cdot\dfrac{C_1B}{C_1A}=1$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\\&\geqslant\sqrt{A_1C\cdot B_1C\cdot B_1A\cdot C_1A\cdot C_1B\cdot A_1B}\\&=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\cdot\sqrt{\frac{A_1C\cdot B_1A\cdot C_1B}{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}}\\&=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A.\end{aligned}$$

12·74 设△ABC的外接圆半径$R=1$，内切圆半径为r，它的垂足三角形$A'B'C'$的内切圆半径为p．求证：$p\leqslant 1-\dfrac{1}{3}(1+r)^2$.

（第34届国际数学奥林匹克预选题，1993年）

［证］ 设△ABC的垂心为H，则H也是垂足三角形$A'B'C'$的内心，



过H作$HD\perp A'C'$于D，则 $HD=p$.

$\because$ C'、B、A'、H四点共圆，

$\therefore$ $\angle HA'D=\angle HBC'=90-\angle A$.

$$\begin{aligned}p&=HD=HA'\sin\angle HA'D=HA'\cos A\\&=BA'\operatorname{tg}\angle HBA'\cdot\cos A\\&=AB\cdot\cos B\cdot\cos A\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-C)\\&=AB\cdot\operatorname{ctg}C\cdot\cos A\cdot\cos B\\&=2\sin C\cdot\operatorname{ctg}C\cdot\cos A\cdot\cos B\\&=2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\end{aligned}$$

$$=[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C$$
$$=\cos(A+B)\cos C+\cos(A-B)\cos C$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(A+B+C)+\cos(A+B-C)+\cos(A-B+C)+\cos(A-B-C)]$$
$$=\frac{1}{2}(-1-\cos 2C-\cos 2B-\cos 2A)$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C. \qquad ①$$

由柯西不等式,有

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqslant\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2. \qquad ②$$

由①、②有 $p\leqslant 1-\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2.$ ③

再由和差化积公式有

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+1.$$

记 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,其中 a、b、c 为$\triangle ABC$的三边长.则由半角公式及余弦定理得

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

由三角形面积公式有

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}=\frac{abc}{4}=rs.$$

则 $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+1$$
$$=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}+1$$
$$=\frac{4r^2s^2}{sabc}+1$$

$$=\frac{4r\cdot\frac{abc}{4}+1}{abc}+1$$

$$=r+1 \qquad ④$$

将④代入③得 $p\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$.

12·75 设 a、b、c 为三角形三边之长，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 为内切圆半径，求证：$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$.

（第 27 届美国普特南数学竞赛，1966 年）

［证］ 设三角形的面积为 S，由三角形的面积公式可得

$S=pr$， 及 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

则 $p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. ①

设 $x=\frac{1}{p-a}$，$y=\frac{1}{p-b}$，$z=\frac{1}{p-c}$，则等式①可化为

$$\frac{1}{r^2}=pxyz=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

于是我们只需证明

$$xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leqslant x^2+y^2+z^2. \qquad ②$$

由于 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，$y^2+z^2\geqslant 2yz$，$z^2+y^2\geqslant 2zx$，

则 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$.

又 $xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

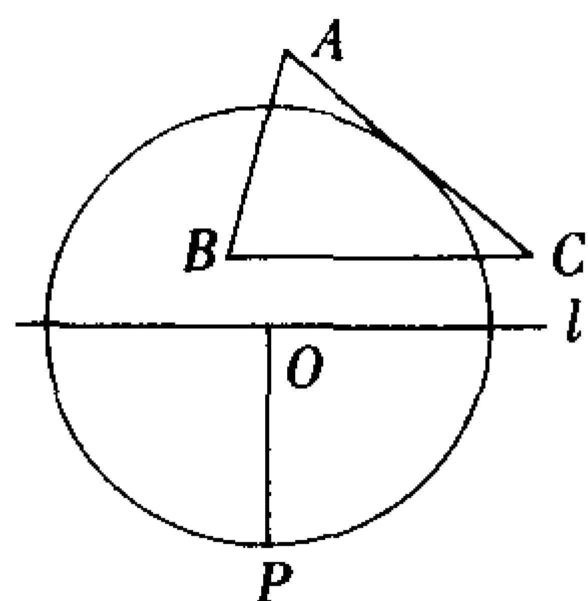
于是②式成立，即 $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$.

12·76 在平面上有一个半径为 1 的⊙O 和任意一个△ABC，求证：在⊙O 上一定存在一点 P，使 $PA\cdot PB\cdot PC>1$.

（中国黑龙江省哈尔滨市数学竞赛，1988 年）

［证］ 如果 O 不在△ABC 的内部，显然过 O 点可以作一直线 l，使△ABC 不在 l 的两侧（如图 1），过 O 作垂直于 l 的直线，它与⊙O 的两交点中，与△ABC 不在 l 同侧的交点记为 P.

显然，$PA\geqslant 1$，$PB\geqslant 1$，$PC\geqslant 1$，且 PA、PB、PC 不全为 1.



$\therefore\quad PA\cdot PB\cdot PC>1.$

如果 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，O 到 BC、AB、CA 的距离分别记为 r_1、r_2、r_3，不妨设 $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$（如图 2），过 O 作直线垂直于 BC，交 AB 于 E，交 BC 于 D，射线 OD 交 $\odot O$ 于 P.

$\because\quad r_1\leqslant r_2$，$\therefore\quad \angle OBD\leqslant 30^\circ$，

$$BD=r_1\operatorname{ctg}\angle OBD\geqslant r_1\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}r_1.$$

$$PB\geqslant\sqrt{(1-r_1)^2+(\sqrt{3}r_1)^2}=\sqrt{1-2r_1+4r_1^2}.$$

同理　$PC\geqslant\sqrt{1-2r_1+4r_1^2}.$

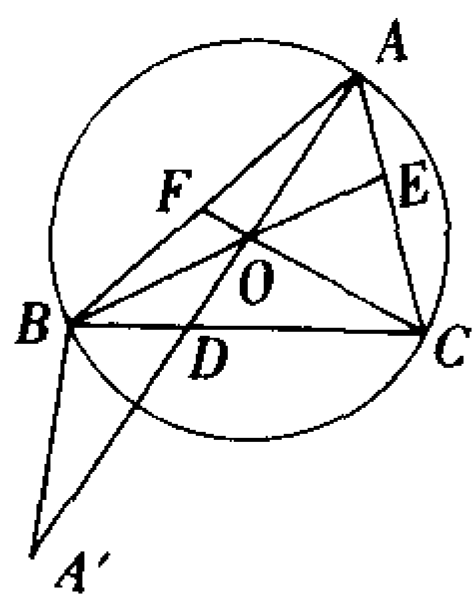
又　$DE=BD\cdot\operatorname{tg}60^\circ\geqslant\sqrt{3}r_1\cdot\sqrt{3}=3r_1$，$OE\geqslant 2r_1$，$PE\geqslant 1+2r$，

$\therefore\quad PA\geqslant PE\geqslant 1+2r_1.$

$\therefore\quad PA\cdot PB\cdot PC\geqslant(1-2r_1+4r_1^2)(1+2r_1)=1+8r_1^3>1.$

12·77　设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，外接圆圆心为 O，半径为 R，AO 交 $\triangle BOC$ 所在圆于另一点 A'，BO 交 $\triangle COA$ 所在圆于另一点 B'，CO 交 $\triangle AOB$ 所在圆于另一点 C'. 证明：$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，并指出在什么情况下等号成立？

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）



[证 1]　如图，设 AO 与 BC，BO 与 CA，CO 与 AB 的交点依次为 D、E、F，$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COA$ 的面积依次为 S_1、S_2、S_3. 由 B、O、C、A' 四点共圆知

$$\angle OBC=\angle OCB=\angle BA'O.$$

从而有　$\triangle OBD\backsim\triangle OA'B$.

得 $OA'=\dfrac{OB^2}{OD}=\dfrac{R^2}{OD}.$

同理　$OB'=\dfrac{R^2}{OE}$，$OC'=\dfrac{R^2}{OF}.$

所以

$$\frac{OA'\cdot OB'\cdot OC'}{R^3}=\frac{R^3}{OD\cdot OE\cdot OF}=\frac{OA}{OD}\cdot\frac{OB}{OE}\cdot\frac{OC}{OF}$$

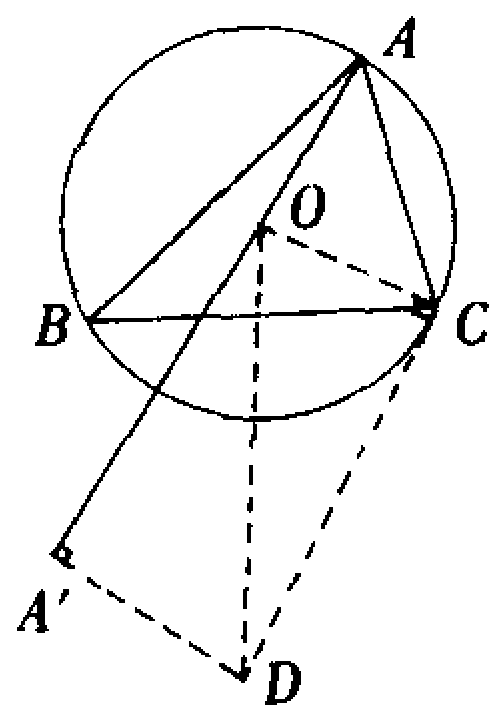
$$=\frac{S_1+S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1+S_2}{S_3}\cdot\frac{S_2+S_3}{S_1}$$

$$=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_3}{S_2}\right)\left(\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}\right)$$
$$=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+2$$
$$\geqslant 8,$$

等号当且仅当 $S_1=S_2=S_3$ 时成立，此时$\triangle ABC$为正三角形.

故 $OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

[证 2] 作 BOC 所在圆的直径 OD，连 $A'D$，有 $\angle OA'D=\angle OCD=90°$.



$$\therefore\quad OA'=OD\cos\angle A'DO=R\cdot\frac{\cos\angle A'DO}{\cos\angle COD}.$$

易知 $OD\perp BC$. 于是 $\angle COD=\angle A$，

$$\angle A'DO=180°-\angle COD-\angle COA=180°-\angle A-2\angle B=\angle C-\angle B.$$

$$\therefore\quad OA'=R\cdot\frac{\cos(C-B)}{\cos A}.$$

同理 $OB'=R\cdot\dfrac{\cos(A-C)}{\cos B},OC'=R\cdot\dfrac{\cos(A-B)}{\cos C}$.

于是 $OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$ 等价于

$$\frac{\cos(A-B)}{\cos C}\cdot\frac{\cos(B-C)}{\cos A}\cdot\frac{\cos(C-A)}{\cos B}\geqslant 8.$$

$$\because\quad \frac{\cos(A-B)}{\cos C}=\frac{\cos(A-B)}{-\cos(A+B)}=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{-\cos A\cos B+\sin A\sin B}=\frac{1+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B}{1-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B}.$$

记 $x=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B,y=\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C,z=\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A$. 对任意$\triangle ABC$，有

$$\begin{aligned}x+y+z&=\operatorname{ctg}A(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\\&=-\operatorname{ctg}(B+C)(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\\&=\frac{\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-1}{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C}+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\\&=1.\end{aligned}$$

而对于锐角$\triangle ABC$，x、y、z 均为正数，

$$\therefore \quad \frac{\cos(A-B)}{\cos C}=\frac{1+x}{1-x}=\frac{x+y+z+x}{x+y+z-x}=\frac{(x+y)+(x+z)}{y+z}$$

$$\geqslant 2\cdot\frac{\sqrt{(x+y)(x+z)}}{y+z}.$$

同理 $\dfrac{\cos(B-C)}{\cos A}\geqslant 2\cdot\dfrac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{x+z}.$

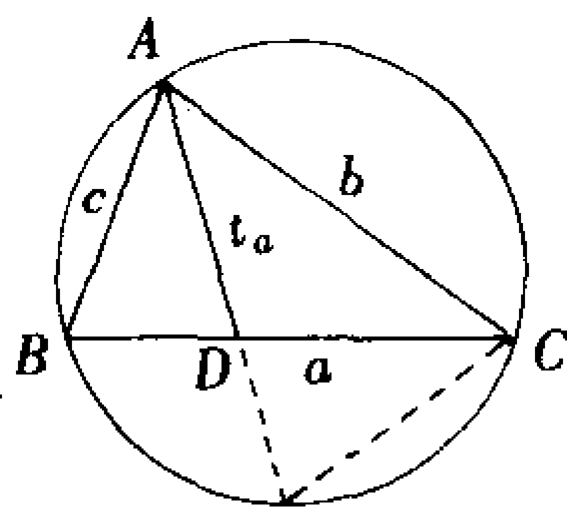
且 $\dfrac{\cos(C-A)}{\cos B}\geqslant 2\cdot\dfrac{\sqrt{(x+z)(y+z)}}{x+y}.$

于是 $\dfrac{\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)}{\cos C\cos A\cos B}\geqslant 8.$

易知,当且仅当$\triangle ABC$为等边三角形时上式等号成立.

12·78 证明:任何三角形三个内角的平分线的连乘积必小于三边的连乘积.

(中国上海市数学竞赛,1957年)



[证 1] 令 a、b、c 为$\triangle ABC$的三边,t_a、t_b、t_c为三内角平分线.

作$\triangle ABC$的外接圆与$\angle A$的平分线AD的延长线相交于E,

则 $\triangle EAC\backsim\triangle BAD$.

$\therefore \quad AB:AE=AD:AC,$

即 $AB\cdot AC=AE\cdot AD,$

或 $b\cdot c=t_a(t_a+DE)$, $\therefore \quad bc>t_a^2.$

同理 $ca>t_b^2$, $ab>t_c^2.$

$\therefore \quad a^2b^2c^2>t_a^2t_b^2t_c^2$. 故 $abc>t_at_bt_c$.

[证 2] 由题设知 $(b+c)t_a\sin\dfrac{A}{2}=bc\sin A,$

$\therefore \quad t_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}.$

同理 $t_b=\dfrac{2ca}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}$, $t_c=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}.$

$$\therefore \quad t_at_bt_c=\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

因三角形内角之半小于直角,

$\therefore\quad 0<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}<1,$

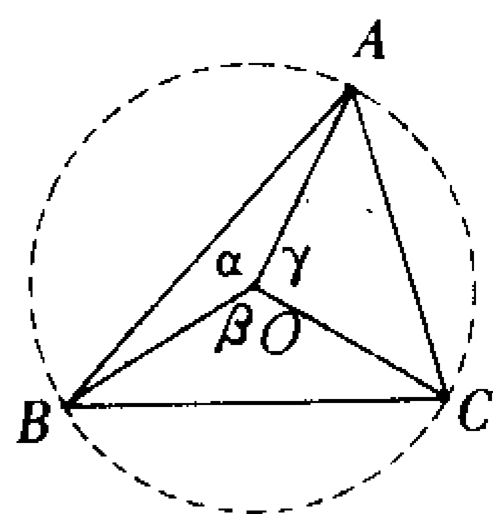
且　$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc,$

$\therefore\quad t_a t_b t_c<abc.$

12·79　一个锐角三角形面积为1,求证:在三角形内有一点到每个顶点的距离至少为$\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}}$.

（第16届加拿大数学奥林匹克,1984年）

［证］　我们证明锐角$\triangle ABC$的外心O满足题目要求.



设锐角$\triangle ABC$的外接圆半径为R,$\angle AOB=\alpha$,$\angle BOC=\beta$,$\angle COA=\gamma$,则由

$$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}=S_{\triangle ABC},$$

得　$\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=1.$

显然　$\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta,\gamma<\pi,\alpha+\beta+\gamma=2\pi.$

从而　$R^2=\frac{2}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\geqslant\frac{2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{3}},$

即　$R\geqslant\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}}.$

从而锐角三角形的外心O即为所求.

12·80　试证:半径为1的圆内接四边形的最短边不大于$\sqrt{2}$.

（第1届加拿大数学奥林匹克,1969年）

［证］　注意到在同圆中,大弦所对的弧较大.

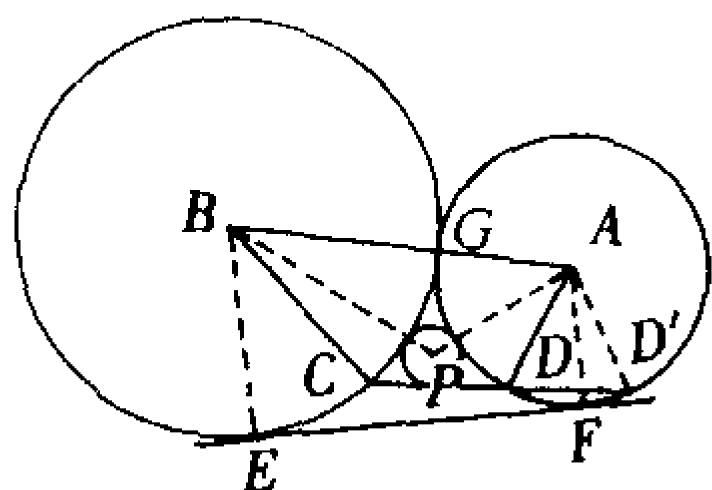
由于圆内接四边形的顶点把周围分成四个弧,弧长之和为2π,所以最短弧的弧长不大于$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

因此最短边的长不大于$\sqrt{2}$.

12·81　设$ABCD$是一个凸四边形,它的三边AB、AD、BC满足$AB=AD+BC$,四边形内距离CD为h的地方有一点P,使得$AP=h$

$+AD, BP=h+BC$.求证:$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克,1989 年)



[证] 分别以 A、B、P 为圆心,以 AD、BC 和 h 为半径作三个圆.

由 $AB=AD+BC, AP=h+AD, BP=h+BC$,得此三个圆两两相切.

设圆 A 与圆 B 的切点为 G,则圆 P 为曲边三角形 GCD 的内切圆(若给定的四边形为 $ABCD'$,则转而考察四边形 $ABCD$).

作圆 A 与圆 B 的外公切线 EF,容易看出,当 C、D 分别沿着所在的圆周移到 E、F 时,圆 P 的半径达到最大值,记为 m,即有 $m\geqslant h$.

设 $AD=r, BC=R$.

当圆 P 与 EF 相切时,我们考察 AB、BP、PA 在 EF 上的投影 p、a、b,由勾股定理有

$$p=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr},$$

$$a=\sqrt{(R+m)^2-(R-m)^2}=2\sqrt{Rm},$$

$$b=\sqrt{(r+m)^2-(r-m)^2}=2\sqrt{rm}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{Rr}=\sqrt{Rm}+\sqrt{rm},\ \text{即}\quad \frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

$$\because\quad m\geqslant h,\ \therefore\quad \frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

12·82 设四边形的一组对边的长分别为 a 和 b,其内切圆直径为 d,求证:$ab\geqslant d^2$.

(前苏联教委推荐试题,1988 年)

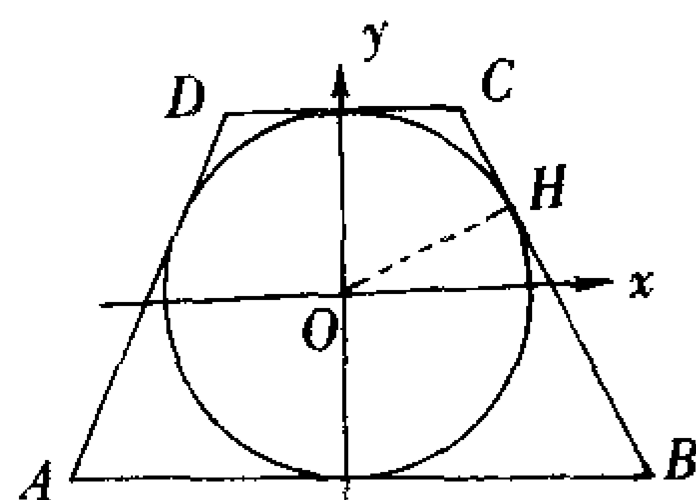
[证] 首先对于特殊情形证明如下的引理.

引理 设等腰梯形的上下底边之长分别为 a 和 b,内切圆直径为 d,则必有 $ab=d^2$.

引理的证明 取以内切圆圆心 O 为原点,以过点 O 且平行于两底的直线为 x 轴的直角坐标系.于是内切圆的方程为

$$x^2+y^2=\frac{d^2}{4}.$$

设下底 $AB=b$，上底 $CD=a$，于是点 C 和 B 的坐标分别为 $\left(\frac{a}{2},\frac{d}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{b}{2},-\frac{d}{2}\right)$. 设 BC 与 $\odot O$ 的切点为 H，坐标为 $\left(\frac{d}{2}\cos\theta,\frac{d}{2}\sin\theta\right)$，于是直线 BC 的方程为



$$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=\frac{d}{2}.$$

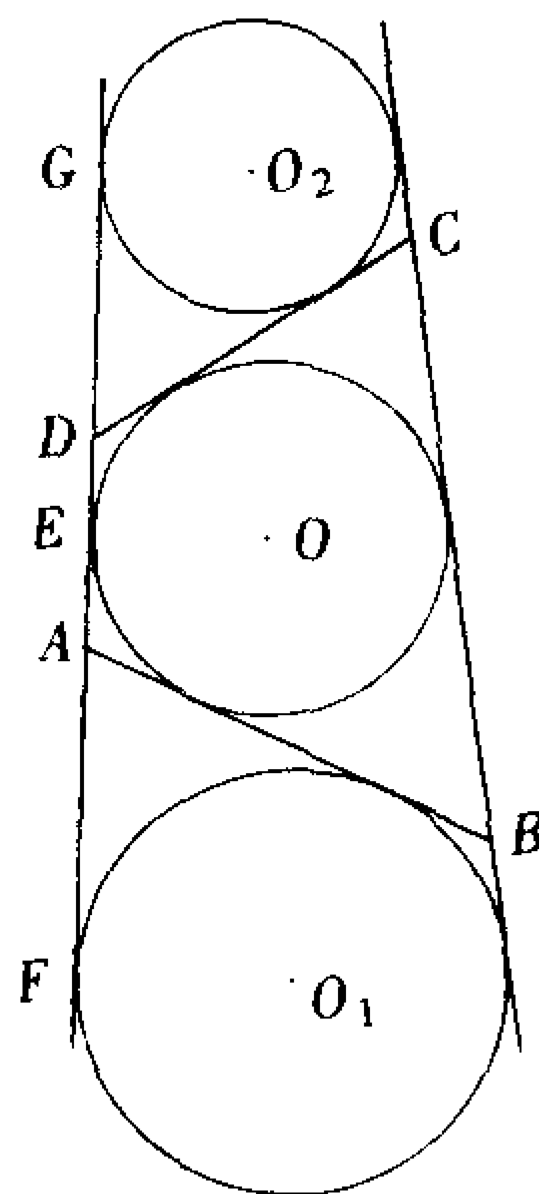
将点 C 和 B 的坐标代入上式，分别得到

$$\frac{a}{2}\cos\theta+\frac{d}{2}\sin\theta=\frac{d}{2},\quad \frac{b}{2}\cos\theta-\frac{d}{2}\sin\theta=\frac{d}{2}.$$

分别解得 $a=\dfrac{d(1-\sin\theta)}{\cos\theta}, b=\dfrac{d(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$.

由此得到 $ab=d^2\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=d^2$.

回到原题的证明 设四边形 $ABCD$ 是有内切圆的任意四边形.



作辅助线如图所示. 因为 $AB=EF$，$CD=GE$，所以对于固定的 $\odot O$ 和直线 BC、AD 而言，点 G、F 与 E 的距离越近，边 AB、CD 的长度就越小，且当 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 都与 $\odot O$ 相切时，二者的长度都达到最小值.

这时四边形 $ABCD$ 恰为 $\odot O$ 的外切等腰梯形.

将 $\odot O$ 的上述外切等腰梯形的上下底之长分别记为 a' 和 b'，于是有 $a'<a$，$b'<b$. 从而有

$$ab>a'b'=d^2.$$

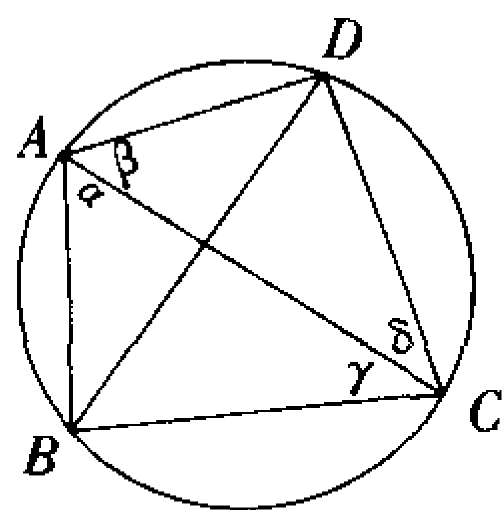
12·83 一个凸四边形内接于一个半径为 1 的圆，试证：它的周长与对角线的和之间的差大于 0，小于 2.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

［证］ 如图，由三角形的任意两边之和大于第三边可得

$$AB+BC>AC,\quad AD+CD>AC,$$

$$\therefore\quad AC<\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA),$$



同理　$BD<\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$，

相加可得　$AC+BD<AB+BC+CD+DA$.

即　$(AB+BC+CD+DA)-(AC+BD)>0$.

不妨设 $\alpha\leqslant\delta$，由正弦定理有

$$BC=2\sin\alpha,\quad AB=2\sin\gamma,$$

$AD=2\sin\delta$，$CD=2\sin\beta$，

$AC=2\sin(\alpha+\gamma)$，$BD=2\sin(\alpha+\beta)$.

又　$\delta=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$.

$\therefore$　$AD=2\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

考察差　$y=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta)$
$-\sin(\alpha+\gamma)-\sin(\beta+\gamma)$.

$$\frac{1}{2}y=\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$-\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$=\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right]$$

$\because$　$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}<\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$，则　$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<0$.

又$\because$　$\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=90^\circ$，

则　$\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}>\frac{\beta+\gamma}{2}$，$\therefore$　$\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}>0$.

于是　$y<0$，则有

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$<\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)$

$<\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)+1$.

即　$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)-[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)]<1$.

$\therefore$　$(AB+BC+CD+DA)-(AC+BD)<2$.

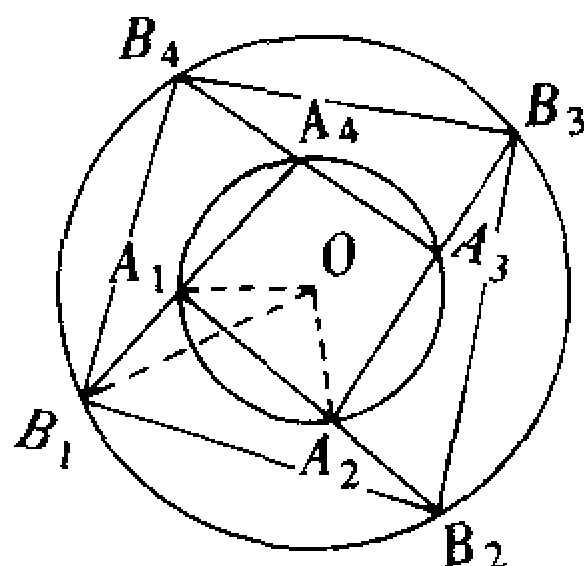
由以上可得　$0<(AB+BC+CD+DA)-(AC+BD)<2$.

12·84　设 C_1、C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的半径的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4. 试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 $\geqslant 2\times$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长. 并确定等号成立的条件.

（第 3 届中国中学生数学冬令营，1988 年）

［证］　注意到拓广的托勒密定理：

设 $ABCD$ 为给定的四边形，那么 $AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$，并且当且仅当 A、B、C、D 四点共圆时，等号成立.



记公共圆心为 O，连结 OA_1、OB_1 和 OB_2.

在四边形 $OA_1B_1B_2$ 中，广用拓广的托勒密定理有

$OB_1\cdot A_1B_2\leqslant OA_1\cdot B_1B_2+OB_2\cdot A_1B_1$，

因为　$OB_1=OB_2=2OA_1$，于是有

$2A_1B_2\leqslant B_1B_2+2A_1B_1$，$B_1B_2\geqslant 2A_1B_2-2A_1B_1$，

则　$B_1B_2\geqslant 2A_1A_2+2A_2B_2-2A_1B_1$.　①

同理　$B_2B_3\geqslant 2A_2A_3+2A_3B_3-2A_2B_2$，　②

$B_3B_4\geqslant 2A_3A_4+2A_4B_4-2A_3B_3$，　③

$B_4B_1\geqslant 2A_4A_1+2A_1B_1-2A_4B_4$.　④

①+②+③+④得

$B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)$.　⑤

为使⑤式等号成立，当且仅当①，②，③，④均为等式.

若①为等式，则 O、A_1、B_1、B_2 共圆，这时有

$\angle OA_1A_2=\angle OB_1B_2=\angle OB_2B_1=\angle A_4A_1O$.

即 OA_1 为 $\angle A_4A_1A_2$ 的平分线.

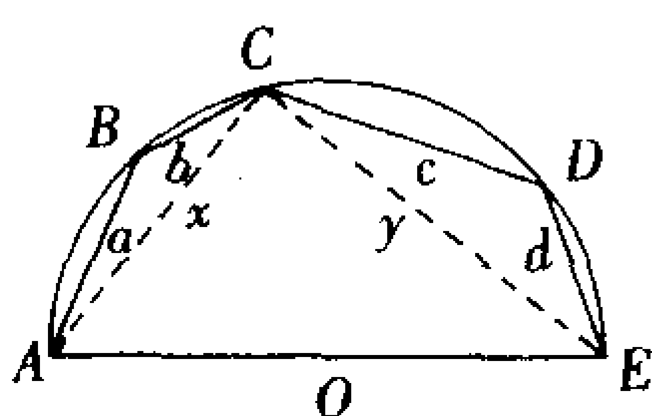
同理，OA_2、OA_3、OA_4 分别为 $\angle A_1A_2A_3$、$\angle A_2A_3A_4$、$\angle A_3A_4A_1$ 的平分线.

于是 O 也是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆的圆心.

由于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 既有外接圆，又有圆心的内切圆，所以四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形，即当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形时等号成立.

12·85　求证：如果点 A、B、C、D，与 E 依次在半径为 1 的半圆周上，则有 $AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+AB\cdot BC\cdot CD+BC\cdot CD\cdot DE<4$.

（第 22 届国际数学奥林匹克候选题，1981 年）



［证］　记 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DE=d$，$AC=x$，$CE=y$，$\angle CAE=\alpha$，$\angle AEC=\beta$.

不妨设点 A 和 E 是半圆周的直径的两个端点，否则，可以把 A 和 E 移到半圆周直径的两端，此时表达式

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd$$

只能增大.

$\because\quad \angle ACE=90^\circ, AE=2,\quad \therefore\quad x^2+y^2=4.$

又　$\angle ABC=180^\circ-\beta$，$\angle CDE=180^\circ-\alpha$.

由余弦定理可得

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ABC=a^2+b^2+2ab\cos\beta,$$

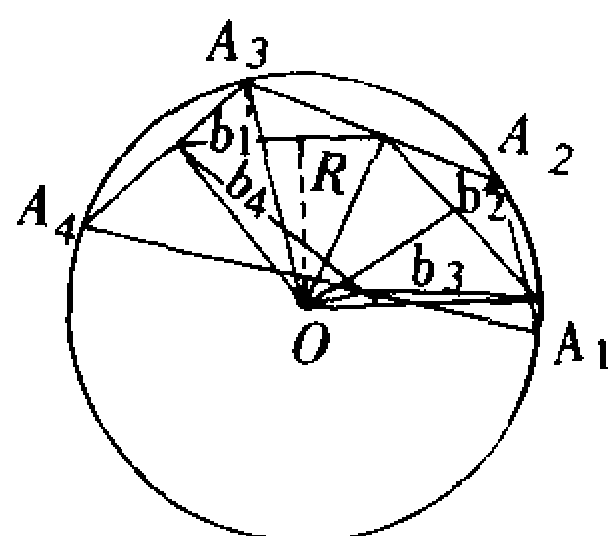
$$y^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle CDE=c^2+d^2+2cd\cos\alpha,$$

$\because\quad 2\cos\alpha=x>b,\ 2\cos\beta=y>c.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 4=x^2+y^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab\cos\beta+2cd\cos\alpha\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+aby+cdx\\&>a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd.\end{aligned}$$

12·86　面积为 S 的 n 边形内接于半径为 R 的圆. 在 n 边形的每条边上都标出一个点. 证明：顶点在所标点上的 n 边形的周长不小于 $\dfrac{2S}{R}$.

（第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年）



［证］　设 A_i 为圆内接 n 边形的顶点（$i=1,2,\cdots,n$），b_i 为连接这个多边形上两个相邻边标出点的线段，O 为圆心.

S_i 和 S'_i 是分别以 A_i、O_i 为顶点，b_i 为底的三角形的面积.

同时,如果 A_i 与 O 在含有 b_i 的直线的两侧,S'_i 取负号.

那么对于每一个 i 有 $\quad S_i+S'_i\leqslant\frac{b_iR}{2}$.

而且 $S'_1+S'_2+\cdots+S'_n$ 等于以所标出的点为顶点的多边形的面积(S'_i 取正号或负号表明,能在里边或外边从点 O 看到 b_i).因此

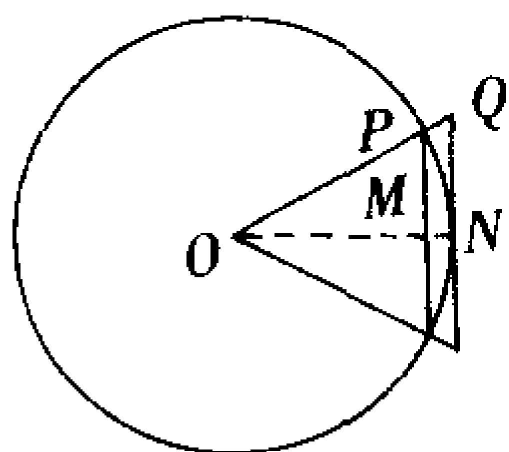
$$S=\sum_{i=1}^{n}(S_i+S'_i)\leqslant\frac{R}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

于是 $\quad$ 多边形周长 $\quad\sum_{i=1}^{n}b_i\geqslant\frac{2S}{R}$.

12·87 给定的圆周长为 C,用 x 和 y 分别表示此圆的外切正 1985 边形的周长与内接正 1985 边形的周长,求证:$x+y\geqslant 2C$.

(第 17 届加拿大数学奥林匹克,1985 年)

[证] 考虑一般的情形:



对任意正整数 $n(n\geqslant 3)$,圆外切正 n 边形的周长 x 与圆内接正 n 边形的周长 y 都有:$x+y\geqslant 2C$.

如图,PM、PN 分别为圆内接正 n 边形和圆外切正 n 边形的边长的一半,并设 $\quad\alpha=\angle QON=\frac{\pi}{n}$.

为证 $\quad x+y\geqslant 2C$, 只需证 $\quad PM+QN\geqslant 2\,\widehat{PN}$.

设 r 为圆的半径,则

$$PM+QN=r(\sin\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=r\left(\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$=r\cdot\frac{4\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^4\frac{2}{\alpha}}>r\cdot 4\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

由于 $\quad$ 当 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}>\frac{\alpha}{2}$.

而 $n\geqslant 3$ 时, $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2n}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\quad r\cdot 4\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}>r\cdot 4\cdot\frac{\alpha}{2}=2r\cdot\alpha=2\,\widehat{PN}$.

即 $\quad PM+QN>2\,\widehat{PN}$.

12·88　在凸十二边形内有相距10的两点.求出每点到十二边形各顶点距离之和.求证:这两个和的差小于100.

（第20届全苏数学奥林匹克,1986年）

[证]　设$A_1A_2\cdots A_{12}$是已知的十二边形.O和O'是给定的点.为确定起见,设点O'在$\triangle OA_1A_2$内或边上,易证:

$O'A_1+O'A_2<OA_1+OA_2$.

$O'A_i-OA_i\leqslant 10\text{cm}\quad(i=3,4,\cdots,12)$

于是　$(O'A_1+\cdots+O'A_{12})-(OA_1+\cdots+OA_{12})$

$=(O'A_1+O'A_2-OA_1-OA_2)+(O'A_3-OA_3)$

$+\cdots+(O'A_{12}-OA_{12})$.

$<10\times 10=100$.

调换O与O'的位置,使得

$|(OA_1+\cdots+OA_{12})-(O'A_1+\cdots+O'A_{12})|<100$.

12·89　已知h_k是半径为R的圆内接正K边形的边心距.求证:$(n+1)h_{n+1}-nh_n>R$.

（第3届全苏数学奥林匹克,1969年）

[证]　半径为R的圆内接正k边形的边心距　$h_k=R\cos\dfrac{\pi}{R}$.

所以,要证的不等式等价于关系式

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1,$$

或者　$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{\pi}{n}\right)>1-\cos\frac{\pi}{n+1},$$

即　$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}.\qquad ㊉$$

㊉式是成立的,因为

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin\frac{2n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{n+1}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)},$$

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\geqslant\sin\frac{n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

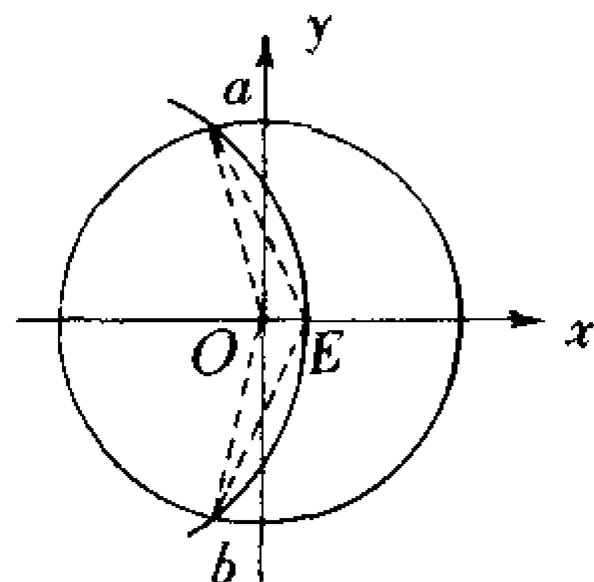
其中,我们利用了不等式$n|\sin\alpha|\geqslant|\sin n\alpha|$这个结果,而这个结果用数学归纳法是不难证明的.

12·90　令K表示半径为1的一个圆盘的圆周,令k表示连结K

上两点 a、b 且含于圆盘内部的一条圆弧.假设 k 把圆盘分成面积相等的两部分,试证:k 的长度大于 2.

(第 6 届美国普特南数学竞赛,1946 年)

[证] 显然,a、b 两点不可能是一条直径的两个端点,否则过 a、b 两点的圆弧不可能平分圆盘的面积.



设已知圆盘 k 为单位圆 $x^2+y^2=1$,又设 a 和 b 的坐标分别为 (c,d) 和 $(c,-d)$,其中 $c<0$.

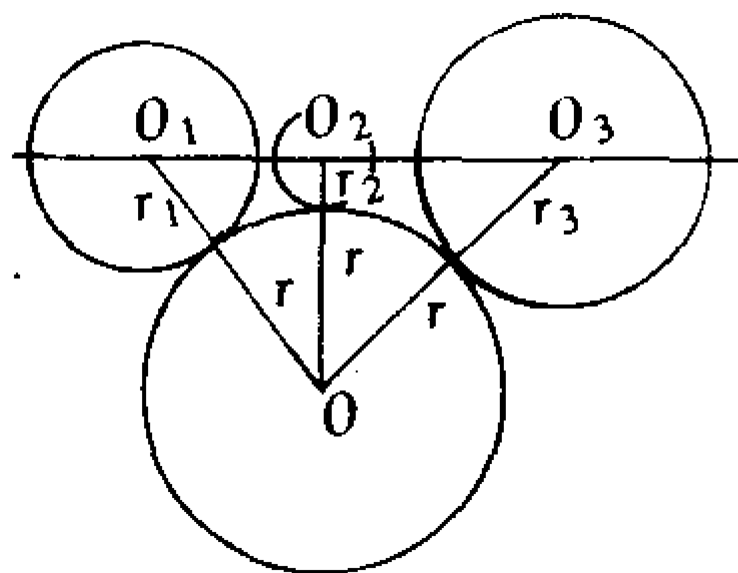
由于弧 k 把圆盘分成面积相等的两部分,若弧 k 与 x 轴交于 $E(e,0)$,则必有 $e>0$.

连 aE、bE、Oa、Ob,则 k 的长度 $=\overset{\frown}{aE}+\overset{\frown}{bE}>2aE>2Oa=2$.

12·91 彼此没有公共内点的三个圆的圆心在同一直线上.证明:如果第四个圆和所有三个圆都相切,那么它的半径不可能小于所有三个圆的半径.

(匈牙利数学奥林匹克,1952 年)

[证] 设 O_1、O_2、O_3 是三个已知圆的圆心,且设点 O_2 在点 O_1 和 O_3 之间,圆的半径用 r_1、r_2、r_3 表示.第四个圆的半径为 r,圆心为 O.



若某个圆与第四个圆相内切,则这时第四个圆的半径大于它的内切圆半径,结论成立.

若三个圆和第四个圆相外切,考虑 $\triangle OO_1O_3$,则有不等式

$$OO_1+OO_3\geqslant O_1O_3. \quad ①$$

因为圆彼此外切,则

$$OO_1=r+r_1,\ \ OO_3=r+r_3.$$

又因为 O_1、O_2、O_3 在一条直线上,且三个圆中任何两个都没有公共内点,于是

$$O_1O_3\geqslant r+2r_2+r_3. \quad ②$$

$$OO_1+OO_3=r_1+2r+r_3 \quad ③$$

由①,②和③得 $r_1+2r_2+r_3\geqslant r_1+2r_2+r_3$. 即 $r\geqslant r_2$.

于是,第四个圆的半径不可能小于中间的圆的半径,从而 r 不能

小于所有半径 r_1、r_2、r_3.

12·92 π 是圆周率，试证:$3.1<\pi<4$.

（中国北京市数学竞赛,1957 年）

[证] 如图,作半径为 1 的圆及圆外切正方形和内接正 24 边形,其面积分别为 $S_圆$、S_1、S_2.

显然 $S_2<S_圆<S_1$.

而 $S_1=4$，$S_圆=\pi$，

且 $S_2=\triangle_{ABO}\times 24=24\times\frac{1}{2}\sin 15^\circ$

$$=12\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}>6\sqrt{2-1.7322}$$

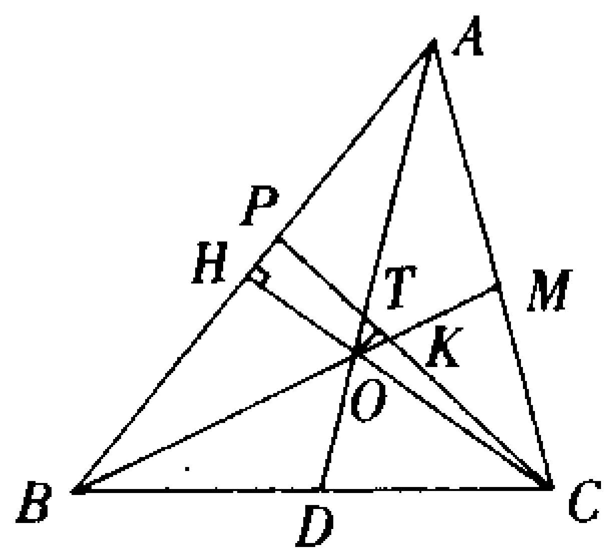
$$=6\sqrt{0.2678}>6\times 0.517=3.102>3.1,$$

故 $3.1<\pi<4$.

(二)关于角的不等式

12·93 已知:锐角三角形的角平分线 AD,中线 BM 和高线 CH 交于一点. 求证:$\angle BAC>45^\circ$.

（第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年）



[证] 设$\angle BAC\geqslant 45^\circ$,

则 $\angle ACH\geqslant 45^\circ$，$\angle BCH<45^\circ$，$\angle CBA>45^\circ$,

$\therefore$ $BC<AC$.

作 AB 边中线 CP. 由 $AC>BC$,则 AB 中点 P 应在 AH 上.

设 CP 交中线 BM 于 K,有 $PK=\frac{KC}{2}$.

过 O 作 HP 的平行线交 PK 于 T,

则 $\frac{OH}{OC}=\frac{PT}{TC}<\frac{PK}{KC}=\frac{1}{2}$.

在$\triangle AHC$ 中,由角平分线性质得

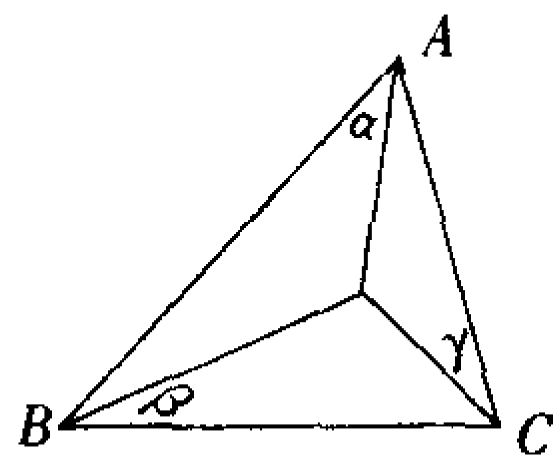
$$\frac{AH}{AC}=\frac{OH}{OC}<\frac{1}{2}，即\quad AH<\frac{AC}{2}.$$

所以 $\angle ACH<30°$，有 $\angle BAC\geqslant 60°$. 与假设 $\angle BAC\leqslant 45°$ 矛盾. 所以 $\angle BAC>45°$.

12·94　设 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点，求证：$\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA$ 至少有一个小于或等于 30°.

（第 32 届国际数学奥林匹克，1991 年）

[证]　令 $\alpha=\angle PAB$，$\beta=\angle PBC$，$\gamma=\angle PCA$.



P 到 AB 的距离 $=PA\sin\alpha=PB\sin(B-\beta)$，

P 到 BC 的距离 $=PB\sin\beta=PC\sin(C-\gamma)$，

P 到 CA 的距离 $=PC\sin\gamma=PA\sin(A-\alpha)$.

三式相乘可得

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin(B-\beta)\cdot\sin(C-\gamma)\cdot\sin(A-\alpha).$$

由函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的凸性可得

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\\&=\sin\alpha\cdot\sin(A-\alpha)\cdot\sin\beta\cdot\sin(B-\beta)\cdot\sin\gamma\cdot\sin(C-\gamma)\\&\leqslant\left[\sin\frac{\alpha+(A-\alpha)+\beta+(B-\beta)+\gamma+(C-\gamma)}{6}\right]^6\\&=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^6=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\leqslant\frac{1}{8}.$$

由此可知，α、β、γ 中存在一个，例如 α 满足 $\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

则 $\alpha\leqslant 30°$ 或 $\alpha\geqslant 150°$.

若 $\alpha\leqslant 30°$ 则本题得证.

若 $\alpha\geqslant 150°$，则 $A>150°$，从而 β、γ 都小于 30°.

12·95　三角形的边长不等且构成等差数列. 试证：该三角形有两个角小于 60°

（第 12 届全俄数学奥林匹克，1986 年）

[证]　设此三角形三边长分别为 a、$a+d$、$a+2d$，其中 $d>0$. a 边所对的角为 α，$a+d$ 边所对的角为 β.

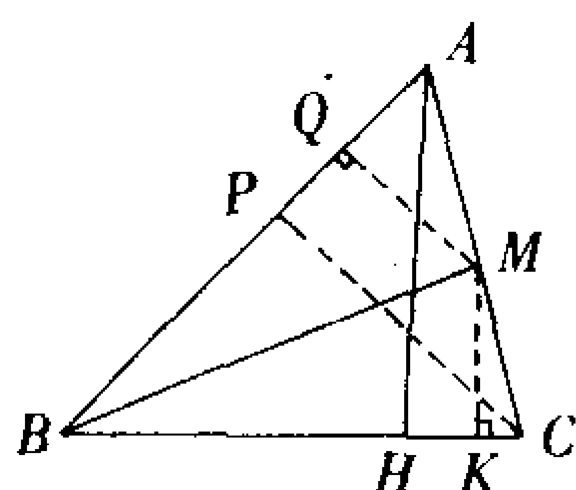
显然　$\alpha<60°$. 由余弦定理知

$$\cos\beta=\frac{(a+2d)^2+a^2-(a+d)^2}{2a(a+2d)}=\frac{a^2+2ad+3d^2}{2(a^2+2ad)}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3d^2}{2(a^2+2ad)}>\frac{1}{2}.$$

而 β 为锐角,故 $\beta<60°$.

12·96　在锐角三角形 ABC 中,最大的高 AH 等于中线 BM. 求证:$\angle ABC$ 不大于 $60°$.

（第 1 届全苏数学奥林匹克,1967 年）



[证]　过 M 作 $MK\perp BC$ 于 K.

则　$MK=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM$,

$\therefore$　$\angle MBK=30°$.

作 $CP\perp AB$ 于 P.

$\because$　$AH\geqslant CP$, $\therefore$　$BC\leqslant AB$.

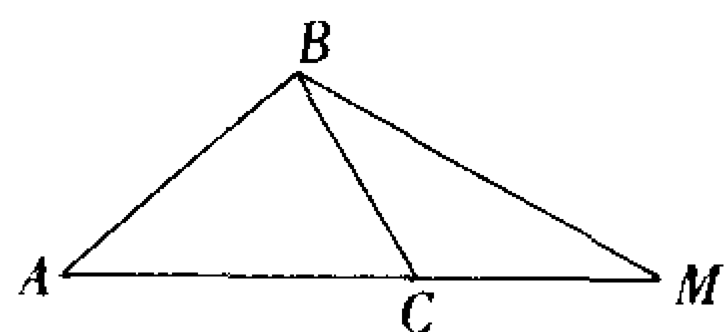
过 M 作 $MQ\perp AB$ 于 Q,则 A、K、M、Q 四点共圆.

又　$MQ=\frac{1}{2}CP\leqslant\frac{1}{2}AH=MK$, $\therefore$　$\angle QBM\leqslant\angle MBK=30°$.

$\therefore$　$\angle ABC\leqslant 60°$.

12·97　在$\triangle ABC$ 的最长的边 AC 的延长线上取一点 M 使得 $CM=BC$. 证明:$\angle ABM$ 是钝角.

（基辅数学奥林匹克,1967 年）



[证]　如图,连 BM.

$$\angle ABM=\angle ABC+\angle CBM$$
$$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB$$
$$=\frac{1}{2}\angle ABC+90°-\frac{1}{2}\angle A$$
$$=90°+\frac{1}{2}(ABC-\angle A)>90°,$$

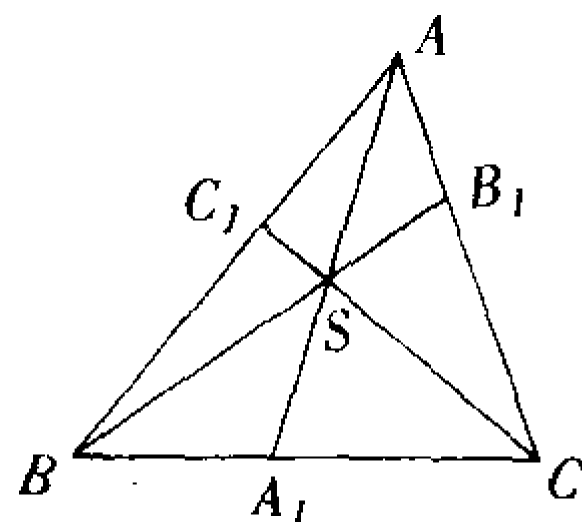
即$\angle ABM$ 是钝角.

12·98　设 S 为$\triangle ABC$ 内部任意一点,直线 AS、BS、CS 与$\triangle ABC$ 的三边 BC、AC、AB 分别相交于 A_1、B_1 和 C_1 点. 求证:至少在

四边形 AB_1SC_1、C_1SA_1B、A_1SB_1C 的某一个之中，或有顶角 C_1 和 B_1，或有 C_1 和 A_1，或有 A_1 和 B_1 同时不是锐角.

（莫斯科数学奥林匹克，1954 年）

［证］ 在四边形 AB_1SC_1 中，若 $\angle AC_1S<90°$，$\angle AB_1S<90°$，



则 $\angle BC_1S>90°$，$\angle CB_1S>90°$.

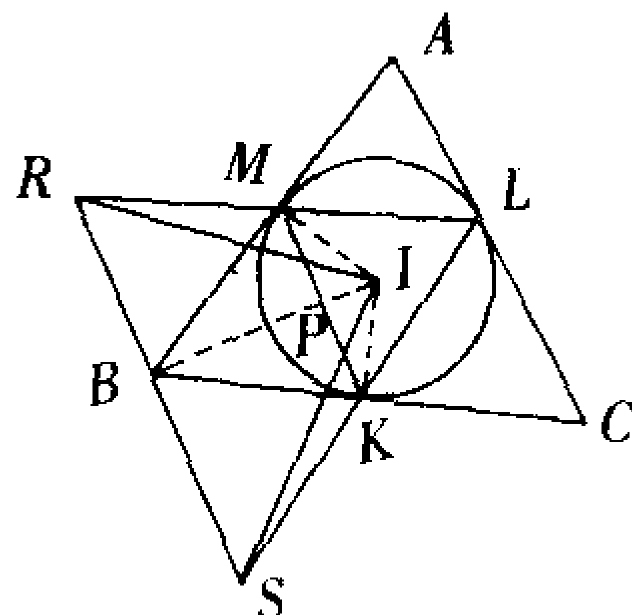
若$\angle CA_1S\geqslant 90°$，则 A_1SB_1C 中有$\angle A_1$、$\angle B_1$ 同时不是锐角，得证.

若$\angle CA_1S<90°$，则$\angle BA_1S>90°$即在四边形 C_1SA_1B 中有$\angle A_1$、$\angle C_1$ 同时不是锐角，也得证.

12·99 设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，且$\triangle ABC$ 的内切圆切三边BC、CA 和 AB 于点K、L、M. 过 B 点平行于MK 的直线分别交直线 IM 和LK 于点R 和S. 求证：$\angle RIS$ 为锐角.

（第 39 届国际数学奥林匹克，1998 年）

［证 1］ 连结 BI、MI、KI.



在$\triangle BKS$ 与$\triangle MLK$ 中，$\angle LKM=\angle KSB$，$\angle BKS=\angle LKC=\angle IMK$.

有 $\triangle BKS\backsim\triangle MLK$，从而 $\dfrac{BS}{BK}=\dfrac{LK}{LM}$.

同理可证$\dfrac{BR}{BM}=\dfrac{LM}{LK}$.

可知 $BR\cdot BS=BM\cdot BK$.

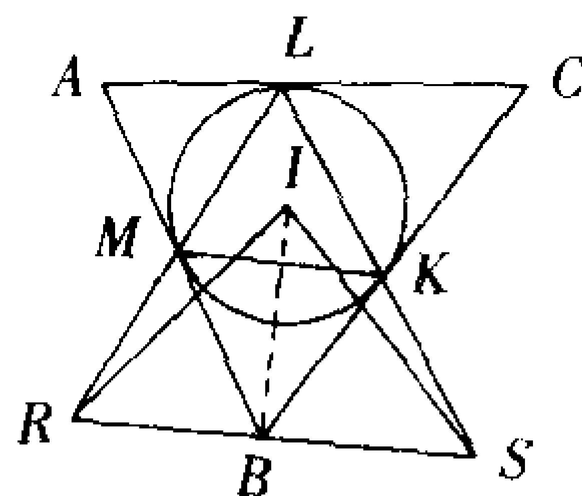
又显然 $BI\perp MK$，$BM=BK$，

于是 $BM\cdot BK=BM^2<BI^2$，即 $BR\cdot BS<BI^2$.

这表明，在 BI 内存在点P，使得 $BR\cdot BS=BP^2$.

在$\triangle RPS$ 中，应用射影定理的逆定理，可知$\angle RPS=90°$，于是点 I 在以RS 为直径的圆外，从而$\angle RIS<90°$.

［证 2］ 由 $RS\,/\!/\,MK$ 有$\angle MBR=\angle KMB$，$\angle KBS=\angle MKB$.



又 BM、BK 是$\odot I$ 的两条切线，则

$BM=BK$，$\angle KMB=\angle MKB$，

$\therefore$ $\angle MBR=\angle KBS$.

连 IB,则 $BI \perp RS$.

又 $\angle LMK = 90° - \frac{1}{2}\angle C = \angle CKL = \angle BKS$,

$\therefore$ $\angle BRM = \angle LMK = \angle BKS$, $\therefore$ $\triangle BMR \sim \triangle BSK$.

因而 $\frac{BR}{BM} = \frac{BK}{BS}$, 即 $BM \cdot BK = BR \cdot BS$,

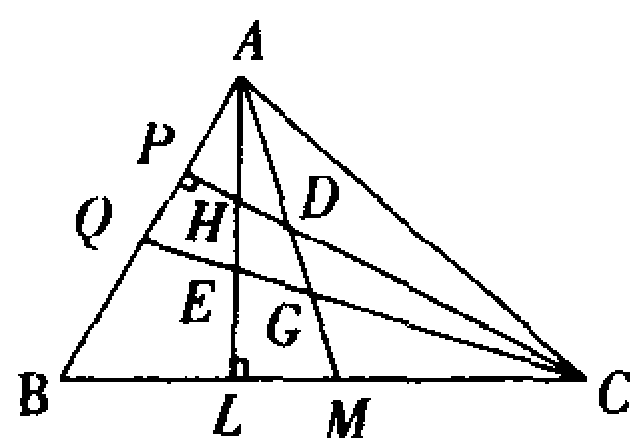
从而 $BR \cdot BS = BM^2 = IB^2 - r^2 < IB^2$,这里 r 为$\triangle ABC$ 内切圆半径.

$\therefore$ $\angle RIS < 90°$,即$\angle RIS$ 是锐角.

12·100 $\triangle ABC$ 中各边不相等,G、K、H 分别为重心、内心与垂心,求证:$\angle GKH > 90°$.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

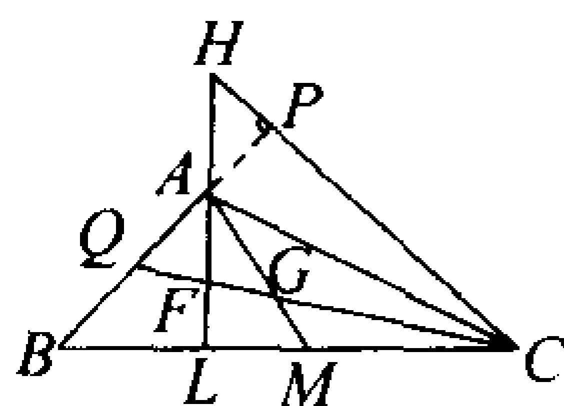
[证] (1)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形.



设 AM、CQ 为BC、AB 上的中线,AL、CP 为BC、AB 上的高.

设 $BC > AC > AB$.

由于对不等边三角形,角的平分线位于高线和中线之间,又由 $AC > AB$ 知M 在L 和C 之间,由 $BC > AC$ 知Q 在P 和B 之间.



由以上,内心 K 在图中四边形 $HEGD$ 中,显然,

$\angle GDH > 90°$, $\angle GEH > 90°$,

所以 D、E 均在以 GH 为直径的圆内,因而 K 也在此圆内,从而有$\angle GKH > 90°$.

(2)若$\triangle ABC$ 为非锐角三角形,不妨设$\angle BAC \geqslant 90°$.

这时内心 K 在$\triangle AEG$ 内,因而也必在$\triangle HEG$ 内,于是

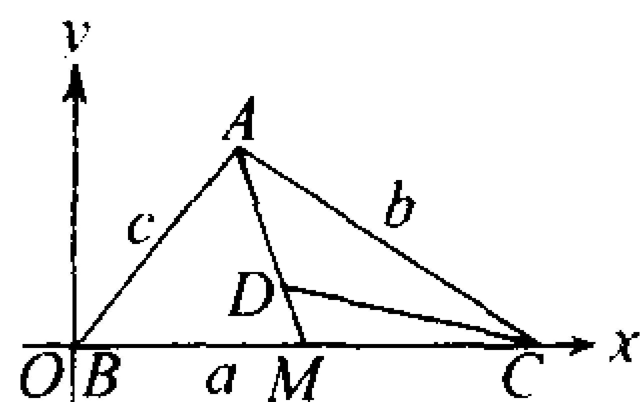
$\angle GKH \geqslant \angle HEG > 90°$.

12·101 在$\triangle ABC$ 中,已知$\angle A = 90°$,又$\angle B = 2\angle C$,若$\angle C$ 的平分线交中线 AM 于点D(M 是BC 的中点.求证:$\angle MDC \leqslant 45°$,又等号成立的条件是什么?

(伊朗数学奥林匹克,1997 年)

[解] 设 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, 由设 $\angle B = 2\angle C$, 知

$b^2=c(c+a)$ ①



建立直角坐标系，BC 为 x 轴正向，且 B 为原点，则点 A 的坐标是 $(c\cos B, c\sin B)$，点 C 的坐标是 $(a,0)$，点 M 的坐标是 $\left(\frac{a}{2},0\right)$

则 CD 的斜率是 $k_1=\mathrm{tg}\left(180°-\frac{C}{2}\right)=-\mathrm{tg}\frac{C}{2}$，

且 AM 的斜率是 $k_2=\dfrac{c\sin B}{C\cos B-\frac{a}{2}}$ ②

由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，

将①代入上式有 $c(c+a)=c^2+a^2-2ac\cos B$.

有 $c\cos B=\frac{a-c}{2}$代入②式有 $k_2=-2\sin B$.

由 $\angle B=2\angle C$，且 $\sin 2C=2\sin C\cdot\cos C$，则

$k_2=-4\sin C\cdot\cos C$.

又 $$\mathrm{tg}\angle MDC=\frac{k_1-k_2}{1-k_1k_2}=\frac{-\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right)+4\sin C\cdot\cos C}{1+4\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right)\sin C\cdot\cos C}$$ ③

设 $t=\mathrm{tg}\frac{C}{2}$，则 $\sin C=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos C=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，代入③式有

$$\mathrm{tg}\angle MDC=\frac{-t(1+t^2)^2+8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2+8t^2(1-t^2)}.$$

欲证 $\mathrm{tg}\angle MDC\leqslant 1$，只需证

$$8t(1-t^2)-t(1+t^2)^2\leqslant 8t^2(1-t^2)+(1+t^2)^2$$

即 $8t(1-t^2)(1-t)\leqslant(1+t^2)^2(1+t)$，

或 $8t(1-t)^2\leqslant(1+t^2)^2$，

即 $t^4-8t^3+18t^2-8t+1\geqslant 0$，

而上式等价于 $(t^2-4t+1)^2\geqslant 0$，这是显然的.

上式等号当且仅当 $t^2-4t+1=0$ 即 $\angle MDC=45°$时成立.

当 $t=2-\sqrt{3}$时，$\angle C=30°+360°\cdot k(k\in Z)$

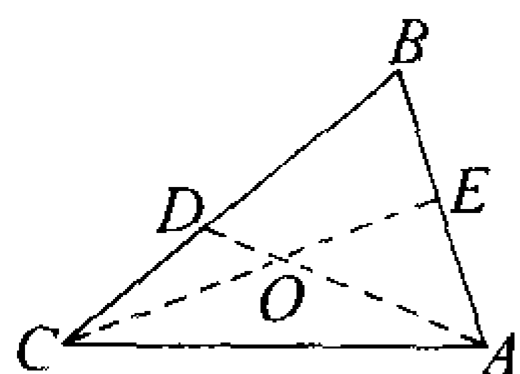
或当 $t=2+\sqrt{3}$时，$\angle C=150°+360°\cdot k(k\in Z)$

惟一可能的值是$\angle C=30°$.

故 $\angle MDC=45°$的充要条件是$\angle A=90°,\angle B=60°,\angle C=30°$.

12·102 锐角$\triangle ABC$的三边长满足不等式$AB<AC<BC$.如I是$\triangle ABC$的内心,O是外心.求证:直线IO与线段AB及BC相交.

(第18届美国数学奥林匹克,1989年)



[证] 由于$\triangle ABC$为锐角三角形,所以外心O在$\triangle ABC$的内部.

延长AO、CO分别交BC、AB于D、E.

我们证明内心I一定在$\triangle AOE$内,从而直线OI一定与线段AE及CD相交,即与AB及BC相交.

由于 $\angle AOC=2\angle B$ 及 $OA=OC$,则

$$\angle OAC=\frac{180°-\angle AOC}{2}=90°-\angle B.$$

又由 $AB<AC<BC$ 可得 $\angle C<\angle B<\angle A$.

于是 $\angle OAC=90°-\angle B<90°-\angle C$.

由于 $(90°-\angle B)+(90°-\angle C)=\angle A$

以及 $90°-\angle B<90°-\angle C$,

则 $\angle OAC\angle\frac{1}{2}\angle A$.

于是$\angle A$的平分线在$\angle BAD$内.

又∵ $\angle OCA=90°-\angle B>90°-\angle A$,

∴ $\angle OCA>\frac{1}{2}\angle C$.

于是$\angle C$的平分线在$\angle ACE$内.

因此I在$\triangle AOE$内,即直线IO与AB及BC都相交.

12·103 如果三角形的一边小于其他两边的平均数,那么该边的对角也小于其他两角的平均数,试证之.

(基辅数学奥林匹克,1964年)

[证] 不失一般性,设 $c\leqslant a\leqslant b$,则 $\angle C\leqslant\angle A\leqslant\angle B$.

当 $b<\frac{a+c}{2}$ 时,这种情况不可能;

当 $c<\frac{a+b}{2}$ 时，显然 $\angle C=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$；

当 $a<\frac{b+c}{2}$ 时，$\because$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

$\therefore$ $a=2R\sin A<\frac{1}{2}(2R\sin B+2R\sin C)$

即 $\sin A<\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$

$$=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leqslant\sin\frac{B+C}{2}.$$

$\because$ $\angle A$ 和 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 是锐角，

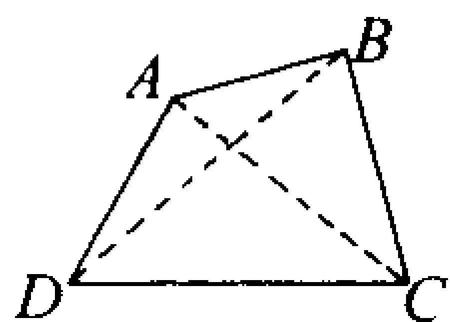
对于锐角来说，函数 $\sin x$ 是增函数.

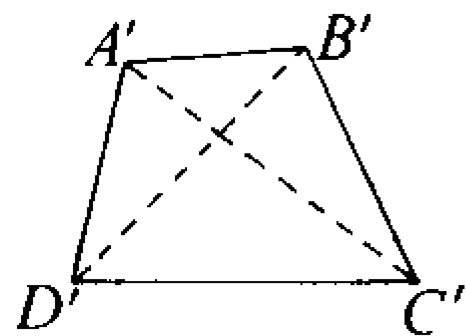
$\therefore$ $\angle A<\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

12·104 设凸四边形 $ABCD$ 与凸四边形 $A'B'C'D'$ 的边对应相等（即 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，等等）. 求证：如果 $\angle A>\angle A'$，则必 $\angle B<\angle B'$，$\angle C>\angle C'$，$\angle D<\angle D'$.

（莫斯科数学奥林匹克，1951 年）

[证] 如图. 连 BD、$B'D'$.





在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 中，

$\because$ $AB=A'B'$，$AD=A'D'$，$\angle A>\angle A'$，

$\therefore$ $BD>B'D'$.

在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle B'C'D'$ 中，

$\because$ $BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$BD>B'D'$，

$\therefore$ $\angle C>\angle C'$，

因此 $\angle B+\angle D<\angle B'+\angle D'$ ①

假如 $\angle B\geqslant\angle B'$，连 AC、$A'C'$，

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because \quad AB = A'B',\ BC = B'C',\ \angle B \geqslant \angle B',$

$\therefore \quad AC \geqslant A'C'.$

在$\triangle ADC$与$\triangle A'D'C'$中,

$\because \quad AD = A'D',\ DC = D'C',\ AC \geqslant A'C',$

$\therefore \quad \angle D \geqslant \angle D'.$

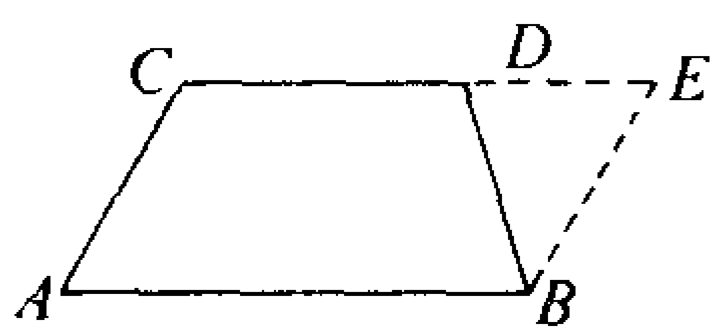
从而 $\angle B + \angle D \geqslant \angle B' + \angle D'$ 与①矛盾.

故 $\angle B < \angle B'$.

同理可证 $\angle D < \angle D'$.

12·105 求证:梯形大底上的两角之和小于小底上的两角之和.

(莫斯科数学奥林匹克,1953年)

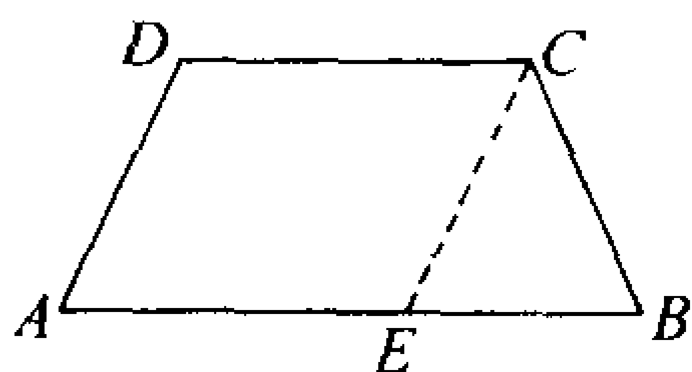


[证1] 在梯形$ABCD$中,设$AB > CD$,在DC的延长线上截取$DE = AB$.连BE.

在▱$DABE$中$\angle D = \angle ABE > \angle ABC$,

$\angle DCB > \angle E = \angle A$,

$\therefore \quad \angle D + \angle DCB > \angle ABC + \angle A,$

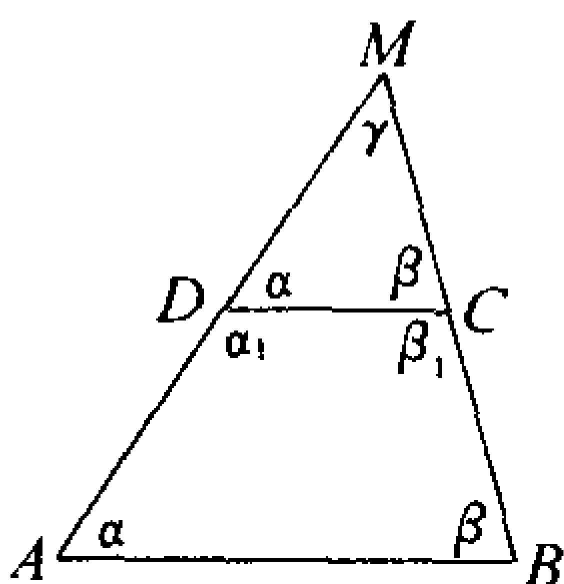


[证2] 在梯形$ABCD$中,设$AB > CD$,则可在AB上截取$AE = CD$.

在▱$AECD$中,$\angle D = \angle AEC > \angle B$,

且 $\angle DCB > \angle DCE = \angle A$,

$\therefore \quad \angle D = \angle DCB > \angle A + \angle B.$



[证3] 作梯形$ABCD$的两腰AC、BC延长线相交于点M.设诸角如图所示:

由三角形外角性质不难有

$$\alpha_1 + \beta_1 > (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) > \alpha + \beta.$$

12·106 $A_1, A_2, \cdots, A_8$是任意凸八边形的八个内角,试证:$\sin A_1 + \sin A_2 \cdots + \sin A_8 \leqslant 4\sqrt{2}$.

(中国福建省数学竞赛,1962年)

[证] $\sin A_1 + \sin A_2 = 2\sin\dfrac{A_1 + A_2}{2}$,

$\cos\dfrac{A_1 - A_2}{2} \leqslant 2\sin\dfrac{A_1 + A_2}{2}$,

同理 $\sin A_3+\sin A_4\leqslant 2\sin\dfrac{A_3+A_4}{2}$,

$\therefore\quad \sin A_1+\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4\leqslant 2\left(\sin\dfrac{A_1+A_2}{2}+\sin\dfrac{A_3+A_4}{2}\right)$

$\leqslant 4\sin\dfrac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4}$,

且 $\sin A_5+\sin A_6+\sin A_7+\sin A_8\leqslant 4\sin\dfrac{A_5+A_6+A_7+A_8}{4}$,

$\therefore\quad \sin A_1+\sin A_2+\cdots+\sin A_8$

$\leqslant 4\left(\sin\dfrac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4}+\sin\dfrac{A_5+A_6+A_7+A_8}{4}\right)$

$\leqslant 8\sin\dfrac{A_1+A_2+\cdots+A_8}{8}$

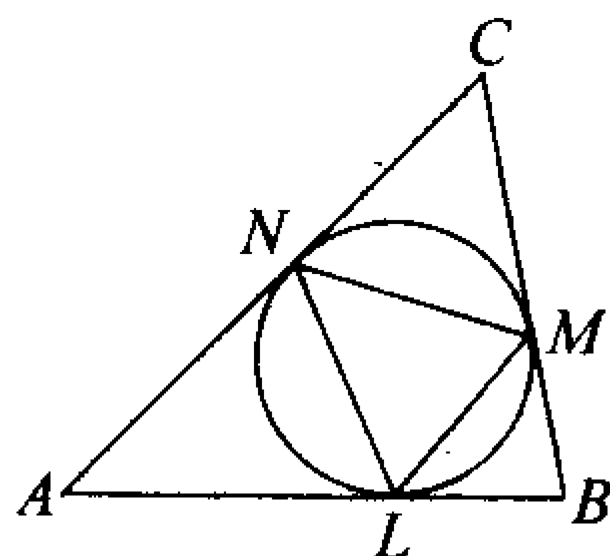
$=8\sin\dfrac{6\pi}{8}=4\sqrt{2}$.

12·107 $\triangle ABC$ 的内切圆在各边上的切点分别为 L、M 和 N. 求证: $\triangle LMN$ 恒为锐角三角形.

(莫斯科数学奥林匹克,1952 年)

[证] 如图,由圆的各种角的性质有

$$\angle LMN=\angle ANL\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{LN},$$



但 $\angle ANL=\angle ALN=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A<90^\circ$,

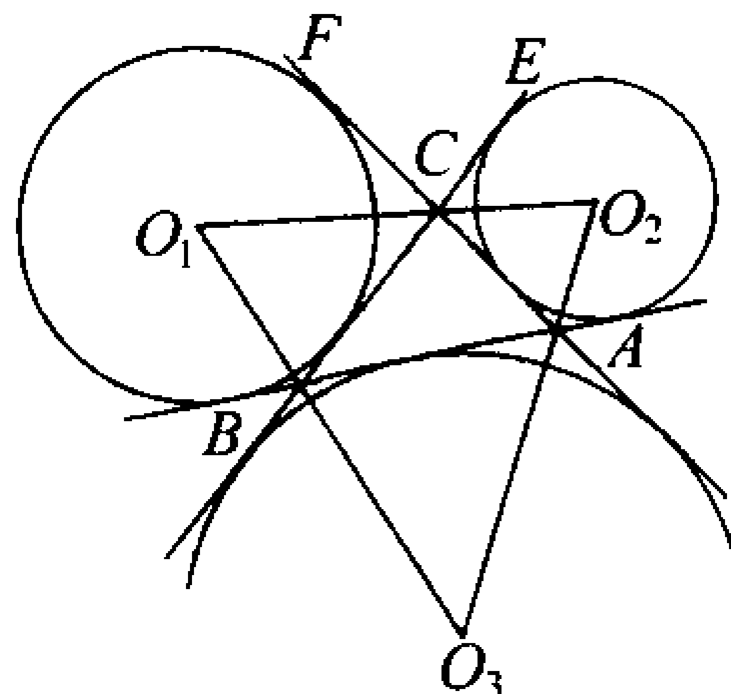
故 $\angle LMN<90^\circ$,

同理可证 $\angle MNL<90^\circ$, $\angle NLM<90^\circ$.

于是 $\triangle LMN$ 为锐角三角形.

12·108 给定 $\triangle ABC$,用直线两两连结它的三个旁切圆圆心 O_1、O_2 和 O_3. 求证: 所得的 $\triangle O_1O_2O_3$ 是锐角三角形.

(莫斯科数学奥林匹克,1955 年)



[证] (如图)由题设可有

$$\angle O_1=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle BCF+\angle DBC)$$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle A+\angle C)$$

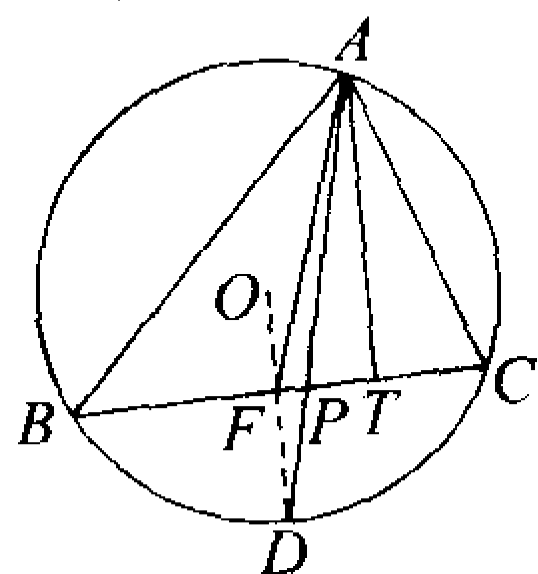
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ+\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A<90^\circ.$$

同理可证　$\angle O_2<90^\circ,\angle O_3<90^\circ$.

即　　$\triangle O_1O_2O_3$ 是锐角三角形.

12·109　假设在$\triangle ABC$中,边 AB 和 AC 不相等,AP 是角 A 的平分线,点 P 在边 BC 上.求证:(1)若边 BC 的中点为 F,由点 A 作边 BC 的高,垂足为 T,那么点 P 在点 F 和点 T 之间;(2)如果$\triangle ABC$是锐角三角形,那么$\angle FAP<\angle PAT$.

(匈牙利数学奥林匹克,1932 年)



[证]　(1)作$\triangle ABC$的外接圆,显然$\angle A$ 的平分线和外接圆交于一点 D,而且点 D 在 B 和 C 之间不包含顶点 A 的圆弧上,且把$\overset{\frown}{BC}$两等分.

过 BC 的中点 F 所作的垂线也和外接圆交于 D.

如果$\triangle ABC$不等腰,那么$\angle A$ 的平分线 AP 与过 A 的高 AT 不重合,因此点 F、P 和 T 是互不相同的,因为点 P 在$\angle A$ 的平分线上,且 P 在 AD 内部,则由 A 和 D 向 BC 作垂线时,P 也在两个垂足 F 和 T 的内部.

(2)如果$\triangle ABC$是锐角三角形,则线段 OD 与 BC 相交,即 F 是 OD 的内点,

$\therefore$　$\angle FAP<\angle OAD$.　　①

另一方面,因为$\triangle AOD$是等腰三角形,且　$FD\parallel AT$,

$\therefore$　$\angle OAD=\angle ODA=\angle PAT$.　　②

由①、②得　$\angle FAP<\angle PAT$.

12·110　设$\triangle ABC$为锐角三角形,它的三边满足 $AB<AC<BC$.如果点 I 是$\triangle ABC$的内切圆圆心.点 O 是$\triangle ABC$的外接圆圆心.求证:$\angle OBC<\angle IBC$,$\angle OCB<\angle ICB$.

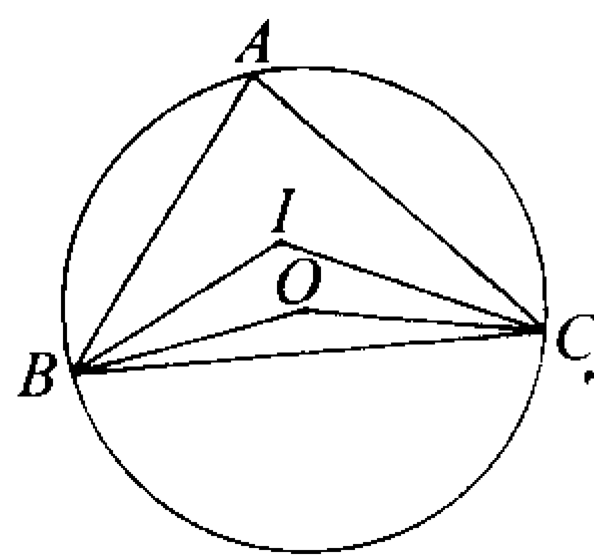
(中国江苏省初中数学竞赛,1990 年)

[证]　如图,$\angle BOC=2\angle A$,$\triangle BOC$为等腰三角形,

$$\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=90^\circ-\angle A.\qquad ①$$

$\triangle ABC$ 的内心是角平分线的交点 I,所以

$$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle B,\ \angle ICB=\frac{1}{2}\angle C. \quad ②$$



在三角形中边的大小顺序和它所对的角的大小顺序是相同的,

$$\therefore\quad \angle C<\angle B<\angle A. \quad ③$$

由①、②、③,有

$$90^\circ-\angle A=\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}-\angle A$$

$$=\frac{\angle C+(\angle B-\angle A)}{2}$$

$$<\frac{\angle C}{2}<\frac{\angle B}{2}.$$

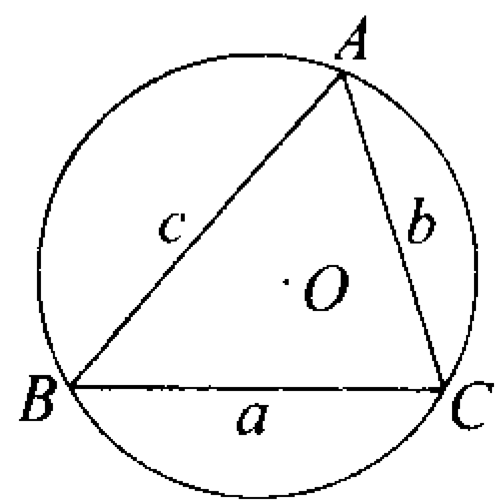
$$\therefore\quad \angle OBC=\angle OCB=90^\circ-\angle A<\angle ICB<\angle IBC.$$

故 $\angle OBC<\angle IBC,\ \angle OCB<\angle ICB$.

12·111 试证:顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半.

(中国高中数学联赛,1978 年)

[解] 如图,在单位圆 O 内任作一内接锐角三角形 ABC,令 A、B、C 各角所对的边长分别为 a、b、c,其和的一半为 s.



$\because\quad \triangle ABC$ 为一锐角三角形,

$\therefore\quad A+B>90^\circ$, 即 $A>90^\circ-B$,

从而 $\cos A<\cos(90^\circ-B)=\sin B$. ①

同理 $\cos B<\sin C$, ②

且 $\cos C<\sin A$. ③

①+②+③ 得 $\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$, ④

由正弦定理有:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2.$$

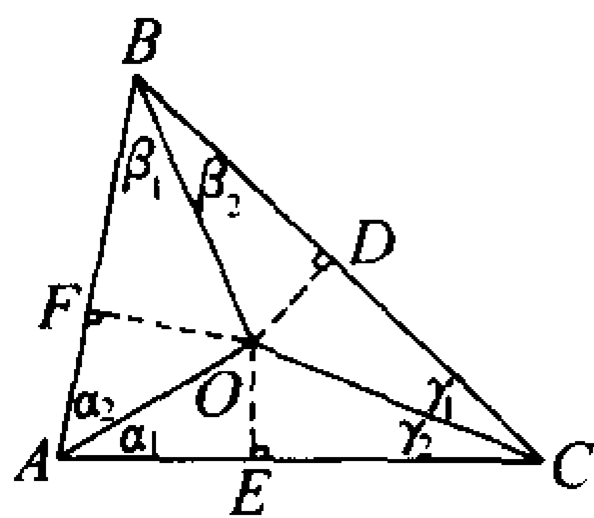
$$\therefore\quad \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2.$$

即 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)=s$. ⑤

由④、⑤可得　$\cos A+\cos B+\cos C<s$

12·112　如果 O 是$\triangle ABC$ 内的任意一点，$\triangle ABC$ 的半周长为 p，求证：$OA\cos\dfrac{\angle BAC}{2}+OB\cos\dfrac{\angle ABC}{2}+OC\cos\dfrac{\angle ACB}{2}\ p$，并确定等式何时成立.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1975 年）



［证］　设$\angle OAC=\alpha_1$，$\angle OAB=\alpha_2$，$\angle OBA=\beta_1$，$\angle OBC=\beta_2$，$\angle OCB=\gamma_1$，$\angle OCA=\gamma_2$，$\angle BAC=\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\angle ABC=\beta=\beta_1+\beta_2$，$\angle ACB=\gamma=\gamma_1+\gamma_2$.

作 $OE\perp AC$ 于 E，$OD\perp BC$ 于 D，$OF\perp AB$ 于 F，则

$$AE=OA\cos\alpha_1,\quad CE=OC\cos\gamma_2,$$
$$CD=OC\cos\gamma_1,\quad BD=OB\cos\beta_2,$$
$$BF=OB\cos\beta_1,\quad AF=OA\cos\alpha_2.$$

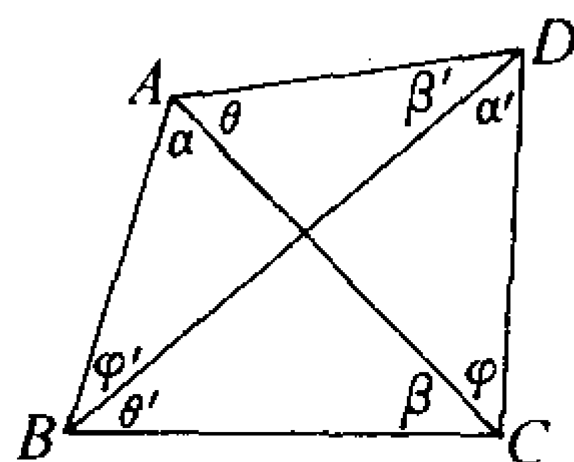
$$\begin{aligned}
p&=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\\
&=\frac{1}{2}[OA\cdot\cos\alpha_1+OA\cdot\cos\alpha_2+OB\cdot\cos\beta_1\\
&\quad+OB\cdot\cos\beta_2+OC\cdot\cos\gamma_1+OC\cdot\cos\gamma_2\\
&=OA\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+OB\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\\
&\quad+OC\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\\
&\leqslant OA\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+OB\cdot\cos\frac{\beta}{2}+OC\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\\
&=OA\cdot\cos\frac{\angle BAC}{2}+OB\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}+OC\cdot\cos\frac{\angle ACB}{2}.
\end{aligned}$$

当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$，$\gamma_1=\gamma_2$，即 O 为$\triangle ABC$ 的内心时，等式成立.

12·113　设 $ABCD$ 是凸四边形，R_A、R_B、R_C、R_D 分别表示$\triangle DAB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$ 的外接圆半径，证明：$R_A+R_C>R_B+R_D$ 成立的充要条件是$\angle A+\angle C>\angle B+\angle D$.

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）

［证］（充分性）如图，若$\angle A+\angle C>\angle B+\angle D$，则$\angle B+\angle D<180^\circ$，$D$点在$\triangle ABC$外接圆的外部，有$\alpha>\alpha'$，$\beta>\beta'$，$\theta>\theta'$，$\varphi>\varphi'$.



$$
\begin{aligned}
&R_A+R_C\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin\beta'}+\frac{AD}{2\sin\varphi}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\sin\alpha'}+\frac{CD}{2\sin\theta'}\right)\\
&>\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin\beta'}+\frac{BC}{2\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{2\sin\varphi}+\frac{CD}{2\sin\theta'}\right)\\
&=R_B+R_D.
\end{aligned}
$$

（必要性）将上面已证得的$\angle A+\angle C>\angle B+\angle D$可推出$R_A+R_C>R_B+R_D$中的$A$、$B$、$C$、$D$作一轮换，得到

$\angle B+\angle D>\angle C+\angle A$，可有　$R_B+R_D>R_C+R_A$　　　㊀

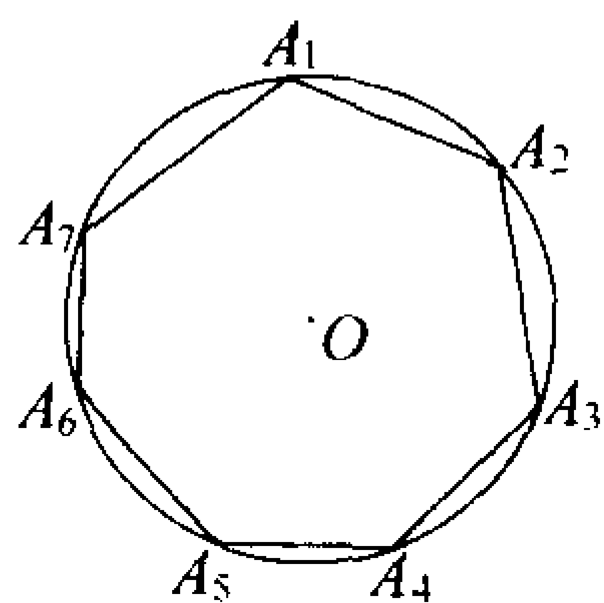
若$R_A+R_C>R_B+R_D$，但　$\angle A+\angle C\leqslant\angle B+\angle D$：

如果　$\angle A+\angle C<\angle B+\angle D$，由㊀可得矛盾；

如果　$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$，则$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆，$R_A+R_C=R_B+R_D$，矛盾.

12·114　给定一圆内接七边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.如果这个圆的圆心在七边形的内部，那么以A_1、A_3和A_5为顶点的内角之和小于450°.

（第6届全苏数学奥林匹克，1972年）



［证］　由　$\angle A_1\overset{m}{=}\frac{1}{2}(360^\circ-\overset{\frown}{A_2A_7})$

$=180^\circ-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_2A_7}$，

$\angle A_3\overset{m}{=}\frac{1}{2}(360^\circ-\overset{\frown}{A_4A_2})$

$=180^\circ-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_4A_2}$，

$\angle A_5\overset{m}{=}\frac{1}{2}(360^\circ-\overset{\frown}{A_6A_4})=180^\circ-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_6A_4}$，

相加得　$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5$

$\overset{m}{=}2\times180^\circ+(180^\circ-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_2A_7}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_4A_2}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_6A_4})$

$=360^\circ+\frac{1}{2}\widehat{A_7A_6}$.

由于圆心 O 在七边形内部，故$\widehat{A_7A_6}<180^\circ$，

$\therefore\quad \angle A_1+\angle A_3+\angle A_5<360^\circ+90^\circ=450^\circ$.

12·115 设$\triangle ABC$为任意三角形，求证：(1) $\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$；(2) $\cos A+\cos B+\cos C>1$.

（中国上海市数学竞赛，1956年）

[证 1] (1) $\because\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}-\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^2\geqslant 0$,

$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\geqslant 2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{B}{2}$.

同理 $\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}$,

且 $\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\geqslant 2\mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2}$.

上述三式两边相加有

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2},$$

但 $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1$,

$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$.

[证 2] $\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}=\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}-\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^2+2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{B}{2}$,

及 $\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}-\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^2+2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}$,

且 $\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^2+2\mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{A}{2}$,

三式两边各相加，得

$$2\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}-\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^2+\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}-\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^2+\left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^2+2$$

$\geqslant 2$,

$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2}\geqslant 1.$

(2)由和差化积法,很容易证明.

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

因 $\sin\dfrac{A}{2},\sin\dfrac{B}{2},\sin\dfrac{C}{2}$ 都是正值, $\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C>1.$

12·116 若 A、B、C 是锐角三角形的三个内角,试比较 $\sin A+\sin B+\sin C$ 和 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的大小.

(中国江苏省南京市数学竞赛,1957 年)

[解] $\because\quad \sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2},$

及 $\quad \cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}.$

由 A、B 是锐角知 $\quad -45^\circ<\dfrac{A-B}{2}<45^\circ,\ 45^\circ<\dfrac{A+B}{2}<90^\circ,$

$\therefore\quad \cos\dfrac{A-B}{2}>0,\ \sin\dfrac{A+B}{2}>\cos\dfrac{A+B}{2},$

从而 $\quad \sin A+\sin B>\cos A+\cos B.$

同理 $\quad \sin B+\sin C>\cos B+\cos C,$

且 $\quad \sin C+\sin A>\cos C+\cos A.$

于是有 $\quad \sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C.$

12·117 求证:对任意三角形的内角 α、β、γ,有不等式 $2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\beta}+\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

[证] 不妨设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,则 α、β、γ 所对边 a、b、c 有 $a\leqslant b\leqslant c$,由正弦定理知,

$$\sin\alpha\leqslant\sin\beta\leqslant\sin\gamma.$$

又 $\quad \dfrac{1}{\alpha}\geqslant\dfrac{1}{\beta}\geqslant\dfrac{1}{\gamma}$, 由排序不等式,得

$$\frac{\sin\alpha}{\beta}+\frac{\sin\beta}{\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\alpha}\geqslant\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}, \quad ①$$

$$\frac{\sin\alpha}{\gamma}+\frac{\sin\beta}{\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\beta}\geqslant\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}. \quad ②$$

①+②整理,即得所求证的结果.

12·118 平面上有定点 A、B 和任意的四个点 P_1、P_2、P_3、P_4,求证:这四个点中至少有两个点 P_i、P_j($i\neq j$),满足 $|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}$.

(中国福建省福州市数学竞赛,1978年)

[证] $\because$ $0\leqslant\angle AP_iB\leqslant\pi$, $\therefore$ $0\leqslant\sin\angle AP_iB\leqslant 1$.($i=1,2,3,4$)

把区间[0,1]等分成三个小区间:$\left[0,\frac{1}{3}\right]$,$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$,$\left[\frac{2}{3},1\right]$.

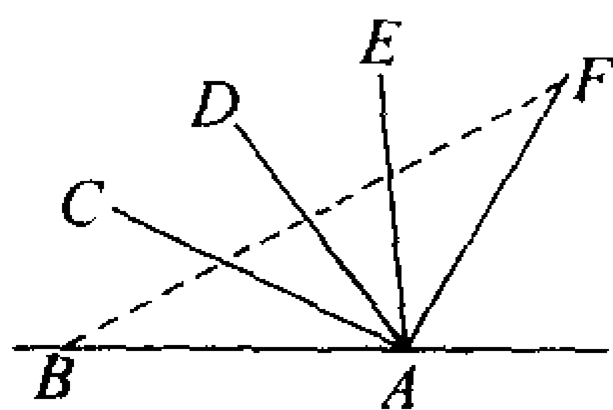
在每一小区间内任意两个数的差的绝对值不会超过$\frac{1}{3}$.

而$\sin\angle AP_iB$($i=1,2,3,4$)这四个数中至少有两个数会落在同一个小区间内,设以 $\sin\angle AP_iB$, $\sin\angle AP_jB$($i\neq j$)表示这两个数,则

$|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}$.

12·119 平面上任意给定六点,后三点共线.求证:总能找到三个点,使得以此三点为顶点的三角形中有不超过30°的角,将30°改成29°结论是否还对?

(中国吉林省长春市初中数学竞赛,1990年)



[证] 设六点为 A、B、C、D、E、F,将它们两两相连,总存在过二点的直线 l,使其余点皆在 l 的同一侧,不妨设 C、D、E、F 在 AB 连线同侧,B、C、D、E、F 绕 A 顺时针方向排列.若$\angle BAF\leqslant 120°$,则由于

$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAE+\angle EAF=\angle BAF$,

故此四个角中必有一角小于30°.

若$\angle BAF>120°$,则在$\triangle BAF$中,

$\because$ $\angle ABF+\angle BFA<60°$,其中必有一角小于30°.

如果将 30°改成 29°结作也不成立.

因为当六个点是某个正六边形的顶点时,其中各角均不小于 30°.

12·120 在平面上给定了 7 条直线,其中任何两条都不平行.求证:必能找出两条直线,它们之间的夹角小于 26°.

(莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[证] 任选一点 O,作 7 条直线的平行线 $l_i(i=1,2,\cdots 7)$.

由于 7 条直线中的任何两条都不平行,故这 7 条直线将周角分成 14 个角,且这些角就是原来那些直线的交角.

如果这 14 个角均不小于 26°,则它们的和:

$S \geqslant 14\times 26^\circ = 364^\circ > 360^\circ$,

矛盾.

因此,必存在两条直线,它们之间的夹角小于 26°.

12·121 已知:平面上几条直线两两相交,求证:它们的交角中至少有一个角不大于$\frac{180^\circ}{n}$.

(中国天津市数学竞赛,1994 年)

[证] 平面上 n 条直线两两相交所得交角个数最多有

$$4[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]=2n(n-1).$$

在平面上任取一点 O,将 n 条直线平移,使它们均过 O 点,成为交于 O 点的几条直线.

于是这几条直线将以 O 为顶点的周角分为 $2n$ 个角,不妨设这 $2n$ 个角为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2n}$.

由平行线的性质知,这 $2n$ 个角中的每一个都与 $2n(n-1)$个交角中的一个相等.

若 $2n$ 个角中的每一个角均大于 $\frac{180^\circ}{n}$, 则

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2n} > 2n\cdot\frac{180^\circ}{n}=360^\circ,$$

这与 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2n}=360^\circ$矛盾!

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2n}$中至少有一个大于$\frac{180^\circ}{n}$.

(三)关于面积的不等式

1. 三角形中的面积不等式

12·122 已知:$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$是两个锐角三角形,且 $AB<A'B'$,$BC<B'C'$,$CA<C'A'$. 求证:$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$.

(中国吉林省八市初中数学竞赛,1986 年)

[证] 设 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$B'C'=a'$,$C'A'=b'$,$A'B'=c'$,

由已知有 $a<a',b<b',c<c'$. ①

由条件知 $0<\angle A'<90°$.按$\angle A$ 与$\angle A'$的大小关系分两种情况研究.

(1)当$\angle A'\geqslant\angle A$ 时,

当 $0<\angle A\leqslant\angle A'<90°$ 时,有 $\sin A\leqslant\sin A'$, ②

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$, $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}b'c'\sin A'$.

由① $bc<b'c'$, ③

由②、③ $S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$

(2)当$\angle A'<\angle A$ 时,

$\angle A+\angle B+\angle C=180°$, ④

$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$, ⑤

由④、⑤,有 $\angle B'+\angle C'>\angle B+\angle C$. ⑥

由⑥知,$\angle B'>\angle B$ 或$\angle C'>\angle C$ 必至少有一个成立,不妨设为$\angle B'>\angle B$.

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$. $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}a'c'\sin B'$

由① $ac<a'c'$.

由 $O<\angle B\leqslant\angle B'<90°$ 有 $\sin B<\sin B'$,

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$. 因此,总有 $S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$.

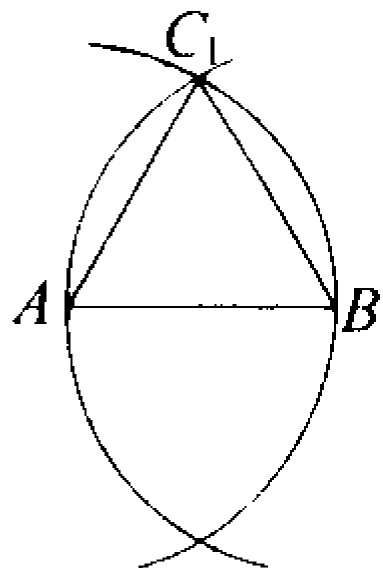
12·123 如果三角形的每条边长都小于 1,那么该三角形的面积

小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

（波兰数学奥林匹克，1960年）

[证] 设 AB 是$\triangle ABC$ 的最长边.

由题设 $AB<1$.



以 AB 为边作一个等边三角形 ABC_1，使它与$\triangle ABC$ 在直线 AB 同一侧.

因为 $AC\leqslant AC_1$，$BC\leqslant BC_1$，所以点 C 位于以 A 为圆心，AC_1 为半径的圆内，也落在以 B 为圆心，BC_1 为半径的圆内，即 C 在如图的两圆公共部分之内.

因而$\triangle ABC$ 的高不超过$\triangle ABC_1$ 的高.

因为$\triangle ABC$ 和$\triangle ABC_1$ 有公共底边 AB，所以有 $S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle ABC_1}$.

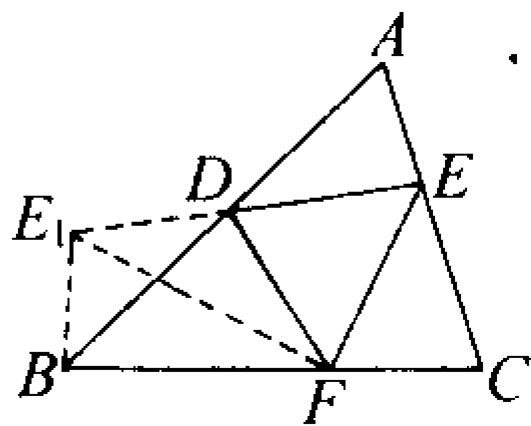
由于$\triangle ABC_1$ 为等边三角形，则 $S_{\triangle ABC_1}=\frac{\sqrt{3}AB^2}{4}<\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{4}$.

12·124 在$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 边的中点，E、F 分别在 AC、BC 上，求证：$\triangle DEF$ 的面积不超过$\triangle ADE$ 与$\triangle BDF$ 的面积之和.

（第17届全苏数学奥林匹克，1983年）

[证] 延长 ED 到 E_1，使 $DE_1=DE$，连结 E_1B、E_1F，



则 $\triangle BDE_1\cong\triangle ADE$.

$\therefore\quad S_{\triangle DE_1F}=S_{\triangle DEF}$.

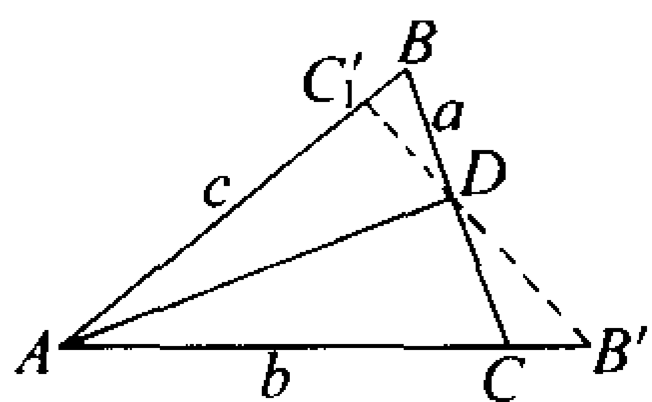
$\because\quad BE_1DF$ 是凸四边形，

$\therefore\quad S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF}=S_{BE_1DF}>S_{\triangle DE_1F}=S_{\triangle DEF}$.

12·125 已知：$\triangle ABC$，证明：存在一条直线 l（在$\triangle ABC$ 所在平面）使得$\triangle ABC$ 关于 l 的对称图形$\triangle A'B'C'$ 与$\triangle ABC$ 的公共部分面积，大于$\triangle ABC$ 面积的三分之一.

（美国数学奥林匹克，1996年）

[证] 不妨使 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且 $a\leqslant b\leqslant c$. 又设 AD 为$\angle BAC$ 平分线，则点 B、C 关于 AD 的对称点 B'，C' 分别在 AC 和 AB 上，且 $B'C'$ 过 D.



由 $S_{\triangle BDC'}=\dfrac{BC'}{AB}\cdot\dfrac{BD}{BC}\cdot S_{\triangle ABC}$

$=\dfrac{c-b}{c}\cdot\dfrac{c}{c+b}S_{\triangle ABC}$

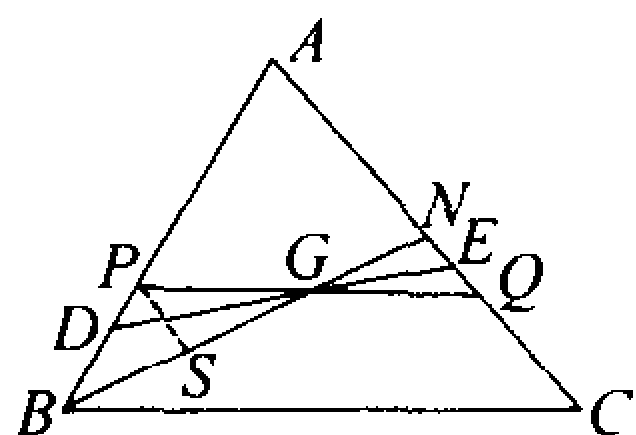
$=\dfrac{c-b}{c+b}S_{\triangle ABC}$,

$\therefore\quad S_{AC'DC}=\left(1-\dfrac{c-b}{c+b}\right)S_{\triangle ABC}=\dfrac{2b}{c+b}S_{\triangle ABC}>\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABC}$.

于是 AD 即为所求的直线 l.

12·126　过三角形的重心任作一直线，把这三角形分成两部分.证明:这两部分面积之差不大于整个三角形面积的$\dfrac{1}{9}$.

（中国安徽省数学竞赛，1978 年）



［证］ 不妨设过$\triangle ABC$的重心G的任意直线分别交AB、AC于D、E，过G作平行于底边BC的直线分别交AB、AC于P、Q.

首先证明　$S_{梯形PBCQ}-S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

事实上，　$S_{梯形PBCQ}-S_{\triangle APQ}$

$=S_{\triangle ABC}-2S_{\triangle APQ}$

$=S_{\triangle ABC}\left(1-\dfrac{2S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}\right)$

$=\left(1-2\times\dfrac{4}{9}\right)=S_{\triangle ABC}$

$=\dfrac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

其次证明　$S_{四边形DBCE}-S_{\triangle ADE}<S_{梯形PBCQ}-S_{\triangle APQ}$.

由于$\angle DPG=\angle A+\angle GQE>\angle GQE$，故能在$\triangle PDG$内部作直线$PR$，使$\angle RPG=\angle GQE$.

又$\because$　$PG=GQ$，$\therefore$　$\triangle PRG\cong\triangle QEG$.

于是　$S_{\triangle PDG}>S_{\triangle PRG}=S_{\triangle QEG}$.

$\therefore$　$S_{四边形DBCE}=S_{梯形PBCQ}-S_{\triangle PDG}+S_{\triangle QEG}<S_{梯形PBCQ}$;

$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle PDG}-S_{\triangle QEG}>S_{\triangle APQ}$.

$S_{四边形DBCE}-S_{ADE}<S_{梯形PBCQ}-S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

为了说明不等式的左端是个正数，最后我们证明 $S_{四边形DBCE} > S_{\triangle ADE}$.

连接 BG 交 AC 于 N，则 BN 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore \quad S_{\triangle ABN} = S_{\triangle BCN}$.

延长 PR 交 BN 于 S，则因 $RG = GE$，

$\therefore \quad \triangle RSG \cong \triangle ENG$.

于是 $S_{四边形DBCE} = S_{\triangle BCN} - S_{\triangle GEN} + S_{\triangle DBG}$

$> S_{\triangle BCN} - S_{\triangle GEN} + S_{\triangle RSG} = S_{\triangle BCN}$.

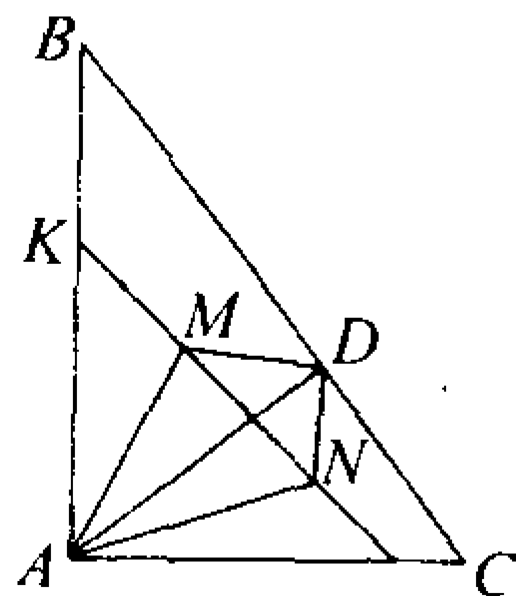
$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABN} - S_{\triangle DBG} + S_{\triangle GNE} < S_{\triangle ABN}$.

$\therefore \quad S_{四边形DBCE} > S_{\triangle ADE}$.

12·127　在直角 $\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，过 $\triangle ABD$ 的内心与 $\triangle ACD$ 的内心的直线分别交边 AB 与 AC 于 K 和 L，$\triangle ABC$ 和 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 和 T. 求证：$S \geqslant 2T$.

（第 29 届国际数学奥林匹克，1988 年）

[证]　记 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内心分别为 M 和 N.



由于　$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$.

注意到 DM 与 DN 是由点 A 出发的两条角平分线，

由相似三角形对应线段的比等于相似比得

$$\frac{DM}{DN} = \frac{BD}{AD}.$$

又 $\because \quad \angle MDN = 90° = \angle ADB$，$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle NMD$.

因此这两个相似三角形的对应边的交角相等，故有

$$\angle LKA = \angle BDM = 45°.$$

$\therefore \quad \triangle AKL$ 为等腰直角三角形.

又 $\because \quad \triangle AMK \cong \triangle AMD$，$\therefore \quad AK = AD = AL$.

于是有 $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$，

且　$T = \dfrac{1}{2} AK \cdot AL = \dfrac{1}{2} AD^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2}$

$$\therefore \quad \frac{S}{2T}=\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}\geqslant\frac{2AB\cdot AC}{2AB\cdot AC}=1.$$

即　$S\geqslant 2T$.

12·128　设$\triangle ABC$是等腰直角三角形,它的腰长是1,P是斜边上一点,由P到其他两边的垂足是Q和R,考虑$\triangle APQ$和$\triangle PBR$的面积,以及矩形$QCRP$的面积.证明:无论P怎样选取,这三个面积中最大的至少是$\frac{2}{9}$.

(第1届加拿大数学奥林匹克,1969年)

[证]　设$BR=x$,则　$BR=RP=QC=x$,

$RC=PQ=AQ=1-x$.

(1)如果　$x\geqslant\frac{2}{3}$,则

$$S_{\triangle BRP}=\frac{x^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

(2)如果　$x\leqslant\frac{1}{3}$,则　$1-x\geqslant\frac{2}{3}$.

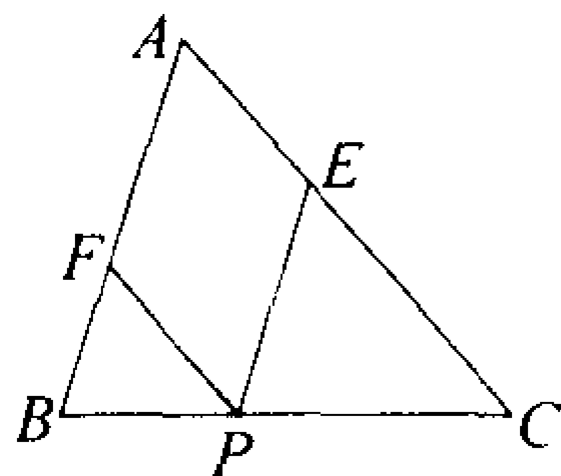
$$S_{\triangle APQ}=\frac{(1-x)^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

(3)如果　$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$,则　$-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{6}$.

$$S_{PQCR}=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

$$>-\frac{1}{36}+\frac{1}{4}=\frac{2}{9}.$$

因此,$\triangle BRP$、$\triangle AQP$和矩形$PQCR$的面积中至少有一个不小于$\frac{2}{9}$.

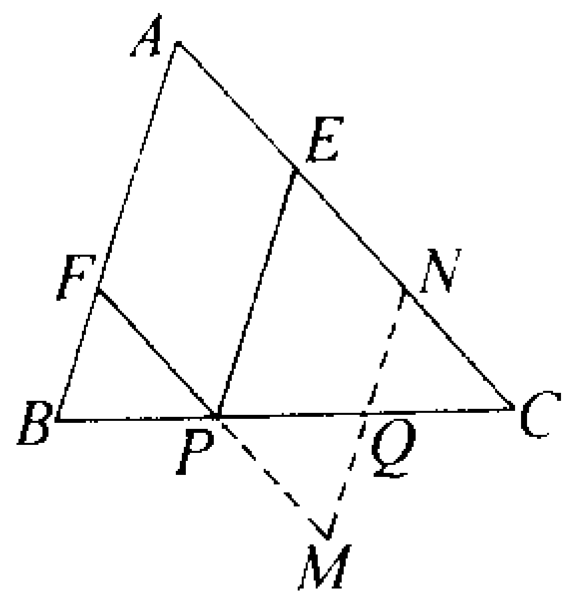


12·129　如图,在$\triangle ABC$中,P为边BC上任意一点,$PE\parallel BA$,$PF\parallel CA$.若$S_{\triangle ABC}=1$,证明:$S_{\triangle BPF}$,$S_{\triangle PCE}$和$S_{\square PEAF}$中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$.

(中国高中数学联赛,1984年)

[证1]　易知,$\triangle BPF\backsim\triangle PCE\backsim\triangle BCA$,

相似三角形面积之比等于对应边长的平方之比



设 $\frac{BP}{BC}=x$，则 $\frac{PC}{BC}=1-x$，$0<x<1$.

(1)当 $0<x\leqslant\frac{1}{3}$ 时，

$S_{\triangle PCE}=(1-x)^2\geqslant\frac{4}{9}$，

同理 当 $\frac{2}{3}\leqslant x<1$ 时，$S_{\triangle BPF}=x^2\geqslant\frac{4}{9}$.

(2)当 $\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，可在 PC 上取点 Q，使 $PQ=BP$，过 Q 作 $MN\parallel AB$，分别交 FP 的延长线和 AC 于 M、N. 有

① $\frac{QC}{BC}=\frac{BC-2BP}{BC}=1-2x<\frac{1}{3}$，

$S_{\triangle QCN}=(1-2x)^2<\frac{1}{9}$，　　$S_{四边形BQNA}>\frac{8}{9}$.

② $\triangle BPF\cong\triangle QPM$，

$S_{\square PEAF}=\frac{1}{2}S_{\square MNAF}=\frac{1}{2}S_{四边形BQNA}>\frac{4}{9}$.

当 $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$ 时，可在 BP 上取点 Q，使 $QP=PC$，再用同法证出

$S_{\square PEAF}>\frac{4}{9}$.

[证 2] 易知$\triangle BPF\backsim\triangle PCE\backsim\triangle BCA$，相似三角形面积之比等于对应边长之比的平方.

设 $\frac{BP}{BC}=x$，则 $\frac{PC}{BC}=1-x$，$0<x<1$.

由 $S_{\triangle ABC}=1$ 知，$S_1=S_{\triangle BPF}=x^2$，$S_2=S_{\triangle PCE}=(1-x)^2$，

$S_3=S_{\square PEAF}=1-S_{\triangle BPF}-S_{\triangle PCE}=2x(1-x)$.

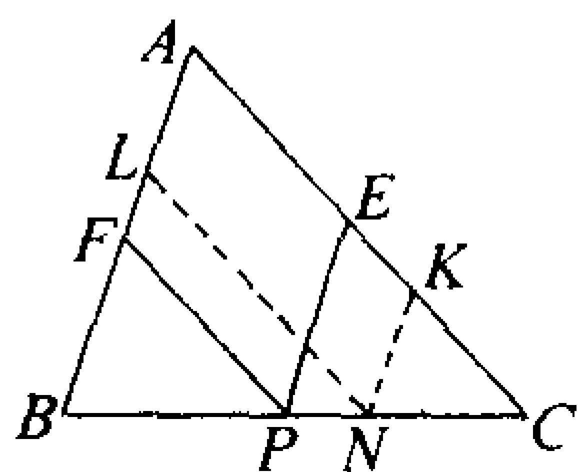
①当 $0<x\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$S_2\geqslant\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

②当 $\frac{2}{3}\leqslant x<1$ 时，$S_1\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

③当 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$ 时，

$$S_3=2x(1-x)=2\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]$$

$$>2\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{4}{9}.$$



［证 3］ 如图，设 $BM=MN=NC=\frac{1}{3}BC$.

过 N 作 $NK//AB$，$NL//AC$，易知

$S_{\triangle NCK}=\frac{1}{9}$，$S_{\triangle BNL}=\frac{4}{9}$，

从而 $S_{\square NKAL}=\frac{4}{9}$.

当 P 在 NC 上时，$S_{\triangle BPF}\geqslant S_{\triangle BNL}=\frac{4}{9}$，

同理　当 P 在 BM 上时，$S_{\triangle PCE}\geqslant\frac{4}{9}$，

因此只需考虑 P 在线段 MN 上的情形.

从　$PE//NK//BA$　和　$PF//NL//CA$　可得出

①$\triangle PND\backsim\triangle BCA$，设相似比为 k，即　$PD=kBA$，$ND=kAC$.

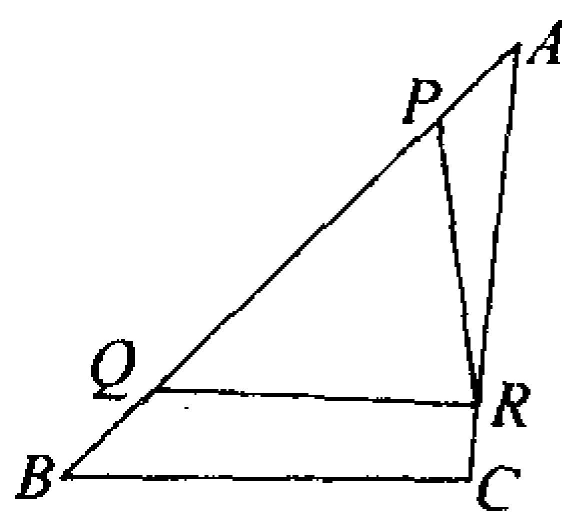
②$PF\geqslant\frac{1}{3}CA$，$NK\geqslant\frac{1}{3}BA$.

③平行四边形 $PDLF$ 和 $NKED$ 对应角相等，

故 $$\frac{S_{\square PDLK}}{S_{\square NKED}}=\frac{PD\cdot PF}{NK\cdot ND}=\frac{k\cdot BA\cdot PF}{\frac{1}{3}BA\cdot k\cdot CA}\geqslant 1$$

由此知　$S_{\square PEAF}>S_{\square NKAL}=\frac{4}{9}$.

12·130　如图，在$\triangle ABC$ 中，P、Q、R 将其周长三等分，且 P、Q 在 AB 边上，求证：$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.



（中国高中数学联赛，1988 年）

［证］ 不妨设周长为 1，作$\triangle ABC$、$\triangle PQR$ 的高 CL、RH.

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot RH}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CL}=\frac{PQ\cdot AR}{AB\cdot AC},$$

$\because\quad PQ=\frac{1}{3},\ AB<\frac{1}{2},\ \therefore\quad \frac{PQ}{AB}>\frac{2}{3}.$

$\because\quad AP\leqslant AP+BQ=AB-PQ<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$

$AR=\frac{1}{3}-AP>\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},$ 且 $AC<\frac{1}{2},$

$\therefore\quad \frac{AR}{AC}>\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$ 则 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$

12·131 在△ABC的三边AB、BC与CA上分别取点M、K、L(不与△ABC的顶点重合),证明:△MAL、△KBM、△LCK中至少有一个的面积不大于△ABC面积的$\frac{1}{4}$.

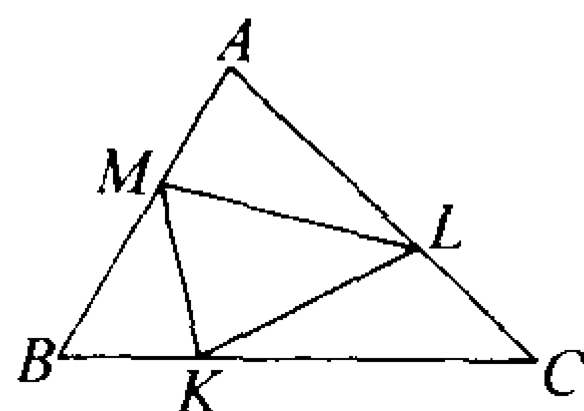
(第8届国际数学奥林匹克,1966年)

[证] 在△ABC中,设

$AB=c,\ BC=a,\ AC=b,$

$CK=k,\ AL=l,\ BM=m.$

则 $0<k<a,\ 0<l<b,\ 0<m<c.$因而有



$$S_{\triangle LAM}=\frac{1}{2}l(c-m)\sin A,\qquad ①$$

$$S_{\triangle MBK}=\frac{1}{2}m(a-k)\sin B,\qquad ②$$

$$S_{\triangle KCL}=\frac{1}{2}k(b-l)\sin C,\qquad ③$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

$$\therefore\quad (S_{\triangle ABC})^3=\frac{1}{8}a^2b^2c^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C.\qquad ④$$

由①,②,③和④得

$$\frac{S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}}{(S_{\triangle ABC})^3}=\frac{mkl(c-m)(a-k)(b-l)}{a^2b^2c^2}. \quad ⑤$$

因为 $c-m>0,\ a-k>0,\ b-l>0$，则

$$0<m(c-m)\leqslant\left[\frac{m+(c-m)}{2}\right]^2=\frac{C^2}{4}, \quad ⑥$$

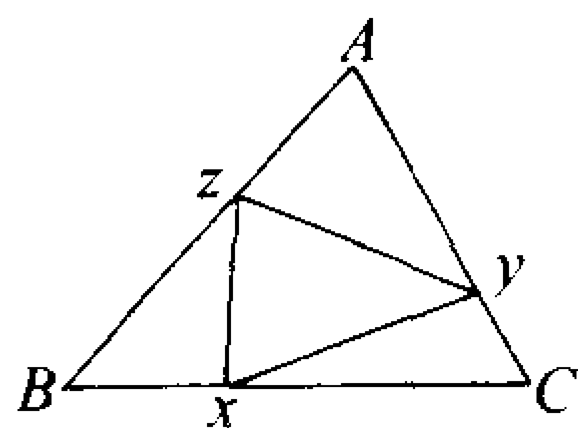
$$0<k(a-k)\leqslant\left[\frac{k+(a-k)}{2}\right]^2=\frac{a^2}{4}, \quad ⑦$$

$$0<l(b-l)\leqslant\left[\frac{l+(b-l)}{2}\right]^2=\frac{b^2}{4}, \quad ⑧$$

⑥×⑦×⑧得 $0<mkl(c-m)(a-k)(b-l)\leqslant\frac{a^2b^2c^2}{4^3}$,

由⑤得 $S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}\leqslant\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3.$ ⑨

于是$\triangle LAM$、$\triangle MBK$、$\triangle KCL$ 的面积中至少有一个不大于$\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$.



12·132 (1)设$\triangle ABC$ 为任意三角形,点 X、Y、Z 分别在边BC、CA、AB 上.若 $BX\leqslant XC$, $CY\leqslant YA$, $AZ\leqslant ZB$.求证:$S_{\triangle XYZ}\geqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

(2)设$\triangle ABC$ 为任意三角形,点 X、Y、Z 分别在边 BC、CA、AB 上(但对距离的比,如$\frac{BX}{XC}$不做任何假定),用(1)或另法证明,$\triangle AZY$、$\triangle BXZ$、$\triangle CYZ$ 中必有一个三角形的面积不大于$\triangle XYZ$ 的面积.

(第 34 届美国普特南数学竞赛,1973 年)

[证] (1)如果 X、Y、Z 是BC、CA、AB 的中点,则有

$$S_{\triangle XYZ}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

由已知 $BX\leqslant XC$, $CY\leqslant YA$, $AZ\leqslant ZB$,若 Y、Z 不动,把 X 移到BC 的中点,这使$\triangle XYZ$ 中 YZ 边上的高减少或不变,因而$\triangle XYZ$ 的面积不会增加,因此$\triangle XYZ$ 的面积不超过由各边中点为顶点的三角形的面积,即不小于$\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$,即

$$S_{\triangle XYZ} \geqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

(2)在(1)的假定下,

$$S_{\triangle BXZ} + S_{\triangle CXY} + S_{\triangle AYZ} \leqslant \frac{3}{4} S_{\triangle ABC},$$

于是在$\triangle BXZ$、$\triangle CXY$、$\triangle AYZ$中必有一个三角形的面积不大于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{4}$,从而由(1),不大于$\triangle XYZ$的面积.

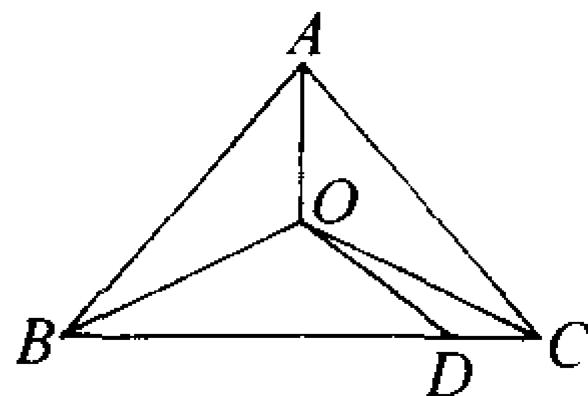
在其他情况下也可得到同样的结果.

注 本命题为上一道题的特例.

12·133 试证:从任何面积为S的等腰三角形中都可以剪出3个互不相交的全等三角形,使得每个三角形的面积都大于$\frac{S}{4}$.

(前苏联教委推荐试题,1991年)

[证] 设在$\triangle ABC$中有$AB = AC$.下面分两种情形来分别构造.



(1)$\angle BAC > 60°$.显然,这时$\angle BAC$是$\triangle ABC$中的最大角,所以$BC > AB = AC$.设O为$\triangle ABC$的内心,连结OA、OB、OC,于是有

$$\triangle AOB \cong \triangle AOC.$$

在BC上截取$BD = BA$,连结OD,则又有

$$\triangle AOB \cong \triangle DOB.$$

为证 $S_{\triangle BOD} > \frac{S}{4}$, 只需证明 $BD > DC$.

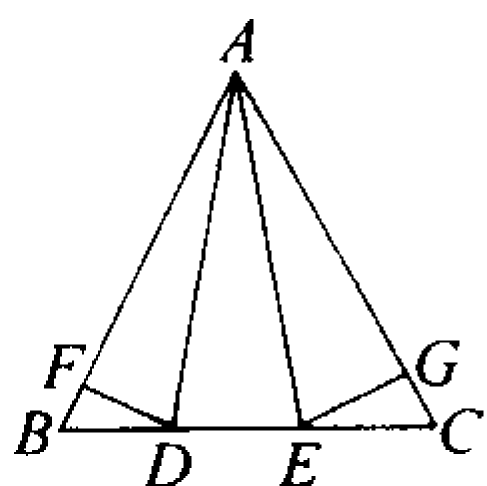
$\because$ $2BD = AB + AC > BC > BD$,

$\therefore$ $DC = BC - BD < BD$.

这就证明了$\triangle AOB$、$\triangle BOD$、$\triangle AOC$即为满足题中要求的3个全等三角形.

(2)$\angle BAC \leqslant 60°$.在BC上取点D、E,使得$\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$.由对称性知有$AD = AE$.分别在$AB$、$AC$上取点$F$、$G$,使得$AF = AD = AE = AG$,连结$FD$、$EG$,于是有

$$\triangle AFD \cong \triangle ADE \cong \triangle AEG.$$



为证 $S_{\triangle AFD}>\frac{S}{4}$，只需再证 $S_{\triangle AFD}>2S_{\triangle FBD}$.

而这又只需证明 $AF>2FB$，亦即$\frac{AF}{AB}>\frac{2}{3}$.

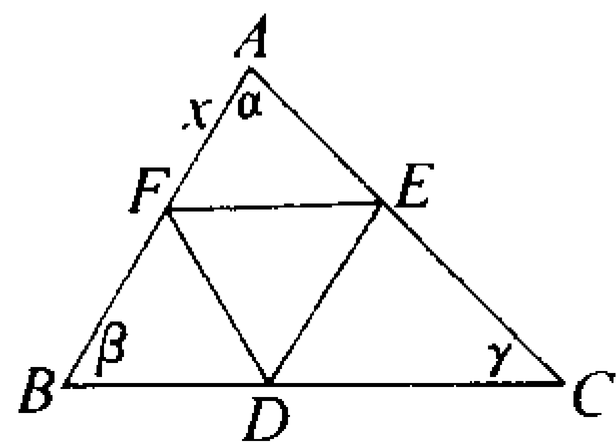
设$\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 h，于是有

$$\frac{AF}{AB}=\frac{AD}{AB}>\frac{h}{AB}=\cos\frac{A}{2}\geqslant\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{2}{3}.$$

这就完成了全部证明.

12·134 在$\triangle ABC$ 的三条边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，使$\triangle DEF$ 为等边三角形，a、b、c 分别表示$\triangle ABC$ 的三边长，S 表示$\triangle ABC$ 的面积. 求证：$DE\geqslant\frac{2\sqrt{2}S}{(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)^{\frac{1}{2}}}$.

（第 34 届国际数学奥林匹克预选题，1993 年）



［证］ 将$\angle BAC$、$\angle CBA$、$\angle ACB$ 分别记为 α、β、γ. 并设圆 DEF 与边 BC、AC 分别另交于点 H、G.

显然 $\angle FGA=\angle FDE=60^\circ$,

$\angle FHB=\angle FED=60^\circ$.

因而有

$$\begin{aligned}\angle GFH&=360^\circ-\angle FGC-\angle FHC-\gamma\\&=360^\circ-120^\circ-120^\circ-\gamma\\&=120^\circ-\gamma.\end{aligned}$$

设 $AF=x$，则由正弦定理有

$$\frac{FG}{x}=\frac{\sin\alpha}{\sin60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha.\quad \frac{FH}{c-x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta.$$

由余弦定理有

$$\begin{aligned}HG^2&=\frac{4}{3}[x^2\sin^2\alpha+(c-x)^2\sin^2\beta-2x(c-x)\sin\alpha\cdot\sin\beta\\&\quad\cdot\cos(120^\circ-\gamma)]\\&=\frac{4}{3}(Lx^2-2Mcx+Nc^2).\end{aligned}$$

其中 $L=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(120^\circ-\gamma)$,

$M=\sin^2\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(120^\circ-\gamma)$,

$N=\sin^2\beta$.

于是又有

$$HG^2=\frac{4L}{3}\left[\left(x-\frac{Mc^2}{L}\right)^2+\left(\frac{N}{L}-\frac{M^2}{L^2}\right)c^2\right]$$
$$\geqslant\frac{4Lc^3}{3}\left(\frac{N}{L}-\frac{M^2}{L^2}\right)$$
$$=\frac{4c^3}{3}\cdot\frac{NL-M^2}{L}. \qquad ①$$

设圆 DEF 的半径为 p，由正弦定理有

$$\frac{HG}{\sin\angle GFH}=2p=\frac{DE}{\sin60^\circ},$$
$$DE=\frac{\sqrt3}{2}=\frac{HG}{\sin(120^\circ-\gamma)}. \qquad ②$$

由于 $\quad NL-M^2=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2(120^\circ-\gamma).$ $\qquad ③$

由正弦定理有 $\quad\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{1}{2R}$. 其中 R 为圆 ABC 的半径，因而有

$$L=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\beta(\cos\gamma-\sqrt3\sin\gamma)$$
$$=\frac{a^2+b^2-ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\sqrt3 ab\sin\gamma}{4R^2}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt3 S}{8R^2}. \qquad ④$$

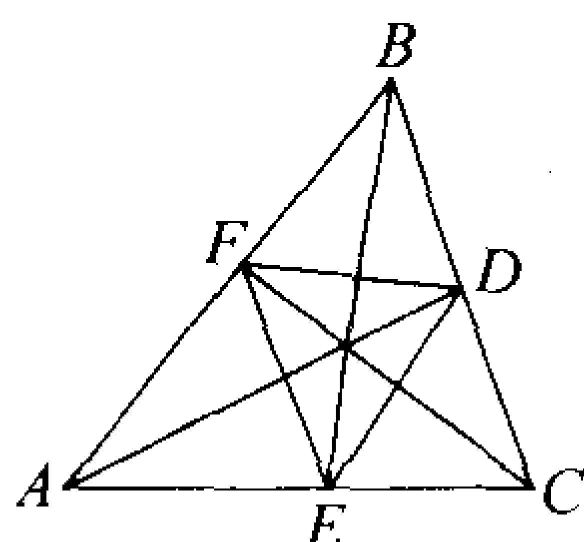
由①、②、③、④得

$$DE^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{HG^2}{\sin^2(120^\circ-\gamma)}$$
$$\geqslant\frac34\cdot\frac{4c^2}{3}\cdot\frac{NL-M^2}{L}\csc^2(120^\circ-\gamma)$$
$$=c^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot 8R^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt3 S}$$
$$=\frac{2a^2c^2\sin^2\beta}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt3 S}$$
$$=\frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt3 S}.$$

于是有 $DE\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}S}{(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)^{\frac{1}{2}}}$.

12·135 如果 AD、BE 与 CF 是$\triangle ABC$ 的角平分线,证明:$\triangle DEF$ 的面积不超过$\triangle ABC$ 面积的四分之一.

(前民主德国数学奥林匹克,1981 年)



[证] 记 $a=BC,b=AC,c=AB$.

在$\triangle ABC$ 中,由三角形内角平分线的性质得

$$\frac{AF}{b}=\frac{BF}{a}=\frac{AF+BF}{b+a}=\frac{c}{a+b},$$

$$\therefore\quad AF=\frac{bc}{a+b}.$$

同理有 $AE=\dfrac{bc}{a+c}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle AEF}&=\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin\angle BAC\\&=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC\cdot\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\\&=\frac{bcS_{\triangle ABC}}{(a+b)(a+c)}.\end{aligned}$$

同理可得 $S_{\triangle BDF}=\dfrac{acS_{\triangle ABC}}{(a+b)(b+c)}$.

$$S_{\triangle CDE}=\frac{acS_{\triangle ABC}}{(a+c)(b+c)}.$$

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}$及平均值不等式可得

$$\begin{aligned}&S_{\triangle ABC}-S_{\triangle DEF}\\&=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}\\&=\left[\frac{bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]S_{\triangle ABC}\\&=\frac{c^2b+b^2c+a^2c+c^2a+b^2a+a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}S_{\triangle ABC}\\&\geqslant\frac{6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}S_{\triangle ABC}\\&=3\left[1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ac}{(a+b)(c+b)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]S_{\triangle ABC}\end{aligned}$$

$=3(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CDE})$
$=3S_{\triangle DEF}$,

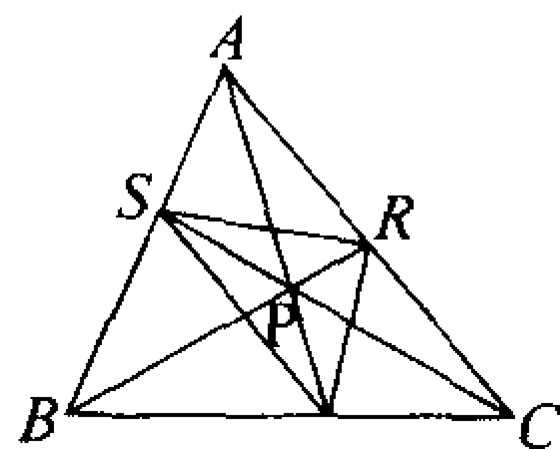
即 $S_{\triangle ABC}\geqslant 4S_{\triangle DEF}$.

故 $S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

12·136 设 P 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，Q、R、S 分别是 A、B、C 与 P 的连线和对边的交点. 求证：$S_{\triangle QRS}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

［证］ 设 $S_{\triangle PAC}=x$，$S_{\triangle PBC}=y$，$S_{\triangle PAB}=z$，则



$$\frac{SA}{SB}=\frac{x}{y},\ \frac{RA}{RC}=\frac{z}{y},\ \frac{QC}{QB}=\frac{x}{z}.$$

$\therefore$ $$\frac{S_{\triangle SBQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)},$$

且 $$\frac{S_{\triangle SAR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xz}{(y+x)(y+z)},$$

及 $$\frac{S_{\triangle QCR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xy}{(z+x)(z+y)}.$$

因 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle QRS}+S_{\triangle SBQ}+S_{\triangle SAR}+S_{\triangle QCR}$，

所以为证明本题只需证明不等式

$$\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{xz}{(y+x)(y+z)}+\frac{xy}{(z+x)(z+y)}\geqslant\frac{3}{4}$$

即可.

整理该不等式得

$$y^2(x+z)+x^2(y+z)+z^2(x+y)-6xyz\geqslant 0. \quad ①$$

$\because$ $x^2y+y^2z+z^2x\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y\cdot y^2z\cdot z^2x}=3xyz$,

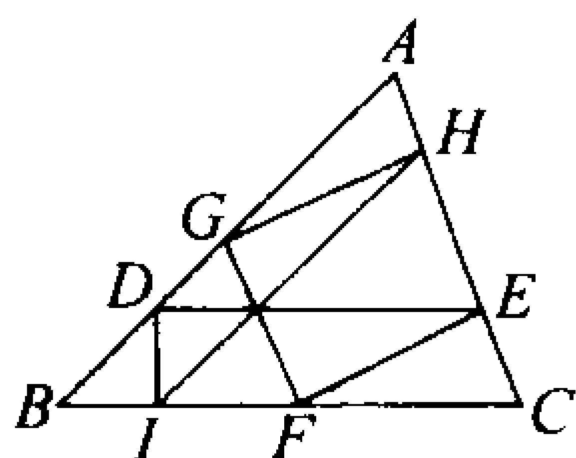
且 $xy^2+yz^2+zx^2\geqslant 3\sqrt[3]{xy^2\cdot yz^2\cdot zx^2}=3xyz$.

以上两个不等式相加即得①式，从而

$$S_{\triangle QRS}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

当且仅当 $x=y=z$，即 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时，等号成立.

注 本命题系上一命题结论的推广.



12·137　过$\triangle ABC$内一点O引三边的平行线，$DE/\!/BC$，$FG/\!/CA$，$HI/\!/AB$，点D、E、F、G、H、I都在$\triangle ABC$的边上（如图），S_1表示六边形$DGHEFI$的面积，S_2表示三角形ABC的面积，求证：$S_1 \geqslant \frac{2}{3}S_2$.

（第31届国际数学奥林匹克候选题，1990年）

［证］　设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$IF=x$，$EH=y$，$GD=z$.

由　$OE/\!/BC$，$OH/\!/AB$　得　$\triangle OEH \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \quad \frac{y}{b}=\frac{OE}{a}$，

$\because \quad OECF$为平行四边形，则　$OE=CF$，$\therefore \quad \frac{y}{b}=\frac{CF}{a}$.

同理　$\frac{z}{c}=\frac{BI}{a}$.

所以有　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{IF+CF+BI}{a}=1$.

由柯西不等式有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\times 1+\frac{y}{b}\times 1+\frac{z}{c}\times 1\right)=\frac{1}{3}.$$

即有　$\frac{S_{\triangle OIF}+S_{\triangle OEH}+S_{\triangle OGD}}{S_2} \leqslant \frac{1}{3}$.

$\therefore \quad S_{四边形OHAG}+S_{四边形ODBI}+S_{四边形OFCE} \leqslant \frac{2}{3}S_2$，

且　$2S_{\triangle AGH}+2S_{\triangle DBI}+2S_{\triangle EFC} \leqslant \frac{2}{3}S_2$，

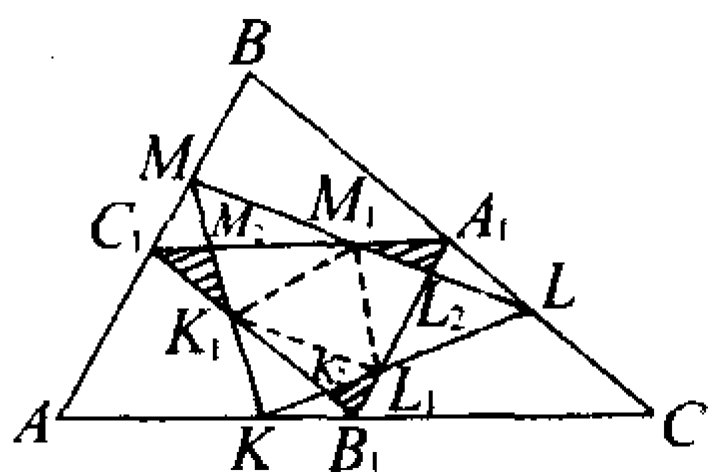
于是　$S_{\triangle AGH}+S_{\triangle DBI}+S_{\triangle EFC} \leqslant \frac{1}{3}S_2$，

$\therefore \quad S_1=S_2-(S_{\triangle AGH}+S_{\triangle DBI}+S_{\triangle EFC}) \geqslant \frac{2}{3}S_2$.

12·138　给定面积为1的$\triangle ABC$.设点A_1、B_1、C_1分别是三条边BC、CA、AB的中点，如果点K、L、M分别在线段AB_1、CA_1、BC_1上，求：$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle KLM$的公共部分的可能的最小面积.

（第8届全苏数学奥林匹克，1974年）

[解] 如图,连 K_1M_1、K_1L_1、L_1M_1.



设 $S_{\triangle C_1M_2K_1}=S_1$, $S_{\triangle M_2M_1K_1}=\Gamma_1$,

$S_{\triangle A_1L_2M_1}=S_2$, $S_{\triangle L_2L_1M_1}=\Gamma_2$,

$S_{\triangle B_1K_2L_1}=S_3$, $S_{\triangle K_2K_1L_1}=\Gamma_3$.

$\because\ \dfrac{C_1M_2}{M_2M_1}\leqslant\dfrac{AK}{KC}\leqslant\dfrac{AB_1}{B_1C}=1.$

$\therefore\ C_1M_2\leqslant M_2M_1$. 故 $S_1\leqslant\Gamma_1$.

同理 $S_2\leqslant\Gamma_2$, $S_3\leqslant\Gamma_3$.

$\therefore\ S_1+S_2+S_3\leqslant\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3.$

设$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle KLM$公共部分面积为S,得

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}-S=S_1+S_2+S_3\leqslant\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3\leqslant S.$$

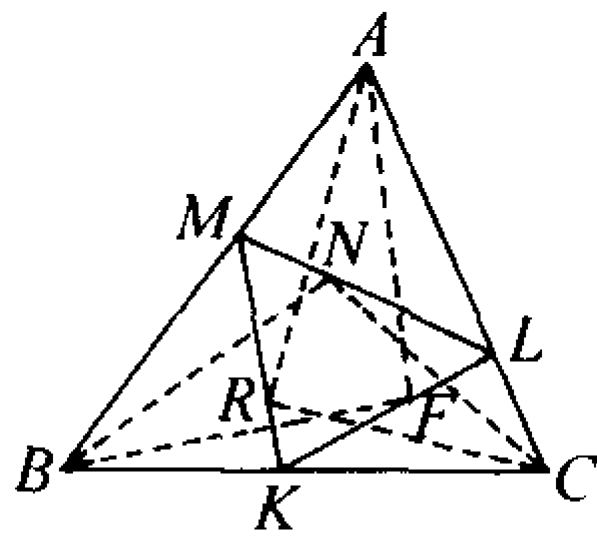
$\therefore\ 2S\geqslant S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{4}$, $S\geqslant\dfrac{1}{8}$.

当线段 KL、LM 和 MK 之一与$\triangle ABC$的中线重合时,取到最小值 $\dfrac{1}{8}$

12·139 在$\triangle ABC$中,任取点 $K\in BC$, $L\in AC$, $M\in AB$, $N\in LM$, $R\in MK$, $F\in KL$, 若 E_1、E_2、E_3、E_4、E_5、E_6 和 E 分别表示$\triangle AMR$、$\triangle CKR$、$\triangle BKF$、$\triangle ALF$、$\triangle BNM$、$\triangle CLN$ 和$\triangle ABC$的面积,求证:$E\geqslant 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{\frac{1}{6}}$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 我们以记号 $E(AMK)$ 表示$\triangle AMK$的面积.



$$\frac{E_1}{E}=\frac{E(AMR)}{E(ABC)}$$
$$=\frac{E(AMR)}{E(AMK)}\cdot\frac{E(AMK)}{E(ABK)}\cdot\frac{E(ABK)}{E(ABC)}$$
$$=\frac{MR}{MK}\cdot\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BK}{BC}$$
$$\leqslant\left[\frac{1}{3}\left(\frac{MR}{MK}+\frac{AM}{AB}+\frac{BK}{BC}\right)\right]^3.$$

$\therefore\quad \left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{MR}{MK}+\frac{AM}{AB}+\frac{BK}{BC}\right).$ ①

类似地有 $\left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{RK}{MK}+\frac{BM}{AB}+\frac{KC}{BC}\right).$ ②

①+②得 $\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{MR+RK}{MK}+\frac{BM+AM}{AB}+\frac{BK+KC}{BC}\right)=1.$$

即 $E_1^{\frac{1}{3}}+E_2^{\frac{1}{3}}\leqslant E^{\frac{1}{3}}$.

同理 $E_3^{\frac{1}{3}}+E_4^{\frac{1}{3}}\leqslant E^{\frac{1}{3}}$,

且 $E_5^{\frac{1}{3}}+E_6^{\frac{1}{3}}\leqslant E^{\frac{1}{3}}$.

于是有 $\sum_{i=1}^{6}E_i^{\frac{1}{3}}\leqslant 3E^{\frac{1}{3}}$, ③

又因为 $\sum_{i=1}^{6}E_i^{\frac{1}{3}}\geqslant 6\left(\prod_{i=1}^{6}E_i^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$. ④

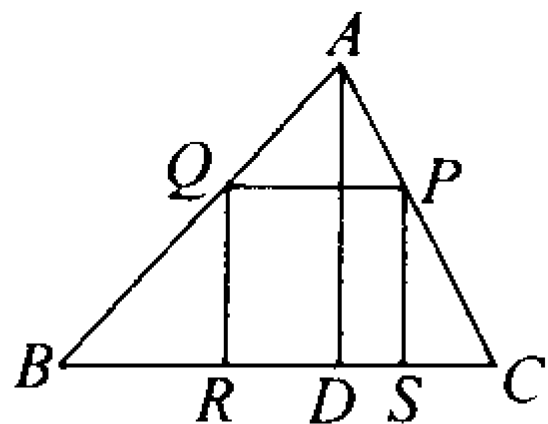
由③,④得 $6\left(\prod_{i=1}^{6}E_i^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}\leqslant 3E^{\frac{1}{3}}$,

且 $8\left(\prod_{i=1}^{6}E_i\right)^{\frac{1}{6}}\leqslant E$,

$\therefore\quad E\geqslant 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{\frac{1}{6}}$.

12·140 已知:锐角三角形 ABC 的三边 a、b、c 满足不等式 $a>b>c$,问四个顶点都在三角形边上的三个正方形中,哪个面积最大?证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1979年)



[解] 在$\triangle ABC$中设 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,各边上的高分别为 h_a、h_b、h_c.

如图,设正方形 $PQRS$ 的一边 RS 在 BC 上,令 $PQ=l$, 由 $\triangle AQP\backsim\triangle ABC$,

得 $\frac{h_a-l}{h_a}=\frac{l}{a}$, 解得 $l=\frac{ah_a}{a+h_a}$.

同理,如果正方形的一边在 AC 或 AB 上,设它们的边长分别是 m、n,

则 由 $ah_a=bh_b$,得 $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$,故 $\frac{a-h_b}{b-h_a}=\frac{a}{b}>1$,

$\therefore\quad a-h_b>b-h_a$,即 $\quad a+h_a>b+h_b$.

$\therefore\quad \frac{ah_a}{a+h_a}<\frac{bh_h}{b+h_b}$,即 $\quad l<m$.

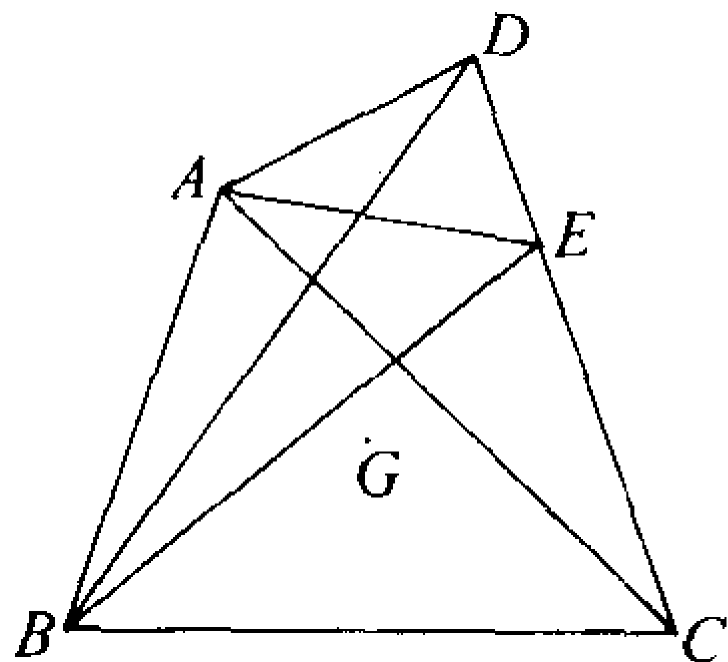
同理可得 $\quad \frac{bh_h}{b+h_b}<\frac{ch_c}{c+h_c}$,即 $\quad m<n$.

故锐角三角形最小边上的内接正方形面积最大.

12·141 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1.求证:在它的边(包括顶点)或内部可以找出四个点,使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

(中国高中数学联赛,1991 年)

[证] 如图,考虑四个三角形$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的面积,不妨设 $S_{\triangle DAB}$最小,分四种情况讨论:



(1) $S_{\triangle DAB}>\frac{1}{4}$.这时,显然 A、B、C、D 即为所求的四个点.

(2) $S_{\triangle DAB}<\frac{1}{4}$.设 G 为$\triangle BCD$ 的重心.

因 $\quad S_{\triangle BCD}=1-S_{\triangle DAB}>\frac{3}{4}$,故

$$S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GDB}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}>\frac{1}{4}.$$

于是,B、C、D、G 四点即为所求.

(3) $S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$而其他三个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

由于 $\quad S_{\triangle ABC}=1-S_{\triangle CDA}<\frac{3}{4}=S_{\triangle BCD}$,

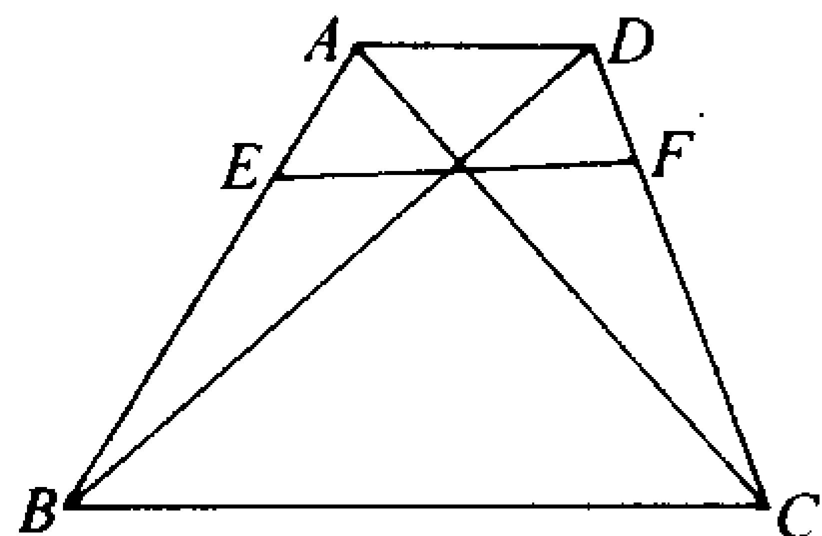
故过 A 作BC 的平行线l 必与线段CD 相交于CD 内部的一点E.

由于 $\quad S_{\triangle ABC}>S_{\triangle DAB}$,

故 $S_{\triangle EAB}>S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$.

又 $S_{\triangle EAC}=S_{\triangle EAB}, S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$,

故 E、A、B、C 四点即为所求.



(4) $S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$ 而其他三个三角形中还有一个面积为 $\frac{1}{4}$,不妨设 $S_{\triangle CDA}=\frac{1}{4}$ (如图),

因 $S_{\triangle DAB}=S_{\triangle CDA}$, 故 $AD /\!/ BC$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}=\frac{3}{4}$,

故得 $BC=3AD$.

在 AB 上取 E, DC 上取 F,使

$AE=\frac{1}{4}AB$, $DF=\frac{1}{4}CD$.

那么 $EF=\frac{1}{4}(3AD+BC)=\frac{3}{2}AD$,

$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ECF}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABF}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$,

$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}>S_{\triangle EBF}>\frac{1}{4}$.

故 E、B、C、F 四点即为所求.

注 下面的试题与之类同:

设 $\triangle XYZ$ 的边上有 A,B,C,D 四个点,其中每边上至少有一个点,且 A、B、C、D 四点都不和 X、Y、Z 三点重合. 求证 在 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 这四个三角形中,至少有一个的面积不大于 $\triangle XYZ$ 面积的四分之一.

(中国山西省初中数学竞赛,1990 年)

[证] 设三角形底边为 m,高为 h,不失一般性,可设有一条边上有两点,设 C,D 两点在边 YZ 上,且 $YZ=m$.

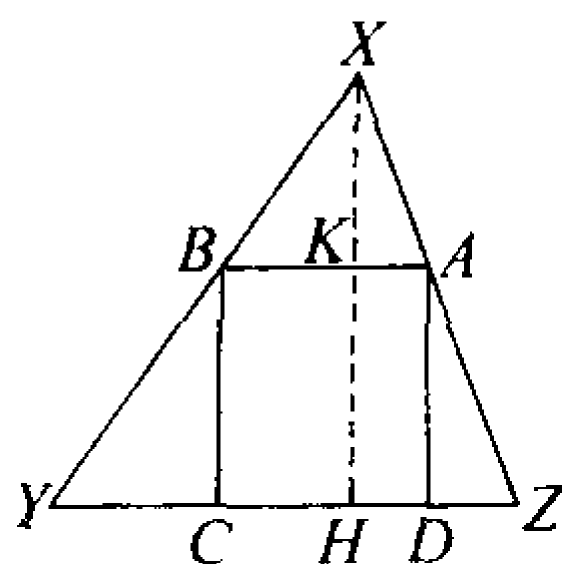
(1)若四边形 $ABCD$ 中至少有一边和 $\triangle XYZ$ 的边平行.

例如当 $AB /\!/ YZ$ 时,过 X 引 $XH\perp YZ$,则 $XH=h$, XH 交 AB 于 K,由 $\triangle XAB\backsim\triangle XYZ$ 得

$\frac{AB}{m}=\frac{XK}{h}$, 即 $XK=\frac{AB\cdot h}{m}$, 则 $KH=h-\frac{h}{m}\cdot AB$.

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot KH=\frac{1}{2}AB\left(h-\frac{h}{m}AB\right)$

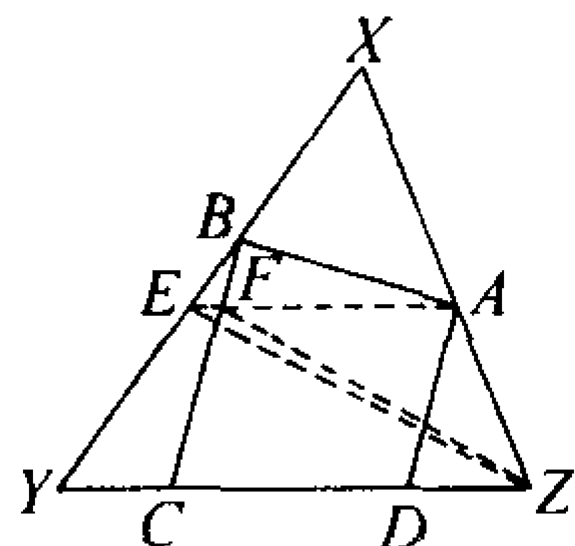
$$=-\frac{h}{2m}AB^2+\frac{h}{2}\cdot AB,$$



故当 $AB=\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{-h}{2}}{2\cdot\frac{h}{-2m}}=\frac{1}{2}m$ 时,$S_{\triangle ABC}$有极大值,其极大值为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\left(h-\frac{h}{m}\cdot\frac{m}{2}\right)=\frac{1}{8}mh=\frac{1}{4}S_{\triangle XYZ}.$$

(2)若四边形 $ABCD$ 中设有一边和 XYZ 的边平行,此时仍设 C、D 在 YZ 上,因 AB 与 YZ 不平行,故在 A,B 中取一点使此点到 YZ 的距离比另一点到 YZ 的距离小,设此点为 A 点.



过 A 引 $AE/\!/YZ$,AE 交 BC 于 F,因 Y 与 C 点不重合,显然 $AE>AF$.

连接 DE、DF,由(1)中结论可得 $S_{\triangle AED}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle XYZ}$,

又∵ $AE>AF$, ∴ $S_{\triangle ADF}<S_{\triangle AED}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle XYZ}$.

若 $BC/\!/AD$,则有 $S_{\triangle BAD}=S_{\triangle ADC}=S_{\triangle AFD}=\frac{1}{4}S_{XYZ}$

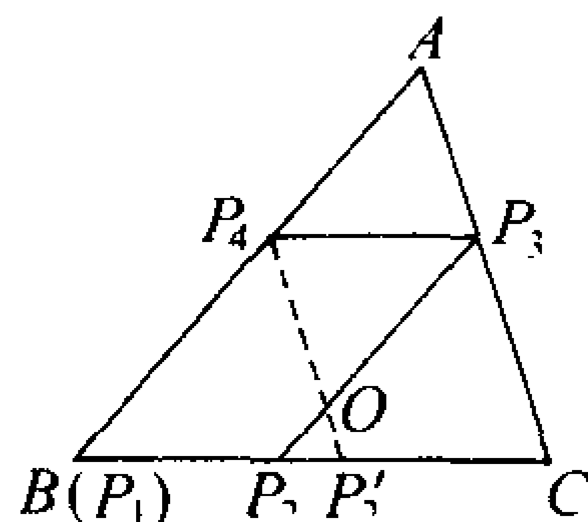
又因 BC 与 AD 不平行,则$\triangle BAD$ 与$\triangle ADC$ 中一定有一个的面积小于$\triangle ADF$ 的面积.

由(1)、(2)可得原命题成立.

12·142 已知:四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于$\triangle ABC$ 的边上,求证:四个三角形$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_1P_2P_4$、$\triangle P_1P_3P_4$、$\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$ 面积的四分之一.

(第1届中国中学生数学冬令营,1986年)

[证1] 为方便,设$\triangle ABC$ 的面积为 S,其他图形的面积则在 S 的右下角标上该图形的顶点的字母.



(i)先证明最简单的情形:

四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为平行四边形,且其中一个顶点与$\triangle ABC$ 的一个顶点重合.

如图，$\square P_1P_2P_3P_4$ 中必有一边不大于另一边，不妨设 $P_1P_2 \leqslant P_2P_3$.

过 P_4 作 $P_4P_2' \parallel AC$ 交 BC 于 P_2'，交 P_2P_3 于 O.

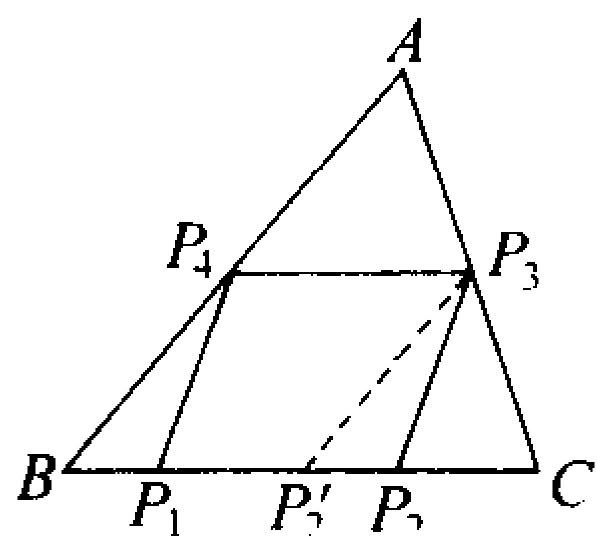
则 $\triangle OP_3P_4 \cong \triangle AP_3P_4$，$S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square P_2'CP_3P_4}$.

于是有
$$
\begin{aligned}
2S_{\square P_1P_2P_3P_4} &= S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{OP_2'CP_3} + S_{OP_3P_4} \\
&= S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{OP_2'CP_3} + S_{\triangle AP_3P_4} \\
&\leqslant S.
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S_{\square P_1P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S.$

因此，以 $\square P_1P_2P_3P_4$ 的任何三点为顶点的三角形的面积不大于 $\frac{1}{2}S$. 命题成立.

(ii)再证明 $\triangle ABC$ 的任意内接平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的情形.

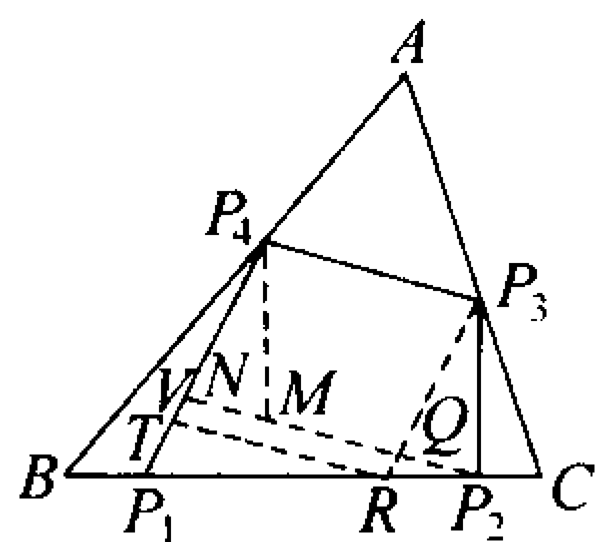


如图，过 P_3 作 $P_3P_2' \parallel AB$ 交 BC 于 P_2'，则 $S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square BP_2'P_3P_4}$

如(i)所证，$S_{\square B_1P'P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S$.

则 $S_{\square P_1P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S$. 从而命题成立.

(iii)四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为任意四边形，且两个顶点在一边，另两个顶点分别在另两边的情形.



设 P_1、P_2 在 BC 上，P_3 在 AC 上，P_4 在 AB 上，

如图，我们依次令 $P_1P_2P_3P_4$ 的内角为 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$，

由 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$ 可得，必有两角之和不小于 $180°$，不妨设

$\angle 3 + \angle 4 \geqslant 180°$，$\angle 3 + \angle 2 \geqslant 180°$，

我们过 P_2、P_4 作 $P_2M \parallel P_3P_4$，$P_4M \parallel P_2P_3$，且两平行于 P_3P_4、P_2P_3 的直线交于 M，则 M 必落在 $P_1P_2P_3P_4$ 的内部，于是

$$S_{\triangle P_2P_3P_4} = \frac{1}{2}S_{\square P_2P_3P_4M} \qquad ①$$

延长 P_2M 交P_1P_4 于 N,过 P_3 作 $P_3R\parallel AB$ 交P_2N 于Q,交 BC 于R,过 R 作$RT\parallel CN$ 交P_1P_4 于 T,则

$$S_{\square P_2P_3P_4M}=S_{\square QP_3P_4N}<S_{\square RP_3P_4T} \quad ②$$

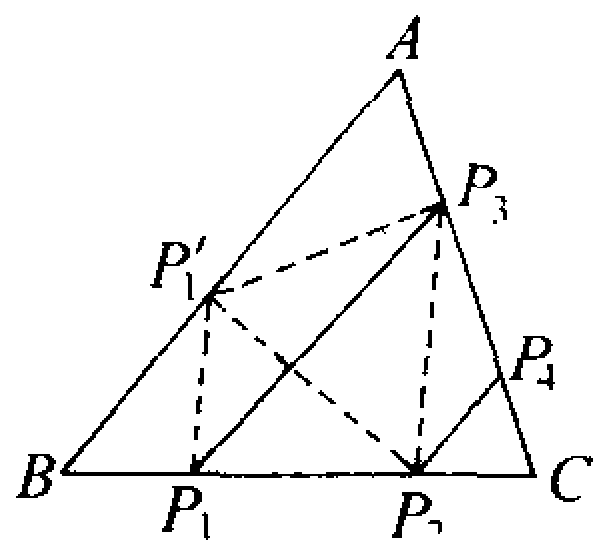
由(ii)所证 $S_{\square RP_3P_4T}\leqslant\frac{1}{2}S$.

由①、②得 $S_{\triangle P_2P_3P_4}=\frac{1}{4}S$. 从而命题得证.

(iv)四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为任意四边形,且两个顶点在一边上,另两个顶点在另一边上.

设 P_1P_2 在 BC 边上,P_3P_4 在 AC 边上.

如图,不妨设 $P_1P_2\geqslant P_3P_4$,



连P_2P_4,过 P_1 作 $P_1P_1'\parallel P_2P_4$,交 AB 于 P_1',连 $P_1'P_4$,则

$$S_{\triangle P_1P_2P_4}=S_{\triangle P_1'P_2P_4},$$

且 $S_{P_1'P_2P_3P_4}=S_{P_1P_2P_3P_4}$.

而四边形 $P_1'P_2P_3P_4$ 属于情形(iii),

则有 $S_{P_1'P_2P_3P_4}\leqslant\frac{1}{2}S$, $S_{\triangle P_2P_3P_4}\leqslant\frac{1}{4}S$.

从而命题得证.

由(i)(ii)(iii)(iv)本题得证.

[证 2] 分两种情况进行讨论.

(i)$\triangle ABC$ 的每一条边上均有 P_1、P_2、P_3、P_4 中的点.

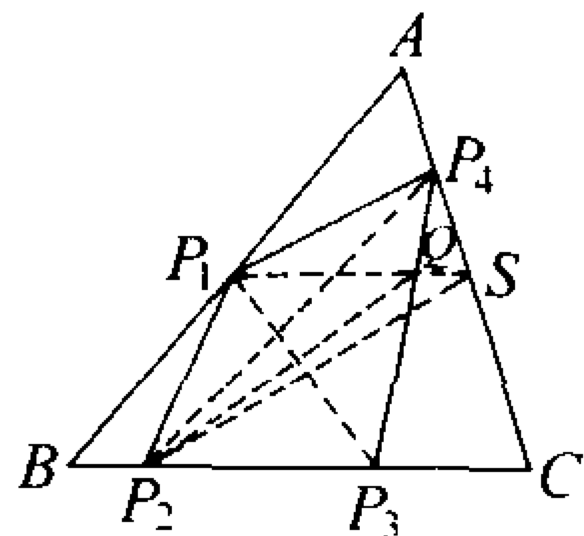
由于四个点在三条边上,所以至少有一条边上有其中的两个点,设 BC 边上有 P_2、P_3 点,P_1 在 AB 上,P_4 在 AC 上.

设 P_4 到 BC 的距离$\geqslant P_1$ 到 BC 的距离.

过 P_1 作 $P_1S\parallel BC$ 交P_4P_3 于 Q,交 AC 于S.

考虑同底的三角形:

$\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_1P_2Q$, $\triangle P_1P_1P_3$ 有



$$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3},S_{\triangle P_1P_2P_4}\}\leqslant S_{\triangle P_1P_2Q}\leqslant S_{\triangle P_1P_2S},$$

又$\because$ $P_1S\parallel BC$, $\therefore$ $S_{\triangle P_1P_2S}=S_{\triangle P_1BS}$,

$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3}, S_{\triangle P_1P_2P_4}\} \leqslant S_{\triangle P_1BS}$.

设 $\frac{P_1B}{AB}=x$，则 $S_{\triangle P_1BS}=xS_{\triangle BSA}$，

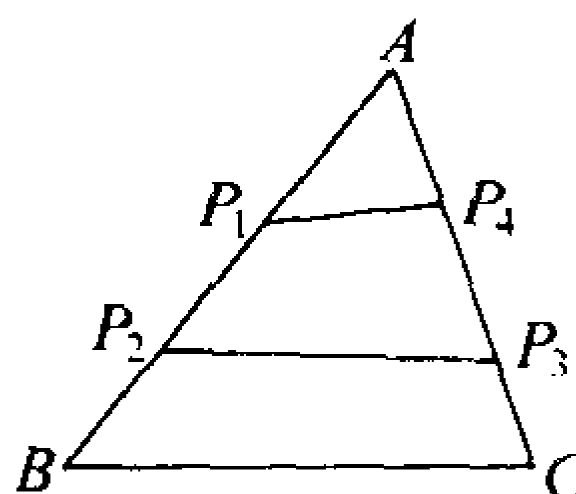
又由 $\frac{P_1B}{AB}=\frac{SC}{AC}$、可得 $\frac{AS}{AC}=1-x$.

$\therefore$ 有 $S_{\triangle P_1BS}=xS_{\triangle BSA}=x(1-x)S$，

当 $0<x<1$ 时，$x(1-x)\leqslant\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

从而 $S_{\triangle P_1BS}\leqslant\frac{1}{4}S$.

即 $\min\{S_{\triangle P_1P_2P_4}, S_{\triangle P_1P_2P_3}\}\leqslant\frac{1}{4}S$.



(ii)$\triangle ABC$ 中有一边不含 P_1、P_2、P_3、P_4 中的任何一点，设此边为 BC.

设 P_1、P_2 在 AB 上，P_3、P_4 在 AC 上.

由于 A 和 P_1、P_2、P_3、P_4 产生的四个小三角形中必有一个面积不大于 $\frac{1}{4}S_{\triangle AP_2P_3}$.

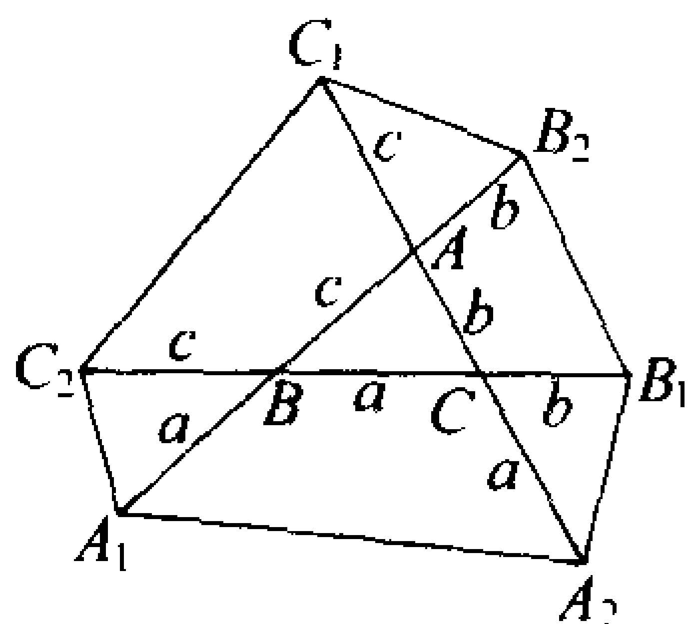
又由 $S_{\triangle AP_2P_3}<S$.

于是必有一个小三角形的面积不大于 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{4}$.

由(i),(ii)本题得证.

12·143 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，现将 AB、AC 分别延长 a 长度，BC、BA 分别延长 b 长度，CA、CB 分别延长 e 长度，设这样得到的6个端点所构成的凸多边形的面积为 G，$\triangle ABC$ 的面积为 F. 求证：$\frac{G}{F}\geqslant 13$.

(德国数学奥林匹克，1993年)



[证1] 设 $\triangle ABC$ 的三个内角为 A、B、C，由题设

$$S_{\triangle AB_2C_1}=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$S_{\triangle BC_2A_1}=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

$S_{\triangle CA_2B_1}=\frac{1}{2}ab\sin C$,

$\therefore\quad S_{\triangle AB_2C_1}=S_{\triangle BC_2A_1}=S_{\triangle CA_2B_1}=S_{\triangle ABC}=F$. 于是

$$\frac{G}{F}=\frac{S_{ABC_2C_1}+S_{BCA_2A_1}+S_{ACB_1B_2}+4F}{F}$$

$$=\frac{S_{\triangle AA_1A_2}+S_{\triangle BB_1B_2}+S_{\triangle CC_1C_2}+F}{F}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}(a+b)(c+a)\sin A}{F}+\frac{\frac{1}{2}(a+b)(b+c)\sin B}{F}+\frac{\frac{1}{2}(b+c)(c+a)\sin C}{F}$$

$$=1+\frac{(a+b)(c+a)\sin A}{bc\sin A}+\frac{(a+b)(b+c)\sin B}{ac\sin B}+\frac{(b+c)(c+a)\sin C}{ab\sin C}$$

$$=1+\frac{ac+bc+a^2+ab}{bc}+\frac{ab+b^2+ac+bc}{ac}+\frac{bc+c^2+ba+ac}{ab}$$

$$=1+3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$$

$$\geqslant 4+9\sqrt[9]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{c^2}{ab}}$$

$$=13.$$

[证 2] 由全等三角形的判定及性质有

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_1}=S_{\triangle BA_1C_2}=S_{\triangle CB_1A_2}$,

$\therefore\quad S_{A_2B_1B_2C_1C_2A_1}=S_{\triangle AA_2A_1}+S_{\triangle BB_2B_1}+S_{\triangle CC_2C_1}+S_{\triangle ABC}$.

又 $S_{\triangle AA_2A_1}=\frac{1}{2}AA_1\cdot AA_2\cdot\sin A=\frac{1}{2}(a+c)(a+b)\sin A$,

而 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 故 $S_{\triangle AA_2A_1}=\frac{a}{4R}(a+c)(a+b)$.

同理 $S_{\triangle BB_1B_2}=\frac{b}{4R}(b+c)(a+b)$,

$$S_{\triangle CC_1C_2}=\frac{c}{4R}(a+c)(b+c),$$

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$，这样欲证 $G\geqslant 13F$，只需证

$$\frac{a}{4R}(a+b)(a+c)+\frac{b}{4R}(a+b)(b+c)+\frac{c}{4R}(a+c)(b+c)$$

$$\geqslant 12\cdot\frac{abc}{4R},$$

即 $a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\geqslant 9abc$，

而上式显然成立.

12·144 若点 A_1 在等边△ABC 的内部，点 A_2 在三角形 A_1BC 的内部. 求证：I. Q. $(A_1BC)>$ I. Q. (A_2BC). 这里 I. Q. $(F)=\frac{F\text{的面积}}{(F\text{的周长})^2}$，定义为图形 F 的等周商.

（第 11 届美国数学奥林匹克，1982 年）

［证］ 设 任意△ABC 的三个内角为 A、B、C，其对应相应为 a、b、c.

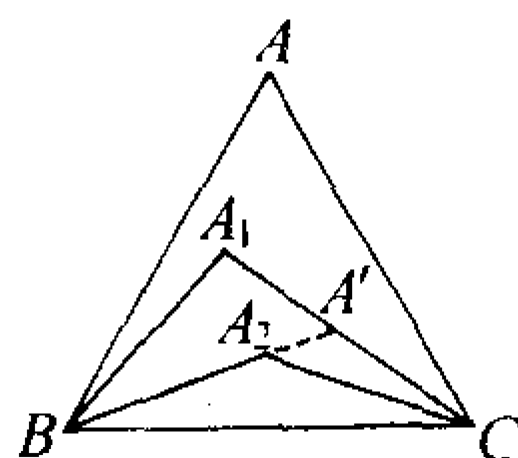
我们首先证明：对于任意△ABC，它的等周商为

$$\text{I. Q.}(ABC)=\frac{1}{4}\cdot\text{tg}\frac{A}{2}\cdot\text{tg}\frac{B}{2}\cdot\text{tg}\frac{C}{2}.$$

根据等周商的定义得

$$\begin{aligned}\text{I. Q.}(ABC)&=\frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{(a+b+c)^2}\\&=\frac{2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\\&=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\left(4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right)^2}\\&=\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}\\&=\frac{1}{4}\cdot\text{tg}\frac{A}{2}\cdot\text{tg}\frac{B}{2}\cdot\text{tg}\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

下面证明本题的结论.延长 BA_1 交 CA_1 于 A'.



现在来考察　$\triangle A_1BC$ 与 $\triangle A'BC$ 的等周商.

为方便计,记

$\angle BA_1C = A_1$,　$\angle BA_2C = A_2$,

$\angle BA'C = A'$, $\angle A_1BC = B_1$,

$\angle A_2BC = B_2$, $\angle A_1CB = C_1$, $\angle A_2CB = C_2$.

于是　$\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A'BC$ 的等周商为

$$\mathrm{I.Q.}(A_1BC) = \frac{1}{4}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{A_1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{C_1}{2},$$

$$\mathrm{I.Q.}(A'BC) = \frac{1}{4}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{A'}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_2}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{C_1}{2}.$$

为比较 I.Q.(A_1BC)和 I.Q.$(A'BC)$的大小,就需要计算 $\mathrm{tg}\,\frac{A_1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_1}{2}$ 和 $\mathrm{tg}\,\frac{A'}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_2}{2}$,并比较它们的大小.

$$\mathrm{tg}\,\frac{A_1}{2}\ \mathrm{tg}\,\frac{B_1}{2} = \frac{\sin\frac{A_1}{2}\cdot\sin\frac{B_1}{2}}{\cos\frac{A_1}{2}\cdot\cos\frac{B_1}{2}} = \frac{\cos\frac{A_1-B_1}{2} - \cos\frac{A_1+B_1}{2}}{\cos\frac{A_1-B_1}{2} + \cos\frac{A_1+B_1}{2}}.$$

$$\because\quad \frac{A_1+B_1}{2} = 90^\circ - \frac{C_1}{2},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\,\frac{A_1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_1}{2} = 1 - \frac{2\sin\frac{C_1}{2}}{\cos\frac{A_1-B_1}{2} + \sin\frac{C_1}{2}}. \qquad ①$$

同理　$$\mathrm{tg}\,\frac{A'}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{B_2}{2} = 1 - \frac{2\sin\frac{C_1}{2}}{\cos\frac{A'-B_2}{2} + \sin\frac{C_1}{2}}. \qquad ②$$

$\because$　$A_1 > 60^\circ > B_1$,　$A_1' > 60^\circ > B_2$,　$A' > A_1$,　$B_1 > B_2$.

$$\therefore\quad 0^\circ < \frac{A_1-B_1}{2} < \frac{A'-B_2}{2} < 90^\circ,$$

故　$$\cos\frac{A_1-B_1}{2} > \cos\frac{A'-B_2}{2}$$

又∵ $0°<\frac{C_1}{2}<90°$， ∴ $\sin\frac{C_1}{2}>0$.

于是由①,②得 $\operatorname{tg}\frac{A_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B_1}{2}>\operatorname{tg}\frac{A'}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B_2}{2}$.

由此可得 I.Q.$(A'BC)>$I.Q.$(A'BC)$,

同理可证 I.Q.$(A'BC)>$I.Q.(A_2BC),

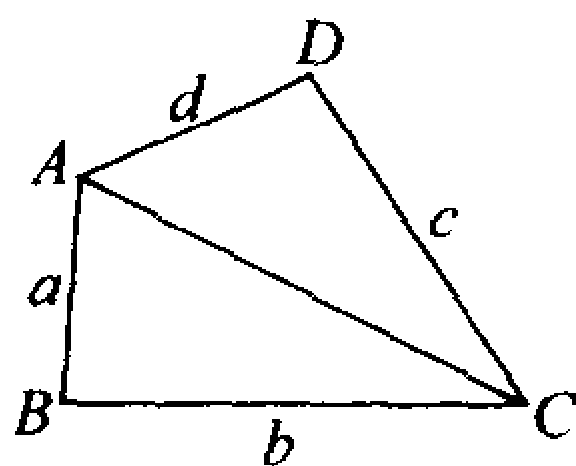
所以有 I.Q.$(A'BC)>$I.Q.(A_2BC).

2. 多边形中的面积不等式

12·145 设四边形的4边之长依次为 a、b、c、d，它的面积为 S.证明：$S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

（莫斯科数学奥林匹克，1953年）

［证］ 设在四边形 $ABCD$ 中，连对角线 AC，如图.



∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin B\leqslant\frac{1}{2}ab$,

又 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}cd\sin D\leqslant\frac{1}{2}cd$,

∴ $S\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd)$.

同理可证 $S\leqslant\frac{1}{2}(ad+bc)$.

故
$$2S\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd+ad+bc)$$
$$=\frac{1}{2}[a(b+d)+c(b+d)]=\frac{1}{2}(a+c)(b+d).$$

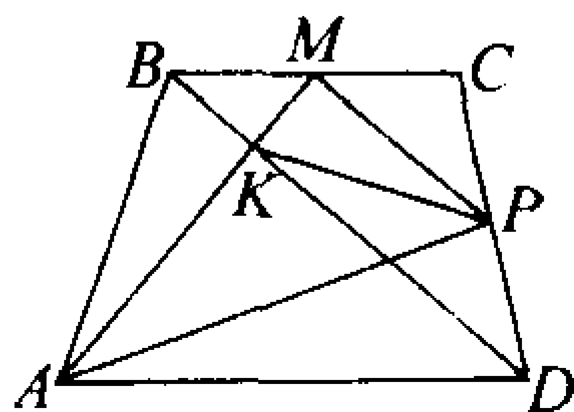
因此 $S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

12·146 M 和 P 是凸四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点，已知：$AM+AP=a$.求证：四边形 $ABCD$ 的面积小于 $\frac{a^2}{2}$.

（第14届全苏数学奥林匹克，1980年）

［证］ 连四边形 $ABCD$ 的对角线 AC.易证

$S_{ABCD}=2S_{AMCP}$.



所以，只需证 $S_{AMCP}<\frac{a^2}{4}$ 即可.

设 K 为 AM 与 BD 的交点，易知

$S_{\triangle CMP}=S_{\triangle MKP}$.

由于 $ABCD$ 是凸四边形，点 K 介于 A 与 M 之间.

$\therefore\quad S_{\triangle MKP}<S_{\triangle AMP}$,

$\therefore\quad S_{AMCP}=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle MCP}=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle MKP}<2S_{\triangle AMP}$.

令 $AM=x$，则 $AP=a-x$，因而

$$2S_{\triangle AMP}=x(a-x)\sin\angle MAP\leqslant x(a-x)=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

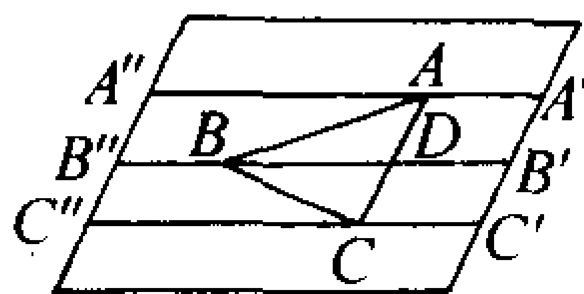
$$\leqslant\frac{a^2}{4}.$$

$\therefore\quad S_{AMCP}<\frac{a^2}{4}$.

12·147 在一个边长为1的正方形(单位正方形)内任意给定9个点，试证明：在以这些点为顶点的各个三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于$\frac{1}{8}$.

(中国北京市数学竞赛，1963年)

[证] 先证明平行四边形内任意三点连成的三角形的面积不大于平行四边形面积的一半.

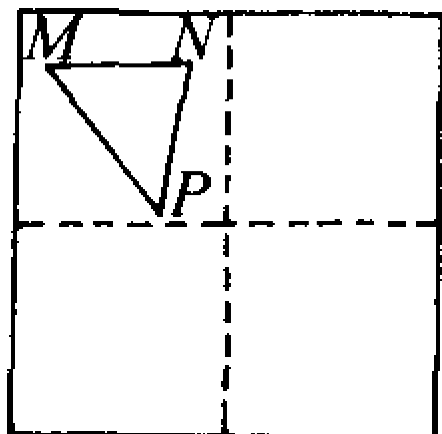


如图，设 A、B、C 为平行四边形内三点，过 A、B、C 作平行四边形一组对边的平行线分别交另一组对边于 A'、A''、B'、B''、C'、C''，且 B' 在 A' 和 C' 之间，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}S_{\square A''A'B'B''}+\frac{1}{2}S_{\square B''B'C'C''}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$$



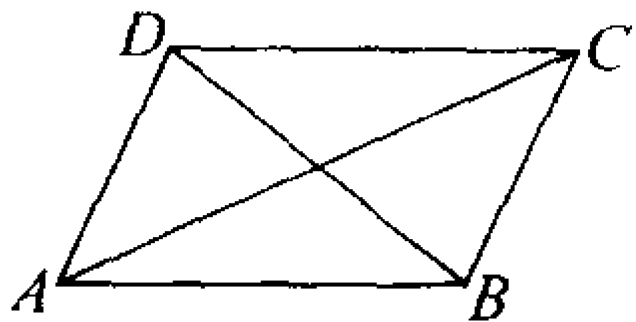
若 B' 与 A' 或 C' 重合，则上述结论也成立.

现连结单位正方形对边中点，分原正方形成四个

小正方形，其面积均为$\frac{1}{4}$，则 9 个点中至少有三个点落在同一个小正方形中，记此三点为 M、N、P. 那么

$$S_{\triangle MNP} \leqslant \frac{1}{2} S_{小正方形} = \frac{1}{8}.$$

12·148　假设 $ABCD$ 为任一平行四边形，试证：以该▱$ABCD$ 的两条邻边 AB 与 BC 为边所作的两个正方形的面积的和，不小于以▱$ABCD$ 的两条对角线的长为边所作的矩形的面积. 又问在什么情况下二者相等？



（中国陕西省数学竞赛，1978 年）

［证］　根据余弦定理，在 $\triangle ABD$ 和$\triangle ABC$ 中，

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos BAD, \quad ①$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos ABC, \quad ②$$

∵　$ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AD = BC$，$\angle BAD$ 与$\angle ABC$ 互为补角，

即　$\cos\angle BAD = -\cos\angle ABC$.

①＋②得　$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$，

∴　$AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2) \geqslant AC \cdot BD$.

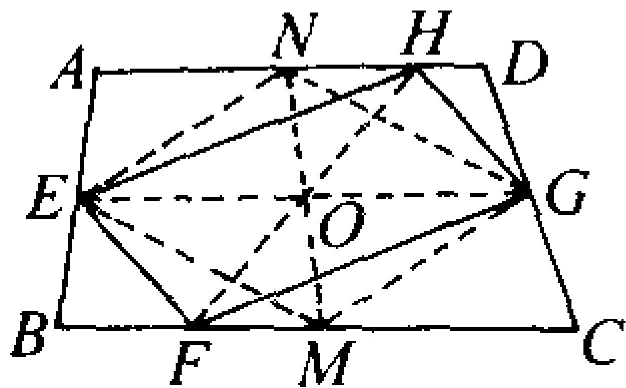
上式中的等号，仅在 $AC = BC$ 时成立，即▱$ABCD$ 的两对角线 AC、BD 相等时，

$AB^2 + BC^2 = AC \cdot BD$，

而在▱$ABCD$ 中，当二对角线 AC、BD 相等时为矩形，故当 $ABCD$ 为矩形时，有

$AB^2 + BC^2 = AC \cdot BD$.

12·149　设某平行四边形的两个顶点分别是凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 的中点，而它的另外两个顶点则分别位于边 BC 和 AD 上. 求证：平行四边形的面积是四边形 $ABCD$ 的面积的一半.



（前苏联教委推荐试题，1988 年）

［证］　设▱$EFGH$ 的对角线交点为 O，于是 O 为 EG 的中点. 取 BC 和 AD 的中点 M 和 N，

连结 EM、MG、GN、NE、EG、MN.

因为 E、G 分别为 AB 和 CD 的中点，所以四边形 $EMGN$ 也是平行四边形.

从而 MN 也过 EG 中点 O 且被点 O 所平分.

故知 FH 与 MN 互相平分于点 O.

因而四边形 $NFMH$ 为平行四边形，(若 F、H 分别重合于 M、N，则以下证明更简单).

$\therefore\quad NH /\!/ FM$，即 $\quad AD /\!/ BC$.

$\because\quad EE$ 为梯形 $BCDA$ 的中位线，

$\therefore\quad AD /\!/ EG /\!/ BC$.

$\therefore\quad S_{\triangle NEG}=S_{\triangle HEG},\quad S_{\triangle MEG}=S_{\triangle FEG}$.

$\therefore\quad S_{EFGH}=S_{EMGN}$.

$\because\quad EM$、MG、GN、NE 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的中位线.

$\therefore\quad S_{\triangle EBM}+S_{\triangle MCG}+S_{\triangle GDN}+S_{\triangle NAE}$

$=\dfrac{1}{4}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle CDA}+S_{\triangle DAB})$.

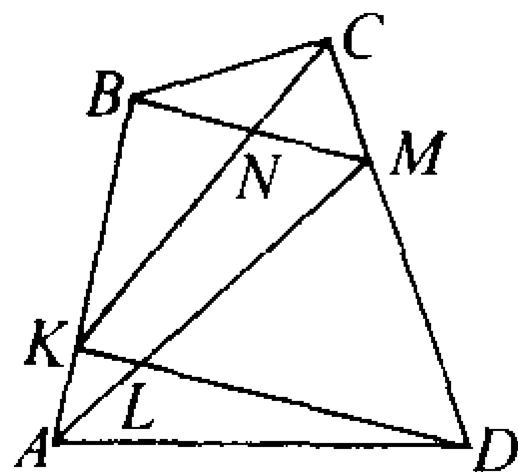
$=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

$\therefore\quad S_{EFGH}=S_{EMGN}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

12·150　在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 上分别取点 K、M，设 AM 与 KD 交于点 L，KC 与 BM 交于点 N. 求证：(1)若 K、M 分别是边 AB、CD 的中点，则 $S_{KLMN}<\dfrac{1}{3}S_{ABCD}$. (2)若 $AK:KB=CM:MD=m:n$，则 $S_{四边形KLMN}<\dfrac{mn}{m^2+mn+n^2}S_{四边形ABCD}$.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

[证]　先证(1) 设 $\quad S_{四边形ABCD}=s,\ S_{\triangle BCD}=a,$
$S_{\triangle ACD}=b,\quad S_{\triangle ABD}=c,\quad S_{\triangle ABC}=d.$



$\dfrac{m}{m+n}=\alpha,\quad \dfrac{n}{m+n}=\beta.$

$S_{\triangle AMB}=p,\quad S_{\triangle DKC}=q,\quad S_{\triangle AKMD}=r,$

$S_{四边形KBCM}=t$.

利用面积关系可得

$$p=\alpha c+\beta d,\quad q=\alpha a+\beta b.$$
$$r=\alpha p+\beta b,\quad t=\alpha q+\beta d.$$

由 $\dfrac{S_{\triangle KLM}}{(\alpha p)}=\dfrac{\beta q}{r}$ 得 $S_{\triangle KLM}=\dfrac{\alpha\beta pq}{r}$

同理得 $S_{\triangle KNM}=\dfrac{\alpha\beta pq}{t}$.

$\therefore\quad S_{四边形KLMN}=\dfrac{\alpha\beta pq(r+t)}{rt}=\dfrac{\alpha\beta pq\cdot s}{rt}$.

所要证的不等式即为

$$\frac{\alpha\beta pq\cdot s}{rt}<\frac{\alpha\beta\cdot s}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2},$$

它等价于 $rt-pq(1-\alpha\beta)>0$.

将 r、t、p、q 用关于 a、b、c、d 的表达式代入,并考虑到 $\alpha+\beta=1$.上式经整理得

$\alpha(ab+cd-ac)+\beta(b^2+bd+d^2-ad-bc)>0$.

现只需分别证明 $ab+cd-ac>0$ 及 $b^2+bd+d^2>ad+bc$.

事实上 $ab+cd-ac>ab+cd-ac-bd$

$$=(a-d)(b-c)=(s-c-d)(s-d-c)\geqslant 0.$$

同理可证 $ab+cd>bd$

而 $ad+bc=(a+c)(b+d)-(ab+cd)<s^2-bd$

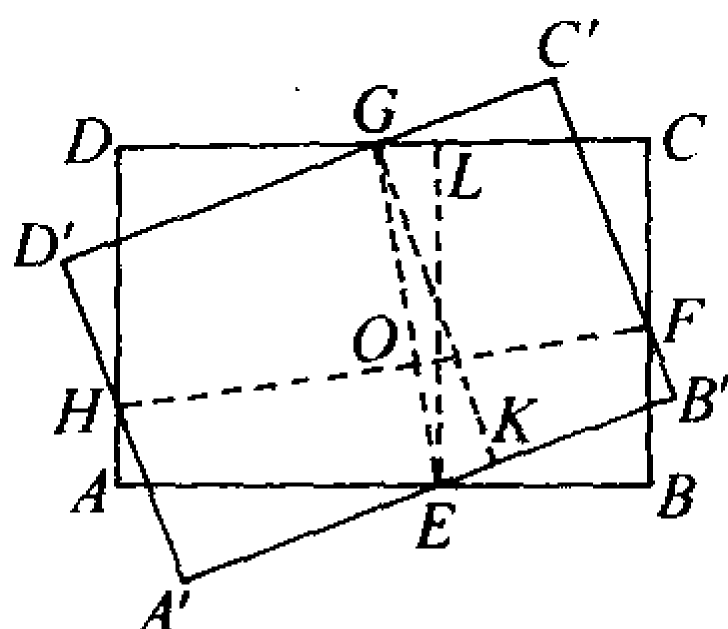
$$=(b+d)^2-bd=b^2+bd+d_2.$$

于是(2)的不等式得证.

当 $m=n-1$ 时,便得(1)的结论.

12·151 不重合的两个全等矩形的周界共有8个交点,求证:它们的公共部分的面积大于矩形面积的一半.

(第4届全苏数学奥林匹克,1970年)



[证] 显然,矩形的每条边至多与另一个矩形有2个交点.由于共有8个交点,故每条边都与另一个矩形恰有两个交点.如果有一条边与另一矩形的一组对边相交,则将导致后者的一条边与前一矩形没有交点,矛盾.

所以每条边都与另一矩形的一组邻边相交.

连结 EG、FH，过 E 作 $EL\perp DC$ 于点 L，使 G 作 $GK\perp A'B'$ 于点 K.

$\because\quad GK=B'C'=BC=EL$,

$\therefore\quad \triangle GEK\cong\triangle EGL$.

$\therefore\quad \angle EGL=\angle GEK=\angle EGD'$， 即 GE 平分$\angle DG'C$.

同理 HF 平分$\angle BFC'$.

$\because\quad \angle D'GC=\angle BFC'$， $\therefore\quad \angle OFB=\angle OGC$.

$\therefore\quad G$、O、F、C 四点共圆.

$\because\quad \angle C=90^\circ$， $\therefore\quad \angle GOF=90^\circ$.

$\therefore\quad S_{EFGH}=\frac{1}{2}GE\cdot HF\geqslant\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

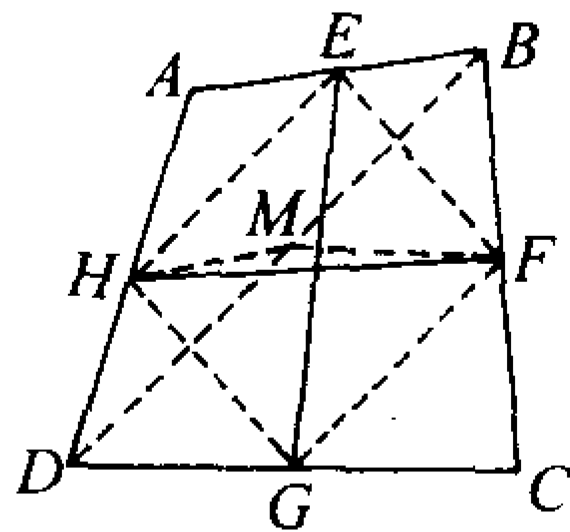
$\therefore$ 两个矩形公共部分的面积大于矩形面积的一半.

12·152 设 $ABCD$ 为任意给定的四边形，边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H. 试证：

$$S_{\text{四边形}ABCD}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC).$$

（中国高中数学联赛，1978 年）

［证］ 如图，由题设知 $HE\parallel DB\parallel GF$，



且 $HE=\frac{1}{2}BD=GF$，

故 $EFGH$ 为平行四边形，

于是 $S_{\triangle AHE}+S_{\triangle CFG}$

$$=\frac{1}{4}(S_{\triangle ADB}+S_{\triangle CBD})=\frac{1}{4}S_{\text{四边形}ABCD}.$$

同理有 $S_{\triangle BEF}+S_{\triangle DCH}=\frac{1}{4}S_{\text{四边形}ABCD}$.

$$\therefore\quad S_{\text{四边形}EFGH}=S_{ABCD}-(S_{\triangle AHE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle CFG}+S_{\triangle DGH})$$

$$=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCD}.\qquad ①$$

$\because$ $EFGH$ 是平行四边形， $\therefore$ $S_{\text{四边形}EFGH}\leqslant\frac{1}{2}EG\cdot HF$. ②

设 M 为 BD 的中点，显然有

$$\frac{1}{2}(AB+CD)=HM+MF\geqslant HF,$$

同理有 $\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant EG.$

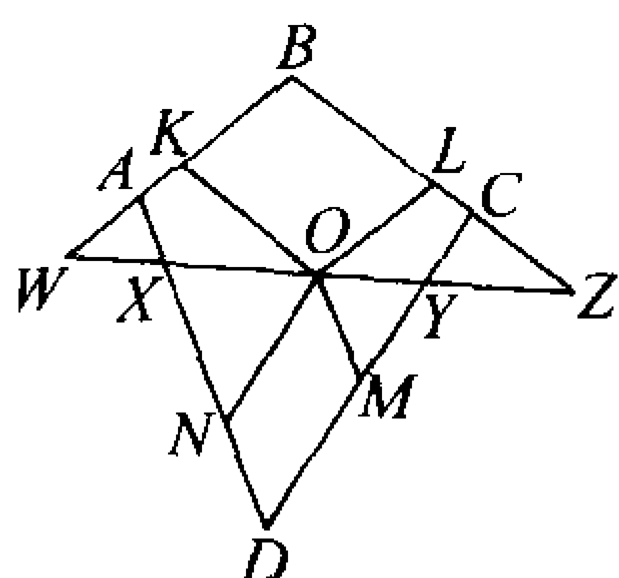
$\therefore\quad EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC).$

12·153 凸四边形 $ABCD$ 的面积为 S，O 为四边形内部一点，K、L、M 与 N 分别是边 AB、BC、CD 与 DA 内部的点. 如果四边形 $OKBL$ 及 $OMDN$ 都是平行四边形，求证：$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$，其中 S_1 与 S_2 分别是 $ONAK$ 与 $OLCM$ 的面积.

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）

[证 1] (1)如果 O 在 AC 上，则 $ABCD$、$AKON$、$OLCM$ 相似，且 $AC=AO+OC$，这时可得

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}.$$



(2)如果 O 不在 AC 上，可假定 O 和 D 在 AC 的同侧.

一条过 O 点的直线分别交 BA、AD、CD 与 BC 于 W、X、Y、Z 各点.

开始时，令 $W=X=A$，

这时 $\frac{OW}{OX}=1$，而 $\frac{OZ}{OY}>1$，

然后围绕 O 点旋转该直线，最后到 $Y=Z=C$ 时结束，

这时 $\frac{OW}{OX}>1$，而 $\frac{OZ}{OY}=1$.

因而，在旋转过程中，必存在某一位置，使得 $\frac{OW}{OX}=\frac{OZ}{OY}$，将直线固定在这一位置.

设 T_1、T_2、P_1、P_2、Q_1、Q_2 分别为 $KBLO$、$NOMD$、WKO、OLZ、ONX、YMO 的面积，则所要证明的结果等价于

$$T_1+T_2\geqslant 2\sqrt{S_1S_2}.$$

由于 $\triangle WBZ\backsim\triangle WKO\backsim\triangle OLZ$，

又有 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}=\sqrt{P_1+T_1+P_2}\left(\frac{WO}{WZ}+\frac{OZ}{WZ}\right)$

$$=\sqrt{P_1+T_1+P_2};$$

平方得　$T_1=2\sqrt{P_1P_2}$．

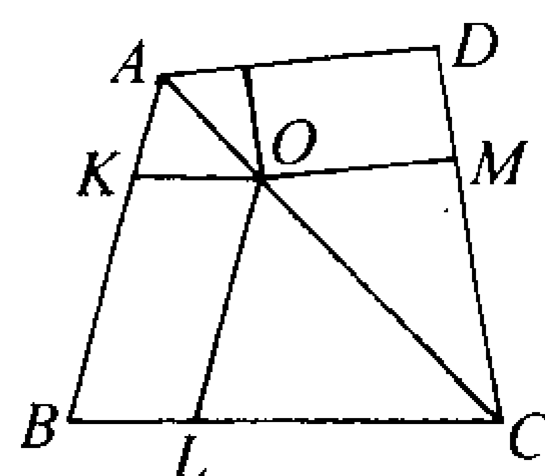
类似得　$T_2=2\sqrt{Q_1Q_2}$．

$\because\ \dfrac{OW}{OZ}=\dfrac{OX}{OY}$，　$\therefore\ \dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{OW^2}{OZ^2}=\dfrac{OX^2}{OY^2}=\dfrac{Q_1}{Q_2}$．

设　$k=\dfrac{Q_1}{P_1}=\dfrac{Q_2}{P_2}$，则

$$\begin{aligned}T_1+T_2&=2\sqrt{P_1P_2}+2\sqrt{Q_1Q_2}=2\sqrt{P_1P_2}(1+k)\\&=2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2}\\&=2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)}\\&\geqslant 2\sqrt{S_1S_2}.\end{aligned}$$

[证2]　若 O 在对角线 AC 上，那么



$$S_{\triangle OAN}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ACD},$$

$$S_{\triangle KOA}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ABC},$$

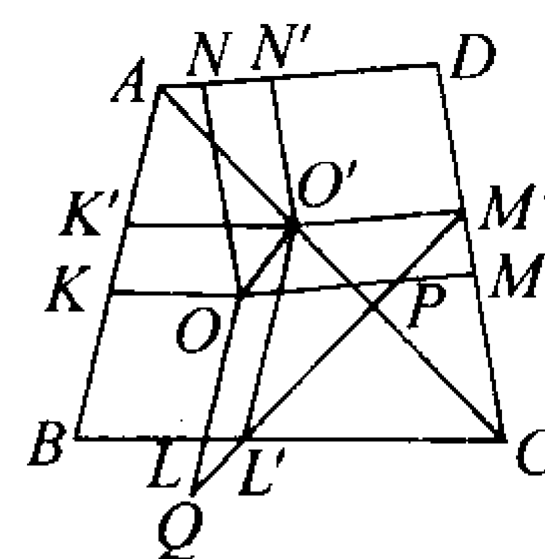
两式相加，得　$S_1=\dfrac{AO^2}{AC^2}S$，

即　$\sqrt{S_1}=\dfrac{AO}{AC}\sqrt{S}$．

同理　$\sqrt{S_2}=\dfrac{OC}{AC}\sqrt{S}$．

$\therefore\ \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.

对于一般情况，过 O 作 BD 的平行线交 AC 于 O'．关于 O'，设相应的四边形 $O'N'AK'$、$O'M'CL'$ 的面积为 S'_1、S'_2，则



$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S'_1}+\sqrt{S'_2}.$$

连结 $L'M'$，交 OM 于 P．$M'L'$ 与 OL 的延长线相交于 Q，由　$O'L'/\!/AB$，$O'M'/\!/AD$，得

$$\frac{CL'}{CB}=\frac{CO'}{CA}=\frac{CM'}{CD},$$

所以　$L'M'/\!/BD$，从而

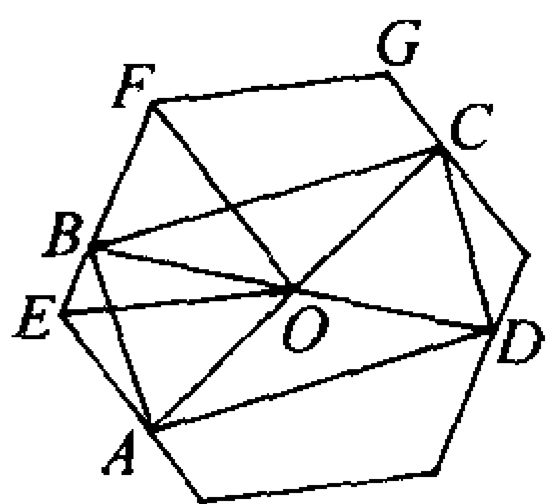
$$S_{\text{四边形}OO'M'M}\geqslant S_{\text{四边形}OO'M'P}=S_{\text{四边形}OO'L'Q}\geqslant S_{\text{四边形}OO'L'L},$$

即 $S'_2 \geqslant S_2$. 同理 $S'_1 \geqslant S_1$.

$\therefore \quad \sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

12·154 在正六边形内作一平行四边形，其对称中心与正六边形的中心重合. 证明：平行四边形的面积不超过正六边形面积的$\frac{2}{3}$.

（奥地利-波兰数学奥林匹克，1978 年）



［证］ 设平行四边形 $ABCD$ 内接于正六边形 M，它的中心 O 是平行四边形对角线 AC 和 BD 的交点.

取正六边形的顶点 E 与 F，使得它们与 B 点位于直线 OA 的同侧，并且满足 $\angle AOE < 60°$，$\angle AOF < 120°$. 则有

$$60° \leqslant \angle AOF < 120°.$$

于是，正六边形中位于直线 OA 同侧的顶点 E 和 G 到直线 OA 的距离不超过顶点 F 到 OA 的距离. 因此

$$S_{\triangle AOB} \leqslant S_{\triangle AOF} = S_{\triangle EOF}.$$

其中，$S_{\triangle AOF} = S_{\triangle EOF}$ 可由 $AE \parallel OF$，因而 $\triangle AOF$ 与 $\triangle EOF$ 同底等高而得到.

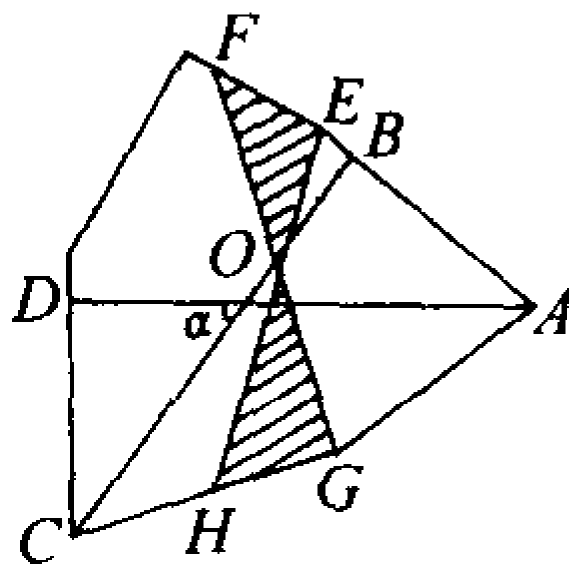
由平行四边形与正六边形的性质可得

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle COD} = S_{\triangle DOA} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD}.$$

且 $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{6} S_M$，$\therefore \quad \frac{1}{4} S_{\square ABCD} \leqslant \frac{1}{6} S_M$.

故 $S_{\square ABCD} \leqslant \frac{2}{3} S_M$.

12·155 给定凸多边形，它的顶点和边上某点的连结线段将多边形面积等分，任何这样的线段的长度均不超过 1.



试证：该多边形的面积小于$\frac{\pi}{4}$.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 考察所有面积等分线（它们不一定相交于一点）. 每两条“相邻”的等分线 AD 和 BC 相交构成蝴蝶结形 $ABCD$，即由 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 与它

们在公共点 O 处的角 α 构成的图形. 由条件易知 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COD}$,得出

$$S_{ABCD}\leqslant\frac{AD\cdot BC\sin\alpha}{4}<\frac{\alpha}{4}\ (\sin\alpha<\alpha).$$

如果现在沿着多边形的边界按等分线 AD 从端 A 到另一端点 D 的固定方向移动,那么,

首先,所有"蝴蝶结"形将逐一被考察;

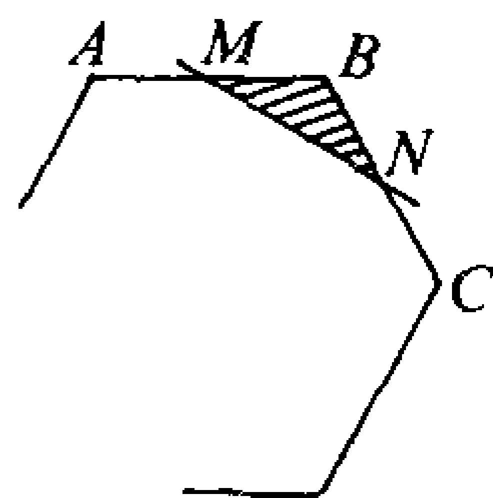
第二,它们的总面积小于$\frac{\pi}{4}$;

第三,这些"蝴蝶结"形覆盖了多边形的任一点 M.

这是由于 M 在射线 AD 和 DA 的异侧.

当等分线 AD 逆时针转经历了所有"等分线"后才到 DA,所以点 M 总是在某对"相邻"的"等分线"EH 和 FG 之间的蝴蝶结形之内,多边形面积将不大于蝴蝶结形面积之和,即多边形面积小于$\frac{\pi}{4}$.

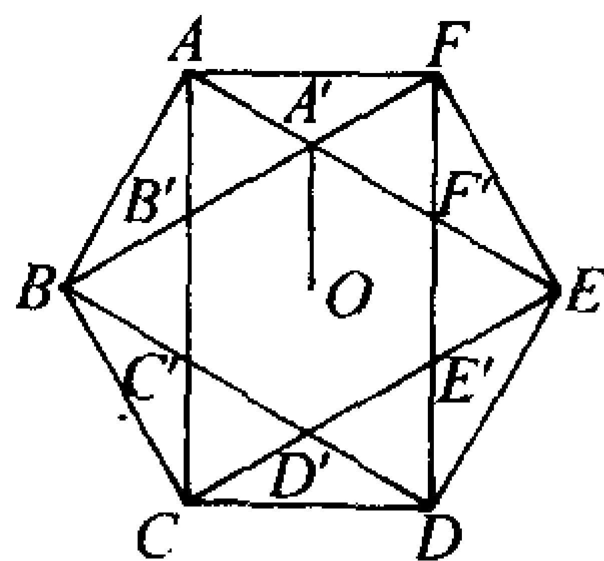
12·156 切一个凸 n 边形指的是选出一对相邻的边 AB、BC,切去$\triangle MBN$ 得到一个凸 $n+1$ 边形,其中 M、N 分别为 AB、BC 的中点. 一个正六边形 P_6 面积为 1,切成七边形 P_7,再将 P_7(用七种可能的切法之一)切成八边形 P_8,…,如此继续下去. 试证:无论怎样切,对所有的 $n\geqslant6$,总有 P_n 的面积大于$\frac{1}{3}$.



(美国数学奥林匹克,1997 年)

[证] 设凸多边与 B 相邻的两顶点为 A、C,则称线段 AC 为短对角线.

设 P_6 为正六边形 $ABCDEF$,其六条短对角线组成六边形 $A'B'C'D'E'F'$,显然它亦为正六边形. 记为 P'_6.



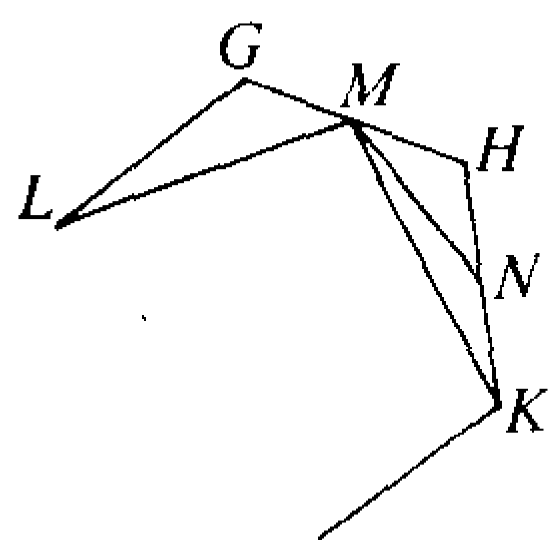
P'_6 与 P 有公共中心 O,又

$$OA'=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad S_{P'_6}=\frac{1}{3}.$$

P_6 含有 P'_6,且 P_6 的每条短对角线不经过 P'_6 内部. 假设 P_n 含

有 P'_6，且每一条短对角线不经过 P'_6 的内部.



对 P_n 切一刀，如图，P_n 为多边形 $LGHK\cdots$，又 M、N 分别为 GH、HK 的中点，则 P_{n+1} 为多边形 $LGMNK\cdots$

因 GK 不经过 P'_6 的内部，故 MK 亦不经过 P'_6 的内部，过 N 的短对角线亦然.

故 P_{n+1} 仍含有 P'_6，且其每条短对角线皆不过 P'_6 的内部，从而

$$S_{P_n} > S_{P'_6} = \frac{1}{3}.$$

12·157　多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内有另一多边形 $B_1B_2\cdots B_n$，这两个多边形的边对应平行，并且每两个平行边之间的距离都是 1cm，若多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长为 Pcm，面积为 $S_b\text{cm}^2$，多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积为 $S_a\text{cm}^2$，求证：$S_a - S_b > P + \pi$.

（中国部分省市初中数学竞赛，1985 年）

［证］　两个多边形对应边互相平行，且距离都是 1cm，所以分别以 B_1、B_2，…，B_n 为圆心，以 1cm 为半径画弧，必与多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边相切.

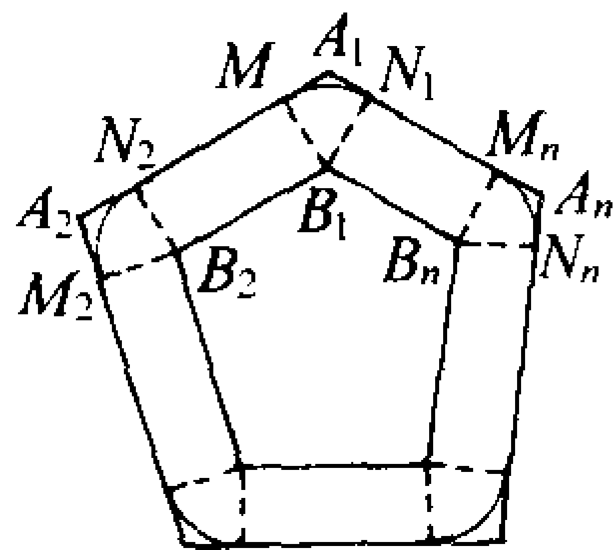
设切点为 M_1、N_1、M_2、N_2、…、M_n，N_n. 连 B_1M_1、B_1N_1、B_2M_2、B_2N_2、…、B_nM_n、B_nN_n.

则易得 $B_1M_1N_2B_1$、$B_2M_2N_3B_3$、…$B_nM_nN_1B_1$ 为矩形，其面积和为 $p\text{cm}\cdot 1\text{cm} = p\text{cm}^2$.

又∵　$\angle N_1B_1M_1$ 与 $\angle B_nB_1B_2$ 互补，

$\angle N_2B_2M_2$ 与 $\angle B_1B_2B_3$ 互补，

……　……



∴　$\angle N_1B_1M_1 + \angle N_2B_2M_2 + \cdots + \angle N_nB_nM_n = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$.

∴　扇形 $N_1B_1M_1$、$N_2B_2M_2$、…、$N_nB_nM_n$ 恰好能拼成一个半径为 1cm 的圆.

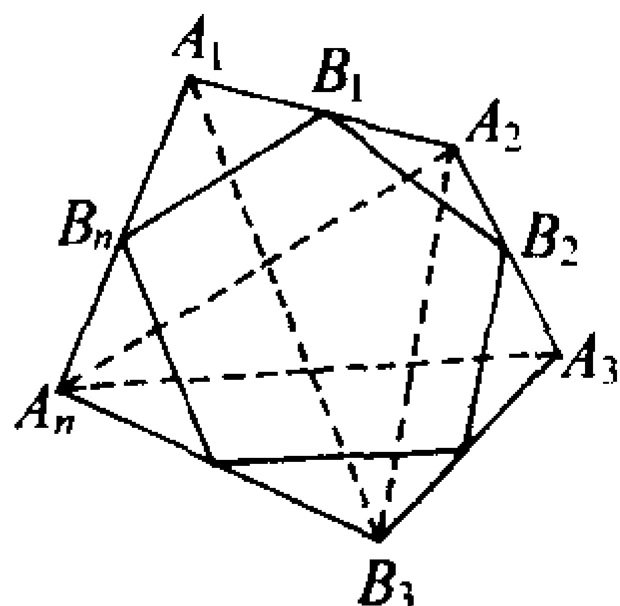
故这些扇形面积的和为 $\pi(1\text{cm})^2 = \pi\text{cm}^2$.

∴　$S_a - S_b > p + \pi$.

12·158 求证:如果在凸 n 边形中依次连接各边的中点,$n\geqslant4$,则得到的多边形面积不小于原多边形面积的一半.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1975 年)

[证] 设点 B_1、B_2、…、B_n 依次是面积为 S 的凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 诸边 A_1A_2、A_2A_3、…、A_nA_n 的中点.



记 $A_{n+1}=A_1$, $A_{n+2}=A_2$, …,则任意一个 $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$与其他三角形,除两个以点 A_{i+1}为公共顶点的三角形外,没有公共内点,而且这两个三角形也没有公共内点.

因此,凸 n 边形内任意一点至少是上述三角形中两个三角形的内点.由此可得

$$2S\geqslant\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}}.$$

由于每条线段 $B_iB_{i+1}(B_{n+1}=B_1)$都是$\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$的中位线,所以

$$S_{\triangle B_iA_{i+1}B_{i+1}}=\frac{1}{4}S_{\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}}.$$

从而有 $$S_{B_1B_2\cdots B_n}=S-\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle B_iA_{i+1}B_{i+1}}$$

$$=S-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}}$$

$$\geqslant S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}.$$

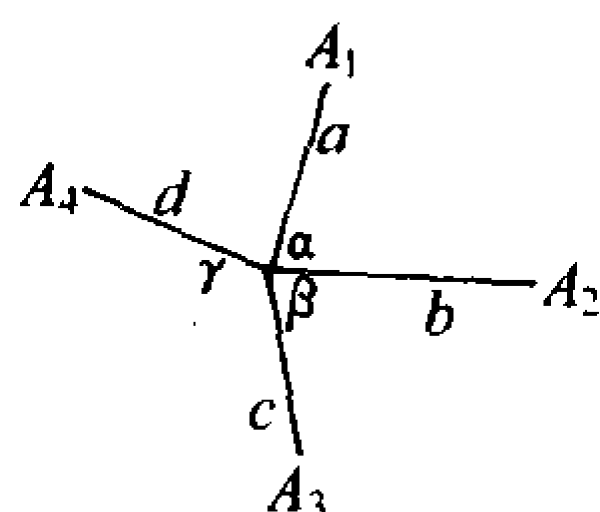
12·159 考虑同一平面的点 O、A_1、A_2、A_3、A_4,已知 $S_{\triangle OA_iA_j}\geqslant1$ $(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$.求证:至少有一对 $i_0,j_0\in\{1,2,3,4\}$,满足 $S_{\triangle OA_{i_0}A_{j_0}}\geqslant\sqrt{2}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 设 $OA_1=a$, $OA_2=b$, $OA_3=c$, $OA_4=d$, $\angle A_1OA_2=\alpha$, $\angle A_2OA_3=\beta$, $\angle A_3OA_4=\gamma$,则

$$S_1=S_{\triangle OA_1A_2}=\frac{1}{2}ab|\sin\alpha|,$$

$$S_2=S_{\triangle OA_1A_3}=\frac{1}{2}ac\,|\sin(\alpha+\beta)|,$$



$$S_3=S_{\triangle OA_1A_4}=\frac{1}{2}ad\,|\sin(\alpha+\beta+\gamma)|,$$

$$S_4=S_{\triangle OA_2A_3}=\frac{1}{2}bc\,|\sin\beta|,$$

$$S_5=S_{\triangle OA_2A_4}=\frac{1}{2}bd\,|\sin(\beta+\gamma)|,$$

$$S_6=S_{\triangle OA_3A_4}=\frac{1}{2}cd\,|\sin\gamma|.$$

容易证明　$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta+\sin\alpha\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$.

所以对上面的 $S_i(i=1,2,\cdots,6)$可以适当地选择“+”号或“−”号,使得

$$S_3S_4\pm S_1S_6\pm S_2S_5=0.$$

比如说　$S_3S_4=S_1S_6+S_2S_5$,

则　$(\max_i S_i)^2\geqslant S_3S_4=S_1S_6+S_2S_5\geqslant 1+1=2$,

即　$\max_i S_i\geqslant\sqrt{2}$.

3. 直线形与圆中的面积不等式

12·160　两个正三角形内接于一个半径为 r 的圆,公共部分的面积为 S,求证:$2S\geqslant\sqrt{3}r^2$.

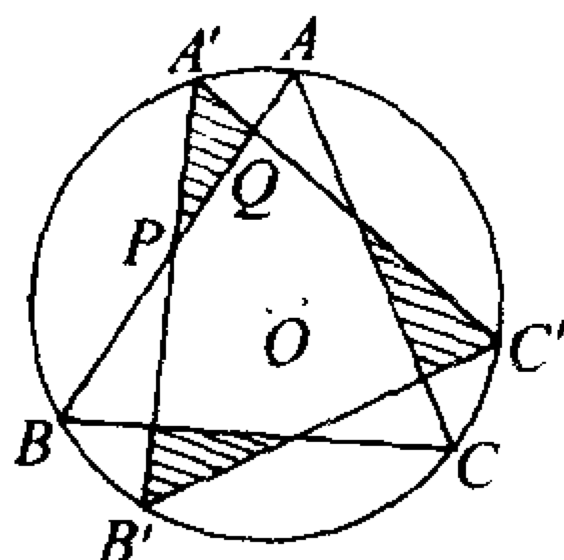
(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　如图,由对称性有

$$S=S_{\triangle ABC}-3S_{\triangle A'PQ}.$$

又图形关于 OP、OQ 对称,所以

$$A'Q=AQ,\ A'P=BP.$$



于是$\triangle A'PQ$ 的周长为$AB=\sqrt{3}r$.

由于周长一定的三角形中以正三角形的面积最大,所以

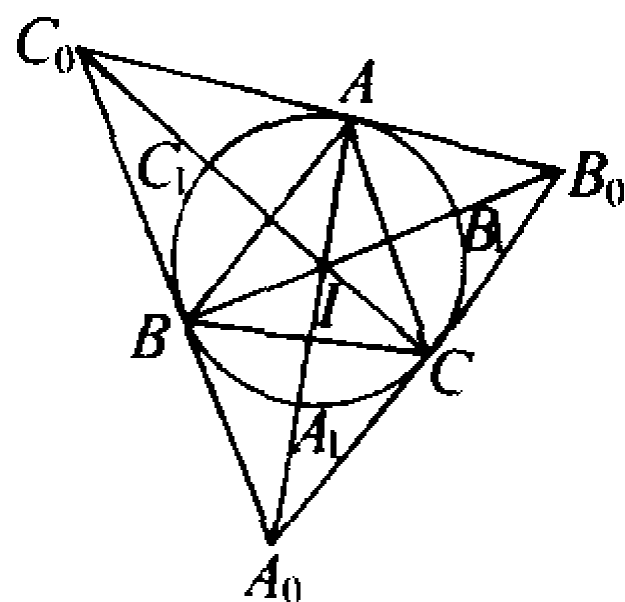
$$S_{\triangle A'PQ}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{3}r^2.$$

即　$S \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{3}r)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$.

则　$2S \geqslant \sqrt{3} r^2$.

12·161　已知：$\triangle ABC$ 是锐角三角形，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线延长后与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 A_1、B_1、C_1. 直线 AA_1 与 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线交于 A_0，点 B_0 与 C_0 与此类似而得. 求证：(1) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的面积的二倍. (2) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是 $\triangle ABC$ 的面积的四倍.

（第 30 届国际数学奥林匹克，1989 年）



[证]　(1) 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，则 I 为 AA_0、BB_0、CC_0 的交点. 因为

$$\angle BIA_1 = \angle ABI + \angle BAI = \frac{\angle ABC + \angle BAC}{2} = \angle IBC + \angle CBA_1 = \angle IBA_1.$$

$\therefore$　$IA_1 = BA_1$.

又 $\because$　$\angle IBA_0$ 是直角，

$\therefore$　$\angle A_1BA_0 = \angle BA_0A_1$，

$\therefore$　$BA_1 = A_0A_1$.

从而 $IA_1 = A_0A_1$. 因此有　$S_{\triangle IBA_1} = S_{\triangle BA_1A_0}$.

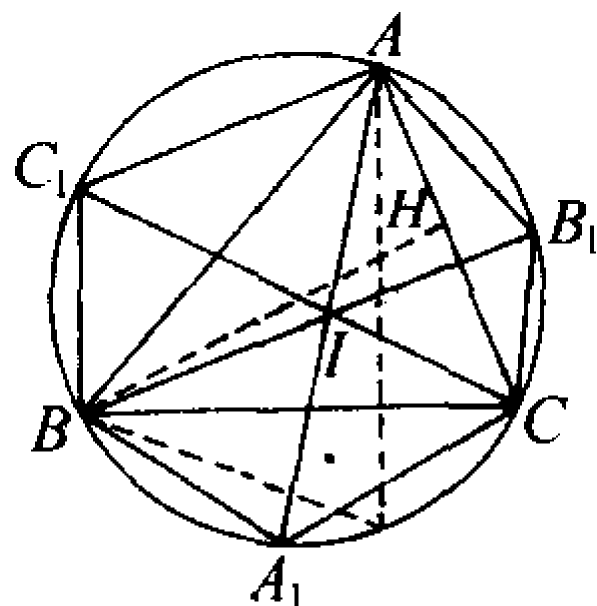
同理可证　$S_{\triangle ICA_1} = S_{\triangle CA_1A_0}$，

$S_{\triangle ICB_1} = S_{\triangle CB_1B_0}$，$S_{\triangle IAB_1} = S_{\triangle AB_1B_0}$，

$S_{\triangle IAC_1} = S_{\triangle AC_1C_0}$，$S_{\triangle IBC_1} = S_{\triangle BC_1C_0}$.

将以上六个面积等式相加即得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BACB_1}.$$



(2) 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，连 AH 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D. 因为

$\angle HBC = \angle DAC = \angle DBC$，

$\angle BCD = \angle BAD = \angle BCH$.

$\therefore$　$\triangle BDC \cong \triangle BHC$.

又由于 AA_1 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 A_1 是

$\overset{\frown}{BA_1C}$的中点,因此

$$S_{\triangle BA_1C} \geqslant S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BHC}.$$

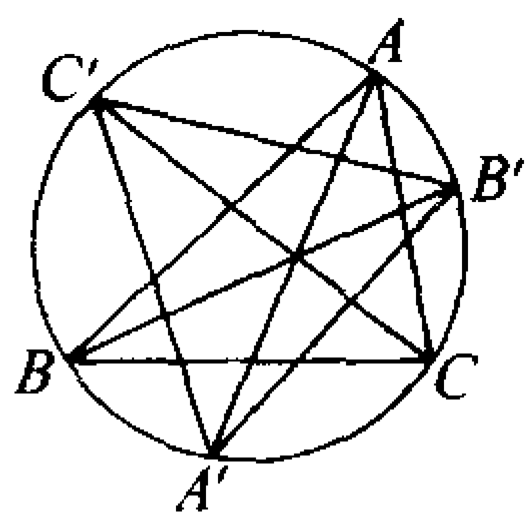
同理 $S_{\triangle AC_1B} \geqslant S_{\triangle AHB}$, $S_{\triangle ACB_1} \geqslant S_{\triangle AHC}$.

将以上三个面积不等式相加得 $S_{AC_1BA_1CB_1} \geqslant 2S_{\triangle ABC}$.

由(1)的结果 $S_{\triangle A_0B_0C_0} \geqslant 4S_{\triangle ABC}$.

12·162 $\triangle ABC$ 的外接圆K 的半径为R,内角平分线分别交圆 K 于 A'、B'、C'. 证明:不等式 $16Q^3 \geqslant 27R^4P$. 其中 Q、P 分别为$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 的面积.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)



[证] 设$\triangle ABC$ 的内角为α、β、γ,则

$$P = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

由于$\triangle A'B'C'$的内角为 $\frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}$, 则

$$Q = \frac{1}{2}R^2[\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta)].$$

由算术平均-几何平均不等式得

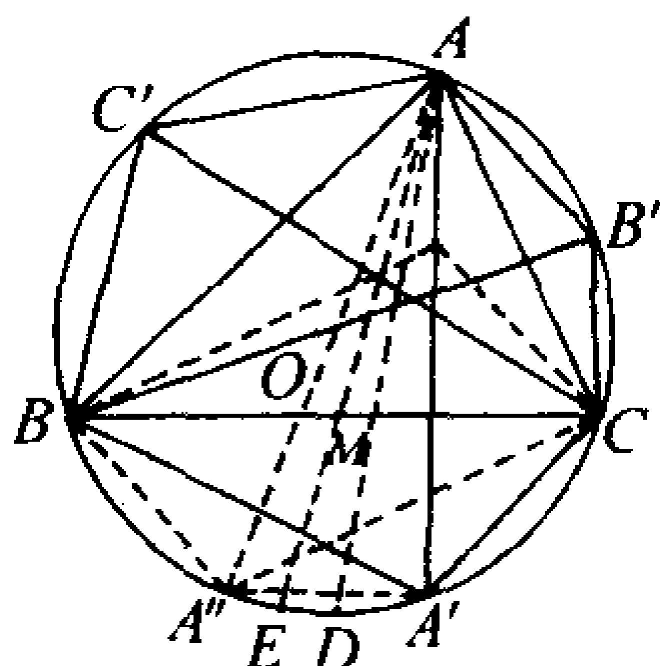
$$\begin{aligned}
16Q^3 &= 2R^6[\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta)]^3 \\
&\geqslant 2R^6 \cdot 27\sin(\gamma+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta) \\
&= 27R^6[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma)]\sin(\alpha+\beta) \\
&= 27R^6[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma]\sin(\alpha+\beta) \\
&= \frac{27}{2}R^6[\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin 2\alpha + \sin 2\beta] \\
&= \frac{27}{2}R^6(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \\
&= 27R^4P.
\end{aligned}$$

12·163 锐角$\triangle ABC$ 内接于圆 O,作$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高,边 CA 上的中线和$\angle C$ 的平分线并延长,分别交$\odot O$ 于点 A'、B'、C'. 求证:$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$.

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[证] 取$\triangle ABC$ 的垂心 H,连结 BH、CH,于是

$\triangle HBC \cong \triangle A'BC$.



过点 A 作 BC 上的中线和$\angle A$ 的平分线，分别交$\odot O$ 于点E 和D，BC 中点为M. 作$\odot O$ 直径AA''，连结 BA''、$A''C$、$A''A'$，于是 $A''A' \perp AA'$.

$\because$ $AA' \perp BC$，$\therefore$ $A''A' /\!/ BC$.

$\therefore$ $S_{\triangle A''BC} = S_{\triangle A'BC}$.

$\because$ AD 平分$\angle BAC$，

$\therefore$ 点 D 为$\overset{\frown}{BC}$中点.

$\therefore$ O、M、D 三点共线. $\therefore$ 点 E 在$\overset{\frown}{A''D}$上.

$\therefore$ $S_{\triangle DBC} \geqslant S_{\triangle A'BC}$. $S_{\triangle EBC} \geqslant S_{\triangle A'BC}$.

$\therefore$ $S_{\triangle DBC} \geqslant S_{\triangle HBC}$，$S_{\triangle EBC} \geqslant S_{\triangle HBC}$.

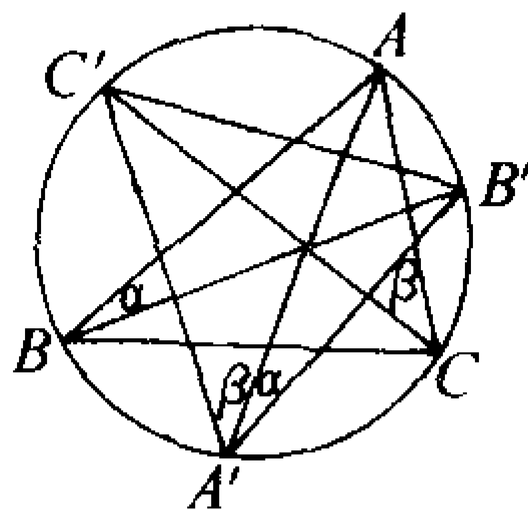
同理 $S_{\triangle B'AC} \geqslant S_{\triangle HAC}$，$S_{\triangle C'BA} \geqslant S_{\triangle HAB}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HCA} + S_{\triangle HAB}$$
$$\leqslant S_{\triangle A'CB} + S_{\triangle B'AC} + S_{\triangle C'BA}.$$

12·164 $\triangle ABC$ 的角 A、B、C 的内角平分线分别与外接圆交于 A'、B'、C'. 证明：$\triangle A'B'C'$的面积不小于$\triangle ABC$ 的面积.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］ 设 $AB = c$，$BC = a$，$CA = b$. 则



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A$$
$$= \frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A$$
$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

其中 R 为$\triangle ABC$ 外接圆的半径.

又 $\angle A' = \alpha + \beta = \dfrac{\angle B + \angle C}{2}$，

$\angle B' = \dfrac{\angle C + \angle A}{2}$，$\angle C' = \dfrac{\angle A + \angle B}{2}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle A'B'C'} = 2R^2 \sin A' \sin B' \sin C'$$
$$= 2R^2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}.$$

$$\because \quad 2\sin\frac{A+B}{2} \geqslant 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin A + \sin B$$
$$\geqslant 2\sqrt{\sin A\sin B},$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A+B}{2} \geqslant \sqrt{\sin A\sin B},$$

且 $\sin\frac{B+C}{2} \geqslant \sqrt{\sin B\cdot\sin C}$,

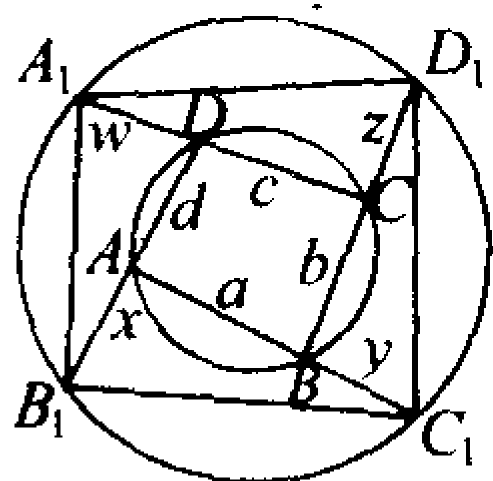
及 $\sin\frac{C+A}{2} \geqslant \sqrt{\sin C\cdot\sin A}$.

从而有 $S_{\triangle A'B'C'} = 2R^2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$

$$\geqslant 2R^2\cdot\sin A\sin B\sin C = S_{\triangle ABC}.$$

12·165 设圆 K 与 K_1 同心,它们的半径分别为 R 和 R_1, $R_1 > R$. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 K,四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1 且点 A_1、B_1、C_1、D_1 分别在射线 CD、DA、AB、BC 上,求证: $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geqslant \frac{R_1^2}{R^2}$.

(第 8 届中国中学生数学冬令营,1993 年)



[解] 将四边形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积分别记为 S 和 S_1,于是有

$$\frac{S_1}{S} = 1 + \frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S} + \frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S} + \frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S} + \frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S} \qquad ①$$

$$\because \quad \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \angle DAB = \angle DCB = 180^\circ - \angle A_1CD_1,$$
$$\angle A_1DB_1 = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - \angle C_1BD_1,$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S} = \frac{x(a+y)}{ad+bc}, \quad \frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S} = \frac{y(b+z)}{ab+cd},$$
$$\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S} = \frac{z(c+w)}{ad+bc}, \quad \frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S} = \frac{w(d+x)}{ab+cd}, \qquad ②$$

其中 $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, x = AB_1, y = BC_1, z = CD_1, w = DA_1$(见图).

由切割线定理知 $x(d+x) = y(a+y) = z(b+z) = w(c+w)$

$=R_1^2-R^2$,

从而由①、②式及均值不等式便得

$$\frac{S_1}{S}=1+(R_1^2-R^2)\left[\frac{x}{y(ad+bc)}+\frac{y}{z(ab+cd)}+\frac{z}{w(ad+bc)}+\frac{w}{x(ab+cd)}\right]$$

$$\geqslant 1+4(R_1^2-R^2)\frac{1}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}. \quad ③$$

再由均值不等式又有

$$2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}\leqslant(ad+bc)+(ab+cd)=(a+c)(b+d)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2\leqslant 8R^2, \quad ④$$

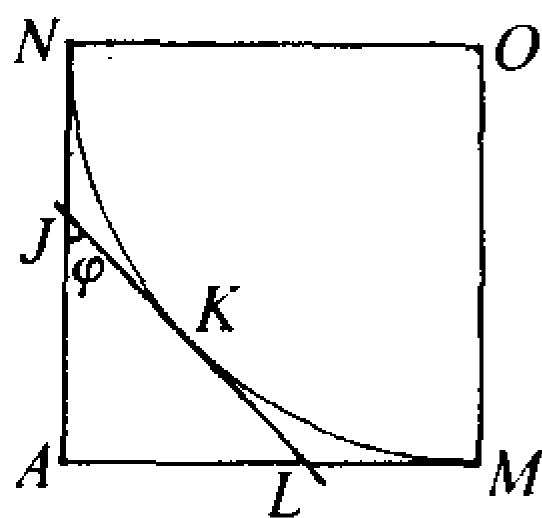
其中最后一个不等式是因为圆内接四边形中,正方形的周长最大.

将④式代入③式即得 $\frac{S_1}{S}\geqslant 1+\frac{R_1^2-R^2}{R^2}=\frac{R_1^2}{R^2}$.

12·166　已知:正方形和三角形都外切于半径为 1 的圆.证明:正方形和三角形的公共部分的面积必大于 3.4,你能否断定这个面积必大于 3.5?

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[解]　当外切三角形的边不平行于外切正方形的边时,三角形的边截正方形一角所成的直角三角形便在"公共部分"之外.先讨论这样的直角三角形的面积.



如右图,JKL 为外切三角形的边的一部分截正方形一角得直角三角形 JAL,易知其周长为 2.设 JL 与 AN 的夹角为 φ(锐角),$|JL|=m$,则

$$m+m\sin\varphi+m\cos\varphi=2,$$

$$\therefore \quad m=\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}.$$

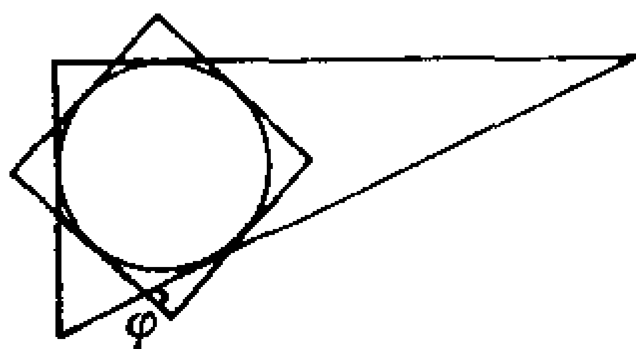
易证五边形 $ONJLM$ 的面积等于 m,所以三角形 JAL 的面积

$$S_\varphi=1-\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}\leqslant 1-\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}=(\sqrt{2}-1)^2.$$

当 $\varphi=45°$时上式取等号.

由于"公共部分"的面积 S 不小于外切正方形的面积减去三块这样的 S_φ，所以

$S \geqslant 4-3(\sqrt{2}-1)^2=6\sqrt{2}-5>3.4.$



下面指出，"公共部分"的面积未必大于 3.5. 可设计如左的图形：外切三角形的两条边分别与正方形的边成 45°，而引第三边时，使截得的直角三角形面积 S_φ 满足不等式

$$\frac{1}{2}-2(\sqrt{2}-2)^2<S_\varphi<(\sqrt{2}-1)^2.$$

这时"公共部分"的面积

$$S=4-2(\sqrt{2}-1)^2-S_\varphi<4-2(\sqrt{2}-1)^2-\frac{1}{2}+2(\sqrt{2}-1)^2=3.5.$$

前面已证 $S_\varphi<(\sqrt{2}-1)^2$，今再证满足 $S_\varphi>\frac{1}{2}-2(\sqrt{2}-1)^2$ 的锐角 φ 确实存在.

令 $1-\dfrac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}>\dfrac{1}{2}-2(\sqrt{2}-1)^2.$

此式可变形为

$$\sqrt{2}\sin(45^\circ+\varphi)>(8\sqrt{2}-9)/(13-8\sqrt{2}),$$

即 $\sin(45^\circ+\varphi)>\dfrac{64+11\sqrt{2}}{82}.$

从上图中注意到 $45^\circ<\varphi<90^\circ$，所以当

$$45^\circ<\varphi<135^\circ-\arcsin\left(\frac{64+11\sqrt{2}}{82}\right)$$

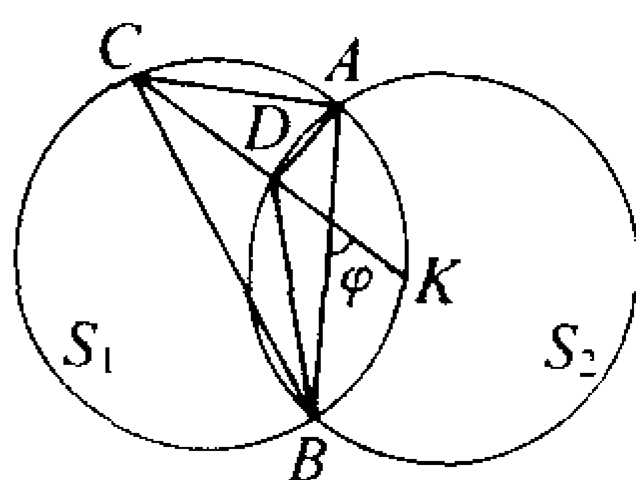
时，便有 $S_\varphi>\dfrac{1}{2}-2(\sqrt{2}-1)^2.$

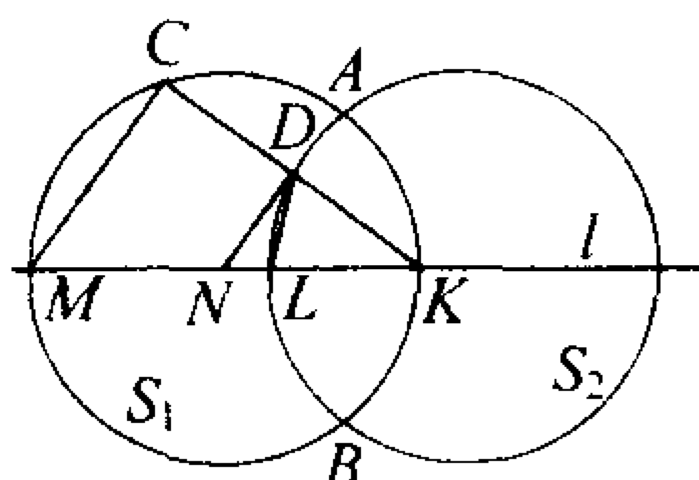
这时，"公共部分"的面积将小于 3.5.

12·167 设半径都是 r 的两圆 S_1 和 S_2 交于 A、B 两点，点 K 是 $\odot S_1$ 上位于 $\odot S_2$ 内部的 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，点 C 在 $\odot S_1$ 上且位于 $\odot S_2$ 之外. 线段 KC 交 $\odot S_2$ 于点 D. 求证：$S_{ACBD}\leqslant r^2$.

（前苏联教委推荐试题，1989 年）

[证]





设四边形 $ACBD$ 的两条对角线 AB、CD 所在的直线交角为 φ，于是有

$$S_{ACBD}=\frac{1}{2}AB\cdot CD\sin\varphi\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot CD. \qquad ①$$

设连心线 l 交 $\odot S_1$ 于点 M、K，l 与 $\odot S_2$ 的位于 M、K 之间的交点为 L，连结 CM、DL 并过点 D 作 $DN /\!/ CM$ 交 l 于点 N.

∵ $\angle MCK=\angle NDC=90°$， ∴ $MN>CD$.

∵ $\angle LDK<90°$， ∴ 点 N 位于点 M 与 L 之间.

∴ $CD<MN<ML$. ②

设两圆的圆心距为 d，于是 $ML=d$ 且 $AB=\sqrt{4r^2-d^2}$. 由此及①、②即得

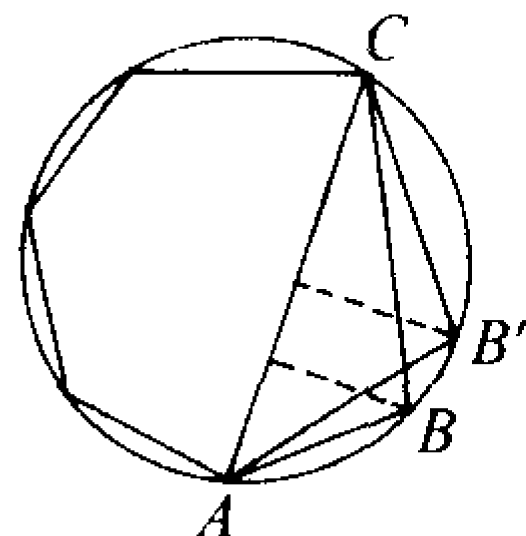
$$S_{ACBD}\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot ML=\frac{1}{2}\sqrt{d^2(4r^2-d^2)}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{d^2+(4r^2-d^2)}{2}=r^2.$$

12·168 求证：单位圆的内接任意 n 边形的面积不大于 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

（中国上海市数学竞赛，1957年）

[证] 在单位圆内的内接正 n 边形的面积

$$S=n\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$



如 A、B、C 是圆内接任意 n 边形的三个相邻顶点（如图），取 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点 B'，联 AB'、$B'C$，则

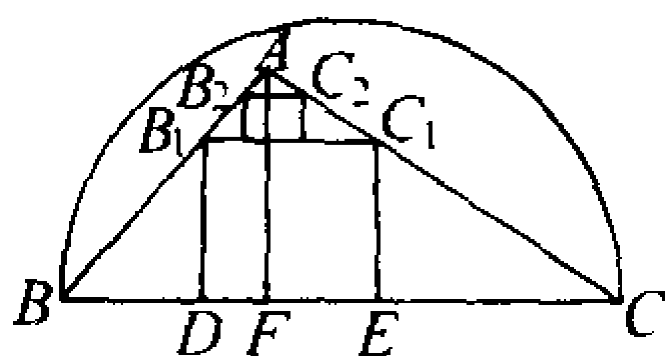
$$S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle AB'C}.$$

推广之得，单位圆内接任意 n 边形的面积≤单位圆内接正 n 边形的面积，

∴　单位圆内接任意 n 边形的面积不大于$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

12·169　假设△ABC 的$\angle A\geqslant 90°$,靠着△ABC 的边BC 作内接正方形 B_1DEC_1(如图).在△AB_1C 内靠着 B_1C_1 再作内接正方形 $B_2D_1E_1C_2$.这样继续作任意有限个正方形.证明:所有这些正方形的面积的和小于△ABC 的面积的一半.

(中国北京市数学竞赛,1964 年)



[证 1]　作△ABC 边BC 上高AF.

∵　$\angle A\geqslant 90°$,∴　A 点在BC 为直径的圆上或圆内,故

$$AF\leqslant\frac{1}{2}BC.$$

但　$\frac{BD}{BF}=\frac{B_1D}{AF},\frac{EC}{FC}=\frac{C_1E}{AF}$,

∴　$BD+EC=\frac{B_1D}{AF}(BF+FC)=\frac{B_1D}{AF}\cdot BC\geqslant 2B_1D$,

则　$S_{\triangle BB_1D}+S_{\triangle CC_1E}=\frac{1}{2}B_1D\cdot BD+\frac{1}{2}C_1E\cdot EC$

$=\frac{1}{2}B_1D(BD+EC)\geqslant\frac{1}{2}B_1D\cdot 2B_1D$

$=B_1D^2=S_{正方形B_1DEC_1}$,

即　$S_{正方形B_1DEC_1}\leqslant\frac{1}{2}S_{梯形B_1BCC_1}$,

同理　$S_{正方形B_2D_1E_1C_2}\leqslant\frac{1}{2}S_{梯形B_2B_1C_1C_2}$,

…………

$S_{正方形B_nD_{n-1}E_{n-1}C_n}\leqslant\frac{1}{2}S_{梯形B_nB_{n-1}C_{n-1}C_n}$

设 n 个正方形面积之和为 S,将以上不等式相加,得

$$S\leqslant\frac{1}{2}(S_{梯形B_1BCC_1}+S_{B_1B_2C_2C_1}+\cdots+S_{B_nB_{n-1}C_{n-1}C_n})$$

$$=\frac{1}{2}S_{梯形BB_nC_nC}<\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

[证 2]　设 $BC=a$,n 个正方形的边长分别为 a_1、a_2、…、a_n.作

$\triangle ABC$ 边 BC 上高 AF，设 $AF = h$.

$\because \quad BC /\!/ B_1C_1 /\!/ B_2C_2$,

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a} = \frac{h - a_1}{h} = \frac{h}{a + h},$$

$$\text{且} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{h - a_1 - a_2}{h - a_1} = \frac{h - a_1}{h},$$

$$\text{故} \quad \frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a_1}.$$

同理可推得 $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{a_2}{a_1} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = k$，且 $0 < k = \dfrac{h}{a + h} < 1$.

于是

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ = & a^2k^2 + a^2k^4 + \cdots + a^2k^{2n} \\ = & \frac{a^2k^2 - a^2k^{2n+2}}{1 - k^2} \\ < & \frac{a^2k^2}{1 - k^2} \\ = & \frac{ah^2}{a + 2h}. \end{aligned}$$

由于 $\angle A \geqslant 90°$，因此 A 点应在以 BC 为直径的圆上或圆内，知 $a \geqslant 2h$.

$$\text{故} \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < \frac{ah^2}{a + 2h} \leqslant \frac{ah^2}{2h + 2h} = \frac{1}{4}ah = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

第十三章　极值问题

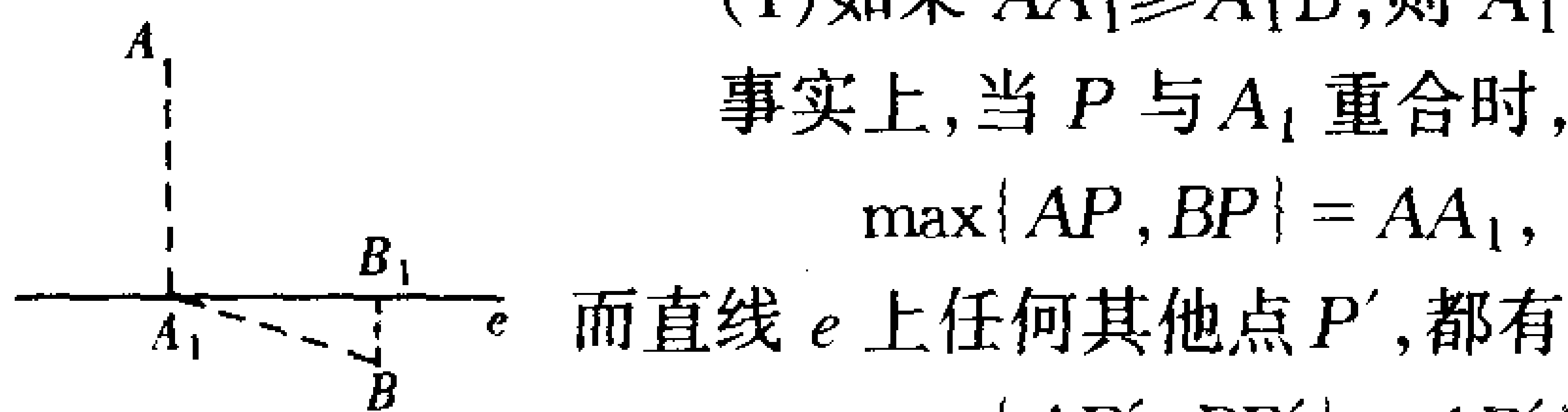
(一)线段极值问题

1. 三角形中的线段极值

13·1　在平面上给定一条直线和两个点 A 和 B,应该在这直线上怎样选取点 P,才能使 $\max\{AP,BP\}$ 有最小值?

(匈牙利数学奥林匹克,1928 年)

[解]　设 A 点到给定直线 e 的距离不小于 B 点到直线的距离,并设 A 到 e 的射影为 A_1,B 到 e 的射影为 B_1,即设 $AA_1 \geqslant BB_1$.



(1)如果 $AA_1 \geqslant A_1B$,则 A_1 就是所要求的点 P.事实上,当 P 与 A_1 重合时,

$$\max\{AP,BP\}=AA_1,$$

而直线 e 上任何其他点 P',都有

$$\max\{AP',BP'\}=AP'>AA_1=\max\{AP,BP\}.$$

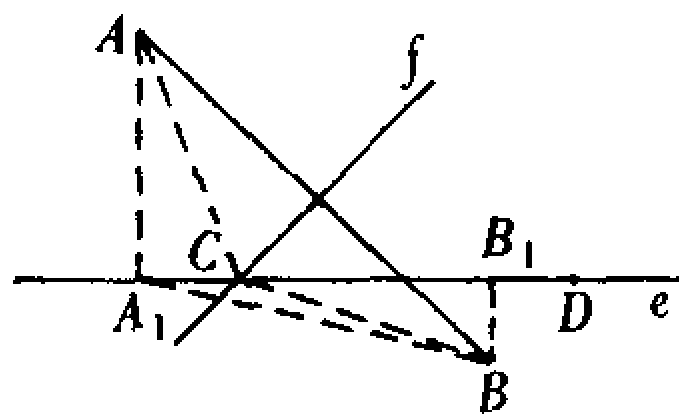
(2)如果 $AA_1<A_1B$.

作线段 AB 的中垂线 f.

如果某一点到点 A 的距离小于这点到 B 的距离,则该点属于以直线 f 为边界且包含点 A 的半平面.同样,如果某一点到点 B 的距离小于这点到 A 的距离,则该点属于以直线 f 为边界且包含点 B 的半平

面.

$\because \quad AA_1 < A_1B, \quad BB_1 \leqslant AA_1 < AB_1,$



$\therefore$ 点 A_1 和点 B_1 分别属于直线 f 所分成的不同的半平面,因此,线段 A_1B_1 与直线 f 交于一点 C.

我们证明:点 C 就是所要求的点.

事实上,有 $\max\{AC, BC\} = AC = BC$.

如果在直线 e 上取一个异于 C 的点 D,并设点 D 点 B_1 在 C 的同一侧,于是 $AD > AC$.

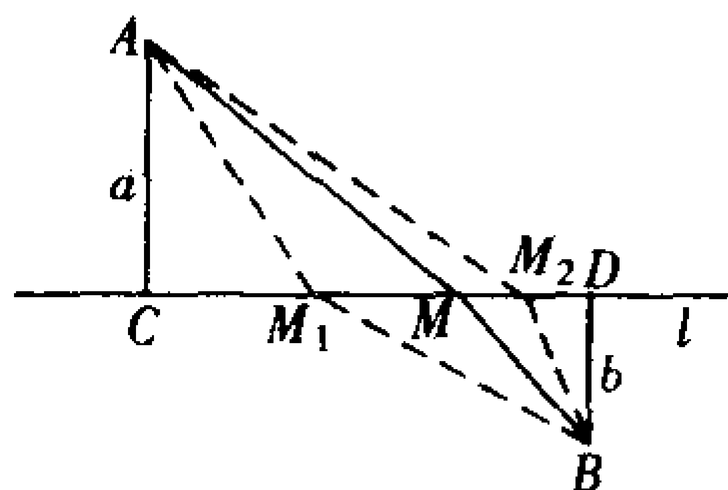
$\therefore \quad \max\{AD, BD\} > \max\{AC, BC\}$.

因此 C 点为所求.

13·2 定点 A 和 B 分别在定直线 l 两侧,$AC \perp l$,$BD \perp l$,C、D 是垂足,M 是 CD 内的点,p 和 q 是已知的正数,试证:当 $p \cdot AM + q \cdot BM$ 最小时有 $p \cdot \sin\angle CAM = q \cdot \sin\angle DBM$.

(中国福建省数学竞赛,1978 年)

[证 1] 如果 $t = p \cdot AM + q \cdot BM$ 最小,则点 M 在 l 上向左右邻近移动时,相应的 t 值都连续增大,对于左邻每一点 M_1,都可在右邻找到点 M_2,使相应的 t 值相等,即



$$p \cdot AM_1 + q \cdot BM_1 = p \cdot AM_2 + q \cdot BM_2.$$

令 $\angle M_1AC = \alpha_1, \quad \angle M_1BD = \beta_1,$

$\angle M_2AC = \alpha_2, \quad \angle M_2BD = \beta_2,$

$AC = a, \quad BD = b,$

则有 $pa\sec\alpha_1 + qb\sec\beta_1 = pa\sec\alpha_2 + qb\sec\beta_2,$

即 $qb(\sec\beta_1 - \sec\beta_2) = pa(\sec\alpha_2 - \sec\alpha_1),$

或 $$\frac{qb(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)}{\cos\beta_1\cos\beta_2} = \frac{pa(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1},$$

有 $$\frac{qb\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2}}{\cos\beta_1\cos\beta_2} = \frac{pa\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1}. \quad ①$$

又 $a\operatorname{tg}\alpha_1 + b\operatorname{tg}\beta_1 = a\operatorname{tg}\alpha_2 + b\operatorname{tg}\beta_2,$

即 $b(\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2) = a(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1),$

有 $$b\frac{\sin\beta_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\sin\beta_2}{\cos\beta_1\cos\beta_2}=a\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1}$$

故 $$\frac{b\sin(\beta_1-\beta_2)}{\cos\beta_1\cos\beta_2}=\frac{a\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1}. \quad ②$$

①÷②得 $$\frac{q\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}{\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}}=\frac{p\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}.$$

当 $M_1\to M$ 时，$M_2\to M$，$\alpha_1\to\angle MAC$，$\alpha_2\to\angle MAC$，$\angle\beta_1\to\angle MBD$，$\angle\beta_2\to\angle MBD$.

上式成为 $q\sin\angle MBD=p\sin\angle MAC$.

[证 2] 仿上得 $p\cdot AM_1+q\cdot BM_1=p\cdot AM_2+q\cdot BM_2$，

即 $p(AM_2-AM_1)=q(BM_1-BM_2)$.

令 $CM_1=x_1$，$CM_2=x_2$，$CD=c$，

则有 $$p(\sqrt{x_2^2+a^2}-\sqrt{x_1^2+a^2})$$
$$=q[\sqrt{(c-x_1)^2+b^2}-\sqrt{(c-x_2)^2+b^2}],$$

故 $$\frac{p(x_2^2-x_1^2)}{\sqrt{x_2^2+a^2}+\sqrt{x_1^2+a}}=\frac{q[(c-x_1)^2-(c-x_2)^2]}{\sqrt{(c-x_1)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_2)^2+b^2}}$$

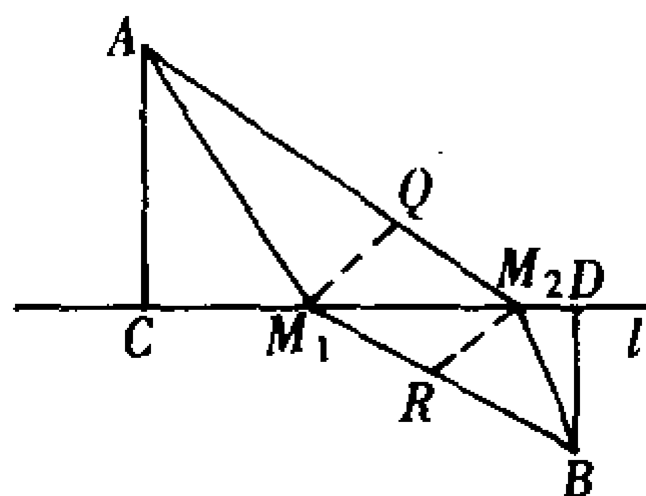
或 $$\frac{p(x_2+x_1)}{\sqrt{x_2^2+a^2}+\sqrt{x_1^2+a^2}}=\frac{q(2c-x_1-x_2)}{\sqrt{(c-x_1)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_2)^2+b^2}}.$$

当 $M_1\to M$ 时，$M_2\to M$，x_1、$x_2\to x=CM$，上式两边取极限得

$$\frac{2px}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{2q(c-x)}{2\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

即 $$\frac{p\cdot CM}{AM}=\frac{q\cdot DM}{BM},$$

亦即 $p\sin\angle CAM=q\sin\angle DBM$.



[证 3] 如前得

$$p\cdot AM_1+q\cdot BM_1=q\cdot AM_2+q\cdot BM_2,$$
$$p(AM_2-AM_1)=q(BM_1-BM_2).$$

在 AM_2 上截取 $AQ=AM_1$，在 BM_1 上截取 $BR=BM_2$，则上式成为

$$p\cdot QM_2=q\cdot RM_1. \tag{①}$$

当 $M_1\to M$ 时，$M_2\to M$，$\angle AM_2C\to\angle AMC$，$\angle BM_1D\to\angle BMD$，$\angle M_1QM_2$ 和 $\angle M_1RM_2$ 都趋近于直角，所以

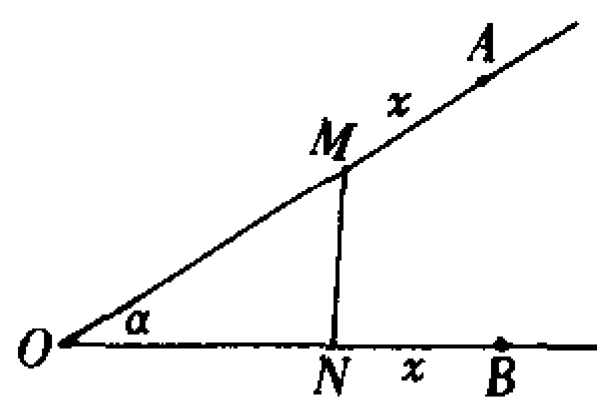
$$QM_2:RM_1=\frac{QM_2}{M_1M_2}:\frac{RM_1}{M_1M_2}\to\frac{\cos\angle AMC}{\cos\angle BMD}=\frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle DBM}.$$

代入②即得 $p\sin\angle MAC=q\sin\angle DBM$.

13·3 在 $\angle AOB$ 的两边上分别自 O 点开始截取线段 OA 和 OB，使 $OA>OB$. 在线段 OA 上取点 M，在 OB 上取点 N，使得 $AM=BN=x$. 试求：当线段 MN 的长度最短时的 x 的值

（第 9 届莫斯科数学奥林匹克，1946 年）

［解］ 显然 M、N 分别在 OA、OB 内方能最小. 设 $OA=a$，$OB=b$.



$$MN^2=OM^2+ON^2-2\cdot OM\cdot ON\cos\alpha$$
$$=(a-x)^2+(b-x)^2-2(a-x)(b-x)\cos\alpha$$
$$=a^2-2ax+x^2+b^2-2bx+x^2+2\cos\alpha(ab-ax-bx+x^2)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\alpha+2[x^2-(a+b)x](1+\cos\alpha),$$

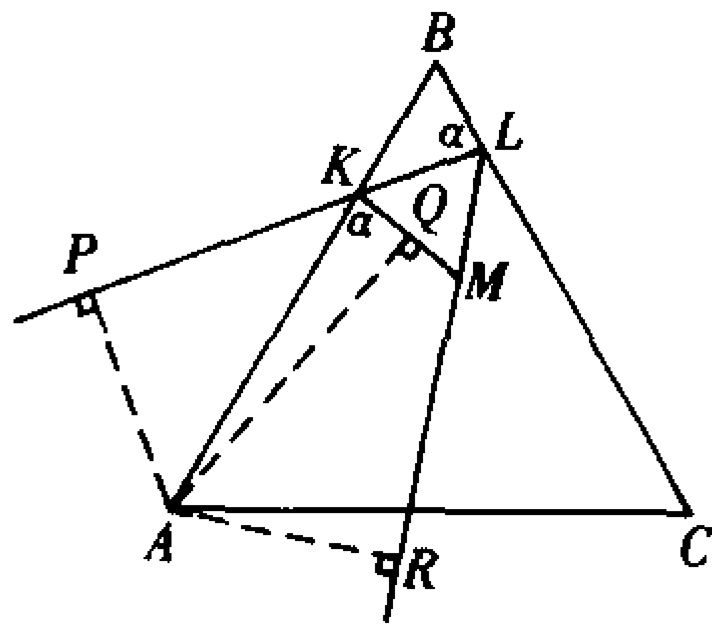
今欲 MN 最小，只要 $y=x^2-(a+b)x$ 最小即可.

即当 $x=\dfrac{1}{2}(a+b)$ 时，MN 最小.

13·4 两个等边 $\triangle ABC$ 和 $\triangle KLM$ 的边长分别是 1 和 $\dfrac{1}{4}$. 又 $\triangle KLM$ 在 $\triangle ABC$ 的内部. 记 Σ 表示 A 到直线 KL、LM、MK 的距离之和. 试求：当 Σ 取得最大值时，$\triangle KLM$ 的位置.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

［解］ 首先平移 $\triangle KLM$，使得 K 位于 AB 边上，L 位于 BC 边上，这样新的 Σ 的值将大于原来的 Σ 值. 由于



$$\angle BLK=120^\circ-\angle BKL=\angle AKM.$$

记 $\angle BLK=\alpha$.

考虑下面两种情况.

(1) $60^\circ\leqslant\alpha\leqslant120^\circ$.

这时 A 点位于$\angle KLM$ 的内部，设 AP、AQ、AR 分别为 A 到$\triangle KLM$ 三边的距离，则

$$S_{\triangle AKL}=\frac{1}{2}\cdot KL\cdot AP=\frac{1}{8}\cdot AP,$$

故 $AP=8S_{\triangle AKL}$.

同样 $AQ=8S_{\triangle AKM}$. $AR=8S_{\triangle ALM}$.

$\therefore\ \sum=8(S_{\triangle AKL}+S_{\triangle ALM}+S_{\triangle AKM})=8(S_{\triangle KLM}+2S_{\triangle AKM})$.

因为 $S_{\triangle KLM}$的值固定，所以当且仅当 $S_{\triangle AKM}$取得最大值时，$\sum$取得最大值.

$$S_{\triangle AKM}=\frac{1}{2}\cdot AK\cdot\frac{1}{4}\sin\alpha=\frac{1}{8}AK\sin\alpha.$$

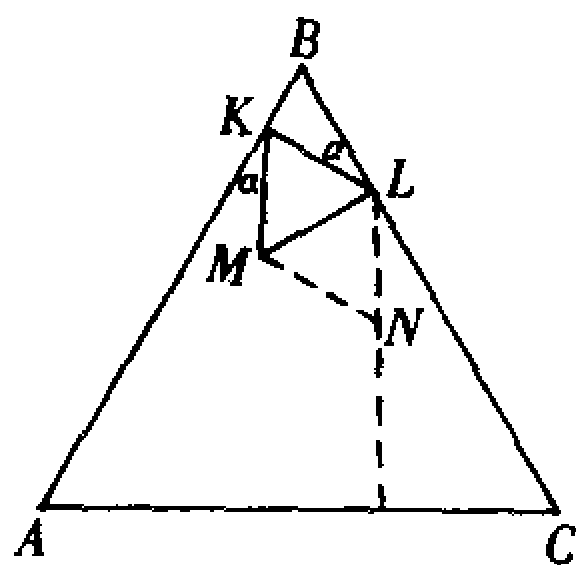
又 $BK=\dfrac{KL\cdot\sin\alpha}{\sin B}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}KL\sin\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}$,

且 $AK=1-BK=1-\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}$.

注意到 $S_{\triangle AKM}=f(\alpha)=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}\right)\sin\alpha$, $60^\circ\leqslant\alpha\leqslant120^\circ$,

在 $\sin\alpha=1$，即 $\alpha=90^\circ$时取得最大值.

所以，$\sum$在 KM 与 AB 垂直时取得最大值.



(2) $0^\circ\leqslant\alpha<60^\circ$.

这是 A 位于$\angle KLM$ 的外部.

设 N 是 K 关于直线 LM 的对称点，因为 $\alpha<60^\circ$，所以

$$BL<KL\cdot\sin60^\circ<\frac{1}{2}\leqslant LC.$$

因此 N 在$\triangle ABC$ 的内部.

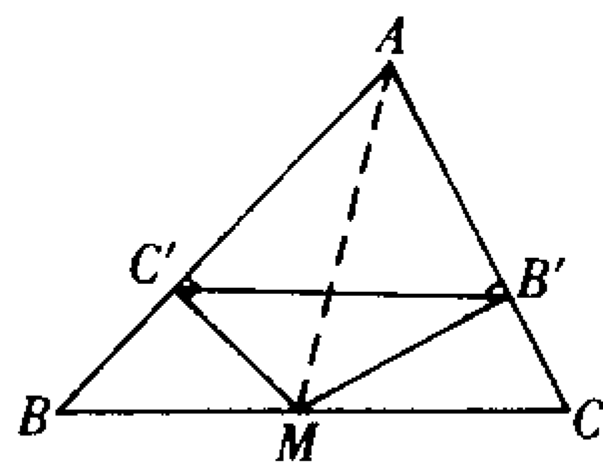
两个三角形$\triangle KLM$ 与$\triangle NLM$ 的$\sum$值显然相同，而$\angle MLB\geqslant60^\circ$，这时 A 在$\angle MLN$ 的内部，问题归结为(1)，因此仍为$\triangle KML$ 的一边与$\triangle ABC$ 的一边垂直时，$\sum$取得最大值.

13·5 设$\triangle ABC$ 中，BC 上一点 M 到 AC、AB 的正射影分别为 B'、C'. 确定 M 使 $B'C'$为最小.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

[解] 如图，由 $MB'\perp AC$，$MC'\perp AB$，

则 A、C'、M、B' 四点共圆，且 AM 为该圆的直径.



由正弦定理可得 $B'C'=AM\cdot\sin A$.

由于 A 是定角，则当 AM 最小时，$B'C'$ 最小. 因此 AM 为 BC 的高，M 为垂足时，$B'C'$ 最小.

13·6 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=5$，$AC=12$，$AB=13$. 在边 AB、AC 上分别取点 D、E，使线段 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分. 试求：这样线段的最小长度.

（全国初中数学联赛，1993 年）

［解］ 由于 $5^2+12^2=13^2$，知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times5\times12=30$.

设 $AD=x$，$AE=y$.

由于 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}xy\sin A=15$，$\sin A=\frac{5}{13}$， 知 $xy=78$.

由余弦定理知

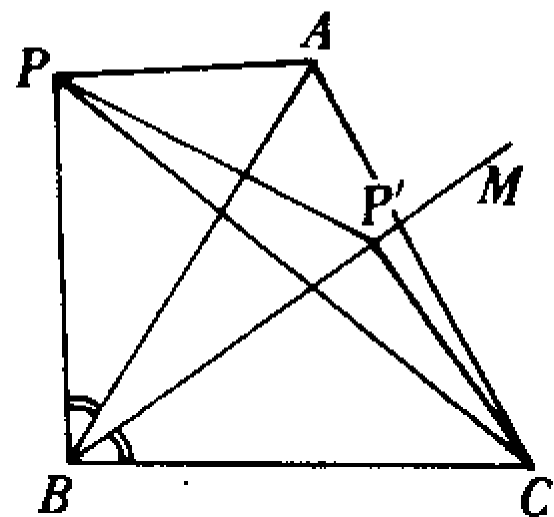
$$DE^2=x^2+y^2-2xy\cos A=(x-y)^2+2xy(1-\cos A)$$
$$=(x-y)^2+2\times78\times\left(1-\frac{12}{13}\right)=(x-y)^2+12\geqslant12,$$

当 $x=y$ 时，上式的等号成立，此时 $DE=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 达到最小值.

13·7 由平面上的定点 P 到某个等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 和 B 的距离分别是：$AP=2$，$BP=3$. 试确定线段 PC 的长度的最大可能值.

（第 24 届莫斯科数学奥林匹克，1961 年）

［解］ 引射线 BM，使得 $\angle CBM=\angle ABP$，在 BM 上截取 $BP'=BP$，如图.



则 $\angle PBM=\angle PBA+\angle ABM=\angle CBM+\angle ABM=\angle ABC=60°$.

$\therefore$ $\triangle BPP'$ 是等边三角形，即 $PB=P'B=PP'$.

又 $\angle ABP=\angle CBP'$，$AB=BC$，

$\therefore$ $\triangle ABP\cong\triangle CBP'$，有 $P'C=PA$，

$$PA+PB=PP'+P'C \geqslant PC.$$

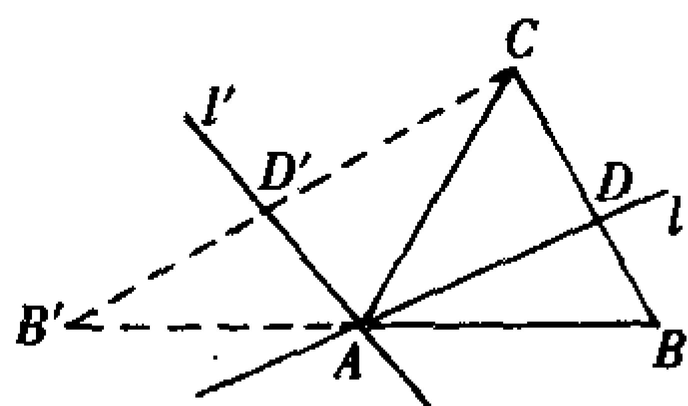
在令 P' 在 PC 上,则 PC 可取得最大值 5.

13·8 设△ABC 是边长为 6 的正三角形,过顶点 A 引直线 l,顶点 B、C 到 l 的距离记为 d_1、d_2.求:d_1+d_2 的最大值.

(中国上海市数学竞赛,1992 年)

[解] 延长 BA 到 B',使 $AB'=AB$.

连 $B'C$,则过顶点 A 的直线 l 或者与 BC 相交,或者与 $B'C$ 相交.



(1)若 l 与 BC 相交于 D,则

$$\frac{1}{2}(d_1+d_2)\cdot AD$$
$$=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$$
$$=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36=9\sqrt{3},$$

且 $d_1+d_2=\frac{18\sqrt{3}}{AD}<\frac{18\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=6$.等号当且仅当 $l\perp BC$ 时取到.

(2)若 l' 与 $B'C$ 相交于 D',则

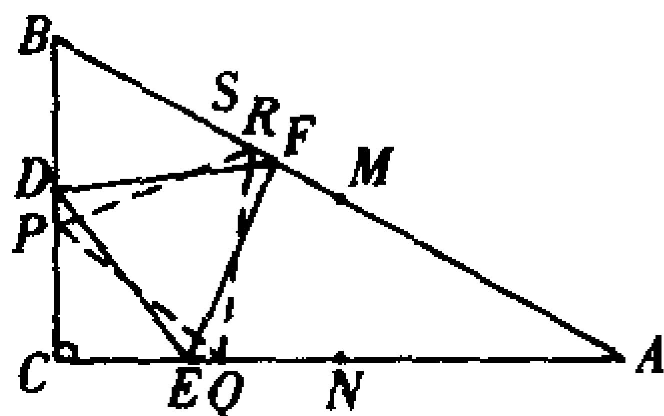
$$\frac{1}{2}(d_1+d_2)\cdot AD'=S_{\triangle B'D'A}+S_{\triangle ACD'}$$
$$=S_{\triangle AB'C}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36,$$

且 $d_1+d_2=\frac{18\sqrt{3}}{AD'}\leqslant\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$.等号当且仅当 $l'\perp B'C$ 时取到.

综上所述,d_1+d_2 的最大值是 $6\sqrt{3}$.

13·9 在△ABC 中,$\angle C=90°$,$\angle A=30°$,$BC=1$.求:△ABC 的内接三角形(三顶点分别在三边上的三角形)的最长边的最小值.

(第 11 届中国中学生数学冬令营,1996 年)



[解] 首先在△ABC 的内接正三角形的范围内,求边长的最小值.

在 BC 上任取一点 D,记 $BD=x$.

然后,分别在 CA、AB 上取点 E 和 F,使

$$CE=\frac{\sqrt{3}}{2}x,BF=1-\frac{x}{2}.$$

由余弦定理有

$$\begin{aligned}DF^2&=BD^2+BF^2-2BD\cdot BF\cdot\cos60^\circ\\&=x^2+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2x\left(1-\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\&=\frac{7}{4}x^2-2x+1,\end{aligned}$$

$$DE^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1,$$

$$\begin{aligned}EF^2&=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos30^\circ\\&=\frac{7}{4}x^2-2x+1.\end{aligned}$$

于是　$DE=EF=FD$，即$\triangle DEF$是正三角形.

这表明,对于BC上任一点D,都可以作出一个内接正三角形.

记CA、AB的中点分别为N、M,BM的中点为S,则当点D从B变到C时,点E从C变到N,点F从M变到S.

记$\triangle DEF$的边长为a,则

$$a^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1=\frac{7}{4}\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{3}{7}.$$

于是当$x=\frac{7}{4}$时,边长a取得最小值$\sqrt{\frac{3}{7}}$,如图中P、Q、R的位置.

下面证明,任何内接三角形的最大边的边长都不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

为方便计,引入以C为原点,CA为正半x轴的直角坐标系.

设$\triangle XYZ$为$\triangle ABC$的任一内接三角形,其中点X、Y、Z分别位于BC、CA、AB上.

在BM上取点R_1,使$MR_1=\frac{1}{3}MB$,取点R_2,使$MR_2=\frac{3}{14}MB$,

于是　$AR_1=\frac{2}{3}AB$，$BR_2=\frac{11}{14}BM$，从而有

$y_{R_1}=\frac{2}{3}>\sqrt{\frac{3}{7}}$.　$x_{R_2}=\frac{11}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{10}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(1)若点 Z 位于线段 BR_1 上,则 $y_Z\geqslant y_{R_1}>\sqrt{\frac{3}{7}}$.

若点 Z 位于线段 R_2A 上,则 $x_Z\geqslant x_{R_2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$.

可见,这是△XYZ 的最长边的边长大于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(2)设点 Z 位于线段 R_1R_2 内部,则将 Z 作为 F,作正三角形 DEF,不难验证,$x_E<x_F$,$y_D<y_F$.

因而,若点 X 位于线段 DC 上,则 $ZX\geqslant ZD=FD$;

若点 Y 位于线段 CE 上,则 $ZY\geqslant ZE=FE$;

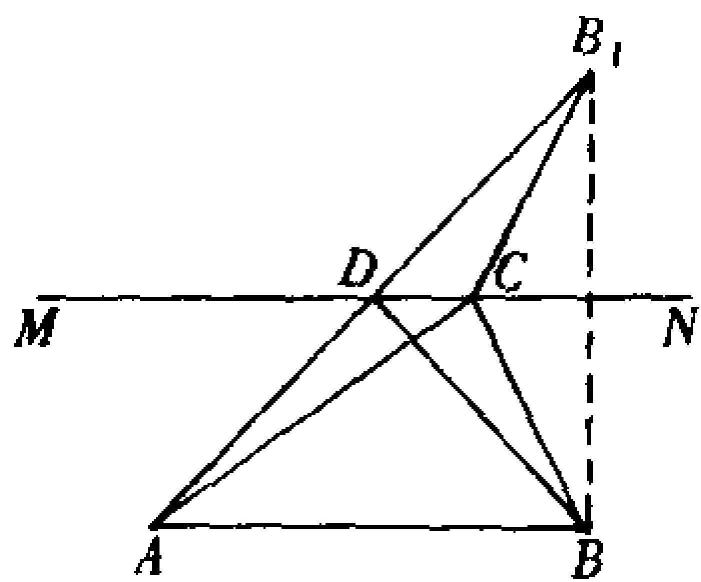
若点 X 位于 BD 上,且点 Y 位于 EA 上,则由勾股定理知 $XY\geqslant DE$,

所以△XYZ 的最长边的边长不小于△DEF 的边长,从而不小于 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

综上可知,所求最长边的最小值为$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

13·10　试证:在底边与面积给定的三角形中,等腰三角形有最小的周长.

(基辅数学奥林匹克,1948 年)



[证]　设底边 $AB=a$,且△ABC 的面积为 S.则这些三角形的顶点 C 在直线 MN 上,$MN/\!/AB$ 且距离为$\frac{2S}{AB}$.如图.

设 B'为 B 关于 MN 的对称点.

设 AB'与 MN 交于 C,则 C 即为所求之点.

首先　$AC=CB'=CB$.

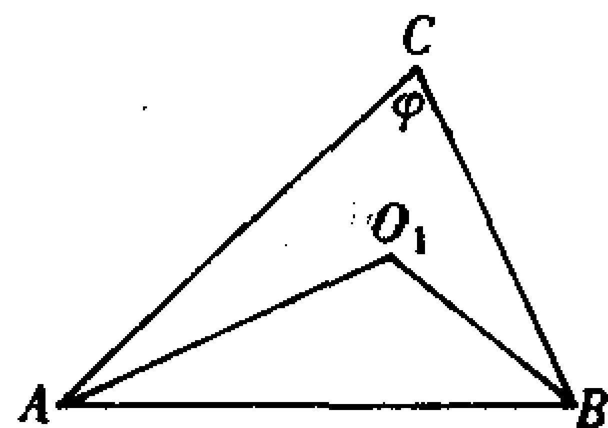
又　　D 是 MN 上任一点,则

$AC+CB=AC+CB'=AB'<AD+DB'=AD+DB$.

13·11　在底边 AB 及顶角 C 给定的所有三角形中，求具有最大内切圆半径的三角形.

(基辅数学奥林匹克，1970 年)

[解]　设 $\angle C=\varphi$，$\odot O_1(\gamma)$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆. 如图.



$$\begin{aligned}\angle AO_1B&=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)\\&=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)\\&=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ+\frac{1}{2}\varphi,\end{aligned}$$

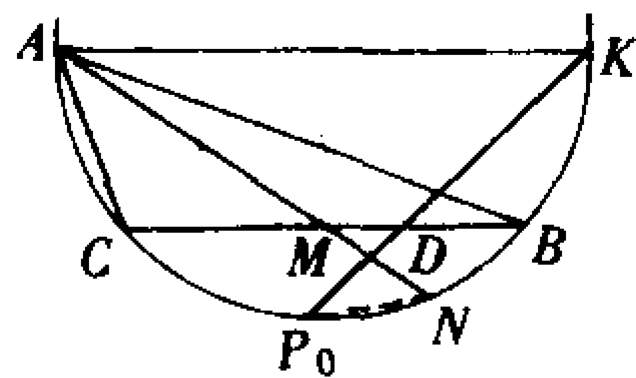
故 O_1 点的轨迹是以 AB 为弦，对 AB 所张的角为 $90^\circ+\frac{1}{2}\varphi$ 的圆弧.

故　当 $AC=BC$ 时，γ 最大.

13·12　在钝角 $\triangle ABC$（$\angle C$ 为钝角）的 BC 边上选取点 D（异于 B、C 点），过线段 BC（异于 D）的内点 M 引直线 AM，交 $\triangle ABC$ 的外接圆 S 于点 N，经过点 M、D 和 N 作圆，交圆 S 于点 N 及另一点 P. 问点 M 在何位置时，线段 MP 的长度最短.

(第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年)

[解]　过点 A 引 $AK\parallel CB$，交圆 S 于点 K，延长 KD，交圆 S 于点 P_0，现证明，P_0 就是题设中的 P 点.



(甲)

(1)当点 $N\neq P_0$ 时，设点 N 在 $\overset{\frown}{P_0B}$（$\overset{\frown}{CP_0}$）内（如图甲、乙）.

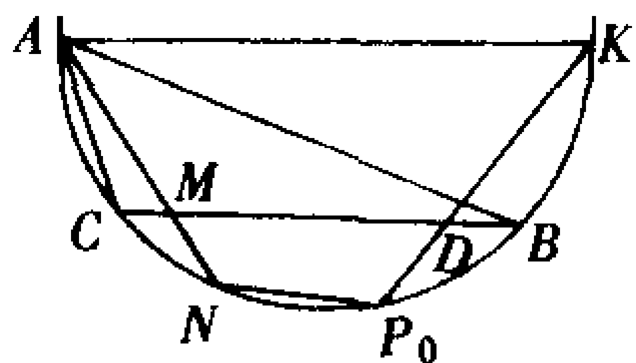
$\because$　A、K、N、P_0 共圆.

$\therefore$　$\angle ANP_0$ 与 $\angle AKP_0$ 相等（相补），

$\because$　$CB\parallel AK$，$\angle MDP_0=\angle AKP_0$.

$\therefore$　$\angle MNP_0$ 与 $\angle MDP_0$ 相等（相补）

因此，M、D、N、P_0 共圆. $P=P_0$.



(乙)

(2)当点 $N=P_0$ 时，以点 P_0 为位似中心，将点 K 变换为点 D，直线 AP_0 变换为自身，由于 $CB\parallel AK$，所以线段 AK 变换为线段 MD，即点 A 变换为点 M.

于是圆 S 就变换为△NMD 的外接圆. 因为 P_0 是位似中心,所以这两圆只有一个公共点,即 $P=P_0$.

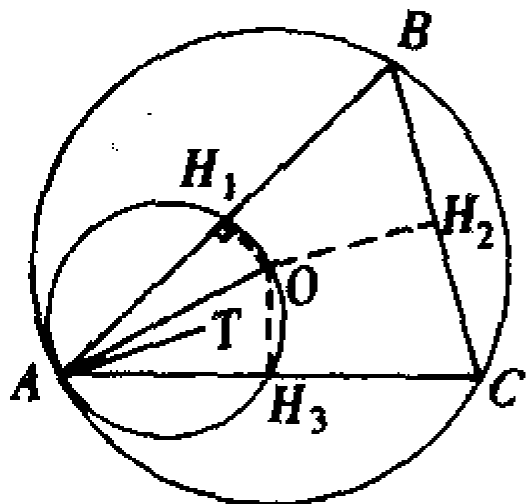
所以,所要求的点 M 的位置应是点 P_0 在 BC 上的射影.

因为$\angle A$ 是锐角,则该射影在线段 BC 内;

又因为$\angle KDC>\angle KBC=\angle ACB$,则$\angle KDC$ 是钝角,故点 P_0 在 BC 上的射影不会与点 D 重合.

13·13 对给定的△ABC 中的点 T, $m(T)$表示线段 TA、TB、TC 的长度的最小值,求△ABC 中所有使 $m(T)$取得最大值的点.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1974 年)



[解] (1)设△ABC 为非钝角三角形.

我们证明,所求的点 T 即是△ABC 外接圆的圆心.

设△ABC 外接圆的圆心为 O,半径为 R.

过 O 作 $OH_1\perp AB$ 于 H_1, $OH_2\perp BC$ 于 H_2, $OH_3\perp AC$ 于 H_3,

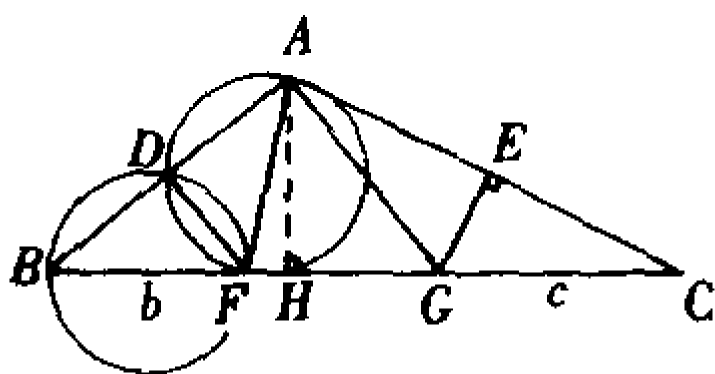
这时△ABC 被分为三个四边形: OH_1AH_3、OH_1BH_2、OH_2CH_3.

如果 $T\neq 0$,则点 T 在上述的某个四边形中,不妨设在四边形 OH_1AH_3 中.

由于$\angle OH_1A=\angle OH_3A=90°$,所以四边形 OH_1AH_3 内接于直径为 AO 的圆,于是 T 落在该圆内,所以有

$$m(T)\leqslant AT<AO=R=m(0).$$

这表明,当 $T=0$ 时, $m(T)$取到最大值.



(2)设△ABC 为钝角三角形, $\angle A$ 是钝角,设$\angle C\leqslant\angle B$.

过边 AB 与 AC 的中点 D 与 E 且垂直于该边的垂线分别与 BC 边交于 F 与 G.

记 $BF=b$, $CG=c$. 可以证明 $b\leqslant c$,且仅当$\angle C=\angle B$ 时 $b=c$.

事实上,由正弦定理,对△BDF、△CEG 与△ABC,有

$$\frac{b}{c}=\frac{BD}{\cos\angle B}\cdot\frac{\cos\angle C}{CE}=\frac{AB\cos\angle C}{AC\cos\angle B}$$

$$=\frac{\sin\angle C\cos\angle C}{\sin\angle B\cos\angle B}=\frac{\sin2\angle C}{\sin2\angle B}\leqslant1$$

$\because\quad AG=GC,\ \therefore\quad \angle CAG=\angle C.$

由 $\angle B+\angle C<90^\circ<\angle BAC.$

得 $\angle B<\angle BAC-\angle C=\angle BAC-\angle CAG=\angle BAG.$

于是 $BG>AG=GC=C.$

同样有 $FC>b.$

作$\triangle ABC$的高AH,则AH把$\triangle ABC$分为两个三角形:$\triangle ABH$和$\triangle ACH$.

如果点$T\neq F$,且在$\triangle ABH$内,则T点或者在以BF为直径的圆内,或者在以AF为直径的圆内,从而有

$$m(T)<m(F)=b.$$

同理,如果点$T\neq G$,且在$\triangle ACH$内,则

$$m(T)<m(G)=c.$$

于是,如果$\triangle ABC$是等腰钝角三角形,F与G均为所求,如果$\triangle ABC$是非等腰钝角三角形,则$m(F)<m(G)$,即所求的点为点G.

13·14 有定角A和定半径为r的内切圆的一切三角形中,试决定哪一个三角形有最小的周长.

(第12届加拿大数学奥林匹克,1980年)

[解1] 设周长为p,则

$$p=2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right).$$

由于r和A为定值,所以需考虑$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$的最小值.

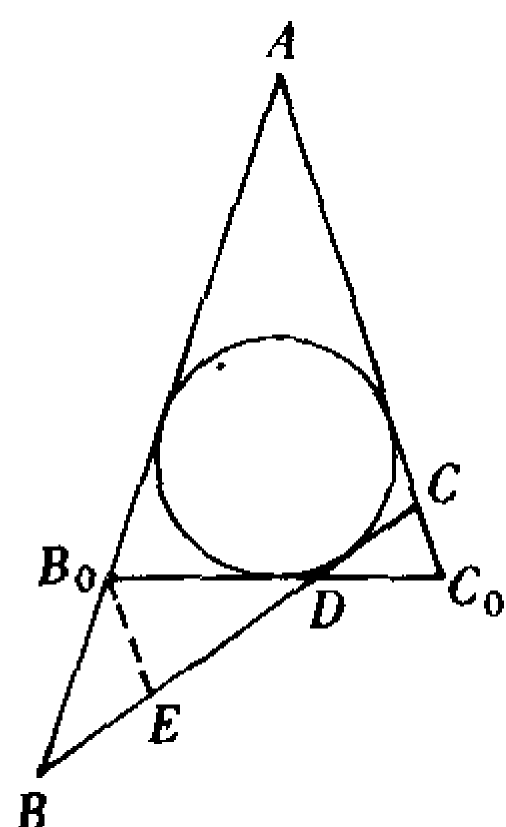
$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

当 $\cos\frac{B-C}{2}$ 最大时，$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ 最小. 此时有 $B=C$.

于是，周长最小的三角形在角 A 为顶角的等腰三角形时出现.



［解 2］ 作半径为 r 的圆的外切等腰三角形 AB_0C_0 和任意三角形 ABC，且使顶角 A 为已知定角. 如图.

设 B_0C_0 与 BC 交于 D.

不妨假定 $B_0D>DC_0$.

过 B_0 作 AC_0 的平行线，交 BD 于 E，则 E 在 BD 的内部.

$\therefore\quad \triangle B_0DE\backsim\triangle C_0DC$，

$\because\quad B_0D>DC_0$，　$\therefore\quad S_{\triangle B_0DE}>S_{\triangle C_0DC}$

又　$S_{\triangle B_0DB}>S_{\triangle B_0DE}$，　$\therefore\quad S_{\triangle B_0DB}>S_{\triangle C_0DC}$，

从而　$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle AB_0C_0}$

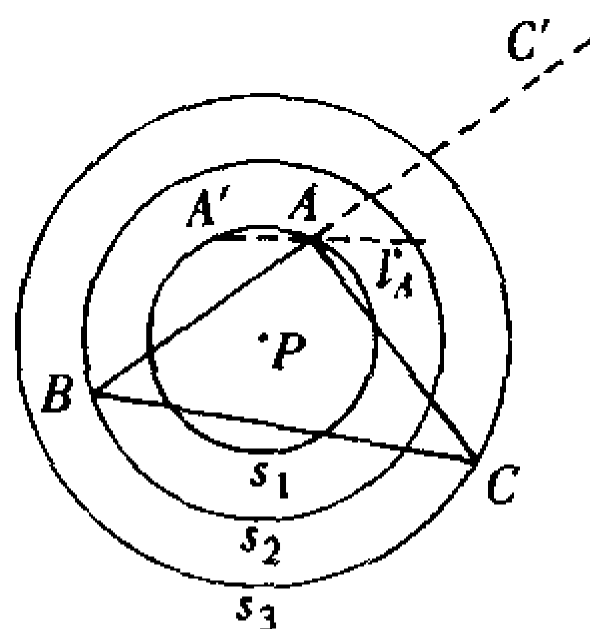
即　$\frac{r}{2}(AB+BC+CA)>\frac{r}{2}(AB_0+B_0C_0+C_0A)$，

或　$AB+BC+CA>AB_0+B_0C_0+C_0A$.

所以 $\triangle AB_0C_0$ 的周长最小，即顶角为 A 的等腰三角形周长最小.

13·15　求证：三顶点与一已知点 P 相距分别为 3、5、7 的所有三角形中，周长最大者以 P 为内切圆圆心.

（第 3 届拉丁美洲地区数学奥林匹克，1988 年）



［证］ 设 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别在以 P 为圆心，以 3、5、7 为半径的圆周 S_1、S_2、S_3 上. 并令 $\triangle ABC$ 为这样的三角形中周长最大的一个.

我们证明：P 必在 $\angle BAC$ 的平分线上，这样同理可得 P 也必在 $\angle ABC$、$\angle BCA$ 的平分线上，从而 P 为 $\triangle ABC$ 的内心.

为此，只要证明$\angle BAC$的外角平分线l_A与圆S_1相切. 用反证法.

若l_A不与圆S_1相切，则l_A与圆S_1还有一个公共点A'.

因为B、C在l_A的同侧，且点C关于l_A的对称点C'一定与B、A共线. 于是有

$$BA' + A'C = BA' + A'C' > BC' = BA + AC' = AB + AC.$$

即 $BA' + A'C + BC > AB + AC + BC$.

从而$\triangle A'BC$的周长大于$\triangle ABC$的周长，出现矛盾.

因此$\angle BAC$的外角平分线与圆S_1相切，即PA为$\angle BAC$的内角平分线.

2. 多边形中的线段极值

13·16　面积一定的平行四边形中，求出长对角线最短的平行四边形.

（基辅数学奥林匹克，1960年）

［解］　在$\square ABCD$中 设$AC = d_1$，$BD = d_2$，且$d_1 \geqslant d_2$，又AC与BD的夹角为α. 再设$S = S'_{\square ABCD}$，

$\because$　$S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$，　$\therefore$　$2S \leqslant d_1 d_2 \leqslant d_1^2$.

于是　$d_1 \geqslant \sqrt{2S}$，　当$\sin\alpha = 1$且$d_1 = d_2$时等号成立，此时平行四边形变为正方形.

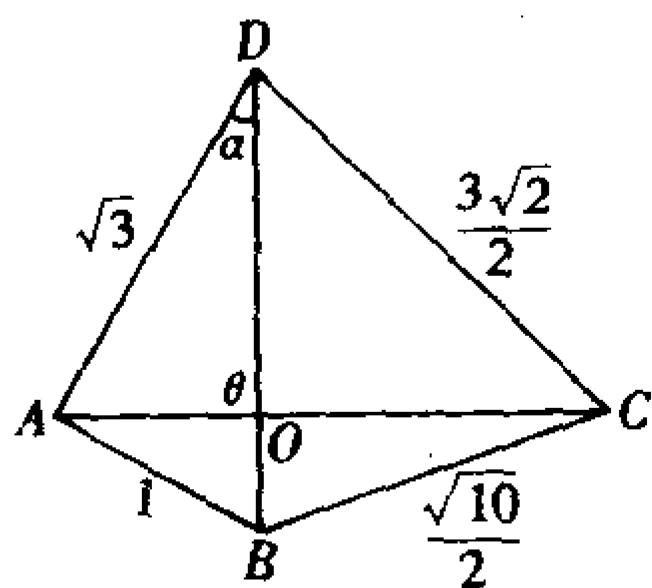
13·17　已知：平面四边形$ABCD$中，$AB = 1$，$BC = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$CD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$DA = \sqrt{3}$，$\angle D = 75°$. 求：四边形$ABCD$内一点到四条边各中点的距离之和的最小值.

（中国河北省数学竞赛，1994年）

［解］　设对角线AC和BD交于O，又设$\angle AOD = \theta$，$\angle ADO = \alpha$.

由　$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = \dfrac{11}{2}$，

即　$AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$，



则 $AC \perp BD$, $\angle AOD = \theta = 90^\circ$.

从而 $OD = \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(75^\circ - \alpha)$ ⊛

由⊛及 $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

得 $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

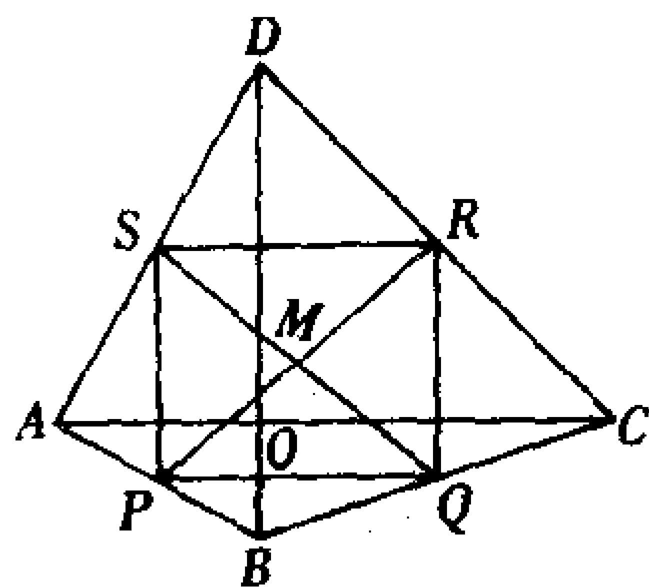
$\therefore \quad \alpha = 30^\circ$.

于是可求出 $OD = \frac{3}{2}$, $OA = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OC = \frac{3}{2}$.

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \frac{1}{2},$$

$$AC = AO + OC = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$BD = BO + OD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$



设 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 P、Q、R、S、PR 与 QS 相交于 M,显然 M 即为到 P、Q、R、S 连线之和最短之点.

由于 $AC \perp BD$,则四边形 $PQRS$ 为矩形,于是所求的最小值为

$$MP + MQ + MR + MS = PR + QS = 2PR$$

$$= 2\sqrt{PQ^2 + QR^2} = \sqrt{AC^2 + DB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{28 + 6\sqrt{3}}.$$

13·18 凸四边形中,有两条边的长度为 1,而其余的边和两条对角线之长都不超过 1.试问,四边形周长的最大可能是多少?

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

[解] 设对角线相交于 O 点,如图

$$\begin{aligned} AC + BD &= (AO + OC) + (BO + OD) \\ &= (AO + OB) + (CO + OD) \\ &> AB + CD \end{aligned}$$

即两对角线长度之和大于一组对边之和，故相对的边不能都等于1，否则，将有

$$AC+BD>2,$$

导致某一条对角线的长度大于1.

设 $AB=BC=1$，由于 $AC\leqslant 1$，所以 $ABC\leqslant 60°$. D 在以 B 为圆心半径为1的⊙B 内(上)，且在 $\angle ABC$ 内，

欲四边形 $ABCD$ 的周长 p 最大，只要 $DA+DC$ 最大.

故 D 在⊙B 上， $\angle ABC=60°$， $DA=DC$ 时 p 最大：

$$p=AB+BC+CD+DA=1+1+2DA$$

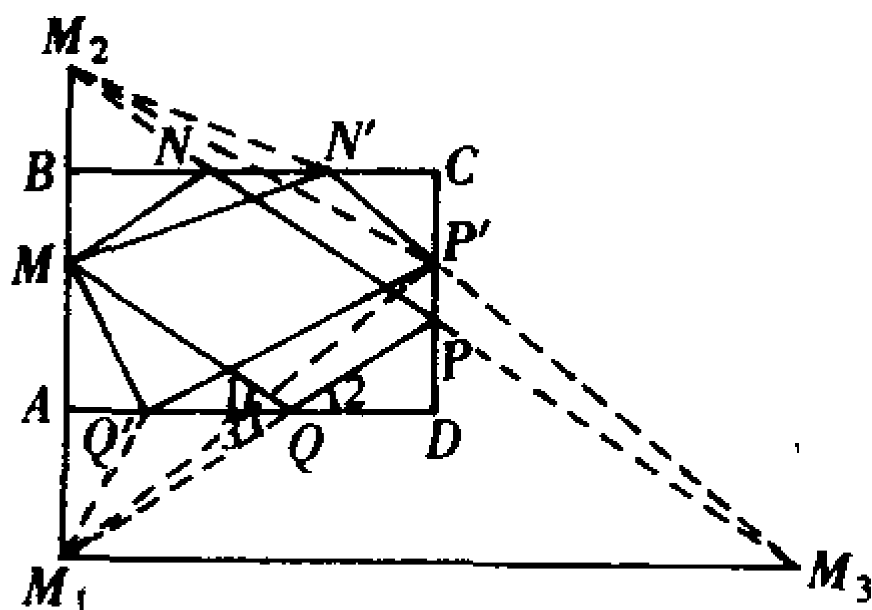
$$=2+2\sqrt{1^2+1^2-2\cos 30°}=2+2\sqrt{2(1-\cos 30°)}$$

$$=2+2\sqrt{4\sin^2 15°}=2+4\sin 15°.$$

13·19　在矩形的边界上取一点 M. 求一条最短的路线，它的起点和终点都是 M 点，并且它与矩形各边都有公共点.

（波兰数学奥林匹克，1959年）

［证］　设点 M 位于矩形 $ABCD$ 的边 AB 上.



按下述方法在边 BC、CD、DA 上取点 N、P、Q：

如果 M 点不与顶点 A 或 B 重合，则作 $MN/\!/AC$，$NP/\!/BD$，$PQ/\!/AC$. 连 MQ，可以证明 $MQ/\!/BD$.

这样我们得到的路线 $MNPQM$ 是一个平行四边形的周界.

如果点 M 与矩形顶点 A 重合，那么点 Q 也与顶点 A 重合，而点 P 和 N 与顶点 C 重合，此时路线 $MNPQM$ 退化为对角线 AC，但应通过两次. 类似地，如果点 M 与点 B 重合，那么路线 $MNPQM$ 退化为对角线 BD，但也应通过两次.

我们下面证明：用上述方法作出的路线 $MNPQM$ 是所有路线中最短的.

记路线 $MNPQM$ 的长度为 λ，我们证明 λ 比任一条顶点 N'、P'、Q' 分别在矩形的边 BC、CD、DA 上的折线的长度要短.

设 M_1 是点 M 关于直线 AD 的对称点，M_2 是点 M 关于直线 BC

的对称点.

由于 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$，所以 $\angle 2=\angle 3$，从而点 P、Q、M_1 在一条直线上.

同理点 P、N、M_2 也在同一条直线上.

$\because$ $MN=M_2N$，$MQ=M_1Q$，则 $M_1P=M_2P$，

$\therefore$ $\triangle M_1PM_2$ 是等腰三角形.

因此 路线 $MNPQM$ 的长度等于线段 M_1P 与 M_2P 之和.

路线 $MN'P'Q'M$ 的长 λ' 等于路线 $M_2N'P'Q'M_1$ 的长度.

$\because$ $M_1Q'+Q'P'\geqslant M_1P'$，$M_2N'+N'P'\geqslant M_2P'$，

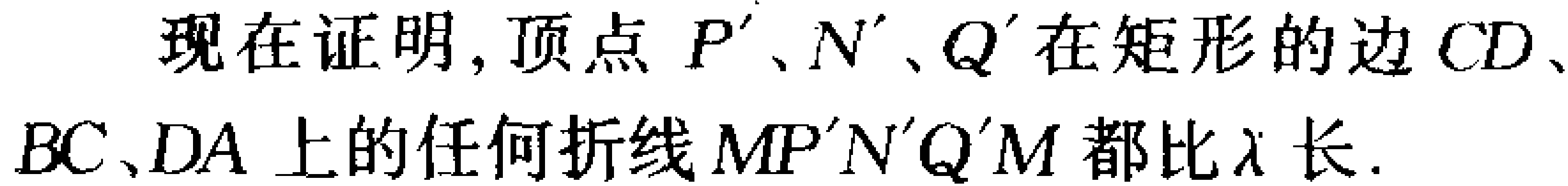
$\therefore$ $\lambda'\geqslant M_1P'+M_2P'$.

如果点 M_3 与点 M_1 关于直线 CD 对称，那么点 M_2、P、M_3 在一条直线上，并且

$$M_1P'+M_2P'=M_3P'+M_2P'\geqslant M_3P+M_2P=M_1P+M_2P.$$

$\therefore$ $\lambda'\geqslant\lambda$.

并且当且仅当点 N'、P'、Q' 分别与点 N、P、Q 重合时等号成立.



现在证明，顶点 P'、N'、Q' 在矩形的边 CD、BC、DA 上的任何折线 $MP'N'Q'M$ 都比 λ 长.

设 S 是线段 MP' 与 $N'Q'$ 的交点，则

$$MS+SN'>MN'，P'S+SQ'>P'Q'，$$

$$\therefore\quad MP'+N'Q'>MN'+P'Q'.$$

$$MP'+P'N'+N'Q'+Q'M>MN'+N'P'+P'Q'+Q'M.$$

即 折线 $MP'N'Q'M$ 比折线 $MN'P'Q'M$ 长，因而比 λ 长.

类似地可以证明，折线 $MN'Q'P'M$ 的长度大于 λ.

下面再证明，路线 $MNPQM$ 的长度 λ 小于任何其他以点 M 为起点和终点，而且与矩形各边有公共点的折线的长度.

事实上，这样的路线可以写作

$$M\cdots K_1\cdots K_2\cdots K_3\cdots M.$$

其中 K_1、K_2、K_3 落在矩形的三条不同的边上(不包括 AB 边).

显然有

路线 $M\cdots K_1\cdots K_2\cdots K_3\cdots M$ 的长度

$\geqslant MK_1K_2K_3M$ 的长度 $\geqslant MNPQM$ 的长度 $=\lambda$.

当且仅当点 K_1、K_2、K_3 与点 N、P、Q 或与点 Q、P、N 重合时，等

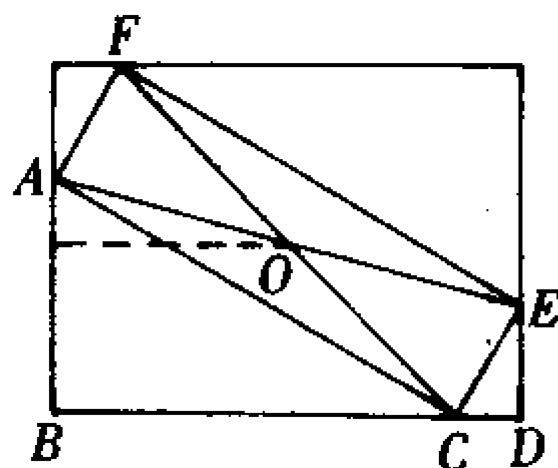
号才成立.

综合以上,路线 $MNPQM$ 的长度最短.

13·20 一个矩形内接于一个较大的矩形(每条边上一个顶点),如果能够在较大的矩形的限制范围内,将小矩形围绕它的中心转动(即使稍微动一点),那么称这个小矩形为未钉住的.在能够钉住的内接于 6×8 的矩形的全部小矩形中,周长的最小值可表示为 $\sqrt{N}$,其中 N 为一正整数,求 N.

(第 11 届美国数学邀请赛,1993 年)

[解] 首先,内接矩形的中心一定与 6×8 矩形的中心重合,设这个中心为 O.



由 $\angle ACE=\angle ABC=\angle CDE=90^\circ$,

易得 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$,

则 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{ED}{CD}=k$.

又 $AC+CE=\sqrt{AB^2+BC^2}+\sqrt{CD^2+DE^2}$

$$=(AB+CD)\sqrt{k^2+1}.$$

又 $\begin{cases}kAB+CD=8,\\ AB+kCD=6.\end{cases}$

$\therefore\quad AB+CD=\dfrac{14}{k+1}$,

$$2(AC+CE)=\frac{28}{k+1}\cdot\sqrt{k^2+1}=28\sqrt{2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

设小矩形的对角线之半 $OC=x$, 易知 $x\geqslant4$.

$$BC=4+\sqrt{x^2-9},\quad AB=3-\sqrt{x^2-16}.$$

$\therefore\quad k=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{x^2-9}+4}{3-\sqrt{x^2-16}}$.

由 $x\geqslant4$ 可得 $k=\dfrac{\sqrt{x^2-9}+4}{3-\sqrt{x^2-16}}\geqslant\dfrac{\sqrt{7}+4}{3}$,

$\therefore\quad k+1\geqslant\dfrac{7+\sqrt{7}}{3}$,

即 $\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{3}{7+\sqrt{7}}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{14}<\dfrac{1}{2}$.

由于函数 $f\left(\frac{1}{k+1}\right)=\sqrt{2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$ 在 $\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}$ 时为减函数,则

$$2(AC+CE)\geqslant 28\sqrt{2\left(\frac{7-\sqrt{7}}{14}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{448}.$$

$\therefore\quad N=448.$

13·21　求证:外切于已知圆的所有四边形中,正方形的周长最短.

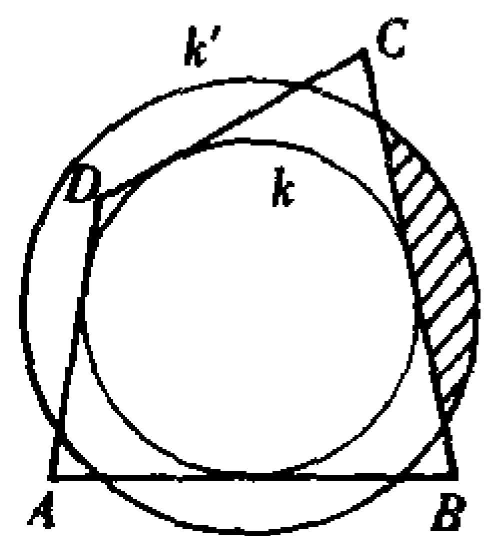
（波兰数学奥林匹克,1957 年）

［证］　由于外切于已知圆的多边形,其面积与周长成正比,所以本题等价于证明:

外切于已知圆的所有四边形中,正方形的面积最小.

设 Q 是已知圆 k 的外切正方形,$ABCD$ 为已知圆 k 的任意外切四边形,但 $ABCD$ 不是正方形.

又设 k' 是正方形 Q 的外接圆.



正方形 Q 的各边从圆 k' 中截出四个相等的弓形,设 S 是每个弓形的面积,则

$$S_Q=S_{k'}-4S.$$

直线 AB、BC、CD 和 DA 也从圆 k' 中截出四个面积均为 S 的弓形,但是因为 $ABCD$ 不是正方形,必有一内角大于直角,所以至少有一顶点落在圆 k' 内部.所以这四个弓形中至少有两个互相重迭,所以面积 $S_{k'}-4S'$ 小于 $ABCD$ 落在圆 k' 内部的那部分面积,因而更小于四边形 $ABCD$ 的面积,即

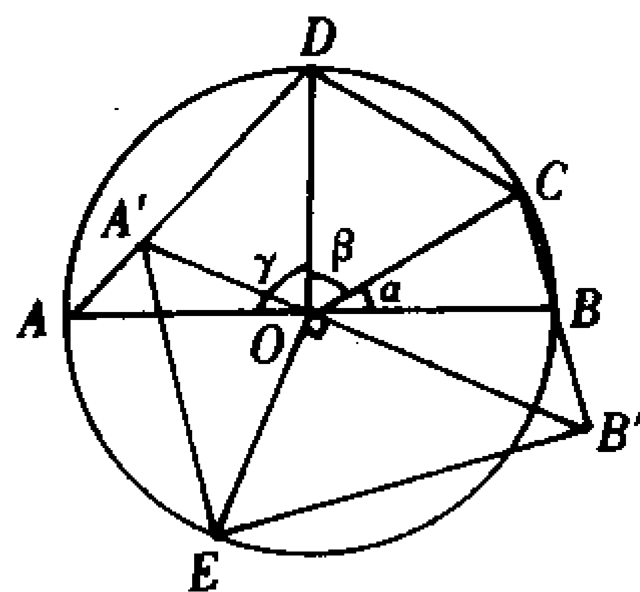
$S_{ABCD}>S_{k'}-4S'$,从而有　$S_{ABCD}>S_Q$.

即　所有圆外切四边形中以正方形的面积最小,从而正方形的周长最短.

13·22　设四边形 $ABCD$ 内接于以 AB 为直径的半圆.$BC=a$,$CD=2a$,$DA=\frac{3\sqrt{5}-1}{2}a$.点 M 在以 AB 为直径的,不含 C、D 的半圆上变动.M 到 BC、CD、DA 的距离分别为 h_1、h_2、h_3.求 $h_1+h_2+h_3$ 的最大值.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年）

[解]　设 O 为圆心，$OA=1$. 首先求 a 的值.



令　$\angle BOC=\alpha$，$\angle COD=\beta$，$\angle AOD=\gamma$.

则　$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2}$，$\sin\frac{\beta}{2}=a$，

且　$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{3\sqrt{5}-1}{4}a$.

又∵　$\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$，

∴　$\frac{3\sqrt{5}-1}{4}a=\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

即有　$\frac{3\sqrt{5}-1}{4}a=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-a^2}-\frac{a^2}{2}$.

即　$\frac{a^2}{2}+\frac{3\sqrt{5}-1}{4}a=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-a^2}$.

当 $a\in(0,1]$ 时，上式左边是 a 的增函数，右边是 a 的减函数，所以等式仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时成立，这时等式两边均等于 $\frac{3\sqrt{5}}{8}$.

在 AD 上取 A'，使 $DA'=1$. 在 CB 的延长线上取 B'，使 $CB'=1$，我们证明 A'、O、B' 三点共线.

由于 $CD=2a=1=OC=OD$，所以 $\triangle ODC$ 是正三角形，$\triangle A'DO$ 与 $\triangle OCB'$ 都是等腰三角形，则　$\angle COD=\frac{\pi}{3}$，

且　$\angle A'OD=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle ADO=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A$，

又　$\angle COB'=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle OCB=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle B$.

∴　$\angle A'OD+\angle DOC+\angle COB$

$=\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

$=\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{4}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \pi$.

即 A'、O、B'共线.

设 S_1、S_2、S_3、S_4、S 分别为$\triangle MB'C$、$\triangle MCD$、$\triangle MDA'$、$\triangle MA'B'$及四边形$A'B'CD$的面积,则

$$S_1=\frac{1}{2}h,\quad S_2=\frac{1}{2}h_2,\quad S_3=\frac{1}{2}h_3.$$

并且 $h_1+h_2+h_3=2(S_1+S_2+S_3)=2(S\pm S_4)$.

过 O 作$A'B'$的垂线交不含 C 点的半圆于E,当 $M=E$ 时,S_4 最大,这时 $h_1+h_2+h_3$ 最大.

下面计算最大值 $2(S+S_4)$.

$$\because\quad S_{\triangle OB'C}=2S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{15}}{8},\text{ 且 }\quad S_{\triangle OCD}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{又}\quad S_{\triangle ODA'}=\frac{1}{2}\cdot OD\cdot A'D\cdot\sin A=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{16}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{16}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{又}\because\quad OB'=\sqrt{2OB^2+\frac{1}{2}B'C^2-OC^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{及}\quad OA'=\sqrt{OD^2+A'D^2-2A'D\cdot OD\cdot\cos A}$$

$$=\sqrt{\frac{9-3\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{4}.$$

$$\therefore\quad S_4=\frac{1}{2}(OA'+OB')\cdot OE=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)}{8}.$$

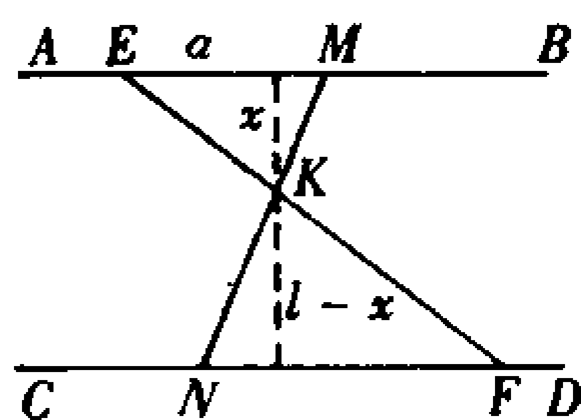
$$\max\{h_1+h_2+h_3\}=2(S+S_4)=\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}+\sqrt{30}+\sqrt{6}}{8}.$$

(二)面积极值问题

1. 三角形中的面积极值

13·23　两条平行线 AB 和 CD 上各取一定点 M 和 N. 在 AB 上截取线段 ME,在线段 MN 上任取定一点 K,连接 EK 延长交 CD 于 F. 试确定 K 的位置,使$\triangle EKM$ 和$\triangle FKN$ 面积的和最小.

(中国福建省福州市数学竞赛,1964 年)



[解]　设 AB、CD 间的距离为 l, $ME=a$,则 l,a 为定值.

又设 K 到 AB 的距离为 x,则 K 到 CD 的距离为 $l-x$. 于是,$\triangle EKM$ 和$\triangle FKN$ 的面积和

$$S=S_{\triangle KME}+S_{\triangle KNF}=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}NF(l-x).$$

但 $\dfrac{x}{l-x}=\dfrac{a}{NF}$, $\therefore\quad NF=\dfrac{a(l-x)}{x}$.

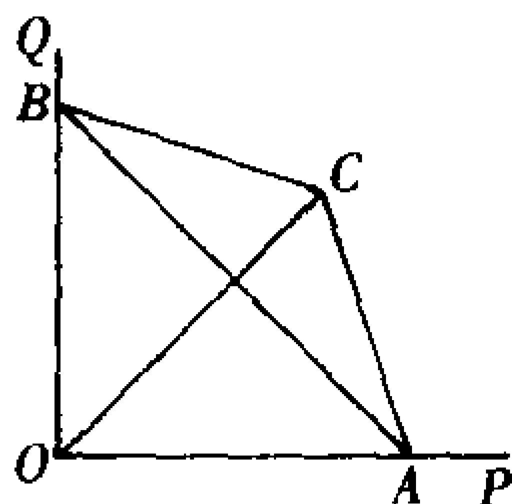
故
$$S=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}a\cdot\frac{(l-x)^2}{x}=\frac{1}{2}a\left(2x+\frac{l^2}{x}-2l\right)$$
$$=\frac{1}{2}a\left(2x+\frac{l^2}{x}\right)-al.$$

$\because\quad 2x\cdot\dfrac{l^2}{x}=2l^2$ 为定值,

$\therefore$ 当 $2x=\dfrac{l^2}{x}$ 即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$ 时,S 有极小值. 因此 K 应取在 MN 上,使 $MK=\dfrac{\sqrt{2}}{2}MN$.

13·24　设有一直角 QOP,试在 OP 边上求一点 A,在 OQ 边上求一点 B,在直角内求一点 C,使 $BC+CA$ 等于定长 l,且使四边形 $ACBO$ 的面积最大.

(中国北京市数学竞赛,1978 年)



［解］ (1)因同底等周长的三角形的顶点，在以底边两端点为焦点的椭圆上，而当两腰相等时，它的高最大. 故同底等周长的三角形中，等腰三角形的面积最大.

(2)因同底等顶角的三角形的顶点在以底边为弦的圆弧上，而当两腰相等时，它的高最大，故同底等顶角的三角形中，等腰三角形面积最大.

要使四边形 $ACBO$ 面积最大，显然 O 点和 C 点必须在 AB 连线的两侧，且 $\triangle AOB$、$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

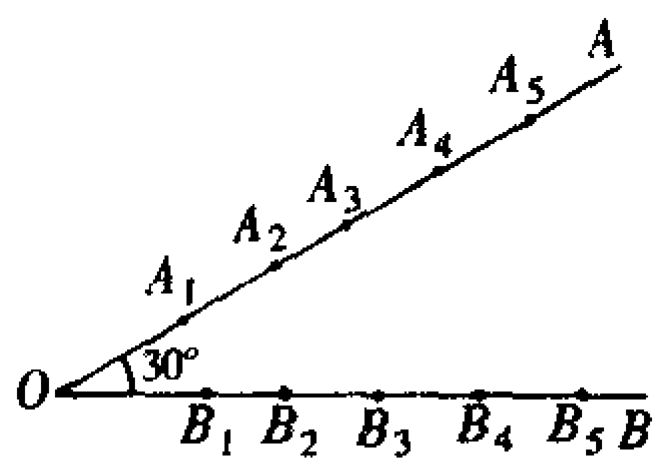
于是 $AC=BC, AO=BO, CO=CO$

$\therefore$ $\triangle AOC \cong \triangle BOC$，则 $\angle AOB=\angle BOC=45^\circ$.

而 $AC=AB=\dfrac{l}{2}$，这样 $\triangle AOC$ 又是底边为 $\dfrac{l}{2}$、顶角为 45° 的三角形. 根据(2)，当 $AO=CO$ 时 $\triangle AOC$ 的面积最大.

此时，$OA=OC=\dfrac{\frac{1}{2}AC}{\sin 22.5^\circ}=\dfrac{l}{4\sin 22.5^\circ}$.

这样，就确定了 A、B、C 点的位置.



13·25 已知：$\angle AOB=30^\circ$，自 O 沿 OA 边顺次取 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 五个点. 沿 OB 边顺次取 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5，选某个 A_i 与 B_j $(i,j=1,2,3,4,5)$ 连结，形成 $\triangle A_iOB_j$，这样一一搭配形成五个三角形. 试问：OA 边上的点与 OB 边上的点如何一一搭配，才能使形成的五个三角形面积最大？并证明你的结论.

(中国北京市数学竞赛，1983 年)

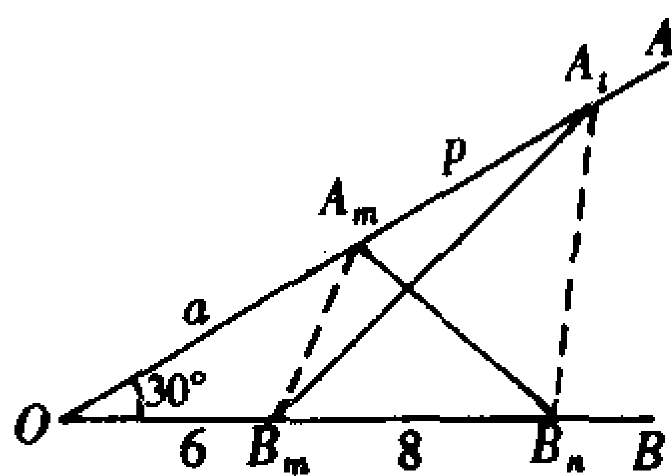
［解］ 由设知 $OA_1<OA_2<OA_3<OA_4<OA_5$，且 $OB_1<OB_2<OB_3<OB_4<OB_5$.

当 A_i 与 B_j 相同序号一一搭配时，所形成的五个三角形面积和 S 最大：

$$S=S_{\triangle A_1OB_1}+S_{\triangle A_2OB_2}+\cdots+S_{\triangle A_5OB_5}.$$

下面证明上述结论.

若 A_i 与 B_j 不是完全同序号一一搭配，那么总可以找到某个 $m(m=1,2,3,4)$，对于 $i<m$ 时，A_i 与 B_i 一一搭配，而 $i=m$ 时，A_m 与 B_m 不搭配.



不妨设 A_m 与 B_n 搭配，A_t 与 B_m 搭配（$m<n$，$t\leqslant 5$），形成 $\triangle A_mOB_n$ 与 $\triangle A_tOB_m$. 诸线段长见图. 因为

$$S_{\triangle A_mOB_n}+S_{\triangle A_tOB_m}=\frac{1}{2}a(b+q)\sin30^\circ+\frac{1}{2}b(a+p)\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(2ab+aq+bq).$$

连 A_mB_m，A_tB_n，则有

$$S_{\triangle A_mOB_m}+S_{\triangle A_tOB_n}=\frac{1}{2}ab\sin30^\circ+\frac{1}{2}(a+p)(b+q)\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(2ab+aq+bp+pq).$$

比较上两式显然有：

$$S_{\triangle A_mOB_m}+S_{\triangle A_tOB_m}>S_{\triangle A_mOB_n}+S_{\triangle A_tOB_m}.$$

因而 A_i 与 B_j 不是完全同序号一一搭配，形成的五个三角形面积总和小于 S.

即 A_i 与 B_j 同序号一一搭配形成的五个三角形面积和最大.

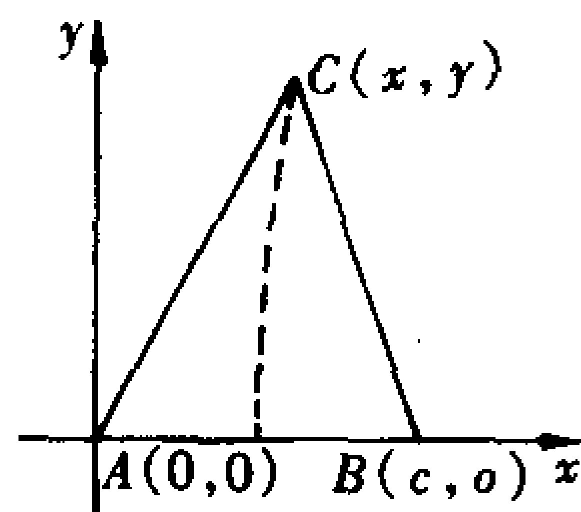
注 结论可推广到一般角 α 和点数为 n 的情形.

显然，上述情形是排序不等式的特例.

13·26 $\triangle ABC$ 中，$AB=9$，又 $\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{40}{41}$，求这个三角形面积的最大值.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

［解］ 以 A 为坐标原点，以 AB 所在直线为 x 轴，B 在 x 轴正方向上建立平面直角坐标系，并设



$A(0,0)$，$B(c,0)$，$C(x,y)$.

又设 $\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{a}{b}$. 于是有

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{a}{b},$$

则 $(b^2-a^2)x^2-2b^2cx+(b^2-a^2)y^2=-b^2c^2,$

有 $\left(x-\frac{b^2c}{b^2-a^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)^2}.$

所以　顶点 C 的轨迹是以 $\left(\frac{b^2c}{b^2-a^2},0\right)$ 为圆心，以 $\frac{abc}{b^2-a^2}$ 为半径的圆.

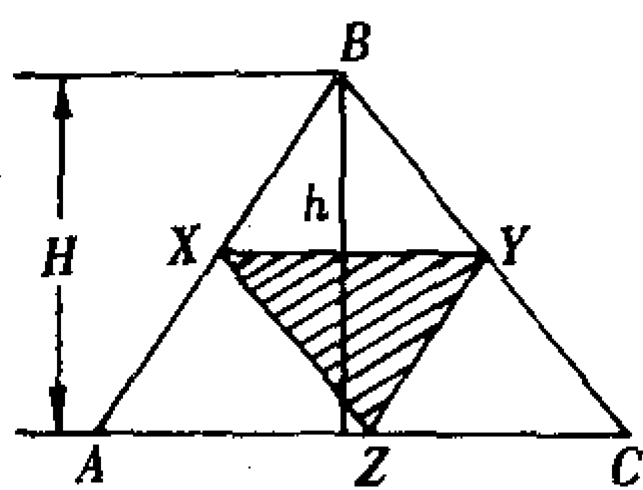
当 $\frac{a}{b}=\frac{40}{41}$，$C=9$ 时，此圆为 $\left(x-\frac{41}{9}\right)^2+y^2=\frac{41^2\times40^2}{81}$.

于是当三角形的高为该圆的半径，即 $\frac{41\times40}{9}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，最大值为

$$S=\frac{1}{2}\times9\times\frac{41\times40}{9}=820.$$

13·27　给定面积为 1 的 $\triangle ABC$，两个人做以下游戏，第一个人在 AB 边上选取一点 X，第二个人在 BC 边上选取一点 Y，然后第一个人再在 AC 边上选取一点 Z，第一个人的目的是得到最大面积的 $\triangle XYZ$，而第二个人的目的是得到最小面积的三角形. 问：第一个人能确保的最大面积是多少？

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）



[解]　第一人能确保的最大面积是 $\frac{1}{4}$.

因为第二个人能达到 $S_{\triangle XYZ}\leqslant\frac{1}{4}$ 而不依赖于第一个人如何游戏.

为此他只要选择 Y，使 $XY/\!/AC$（如图），那么对于底边 AC 上的任意点 Z，将有

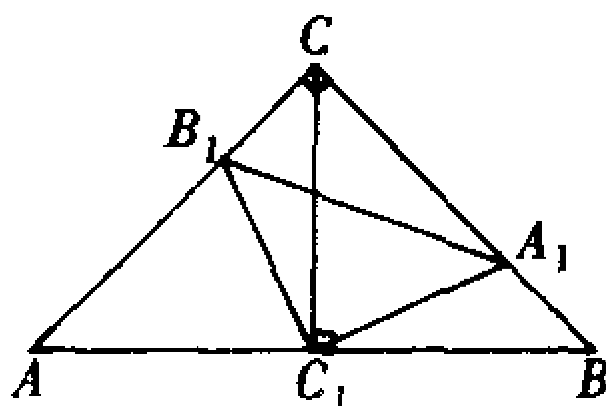
$$\frac{S_{\triangle XYZ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{XY}{AC}\cdot\frac{H-h}{H}=\frac{h(H-h)}{H^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

另一方面，第一人取 AB 边、AC 边的中点作为 X、Z 之后，就能保证自己有 $S_{\triangle XYZ}=\frac{1}{4}$，而不依赖于第二个人的选择.

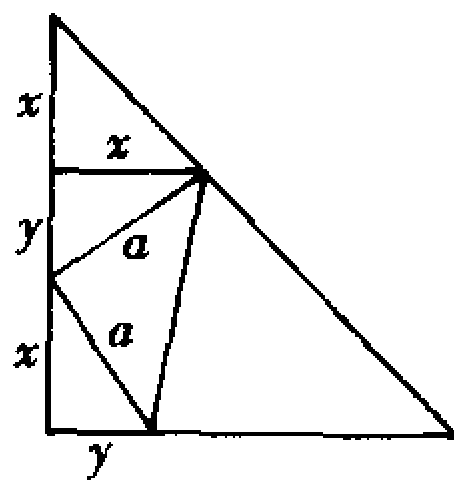
13·28 如果一个等腰直角三角形的三个顶点在另一个等腰直角三角形的三条不同的边上.求:这两个等腰直角三角形面积之比的最小值.

(第13届全苏数学奥林匹克,1979年)

[解] 分两种情况考虑:



(1)



(2)

(1)较小三角形的直角顶点在大直角三角形的斜边上.易知 C、A_1、C_1、B_1 四点共圆.

又 $A_1C_1=B_1C_1$, ∴ $\overset{\frown}{A_1C_1}=\overset{\frown}{B_1C_1}$,

∴ $\angle ACC_1=\angle BCC_1=45°$,

即 C_1 为 AB 中点.有 $\dfrac{CC_1}{AC}\geqslant\dfrac{1}{2}$

∴ 小等腰直角三角形面积与大等腰直角三角形面积之比不小于 $\dfrac{1}{4}$.

(2)较小等腰直角三角形直角顶点在大等腰直角三角形一直角边上,如图,易知 $x^2+y^2=a^2$.大等腰直角三角形直角边为 $2x+y$.

而 $(2x+y)^2\leqslant(2^2+1^2)(x^2+y^2)=5a^2$,

则 $2x+y\leqslant\sqrt{5}a$.

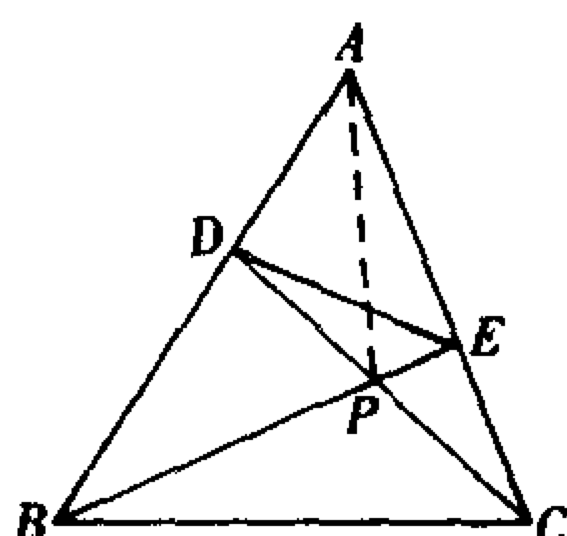
∴ 小等腰直角三角形面积与大等腰直角三角形面积之比不少于 $\dfrac{1}{5}$.

综合(1)、(2)可知:小等腰直角三角形与大等腰直角三角形面积之比的最小值是 $\dfrac{1}{5}$.

13·29 $\triangle ABC$ 的面积为 1,D、E 分别是边 AB、AC 上的点,BE

和CD相交于P点，并且四边形$BCED$的面积是$\triangle PBC$的面积的两倍.求：$\triangle PDE$面积的最大值.

（日本数学奥林匹克，1992年）



［解］ 设 $\frac{AD}{AB}=x$，$\frac{AE}{AC}=y$. 则

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot \sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A}=xy.$$

于是 $S_{\triangle ADE}=xy$.

$$S_{四边形BCED}=1-xy,\ S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}(1-xy).$$

$$\frac{S_{\triangle PDE}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{\frac{1}{2}PD\cdot PE\cdot\sin\angle DPE}{\frac{1}{2}PB\cdot PC\cdot\sin\angle BPC}=\frac{PD\cdot PE}{PB\cdot PC}=\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle APE}}\cdot\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle APB}}$$

$$=\frac{AE}{AC}\cdot\frac{AD}{AB}=xy.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}xy(1-xy).\qquad ①$$

由梅涅劳斯定理有 $\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$,

$$\therefore\quad \frac{BP}{PE}=\frac{1-x}{x(1-y)}.$$

即 $\frac{BP}{BE}=\frac{1-x}{x(1-y)+(1-x)}=\frac{1-x}{1-xy}$.

又 $S_{\triangle BPC}=\frac{BP}{BE}\cdot S_{\triangle BCE}=\frac{BP}{BE}\cdot\frac{EC}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

$$于是有\quad \frac{1}{2}(1-xy)=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}.\qquad ②$$

这样，问题就转化为在条件②下求①的最大值.为此令 $u=xy$.

由 $0<x<1$，$0<y<1$ 可得 $0<xy<1$.

则②式化为 $\frac{1}{2}(1-u)^2=1+u-(x+y)\leqslant 1+u-2\sqrt{xy}$.

即 $\frac{1}{2}(1-u)^2\leqslant 1+u-2\sqrt{u}=(1-\sqrt{u})^2$.

$\therefore\quad 1-u\leqslant\sqrt{2}(1-\sqrt{u}).$

故 $(1-\sqrt{u})(1+\sqrt{u})\leqslant\sqrt{2}(1-\sqrt{u})$,

即 $(\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}-\sqrt{2}+1)\geqslant 0$,

从而 $0<\sqrt{u}\leqslant\sqrt{2}-1$, 或 $0<u\leqslant 3-2\sqrt{2}$.

由于二次函数 $f(u)=\frac{1}{2}u(1-u)$在开区间$(0,3-2\sqrt{2})$内最大值为$f(3-2\sqrt{2})$,而 $f(3-2\sqrt{2})=5\sqrt{2}-7$.

故当 $x=y=\sqrt{2}-1$(此时 $u=xy=3-2\sqrt{2}$)时,$S_{\triangle PDE}$的面积最大,最大值为 $5\sqrt{2}-7$.

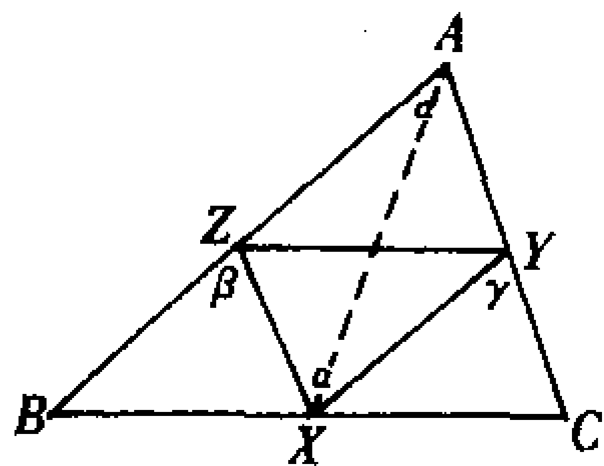
13·30 点 X、Y、Z 分别在$\triangle ABC$ 的边 BC、CA 与 AB 上,并且$\triangle ABC\backsim\triangle XYZ$,在 X、Y、Z 处的角分别等于在 A、B、C 处的角.求:X、Y、Z 为何位置时,$\triangle XYZ$ 的面积最小.

(澳大利亚数学奥林匹克,1989 年)

[解] 由于$\angle ZAY=\angle ZXY$,

所以$\triangle AZY$ 与$\triangle XYZ$ 的外接圆的半径相等,

同样,$\triangle BXZ$、$\triangle CXY$ 的外接圆半径也都与$\triangle XYZ$ 的外接圆半径相等.



设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1,$\triangle XYZ$ 的外接圆半径为 r.则 r 也是$\triangle XYZ$ 与$\triangle ABC$ 的相似比.

连 AX,则 β 与 γ 是$\triangle AZX$ 与$\triangle AYX$ 的外角,则 $\beta+\gamma=2\alpha$.

令 $\beta=\alpha+x,\quad \gamma=\alpha-x$.

由正弦定理及 $BC=BX+XC$ 得

$$\begin{aligned}2\sin\alpha&=2r(\sin\beta+\sin\gamma)=2r[\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)]\\&=4r\cos x\cdot\sin\alpha.\end{aligned}$$

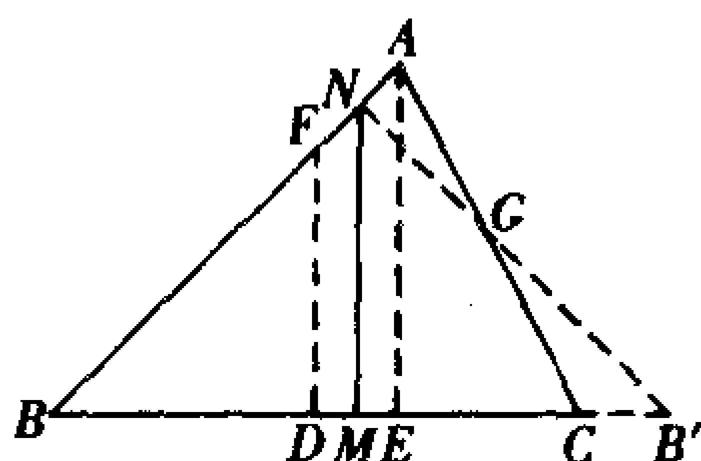
$\therefore\quad 2r\cos x=1$. 即 $r=\frac{1}{2\cos x}\geqslant\frac{1}{2}$.

所以 r 的最小值为$\frac{1}{2}$,即相似比的最小值为$\frac{1}{2}$,此时$\triangle XYZ$ 的面积最小,X、Y、Z 为 A、B、C 的中点.

13·31 边长分别为$\frac{3}{2}$、$\frac{\sqrt{5}}{2}$、$\sqrt{2}$的三角形纸片沿垂直于长度为$\frac{3}{2}$的

边的方向折迭，问重迭部分面积的最大值是多少？

（中国国家集训队选拔考试，1989 年）



［解］ 不妨设 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$c=\sqrt{2}$. 设 BC 中点为 D，AE 为高，沿 MN 折迭时重合部分的面积取得最大值.

易知 M 在点 D 和 E 之间. 设点 B 关于 MN 的对称点为 B'，$NB'\cap AC=G$.

设 $DM=x$，于是 $CB'=2x$. 在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理有

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{9}{4}+\frac{5}{4}-2}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{9}{4}+2-\frac{5}{4}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\quad \angle B=45°,\ \sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\because\quad \sin\angle CGB'=\sin(\angle ACB-\angle B')=\sin(\angle C-\angle B)$$
$$=\sin C\cos B-\cos C\sin B$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore\quad B'G=\frac{CB'\sin C}{\sin G}=4\sqrt{2}x.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle GCB'}=\frac{1}{2}CB'\cdot B'G\cdot\sin B'=4x^2.$$

$$\because\quad S_{\triangle B'MN}=S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2,$$

$$\therefore\quad S_{\text{矩形}NMCG}=S_{\triangle NMB'}-S_{\triangle GCB'}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-4x^2$$
$$=-\frac{7}{2}\left(x-\frac{a}{14}\right)^2+\frac{a^2}{7}\leqslant\frac{a^2}{7}.$$

可见，当 $x=\frac{a}{14}=\frac{3}{28}$时，重迭部分的面积 $S_{\text{矩形}NMCG}$取最大值$\frac{a^2}{7}=\frac{9}{28}$.

下面验证　当 $x=\frac{3}{28}$时，点 M 确在点 D 和 E 之间. 这时.

$\because \quad AE=AB\cdot\sin B=\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=1$.

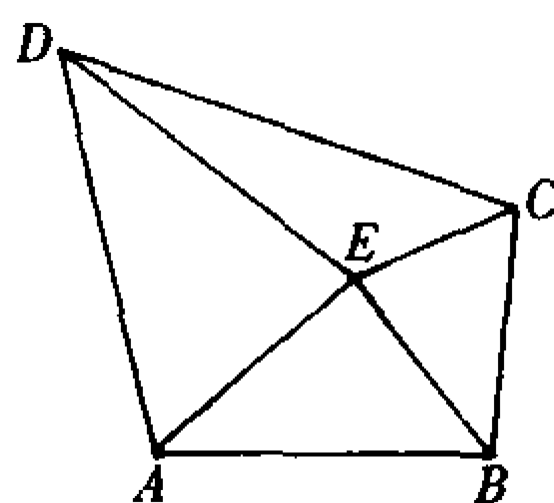
$\therefore \quad DE=BE-BD=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}>\frac{3}{28}$.

所以　点 M 在 D 与 E 之间.

故知当 $DM=\frac{3}{28}$时，重迭部分的面积取得最大值$\frac{9}{28}$.

13·32　点 E 在凸四边形 $ABCD$ 的内部，又$\triangle EAB$、$\triangle EBC$、$\triangle ECD$ 的边长都是整数，且周长和面积在数值上相等，但它们的面积互不相同，问$\triangle EDA$ 的面积的最大值是多少？

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年）



[解]　设$\triangle ABE$、$\triangle BEC$、$\triangle ECD$ 的其中一个的边长为正整数 a、b、c. $s=\frac{a+b+c}{2}$.

由于三角形的面积和周长相等，则有

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=2s, \qquad ①$$

即　$(s-a)(s-b)(s-c)=4s$,　②

且　$(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)=32s$,　③

③的左边的三个因式的奇偶性相同，而右边为偶数，所以左边三个因式均为偶数，从而 s 为整数，令正整数

$x=s-a,\ y=s-b,\ z=s-c$.　④

则由②式得　$xyz=4(x+y+z)$.　⑤

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，于是由⑤有　$4x<xyz\leqslant 12x$.

从而　$4<yz\leqslant 12$　⑥

由⑥式及⑤式可得到 x、y、z 的各种可能的组合有下表的 5 种：

x	10	6	24	14	9
y	3	4	5	6	8
z	2	2	1	1	1

由④得　$a=y+z, b=z+x, c=x+y$.　⑦

所以①的解为

a	12	8	25	15	10
b	5	6	6	7	9
c	13	10	29	20	17

由于$\triangle EAB$、$\triangle EBC$、$\triangle ECD$的面积互不相同，所以表中的每组解至多出现一次.

又由于在$\triangle EAB$、$\triangle EBC$、$\triangle ECD$中，EB和EC都是两个三角形的公共边，而上表中只有6和10出现两次，它们分布在表中的第二、三、五组，因此只有6和10可以作为公共边，并且$\triangle BEC$的三边应为6、8、10，$BC=8$.

不妨设　$EB=6$，$EC=10$. 此时有两种配置方法：

第一种：$AB=29$，$AE=25$，$DE=9$，$EC=10$，$CD=17$，

第二种：$AB=29$，$AE=25$，$DE=17$，$EC=10$，$CD=9$.

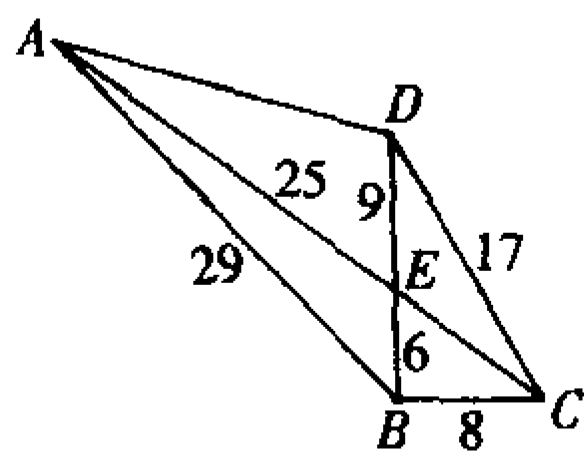
对第一种，由余弦定理有

$$\cos\angle AEB=\frac{AE^2+BE^2-AB^2}{2\times AE\times BE}=\frac{25^2+6^2-29^2}{2\times 25\times 6}=-\frac{3}{5}.$$

又　$\cos\angle BEC=\frac{BE}{EC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

因此　E在AC上，

同法又可求出$\cos\angle DEC=-\frac{3}{5}$，因而$E$又在$BD$上，此时$E$是$AC$与$BD$的交点.



$$S_{\triangle EDA}=\frac{1}{2}AE\cdot ED\cdot\sin\angle AED$$
$$=\frac{1}{2}\times 25\times 9\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=90.$$

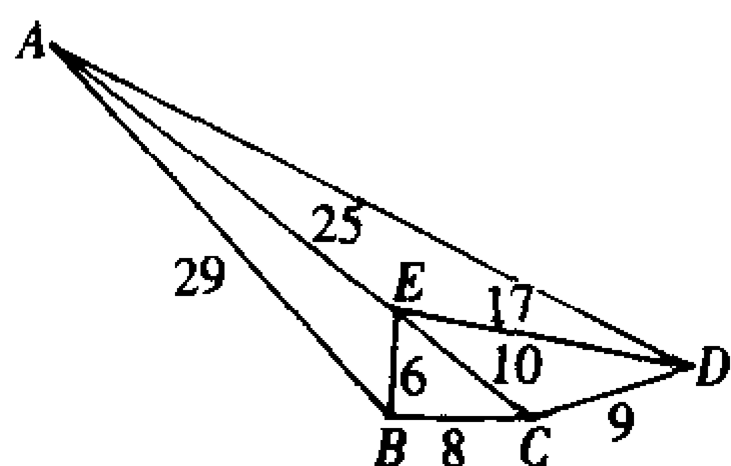
对第二种：同样有

$$\cos\angle AEB=-\cos\angle BEC=-\frac{3}{5},$$

即　E 在 AC 上.

又　$\cos\angle DEC=\dfrac{10^2+17^2-9^2}{2\times 10\times 17}=\dfrac{77}{85}$,

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle EDA}&=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot \sin\angle AED\\
&=\frac{1}{2}\times 25\times 17\times\sqrt{1-\left(\frac{77}{85}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\times 25\times 17\times\frac{36}{85}\\
&=90.
\end{aligned}
$$



即　在这两种情况下,$\triangle EDA$ 都有相同的面积.

13·33　在$\triangle ABC$中,已知 $6(a+b+c)r^2=abc$(r 为内切圆的半径),考虑内切圆上的点 M,M 在 BC、AC、AB 上的射影分别为 D、E、F.用 S、S_1 分别表示$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积.求:商$\dfrac{S_1}{S}$的最大值与最小值.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年）

[解]　由面积公式　$\dfrac{r(a+b+c)}{2}=S$. 及　$abc=4RS$. 其中 S 为$\triangle ABC$的外接圆半径,可得

$6\times 2S\cdot r=4RS$, 则　$R=3r$.

设 O、I 分别为$\triangle ABC$的外心与内心,由欧拉公式得

$$IO^2=R(R-2r).$$

从而有　　$IO=\sqrt{3}r>r$.

因此外心在外切圆的外面.

设 K、L 为直线 IO 与内切圆的两个交点,K 在 I、O 之间,则

$$OK\leqslant OM\leqslant OL<R.$$

由关于垂足三角形的面积公式　$\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{|R^2-OM^2|}{4R^2}$.

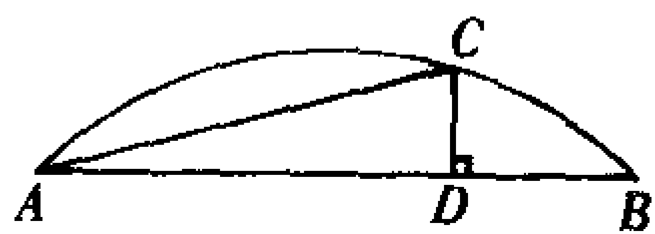
$$\therefore\quad \frac{R^2-OL^2}{4R^2}\leqslant\frac{S_1}{S}\leqslant\frac{R^2-OK^2}{4R^2}.$$

由 $OL=\sqrt{3}r+r$, $OK=\sqrt{3}r-r$, $R=3r$, 所以

$$\frac{5-2\sqrt{3}}{26}\leqslant\frac{S_1}{S}\leqslant\frac{5+2\sqrt{3}}{36}.$$

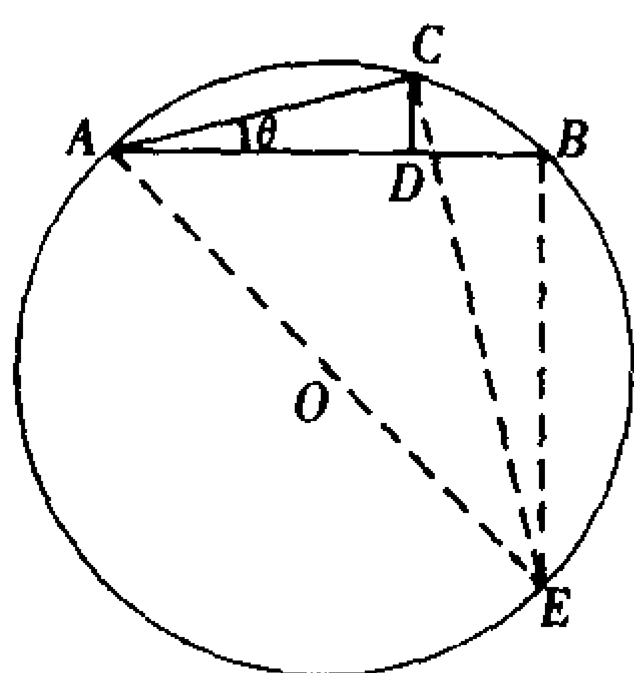
第十三章　极值问题

故 $\dfrac{S_1}{S}$ 的最大值为 $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{26}$，$\dfrac{S_1}{S}$ 的最小值为 $\dfrac{5-2\sqrt{3}}{26}$.



13·34　半径为 r，底 $AB=\sqrt{2}r$ 的弓形 ABC 中，c 为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，且 $CD\perp AB$ 于 D. 试求：使 $S_{\triangle ACD}$ 最大的点 C，且求 $S_{\triangle ACD}$ 的最大值.

（中国北京市数学竞赛，1980 年）



［解］　设过 A 的直径为 AE，连 AE、BE、CE，　则 $\angle BAE=45°$.

又设 $\angle CAB=\theta$，则 $AC=2r\cos(45°+\theta)$.

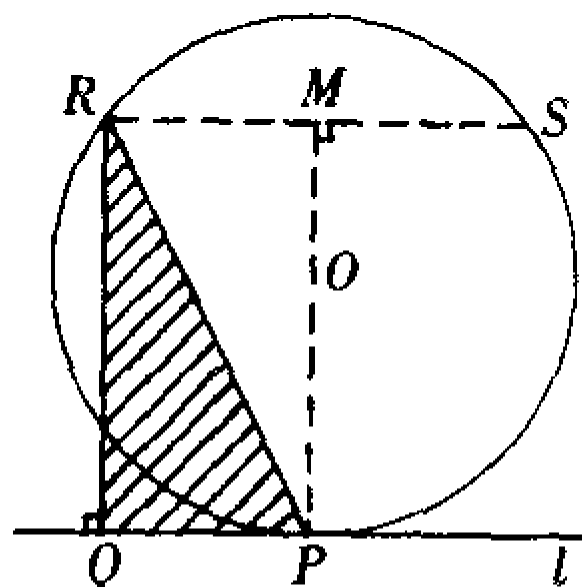
$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle ACD}&=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos(45°+\theta)\\&\quad\cdot 2r\cos(45°+\theta)\cos\theta\sin\theta\\&=r^2\cos^2(45°+\theta)\sin 2\theta\\&=\frac{r^2}{2}[1+\cos 2(45°+\theta)]\sin^2\theta\\&=\frac{r^2}{2}(1-\sin 2\theta)\sin 2\theta\\&=\frac{r^2}{2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\sin 2\theta\right)^2\right],\end{aligned}$$

$\therefore$　当 $\dfrac{1}{2}-\sin 2\theta=0$ 即　$\theta=15°$时，S 最大，且 $S_{\max}=\dfrac{r^2}{8}$.

13·35　给定半径为 r 的圆上定点 P 的切线 l，由此圆上动点 R 引 PQ 垂直于 l，交直线 l 于 Q，试确定面积最大的 $\triangle PQR$.

（第 13 届加拿大数学奥林匹克，1981 年）

［解］　过 R 作 $RS\parallel PQ$ 交圆 O 于 S. 连 PO 并延长交 RS 于 M，则　$PM\perp RS$，$RM=MS$，$RM=PQ$.



连 PS，则　$S_{\triangle PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot QR$，

$S_{\triangle PRS}=\dfrac{1}{2}\cdot RS\cdot PM$，

$\therefore$　$S_{\triangle PQR}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle PRS}$.

于是，当且仅当 $\triangle PRS$ 的面积最大时，$\triangle PQR$ 的面积最大.

由于$\triangle PRS$是圆内接三角形,所以当它为等边三角形时,面积最大,面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

$\therefore\quad \triangle PQR$的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.

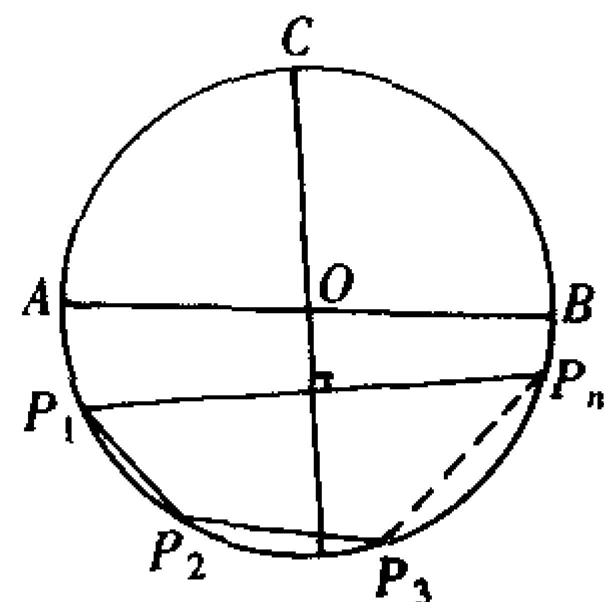
于是,当$\angle PRS=\frac{\pi}{3}$,即$\angle PRS=\frac{\pi}{6}$时,$\triangle PQR$的面积最大,面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.

13·36　直径AB把圆分成两个半圆,在其中的一个半圆上选取n个点$P_1,P_2,\cdots,P_n$,使点P_1落在点A与P_2之间,点P_2落在点P_1与P_3之间,…,点P_n落在点P_{n-1}与B之间.在另一个半圆上怎样选取点C,使$\triangle CP_1P_2$、$\triangle CP_2P_3$、$\triangle CP_3P_4$、…、$\triangle CP_{n-1}P_n$的面积之和最大?

（波兰数学奥林匹克,1969年）

[解]　由于

$$\sum_{i=1}^{n-1}S_{\triangle CP_iP_{(i+1)}}=S_{P_1P_2\cdots P_n}+S_{\triangle CP_1P_n}.$$



以及$S_{P_1P_2\cdots P_n}$为定值,则当且仅当$S_{\triangle CP_1P_n}$的面积最大时,$\sum_{i=1}^{n-1}S_{\triangle CP_iP_{(i+1)}}$最大.

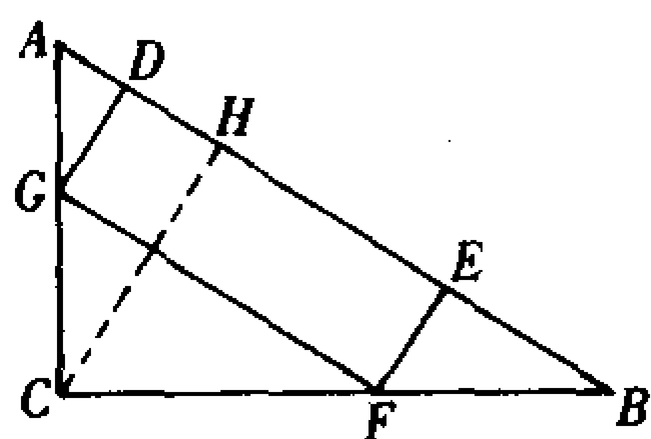
由于圆上与弦P_1P_n距离最大的点位于弦P_1P_n的垂直平分线上,因此作P_1P_2的垂直平分线交另一个半圆于C,则此时$S_{\triangle CP_1P_2}$最大,即$\sum_{i=1}^{n-1}S_{\triangle CP_iP_{(i+1)}}$最大.

2. 多边形中的面积极值

13·37　直角$\triangle ABC$中有内接矩形$DEFG$,且D、E在斜边AB上,F、G分别在BC和AC上.若$AC=b$,$BC=a$,问矩形的长和宽分别是多少时,S_{DEFG}有最大值,并求出这个最大值.

（中国辽宁省沈阳市初中数学邀请赛,1991年）

[解]　如图,设矩形的长和宽分别为n、m,斜边为c,斜边上的高



为 $HC=h$，$AG=x$，则由面积公式，可得 $hc=ab$，①

由 $\triangle AGD \backsim \triangle ACH$，可得 $\dfrac{n}{h}=\dfrac{x}{b}$，②

由 $\triangle CFG \backsim \triangle CBA$，可得 $\dfrac{m}{c}=\dfrac{b-x}{b}$，③

由①、②、③ 可得

$$S_{矩形DEFG}=\frac{hx}{b}\cdot\frac{c(b-x)}{b}=-\frac{ch}{b^2}x^2+\frac{ch}{b}x=-\frac{a}{b}x^2+ax.$$

当 $x=-\dfrac{a}{-\dfrac{2a}{b}}=\dfrac{ab}{2a}=\dfrac{b}{2}$ 时，$S_{\max}=\dfrac{-a^2}{-\dfrac{4a}{b}}=\dfrac{ab}{4}$.

此时 $m=\dfrac{hx}{b}=\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2(a^2+b^2)}$，

$$n=\frac{c(b-x)}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

即矩形的长为 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，宽为 $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2(a^2+b^2)}$ 时 $S_{矩形DEFG}$ 有最大值，最大值是 $\dfrac{ab}{4}$.

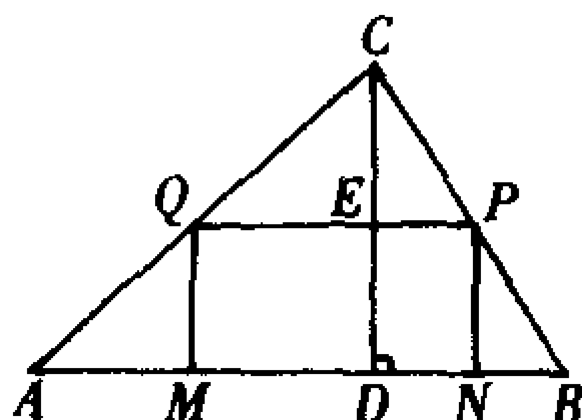
13·38 从一个已知三角形剪出一个面积最大的矩形.

（波兰数学奥林匹克，1962 年）

[解] 首先考虑矩形的所有顶点都在三角形的边界上的情形.

设矩形 $MNPQ$ 的四个顶点在 $\triangle ABC$ 的边上，且设 M、N 在边 AB 上，P 在边 BC 上，Q 在边 AC 上.

又设矩形的长 $MN=y$，宽 $NP=x$，面积为 S，$\triangle ABC$ 的 $AB=C$，AB 边上的高 CD 为 h，面积为 T.



由 $\triangle CPQ \backsim \triangle CBA$ 及相似三角形对应高的比等于相似比可得

$$\frac{CE}{CD}=\frac{PQ}{AB},$$

即 $\dfrac{h-x}{h}=\dfrac{y}{c}$，或 $ch=yh+cx$，

由平均不等式得 $yh+cx\geqslant 2\sqrt{chxy}=2\sqrt{chS}$.

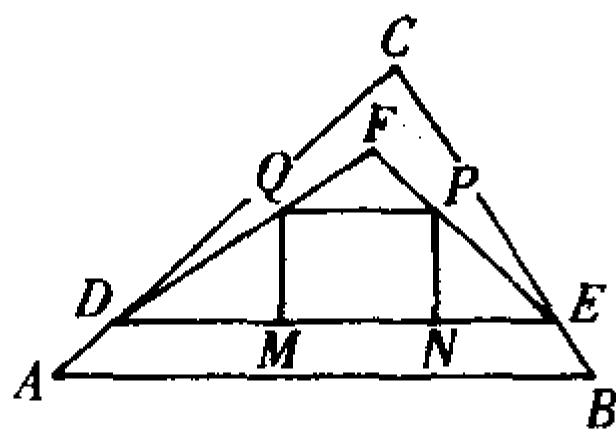
从而有 $ch\geqslant 2\sqrt{chS}$. 即 $S\leqslant\dfrac{1}{4}ch=\dfrac{1}{2}T$.

当且仅当 $yh=cx=\dfrac{1}{2}ch$，即 $y=\dfrac{1}{2}c$ 时，矩形有最大面积，其最大值为已知三角形面积的$\dfrac{1}{2}$，此时矩形的两个顶点恰为三角形的两边的中点.

下面再考虑矩形的顶点不全在三角形的边界上的情形.

这时我们证明 $S<\dfrac{1}{2}T$.

(1)若矩形的两条对边平行于三角形的一条边.



设矩形 $MNPQ$ 的边 $MN/\!/PQ/\!/AB$，且 MN 和 AB 位于 PQ 的同一侧.

设直线 MN 与 AC 交于 D，与 BC 交于 E.

因为射线 DQ 与线段 EC 有公共点，射线 EP 与线段 DC 有公共点. 所以这两条射线交于$\triangle DEC$ 内的点 F，

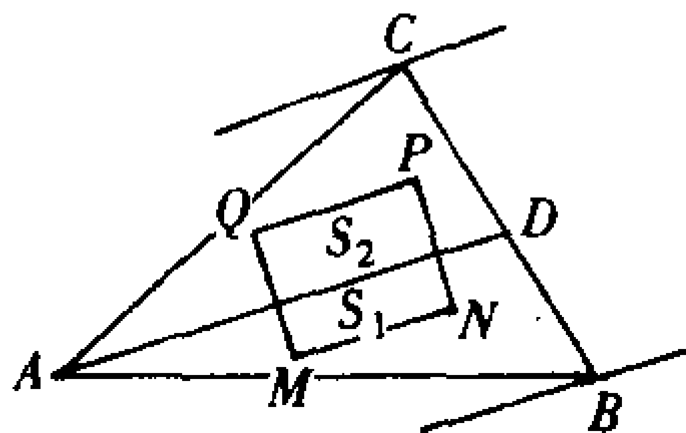
于是矩形 $MNPQ$ 的顶点在$\triangle DEF$ 的边上，由上面的证明可知

$$S\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle DEF},$$

又 $S_{\triangle DEF}<S_{\triangle ABC}=T$，$\therefore$ $S<\dfrac{1}{2}T$.

(2)若矩形的任何一边都不与三角形的边平行.

我们过$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 作直线与矩形的边 MN 平行. 由假设这些直线中任两条都不重合，因此必有一条介于另两条之间，设过顶点 A 所作的平行线介于另两条平行线之间. 并设这条平行线交 BC 于 D，则$\triangle ABC$ 被 AD 分为两个三角形$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$.



如果矩形 $MNPQ$ 落在这两个三角形之一的内部，例如落在

$\triangle ADB$ 的内部,则由上面的证明有

$$S \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle ADB} < \frac{1}{2} T.$$

如果 AD 把矩形 $MNPQ$ 分划为面积为 S_1 和 S_2 的两个矩形,则有

$$S_1 \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}, \quad S_2 \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle ADC}.$$

但是上面的不等式中至少有一个等号不成立,这是因为 M、N、P、Q 不可能都在$\triangle ABC$ 的边上.

故 $S = S_1 + S_2 < \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} T.$

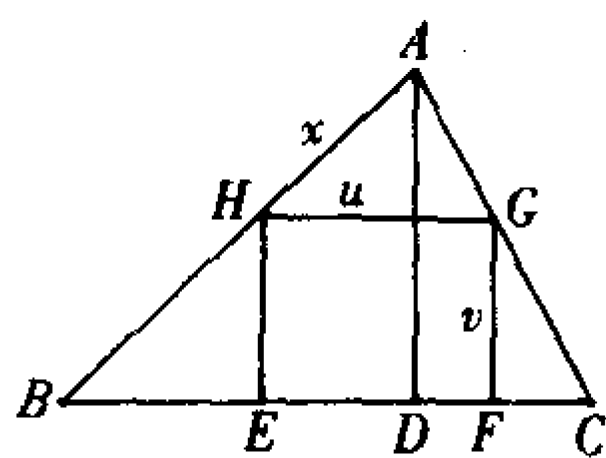
由以上可知:从一个三角形剪成的矩形,其面积不超过原三角形面积的一半.当且仅当矩形的两个顶点重合于三角形两边的中点,而另两顶点在三角形的第三边上.

因此,从锐角三角形有三种方法剪出最大矩形,从直角三角形中只有两种剪法,从钝角三角形中只有一种剪法.

注 本题系上一命题的推广或一般情形.

13·39 l 表示所有内接于三角形 T 的长方形的对角线中最小的长,对所有的三角形 T,确定$\frac{l^2}{T\text{的面积}}$的最大值.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)



[解] 设内接矩形 $EFGH$ 的边 EF 在 BC 上,$EF = u$, $FG = v$, $AH = x$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,则 $u = \frac{ax}{c}$, $v = \frac{h_a(c-x)}{c}$.

设一边在 BC 上的内接矩形的对角线为 l_a,同理设 l_b、l_c,则

$$l_a^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{ax}{c}\right)^2 + \left[\frac{h_a(c-x)}{c}\right]^2$$
$$= \left(\frac{a^2 + h_a^2}{c^2}\right) x^2 - \frac{2h_a^2}{c} x + h_a^2.$$

其最小值为 $\min l_a^2 = \frac{a^2 h_a^2}{a^2 + h_a^2} = \frac{4T^2}{a^2 + 4T^2 a^{-2}}$,其中 T 为$\triangle ABC$ 的面积.

同理有 $\min l_b^2=\dfrac{4T^2}{b^2+4T^2b^{-2}}$.

注意到,当 $a\geqslant b$ 时,有 $ab\geqslant 2T$,且

$$(a^2+4T^2a^{-2})-(b^2+4T^2b^{-2})$$
$$=(a^2-b^2)(1-4T^2a^{-2}b^{-2})\geqslant 0.$$

所以 l 是在矩形的边 EF 在三角形的最大边上时达到最小值.

不失一般性,假定 a 边最大,且 $\angle B$ 或 $\angle C$ 有一角不大于 $60°$,设 $B\leqslant 60°$.

则 $\dfrac{h_a}{a}=\dfrac{c\sin B}{a}\leqslant\sin B\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ \dfrac{2T}{a^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a^2\geqslant\dfrac{4T}{\sqrt{3}}$.

由于 $x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x>1$ 时是增函数,所以

$$a^2+4T^2a^{-2}\geqslant\frac{4T}{\sqrt{3}}+4T^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4T}=\frac{7\sqrt{3}}{3}T.$$

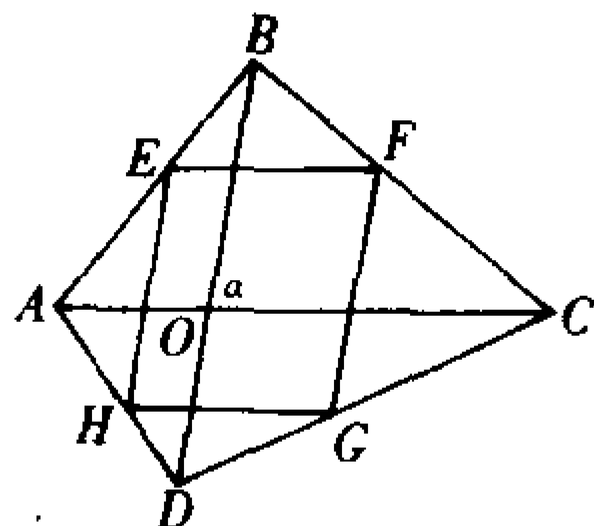
$$l^2\leqslant\frac{4T^2}{\frac{7\sqrt{3}}{3}T}=\frac{12}{7\sqrt{3}}T=\frac{4\sqrt{3}}{7}T.$$

从而 $\dfrac{l^2}{T}\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. 即 $\dfrac{l^2}{T}$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

13·40 一个凸四边形的面积为 S,在它的内部作平行四边形,使其各边平行于凸四边形的对角线,且顶点在凸四边形的各边上,求此平行四边形的面积的最大值.

(第 11 届全俄数学奥林匹克,1985 年)

[解] 如图,设对角线 AC、BD 相交于 O, $\angle BOC=\alpha$.



由 $EF/\!/AC/\!/HG$, $EH/\!/BD/\!/FG$,

可得 $\angle EFG=\angle BOC=\alpha$.

又设 $AE=x\cdot AB$, $0<x<1$.

则 $BE=(1-x)AB$,

由 $\triangle AEH\backsim\triangle ABD$ 得 $EH=x\cdot BD$.

同理可得 $EF=(1-x)AC$.

$S_{EFGH}=EF\cdot EH\cdot\sin\alpha$

$=x(1-x)AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$.

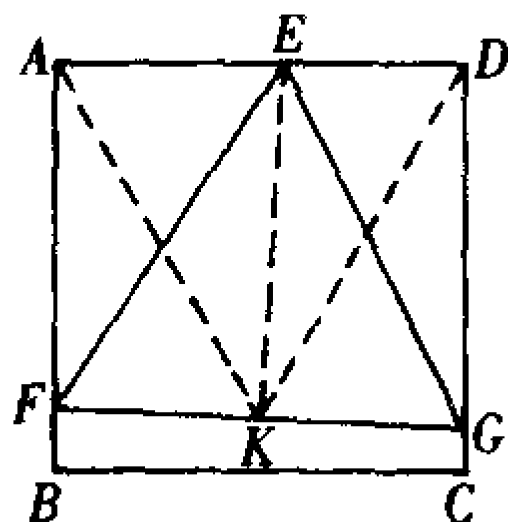
又 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha=S$，且 $x>0$，$1-x>0$，

$\therefore\quad S_{EFGH}=x(1-x)\cdot 2S\leqslant 2\cdot\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 S=\frac{1}{2}S'$.

当且仅当 $x=1-x$,即 $x=\frac{1}{2}$,也就是平行四边形的各顶点为凸四边形的各边中点时,面积最大,最大值为$\frac{1}{2}S$.

13·41　设有一边长为 1 的正方形,试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的,并求出这两个面积(须证明你的论断).

(中国高中数学联赛,1978 年)



[解]　如图,假设△FGE 为正方形 $ABCD$ 的任一内接正三角形,由于正三角形的三个顶点至少必落在正方形的三边上,所以不妨设其中的 F、G 是在正方形的一组对边上.

作△EFG 边 FG 上的高 EK,则 E、K、G、D 四点共圆,连 KD,则有$\angle KDE=\angle KGE=60°$.

同理　有$\angle KAE=\angle KFE=60°$.

$\therefore$　△KDA 为正三角形,而 K 是它的一个顶点,故知内接正△EFG 的边 FG 中点必是不动点 K.

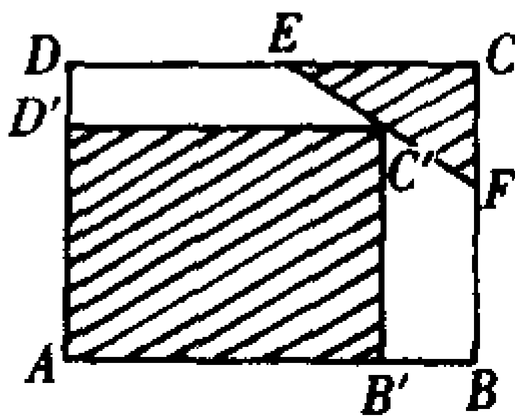
而正三角形的面积由边长决定:

当 $KF/\!/BC$ 时,边长最小,面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$也最小;当 KF 通过 B 点(即 F 与 B 重合)时,边长最大,此时

边长$=\frac{1}{\cos 15°}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$，面积 $S=2\sqrt{3}-3$ 也最大.

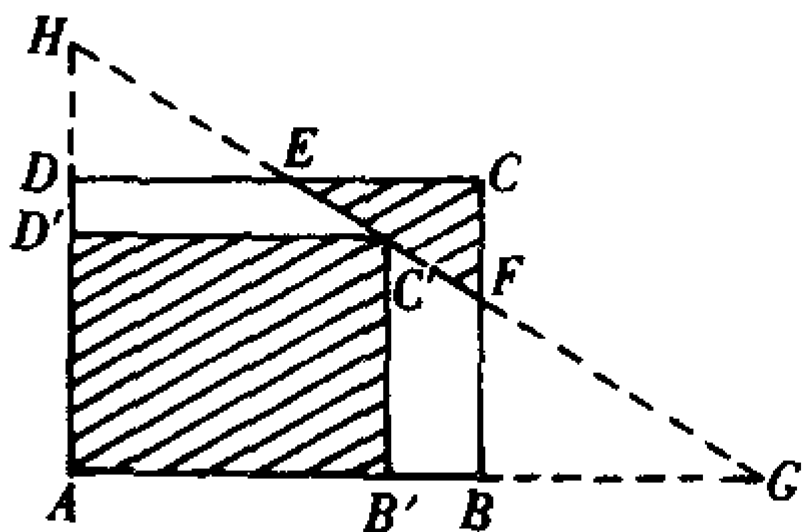
13·42　如图,矩形 $ABCD$ 中,AD、AB 长分别为 a、b,截去一个△CEF,CF、CE 长分别为 a_1、b_1,在余下部分内再作一矩形 $AB'C'D'$,要求一个顶点仍为 A,AB'、AD'分别在 AB、AD 上,且 C'在线段 EF 上

(不包括端点 E、F). 问 C'在什么位置能使所得新的矩形 $AB'C'D'$面积最大，并求出 C'在线段 EF 内的条件.



（中国中学生数理化接力赛，1986 年）

［解］ 延长 EF 分别与 AB、AD 延长线交于 G、H.



$\because \quad \triangle AGH \backsim \triangle B'GC'$，

$\therefore \quad \dfrac{AH}{AG}=\dfrac{B'C'}{B'G}$.

令 $C'D'=x$， 且设 $AH=m, AG=n$，则 $B'C'=\dfrac{m}{n}(n-x)$.

$$\therefore \quad S_{\square AB'C'D'}=\frac{m}{n}(n-x)x=\frac{m}{n}\left[-\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}\right].$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{n}{2}$ 时，$S_{\square AB'C'D'}$有最大值. 而 n 的值可由 a、b、a_1、b_1 给出.

$\because \triangle CEF \backsim \triangle BGF$，$\therefore \quad \dfrac{CF}{CE}=\dfrac{BF}{BG}$.

即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a-a_1}{n-b}$. 解得 $n=b+\dfrac{b_1}{a_1}(a-a_1)$.

$$\therefore \quad x=\frac{n}{2}=\frac{b}{2}+\frac{b_1}{2a_2}(a-a_1).$$

即当 $C'D'$的长为 $\dfrac{b}{2}+\dfrac{b_1}{2a_1}(a-a_1)$ 时，即可用平移找到 C'点的位置.

而 C'在线段 EF 内的条件，必须满足

$$b-b_1<\frac{b}{2}+\frac{b_1}{2a_1}(a-a_1)<b_1.$$

即 $$\begin{cases}\dfrac{b}{2}+\dfrac{b_1}{2a_1}(a-a_1)<b, & ①\\[2mm] \dfrac{b}{2}+\dfrac{b_1}{2a_1}(a-a_1)>b-b_1. & ②\end{cases}$$

由①得 $b+\frac{b_1}{a_1}(a-a_1)<2b$,

即 $b_1a-a_1b<a_1b_1$,

两边除以 a_1b_1,得 $\frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1}<1$.

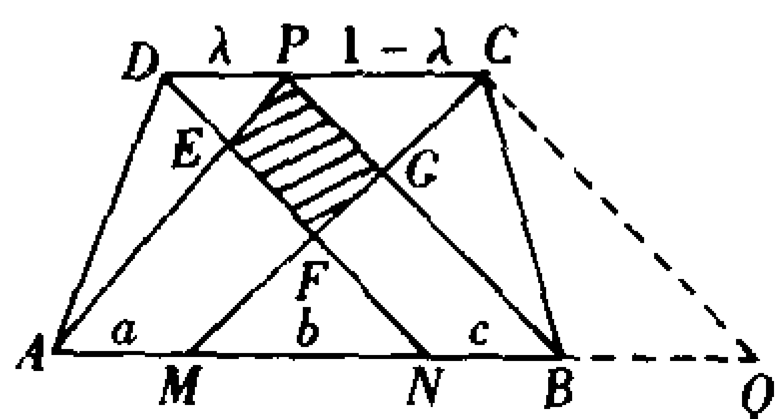
由②同样可得 $-1<\frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1}$.

∴ C'在线段EF上(端点E、F除外)必须满足的条件为

$$-1<\frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1}<1.$$

13·43 在梯形 $ABCD$ 的下底 AB 上有二定点 M 和 N,上底 CD 上有一个动点 P. $DN\cap AP=E$, $DN\cap MC=F$, $MC\cap PB=G$, $DP=\lambda DC$. 问当 λ 为何值时.四边形 $PEFG$ 的面积最大?

(中国国家集训队选拔考试,1988 年)



[解] 不妨设 $DC=1$,于是 $DP=\lambda$, $PC=1-\lambda$. 设 $AM=a$, $MN=b$, $NB=c$,梯形的高为 h.

过点 C 作 PB 的平行线交 AB 的延长线于点 Q(如图),于是四边形 $PBQC$ 为平行四边形. 所以 $BQ=PC=1-\lambda$.

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle MGB}}{S_{\triangle MCQ}}=\left(\frac{MB}{MQ}\right)^2=\frac{(b+c)^2}{(b+c+1-\lambda)^2}.$$

$$\because \quad S_{\triangle MCQ}=\frac{1}{2}h\cdot(b+c+1-\lambda),$$

$$\therefore \quad S_{\triangle MGB}=\frac{h\cdot(b+c)^2}{2(b+c+1-\lambda)}. \qquad ①$$

同理 $$S_{\triangle AEN}=\frac{h\cdot(a+b)^2}{2(a+b+\lambda)}. \qquad ②$$

显然,$S_{\triangle APB}$和$S_{\triangle FMN}$都是定值,从而由

$$S_{PEFG}=S_{\triangle APB}-(S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN})+S_{\triangle FMN}$$

知,当 $S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}$取最小值时,$S_{PEFG}$取得最大值. 由①和②有

$$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}=\frac{h}{2}\left(\frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}+\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda}\right). \qquad ③$$

由柯西不等式有

$$\left(\frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}+\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda}\right)[(b+c+1-\lambda)+(a+b+\lambda)]$$

$$\geqslant[(b+c)+(a+b)]^2=(a+2b+c)^2, \quad ④$$

其中等号当且仅当

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b+\lambda)^2}=\frac{(b+c)^2}{(b+c+1-\lambda)^2}$$

即　当且仅当　$\lambda=\dfrac{a+b}{a+2b+c}=\dfrac{AN}{AN+MB}$时成立.

从而由③和④得　$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}\geqslant\dfrac{h}{2}\cdot\dfrac{(a+2b+c)^2}{a+2b+c+1}$,

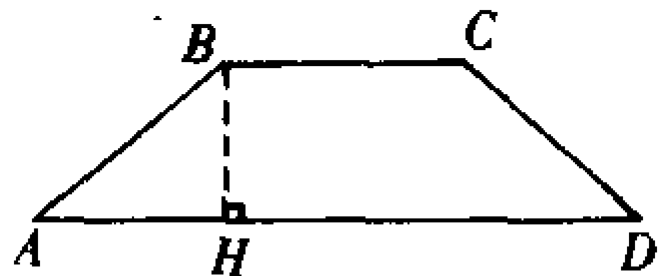
且当且仅当 $\lambda=\dfrac{AN}{AN+MB}$时等号成立,即取得最小值.

此时 S_{PEFG}取到最大值.

13·44　设等腰梯形的最大边长为13,周长为28.(1)设梯形的面积为27,求它的边长.(2)这种梯形的面积能否等于27.001?

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1980年)

[解]　设 AD 是较大的底边,BH 是已知等腰梯形 $ABCD$ 的高.



如果 $AB=CD=13$,则

$$AD+BC=28-2\times13=2.$$

又　$S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot BH=BH<13<27$.与已知矛盾,

最大边长13不是腰的长,因此　$AD=13$.

设 $AB=x$,则　$BC=28-13-2x=15-2x$,

且　$AH=\dfrac{13-(15-2x)}{2}=x-1$.

及　$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{x^2-(x-1)^2}=\sqrt{2x-1}$.

由平均值不等式得

$$S_{ABCD}=\frac{(28-2x)\sqrt{2x-1}}{2}=\sqrt{(2x-1)(14-x)^2}$$

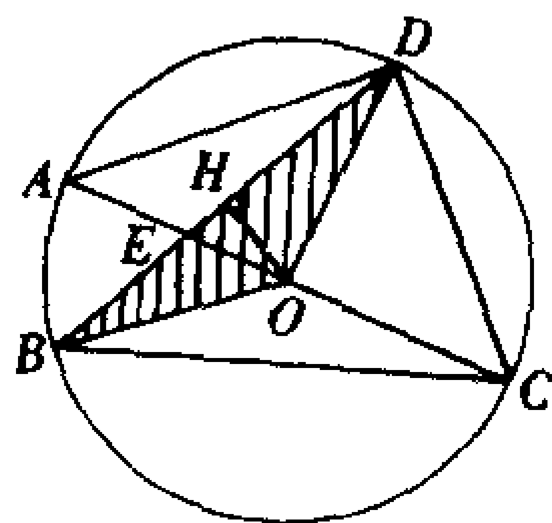
$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{(2x-1)+(14-x)+(14-x)}{3}\right)^3}=27.$$

当且仅当 $2x-1=14-x$，即 $x=5$ 时，等腰梯形 $ABCD$ 的最大面积为 27. 亦即梯形面积为 27 时，$AD=13$，$AB=BC=CD=5$.

由于 27 是梯形面积的最大值. 所以面积为 27.001 的符合题设条件的等腰梯形不存在.

13·45　E 是某定圆直径 AC 上的定点，过 E 引弦 BD，使四边形 $ABCD$ 的面积为最大.

（第 14 届全苏数学奥林匹克，1980 年）



［解］　设 O 为圆心，R 为半径. $OE=a$，易知

$$S_{\triangle OED}:S_{\triangle ACD}=a:2R,$$

$$S_{\triangle OED}:S_{\triangle ABC}=a:2R,$$

$$S_{\triangle OBD}=\frac{Q}{2R}S_{ABCD}.$$

因而，问题可归结为求

$$\max\{S_{\triangle OBD}\}=\max\left\{\frac{1}{2}R^2\sin\varphi\right\},$$

其中 $\varphi=\angle BOD$.

角 φ 越小，则弦 BD 也越小，而相应地这个弦的弦心距就越大.

在 Rt$\triangle OHE$ 中，$OH\leqslant OE=a$，

所以，最小值 $\varphi=\varphi_0$ 对应的 OH 与 OE 重合，亦即　$BD\perp AC$. 这时，$\cos\dfrac{\varphi_0}{2}=\dfrac{a}{R}$.

于是　只需求 $\varphi_0\leqslant\varphi<\pi$ 时，函数 $\sin\varphi$ 的最大值.

1）如果 $\varphi_0\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，那么 $\max\{\sin\varphi\}$ 在 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时达到，此时，

$$\frac{a}{k}=\cos\frac{\varphi_0}{2}\geqslant\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ a\geqslant\frac{R}{\sqrt{2}},$$

而所求的含于 90°弧的弦 BD 与圆心相距 $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. 即与以 O 为圆心、$\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ 为半径的圆相切.

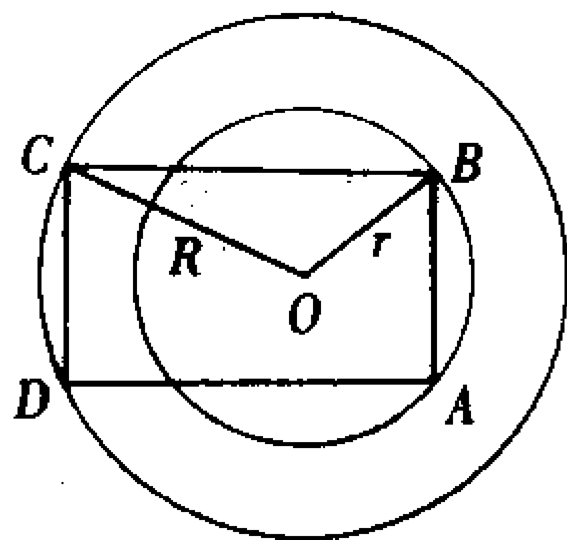
2）如果 $\varphi_0>\dfrac{\pi}{2}$，这时 $a<\dfrac{R}{\sqrt{2}}$，那么 $\max\{\sin\varphi\}$ 在 $\varphi=4_0$ 时达到，所求的弦 BD 应与直径 AC 相垂直.

13·46　设两个同心圆的半径分别为 r 和 R，一个矩形有两个相邻的顶点在其中的一个圆上，其他的两个顶点在另一个圆上，求：当该矩形面积最大时，边的长度.

（瑞典数学奥林匹克，1983 年）

［解］　不妨设 $r \leqslant R$. 且

设 $ABCD$ 为所求的矩形.



∵　$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$，

又　$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}Rr\sin\angle BOC \leqslant \frac{1}{2}Rr$.

∴　矩形 $ABCD$ 的面积不大于 $2Rr$.

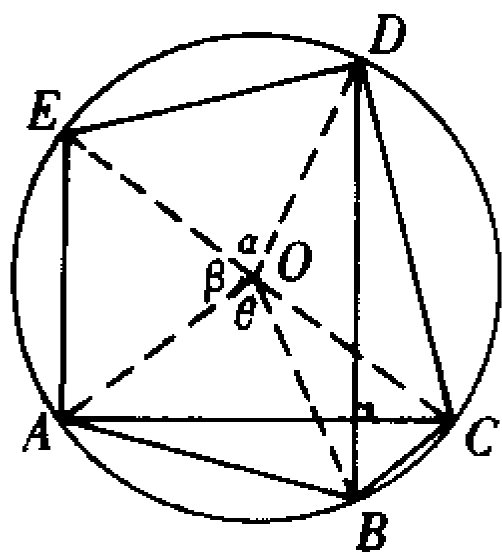
当 $CO \perp OB$ 时，矩形 $ABCD$ 有最大面积 $2Rr$. 这时矩形的边长为

$$\sqrt{R^2+r^2} \quad 和 \quad \frac{2Rr}{\sqrt{R^2+r^2}}.$$

13·47　一个凸五边形 P，其顶点 A、B、C、D、E 按顺序标记，它内接于半径为 1 的圆. 求：以 AC 垂直于 BD 为条件的 P 的面积的最大值.

（第 45 届美国普特南数学竞赛，1984 年）

［解］　设五边形 $ABCDE$ 的外接圆圆心为 O，连 OA、OB. 设 $\angle AOB=\theta$.



∵　$AC \perp BD$，则($\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}$)的度数 $=\pi$.

∴　$\angle COD=\pi-\theta$.

又设　$\angle DOE=\alpha$，$\angle EOA=\beta$，

∴　$\angle BOC=\pi-\alpha-\beta$. 则 P 的面积为

$$S_P=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOE}+S_{\triangle EOA}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta.$$

$$=\sin\theta+\frac{1}{2}[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta)]$$

由于　当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\theta$ 的最大值为 1.

又由于　$\alpha+\beta+(\pi-\alpha-\beta)=\pi$，　则有

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta)}{3} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta+(\pi-\alpha-\beta)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

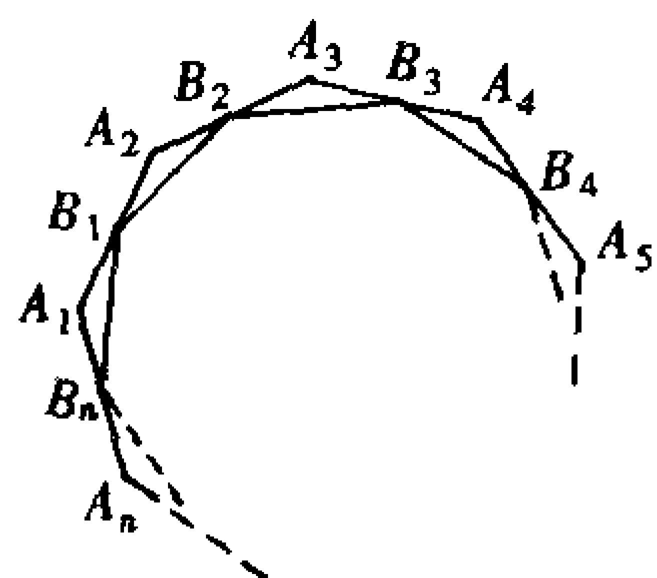
从而　当且仅当 $\alpha=\beta=\pi-\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$ 时,

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta)$ 的值最大,最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

于是　当 $\angle AOB=\angle COD=\frac{\pi}{2}$, $\angle BOC=\angle DOE=\angle EOA=\frac{\pi}{3}$ 时,五边形的面积最大,最大值为 $\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$.

13·48　求证:在一个正 n 边形的所有内接正 n 边形中, $n>3$,当内接正 n 边形的各顶点与原 n 边形各边中点重合时,面积最小.

(美国纽约数学奥林匹克,1979年)



[证]　设面积为 S_B 的正 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 内接于面积为 S_A 的正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$.

则当这两个正 n 边形不重合时,每一边 A_iA_{i+1} 上恰好有一顶点 B_i,其中 $i=1,2,\cdots,n$. 且 $A_{n+1}=A_1$.

首先证明: $A_1B_1=A_2B_2=\cdots=A_nB_n$.

事实上,由于

$$\angle B_1A_2B_2=\angle B_2A_3B_3=\angle B_1B_2B_3=180\cdot\frac{n-2}{n}.$$

$$\begin{aligned}\angle A_2B_1B_2&=180^\circ-\angle B_1A_2B_2-\angle A_2B_2B_1\\&=180^\circ-\angle B_1B_2B_3-\angle A_2B_2B_1=\angle A_3B_2B_3.\end{aligned}$$

又　$B_1B_2=B_2B_3$.

∴　$\triangle B_1A_2B_2\cong\triangle B_2A_3B_3$. 有　$A_2B_2=A_3B_3$.

同理可证　$A_1B_1=A_2B_2=\cdots=A_nB_n$.

显然有
$$\begin{aligned}S_B&=S_A-S_{\triangle B_1A_2B_2}-S_{\triangle B_2A_3B_3}-\cdots-S_{\triangle B_nA_1B_1}\\&=S_A-nS_{\triangle B_1A_2B_2}.\end{aligned}$$

于是,当 $\triangle B_1A_2B_2$ 的面积达到最大时, S_B 取得最小值.

设　$A_1A_2=a$, $A_1B_2=x$, 则

$$\begin{aligned}S_{\triangle B_1A_2B_2}&=\frac{1}{2}B_1A_2\cdot A_2B_2\sin\angle B_1A_2B_2\\&=\frac{1}{2}(a-x)x\sin\angle B_1A_2B_2\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\sin\angle B_1A_2B_2.$$

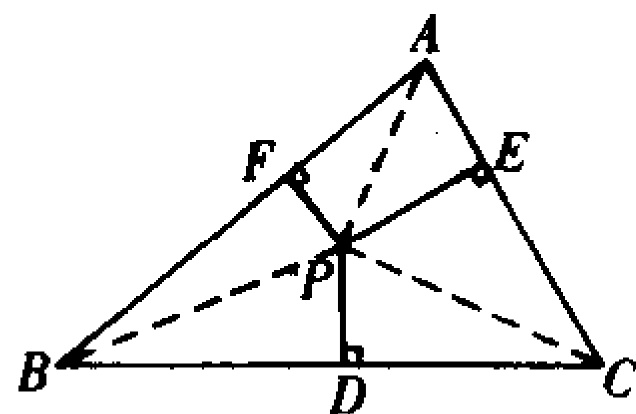
当且仅当 $x=\frac{a}{2}$，即内接正 n 边形各顶点与原 n 边形各边中点重合时，$S_{\triangle B_1A_2B_2}$ 最大，从而 S_B 最小.

(三)极值杂例

13·49 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D,E,F 分别为 P 到 BC,CA,AB 三边所引垂线的垂足，求使得表达式 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 取最大值的所有点 P.

(第 22 届国际数学奥林匹克，1981 年)

[解] 设 $\triangle ABC$ 的周长为 L，面积为 S，则



$$S=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}(PD\cdot BC+PE\cdot CA+PF\cdot AB)$$

由柯西不等式得

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)$$

$$\geqslant(BC+CA+AB)^2=L^2. \quad ①$$

于是有 $$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{L^2}{2S} \quad ②$$

由于 $\frac{L^2}{2S}$ 是定值，故若②式中等式成立，即①式中等号成立，

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

就取得最小值.

又①式等号成立的充分必要条件是

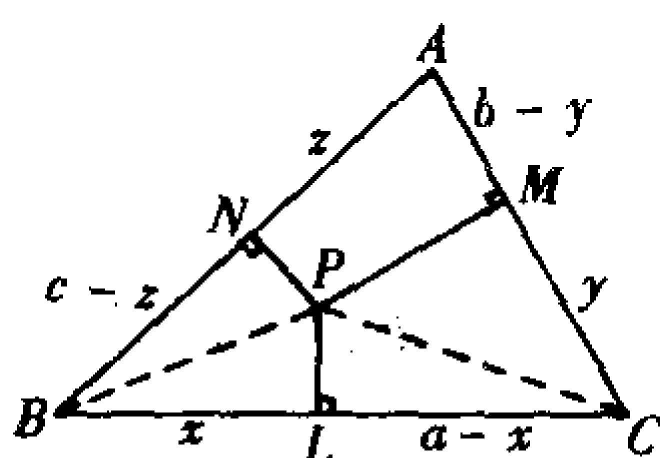
$$\frac{\frac{BC}{PD}}{BC\cdot PD}=\frac{\frac{CA}{PE}}{CA\cdot PE}=\frac{\frac{AB}{PF}}{AB\cdot PF}$$

即 $PD=PE=PF$.

此时 P 为 $\triangle ABC$ 的内心，因此所求的取最小值的点只有一点，即 $\triangle ABC$ 的内心 P.

13·50 求出并证明：锐角三角形 ABC 内的点 P，使得对于这个三角形，$BL^2+CM^2+AN^2$ 最小．其中 L、M、N 分别是 P 到 BC、CA、AB 的垂足．

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）



［解］ 设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$BL=x$，$CM=y$，$AN=z$.

由勾股定理得

$$PC^2-PB^2=(a-x)^2-x^2,$$
$$PA^2-PC^2=(b-y)^2-y^2,$$
$$PB^2-PA^2=(c-z)^2-z^2,$$

将以上三式相加得

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=x^2+y^2+z^2. \quad ①$$

若 P 是 $\triangle ABC$ 各边垂直平分线的交点，则

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

令 $x\leqslant\frac{a}{2}$，设 $x=\frac{a}{2}-\varepsilon_1(\varepsilon_1\geqslant0)$，则有

$$x^2+(a-x)^2=\left(\frac{a}{2}-\varepsilon_1\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\varepsilon_1\right)^2=\frac{a^2}{2}+2\varepsilon_1^2,$$

同理可得 $y^2+(b-y)^2=\frac{b^2}{2}+2\varepsilon_2^2$,

$$z^2+(c+z)^2=\frac{c^2}{2}+2\varepsilon_3^2.$$

将以上三式相加并由①可得

$$2(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2),$$

即
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

当且仅当 $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=0$，即 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$ 时，上面不等式的等号成立.

此时 P 为各边垂直平分线的交点，即 P 为$\triangle ABC$ 的外心时，

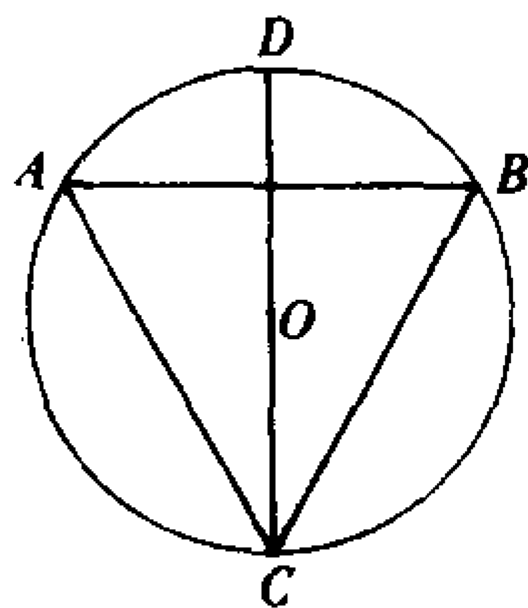
$$x^2+y^2+z^2=BL^2+CM^2+AN^2$$

达到最小值$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

13·51　给定一圆及圆上两点 A、B，求圆上一点 C，使得 AC^2+BC^2 达到最大值.

（基辅数学奥林匹克，1965 年）

［解］　由余弦定理知



$$AC^2+BC^2=AB^2+2AC\cdot BC\cdot\cos C$$

$$=AB^2+4\left(\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin C\right)\text{ctg}C$$

$$=AB^2+4S\cdot\text{ctg}C,$$

这里 S 是$\triangle ABC$ 的面积.

作 AB 的垂直平分线，即$\odot O$ 的直径 CD，如图，则显见图中 C 点即合所求.

这是因为此时 S 达到最大，且$\angle ACB<90^\circ$，ctg$C$ 非负.

13·52　在给定的圆中，怎样的圆内接多边形其边的平方和最大？

（匈牙利数学奥林匹克，1934 年）

［解］　(1)注意到在钝角三角形中，钝角所对的边的平方大于其他两边的平方和，所以，如果在圆内接多边形中，有一个角是钝角，那么当去掉这个钝角之后得到一个顶点数少一的多边形，它的边的平方和将增大，因此，我们可以在所研究的圆内接多边形中，去掉所有钝角的顶点，而使边数减少，边的平方和变大.

因为 n 边形的内角和满足

$$(n-2)\cdot180^\circ=[n+(n-4)]\cdot90^\circ.$$

所以在任何一个五边形和非矩形的四边形中，都至少有一个钝角.因此，边长平方和最大的圆内接多边形应从圆内接矩形和圆内接三角形中寻找.

(2)设给定圆的半径为 r，则圆内接矩形的各边平方和为 $8r^2$.

(3)设$\triangle ABC$ 内接于半径为 r 的圆，三边的平方和为 T，则

$$T=4r^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C).$$

下面考察 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$ 的最大值.

$$\begin{aligned}&\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\\&=1-\cos^2A+\frac{1-\cos^2B}{2}+\frac{1-\cos^2C}{2}\\&=2-\cos^2A-\cos(B+C)\cos(B-C)\\&=2-\cos^2A+\cos A\cos(B-C)\\&=2-\left[\cos A-\frac{1}{2}\cos(B-C)\right]^2+\frac{1}{4}\cos^2(B-C)\end{aligned}$$

∴ 当且仅当 $\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{2}\cos(B-C),\\\cos(B-C)=1\end{cases}$ 时,

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$ 的最大值是$\frac{9}{4}$.

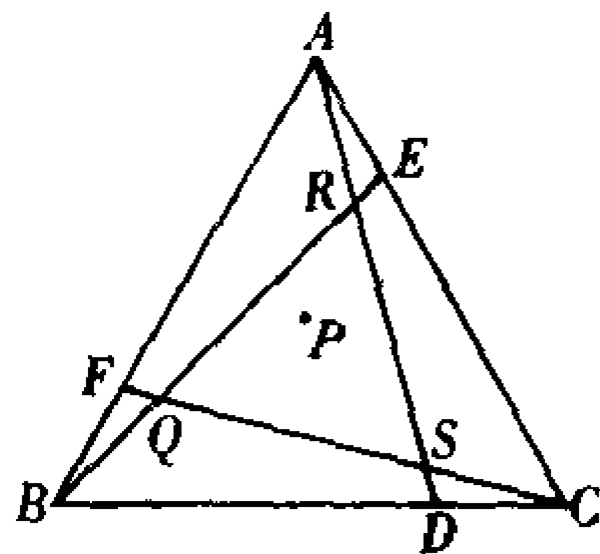
此时 $B=C$, $A=60^\circ$, 即 $A=B=C=60^\circ$, $T=4r^2\cdot\frac{9}{4}=9r^2$.

所以,在圆内接三角形中,正三角形的平方和最大,最大值为 $9r^2$.

由于圆内接矩形的多边平方和 $8r^2<9r^2$,因此在所有内接于给定的圆内接多边形中,正三角形的各边的平方和最大.

13·53 已知:边长为 4 的正△ABC. D、E、F 分别是 BC、CA、AB 上的点,且 $|AE|=|BF|=|CD|=1$,连结 AD、BE、CF,交成△RQS,P 点在△RQS 内及其边上移动,P 到△ABC 的距离分别是 x、y、z. (1)求证 P 点在△RQS 的顶点位置时,乘积 xyz 有极小值;(2)求上述乘积的极小值.

(中国高中数学联赛,1982 年)



[证] 如图.由假设,有 $AB=BC=CA=4$, $AE=CD=BF=1$.

又∵ $\angle BAC=\angle CBA=\angle ACB$,

∴ $\triangle ABE\cong\triangle BCF\cong\triangle CAD$.

故 $\triangle AER\cong\triangle BFQ\cong\triangle CDS$.

从而△RQS 是正三角形.

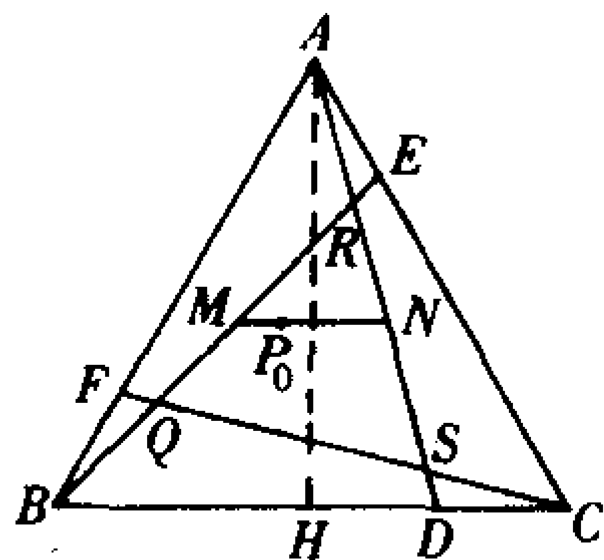
当动点 P 在△RQS 的内部及边界上变动时,

我们将证明：

①当 P 在$\triangle RQS$ 内时，xyz 不是最小值；

②当 P 在线段 QS 内(不包括 Q、S 两点)，xyz 也不是最小值.

如果上两条得证，再由与 R、Q、S 三点相应的 x、y、z 相同，即知这三点的 xyz 是最小的，从而(1)得证.



①证 设 P_0 在$\triangle RQS$ 之内，过 P_0 作 $MN /\!/ BC$，且设 MN 与 RS 交于 N，与 RQ(或 QS)交于 M(如图).

此时 MN 上每点 P 的 x 恒为 x_0.(我们用 x_0、y_0、z_0 表示 P_0 到三边的距离)，

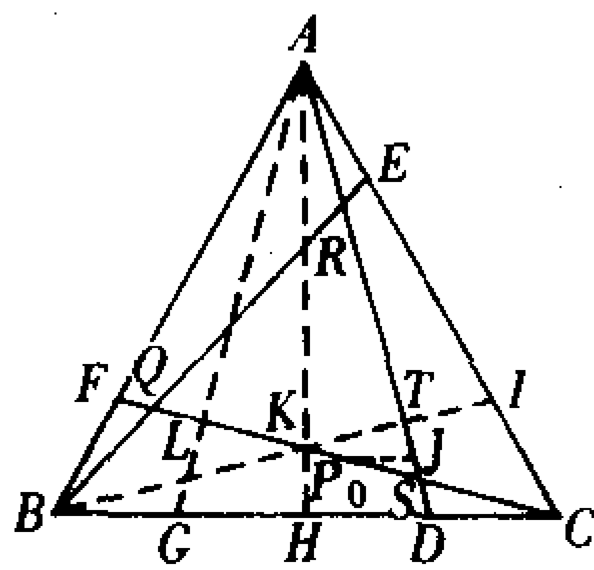
从而 $y+z=2\sqrt{3}-x_0$ 是常数(这里用到正三角形内及边界上任一点到三边的距离和为定值高的长，即 $x+y+z=\sqrt{3}$).

注意到 $y=\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$，当$|y-z|$愈大则 yz 愈小.

现在 M、N 中总有一点的$|y-z|$比 P_0 的$|y_0-z_0|$大，因此这点的 $yz<y_0z_0$.

即 $\quad xyz<x_0y_0z_0$.

可见$\triangle RQS$ 内的任一点 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 不是最小值.



②证 考虑线段 QS 内的点 P_0. 设 H 为 BC 中点，$BG=IC=1$，FC 分别与 AG、AH 的交点为 L、K，BI 也通过 K 且与 AD 交于 T(如图).

当 P_0 在 KS 上(不取 S)，作 $P_0J /\!/ BC$，P_0J 交 AD 于 J，此时 P_0 与 J 的 x 相等，而 J 点的 $z-y>z_0-y_0>0$(因为 J 比 P_0 离中垂线 AH 更远)，由于 P_0J 上每点的 $y+z=2\sqrt{3}-x_0$ 是常数，所以 J 点的 $yz<y_0z_0$，即 $xyz<x_0y_0z_0$，因此 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 不是最小.

当 P_0 在 LK 之内，它关于 AH 的对称点必在 KT 之内，P_0 与其对称点的 xyz 都相同，但此对称点已落在$\triangle RSQ$ 内，已证明其 xyz 不是最小，所以 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 也不是最小.

当 P_0 落在 QL 上(但不取 Q)，则过 P_0 作 $P_0V /\!/ AC$，设 P_0V 与 BE 交于 V，因为直线 BL 垂直平分 AC，V 比 P_0 离 BL 更远，

所以 V 的$x-z>x_0-z_0$，而 $y=y_0$，因此 $xz<x_0z_0$，即 V 的 xyz

$<x_0y_0z_0$,

知 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 也不是最小，所以，只有 S、Q、R 有可能取最小 xyz.

最后，来计算最小值 xyz

$\because\quad \triangle ARE \backsim \triangle ACD$ ($\because\quad \angle ARE=\angle C=60^\circ$),

$\therefore\quad AR_1:RE=4:1$，即 $AR:SD=4:1$；

又$\because\quad \triangle ASF \backsim \triangle ABD$ ($\because\quad \angle ASF=\angle B$),

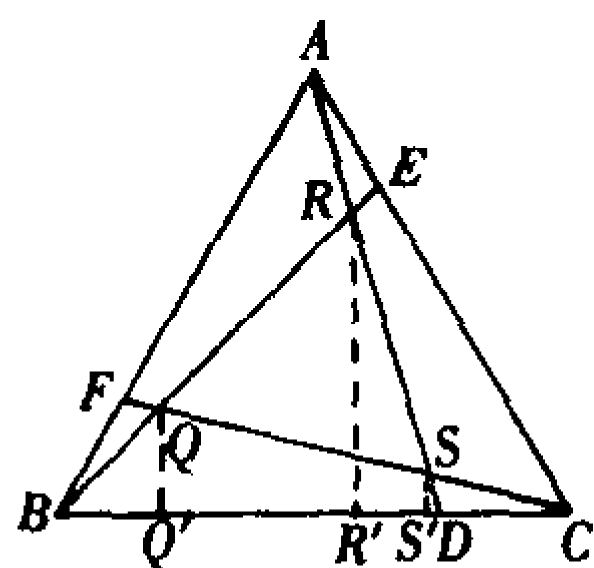
$\therefore\quad AS:SF=4:3$,

设 $SD=l$，则 $AR=4l$，$FQ=l$,

$$\therefore\quad \frac{4}{3}=\frac{AS}{SF}=\frac{AR+RS}{QS+QF}=\frac{4l+RS}{RS+l}.$$

解得 $RS=8l$. 取 $|AR|:|RS|:|SD|=4:8:1$.

作 $RR'\perp BC$，$QQ'\perp BC$，$SS'\perp BC$，垂足分别为 R'、Q'、S'，则



$$\frac{RR'}{QQ'}=\frac{BR}{BQ}=\frac{AS}{AR}=3,$$

$$\frac{QQ'}{SS'}=\frac{QC}{SC}=\frac{AS}{AR}=3.$$

即 $RR'=9SS'$，$QQ'=3SS'$,

但 $RR'+QQ'+SS'=2\sqrt{3}$,

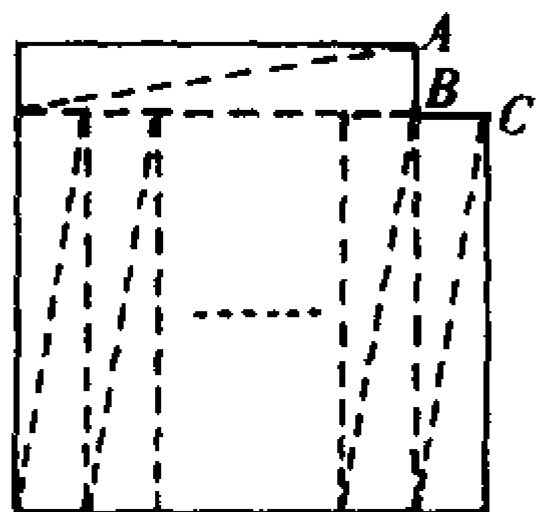
所以 R 点的 $x_1=RR'=\dfrac{9}{13}\times 2\sqrt{3}$.

$$y_1=SS'=\frac{1}{13}\times 2\sqrt{3},\ z_1=QQ'=\frac{3}{13}\times 2\sqrt{3}.$$

因此，xyz 的最小值为 $x_1y_1z_1=\dfrac{648}{2197}\sqrt{3}$.

13·54 设 n 是大于 1 的自然数，从 $n\times n$ 的正方形的一个角上剪去一个 1×1 的方块，将这个图形分成 k 个面积都相等的三角形. 试求 k 的最小值.

（中国上海市数学竞赛，1992 年）



［解］ 如图，在同一折线 ABC 有公共点的这些等积三角形中，必有一个三角形的一条边是 AB(或 AC)的一部分，这条边的长度不大于 1，而且这条边上的高不大于 $n-1$,

所以,该三角形的面积不超过 $\frac{n-1}{2}$.

另一方面,该三角形的面积等于 $\frac{n^2-1}{k}$,

故 $\frac{n^2-1}{k} \leqslant \frac{n-1}{2}$,有 $k \geqslant 2n+2$.

图中给出了等号成立的情形.

综上所述,k 的最小值是 $2n+2$.

13·55 P_1 是正 r 边形,P_2 是正 s 边形($r \geqslant s \geqslant 3$),且 P_1 的每一个内角都是 P_2 的每一个内角的$\frac{59}{58}$,试求 s 的最大值.

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解] 由凸多边形内角和公式且依题意有

$$\frac{(r-2)\pi}{r} = \frac{(s-2)\pi}{s} \cdot \frac{59}{58},$$

即 $sr - 118r + 116s = 0$,

$$\therefore \quad s = \frac{118r}{r+116} = 118 - \frac{118 \times 116}{r+116}.$$

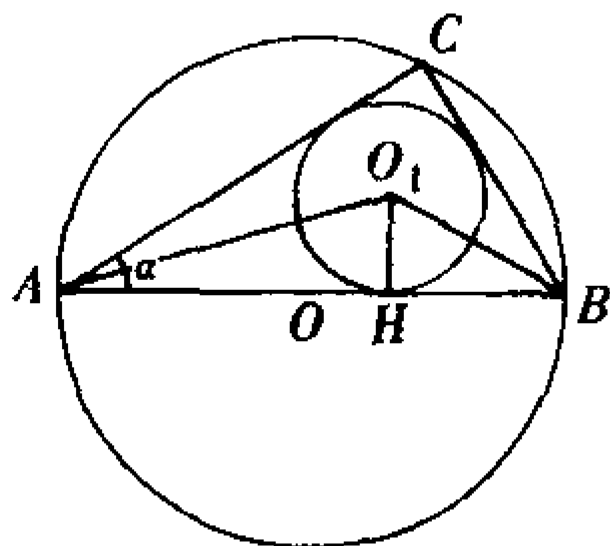
为求 s 的最大值,需求正整数$\frac{118 \times 116}{r+116}$的最小值,显然,当 $r = 117 \times 116$ 时,$\frac{118 \times 116}{r+116}$的最小值等于 1.

$\therefore$ s 的最大值为 117.

13·56 求:内切圆与外接圆的半径的比为最大的直角三角形的两个锐角的大小.

(基辅数学奥林匹克,1952 年)

[解] 在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90^\circ$,设$\angle CAB = 2$,则$\angle ABC = 90^\circ - \alpha$.



设$\odot O(R)$,$\odot O_1(r)$分别表$\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆. H 是$\odot O_1$ 与 AB 的切点.(如图)

由 $2R = AB = AH + HB$

$$= r\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

则 $$\frac{r}{R}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$$
$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin45^\circ}$$
$$=\frac{\cos(\alpha-45^\circ)-\cos45^\circ}{\sin45^\circ}$$
$$=\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)-1.$$

当 $\cos(\alpha-45^\circ)=1$ 时，$\frac{r}{R}$ 取最大值，由于 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，故当 $\alpha=45^\circ$ 时，$\frac{r}{R}$ 取最大值.

[解 2] 设直角△ABC 的斜边为 c，两条直角边为 a、b，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r.

显然 $R=c$，$r=\frac{a+b-c}{2}$.

由熟知的不等式有 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$，

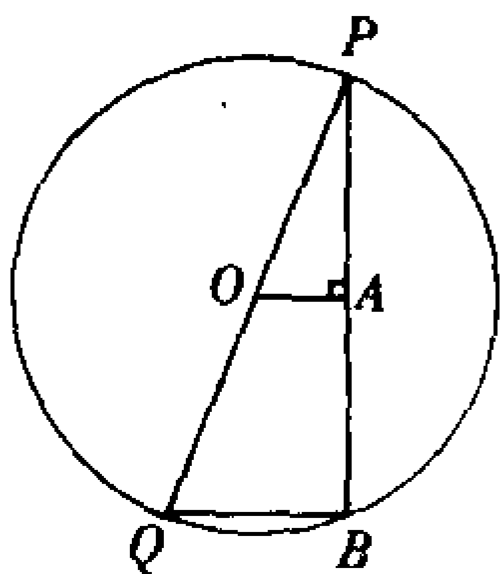
于是 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$，当且仅当 $a=b$ 时成立等号.

因此有 $$\frac{r}{R}=\frac{\frac{a+b-c}{2}}{c}=\frac{a+b-c}{2c}\leqslant\frac{\sqrt{2}c-c}{2c}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

当且仅当 $a=b$ 时，$\frac{r}{R}$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，此时直角三角形的两个锐角均为 45°.

13·57 设 O 是圆心，A 是圆内不同于 O 的某个定点，确定圆周上所有的点 P，使∠OPA 极大.

（第 9 届加拿大数学奥林匹克，1977 年）



[解 1] 由正弦定理 $\frac{\sin\angle OPA}{OA}=\frac{\sin\angle PAO}{OP}$，

及 $\sin\angle OPA=\frac{OA}{OP}\sin\angle PAO$.

因为 OA、OP 均为定长，并且 $0^\circ<\angle OPA<90^\circ$，

∴ 当 $\sin\angle PAO$ 极大时，$\sin\angle OPA$ 极大，从而

$\angle OPA$ 极大.

而当$\angle PAO=90°$时,$\sin\angle PAO$ 极大,即过 A 作垂直于 OA 的弦,则弦的端点即为所求的点.

[解 2] 延长 PO 成直径 PQ,延长 PA 成弦 PB,则$\angle PBQ=90°$.

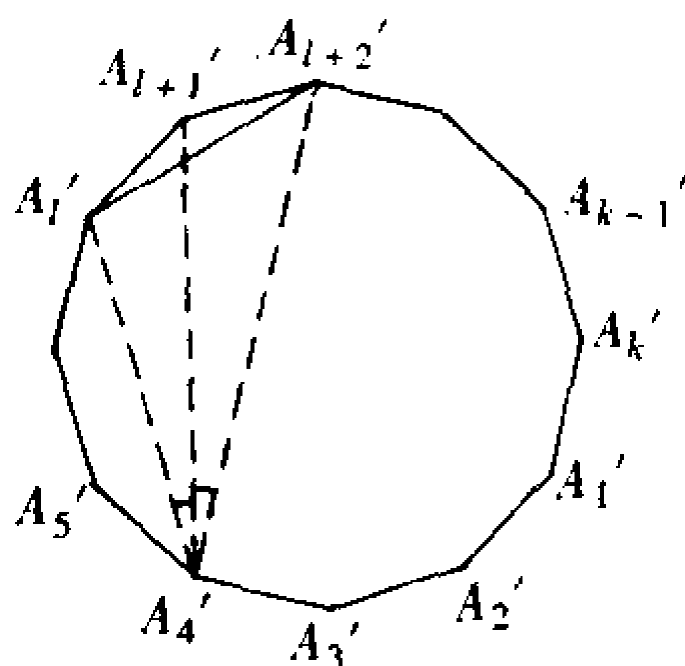
因此,当$\angle PQB$ 极小时,$\angle OPA$ 极大.

而弦 PB 极小时,当且仅当 $OA\perp PB$,因此过 A 与 OA 垂直的弦的端点为所求的 P.

13·58 设平面上有 $n\geqslant 3$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.其中任意三个点不共线.用 α 表示所有的角$\angle A_iA_jA_k$ 的最小值,其中 A_i、A_j、A_k 是三个不同的给定的点,对每个 n,求 α 的最大值,并确定当这些点怎样分布时,取到最大值.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1974 年)

[解] 我们证明:α 的最大值为$\dfrac{180°}{n}$.



设平面上有 n 个点,使得 α 取得最大值.

考虑过其中两点 A_1'与A_2'的直线,使得所有其他给定点都在直线 $A_1'A_2'$的同侧.

取点 A_3',使得$\angle A_1'A_2'A_3'$取到最大,则所有其他的点都在这个角的内部,它们与 A_2'的连线把$\angle A_1'A_2'A_3'$分成 $n-2$ 个角,而且每一个角都不小于 α,所以有

$$\angle A_1'A_2'A_3'\geqslant(n-2)\alpha.$$

其中,取一点 A_4',使得$\angle A_2'A_3'A_4'$是最大的,则 A_1'、A_5'、A_6'、$\cdots$、A_n'都在这个角的内部,并且

$$\angle A_2'A_3'A_4'\geqslant(n-2)\alpha.$$

若 $A_4'\neq A_1'$,$A_4'\neq A_2'$,则同样可以取一点 A_5',如此继续.

因为点的个数为 n,所以点到 A_1'、A_2'、A_3'、$\cdots$一定从某项起回复到原来第一个点.设在取到点 $A_k'\cdots$后回复,即$\angle A_{k-1}'A_k'A_j$ 对某个点 $A_j=A_i'\in\{A_1',\cdots,A_{k-2}'\}$;$\angle A_{k-1}'A_k'A_i'$是最大的,于是,如果 $i\neq 1$,则点 A_1'在$<A_{k-1}'A_1'A_i'$的内部,即在凸多边形 $A_i'A_{i+1}'\cdots A_{k-1}'A_k'$的内部,与它的取法矛盾.因此 $i=1$,并且凸 k 边形 $A_1'A_2'\cdots A_k'$的内角和为

$180°\cdot(k-2)\geqslant k\cdot(n-2)\alpha$.

由此得到

$$\alpha\leqslant\frac{180°\cdot(k-2)}{(n-2)k}=\frac{180°}{n-2}\left(1-\frac{2}{k}\right)\leqslant\frac{180°}{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{180°}{n}.$$

要使等式 $\alpha=\frac{180°}{n}$ 成立，只有当 $k=n$，即

$$\angle A_1'A_2'A_3'=\angle A_2'A_3'A_4'=\cdots=\angle A_k'A_1'A_2'=(n-2)\alpha.$$

并且以 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 的任意一个角引出的所有对角线将该角分为等角 α 时才可能.

这样的 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 一定是正 n 边形，这是因为对任意 $l=1,2,\cdots,n$，有

$\angle A_l'A'_{l+2}A'_{l+1}=\angle A'_{l+2}A_l'A'_{l+1}$，故 $A_l'A'_{l+1}=A'_{l+1}A'_{l+2}$.

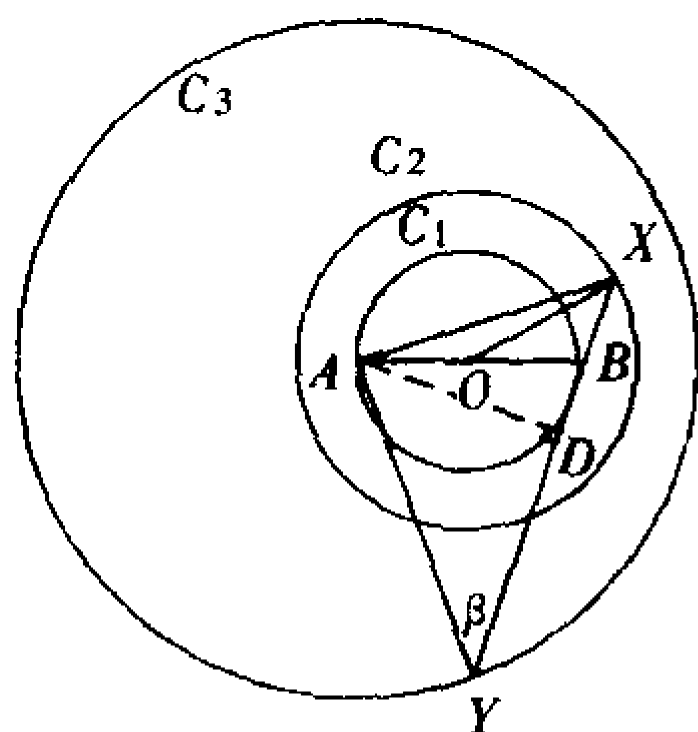
其中约定 $A'_{n+1}=A'_1,A'_{n+2}=A_2'$

因此该多边形为正 n 边形.

最后，正 n 边形的 n 个顶点的确满足 $\alpha=\frac{180°}{n}$. 这是因为如果作正 n 边形的外接圆，则从它的任意一个顶点引出的对角线中，任意两相邻对角线的夹角都等于 $\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n}=\frac{180°}{n}$.

13·59 平面上已知三个圆 $C_i(i=1,2,3)$，C_1 的直径 $AB=1$，C_2 与 C_1 同心，C_2 的直径 k 满足 $1<k<3$. C_3 以 A 为圆心，直径为 $2k$，k 为定值. 考虑所有直线段 XY，一端 X 在 C_2 上，一端 Y 在 C_3 上，并且 XY 含有点 B. 问比值 $\frac{XB}{BY}$ 为何值时，线段 XY 长度最小?

(第 16 届美国数学奥林匹克，1987 年)



[解 1] 设 O 为 AB 的中点，则

$OB=\frac{1}{2}$，$OX=\frac{1}{2}k$，$AY=k$.

又设 $\angle ABX=\alpha$，$\angle AYB=\beta$，$\angle BXO=\gamma$.

在 $\triangle ABY$ 和 $\triangle OBX$ 中，由正弦定理得

$$\frac{k}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\beta}，即\quad \frac{\frac{k}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\gamma}. \qquad ①$$

于是 $\beta=\gamma$. 又由正弦定理及 $\beta=\gamma$ 得

$$\frac{XB}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\gamma}，及\quad \frac{BY}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{1}{\sin\gamma}.$$

从而 $\quad XB+BY=XY=\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)+2\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin\gamma}$

$$=\frac{3\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma}{2\sin\gamma}$$

由①式 $\quad k=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$，∴ 有 $\quad XY=\dfrac{1}{2}(3k\cos\gamma-\cos\alpha)$. ②

过 A 作 $AD\perp BY$ 于 D，则 $YD=k\cos\gamma$，$AD=AB=\sin\alpha=\sin\alpha$.

由勾股定理有 $\quad k^2\cos^2\gamma=AY^2-AD^2=k^2-\sin^2\alpha$. ③

为方便讨论,我们设 $\quad \sin^2\alpha=x$. ④

由②、③、④得 $\quad XY=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{k^2-x}-\sqrt{1-x})$.

令 $\quad u=3\sqrt{k^2-x}-\sqrt{1-x}$,平方并整理得

$64x^2-4(36k^2-5u^2-4)x+(9k^2+1-u^2)^2-36k^2=0$.

因为 x 是实数,则该方程的根的判别式 $\Delta\geqslant0$.

$\Delta=16(36k^2-5u^2-4)^2-4\times64[(9k^2+1-u^2)^2-36k^2]\geqslant0$,

解得 $\quad u^2\geqslant8(k^2-1)$. 即 $\quad u\geqslant2\sqrt{2}\sqrt{k^2-1}$.

∴ $\quad XY\geqslant\sqrt{2}\sqrt{k^2-1}$，当 $\quad x=\dfrac{9-k^2}{8}$时等号成立.

又 $x=1$ 时，$XY=\dfrac{3}{2}\sqrt{k^2-1}$，而

$$\frac{3}{2}\sqrt{k^2-1}>\sqrt{2}\sqrt{k^2-1}.$$

于是当 $x=\dfrac{9-k^2}{8}$时,XY 有最小值$\sqrt{2}\sqrt{k^2-1}$.

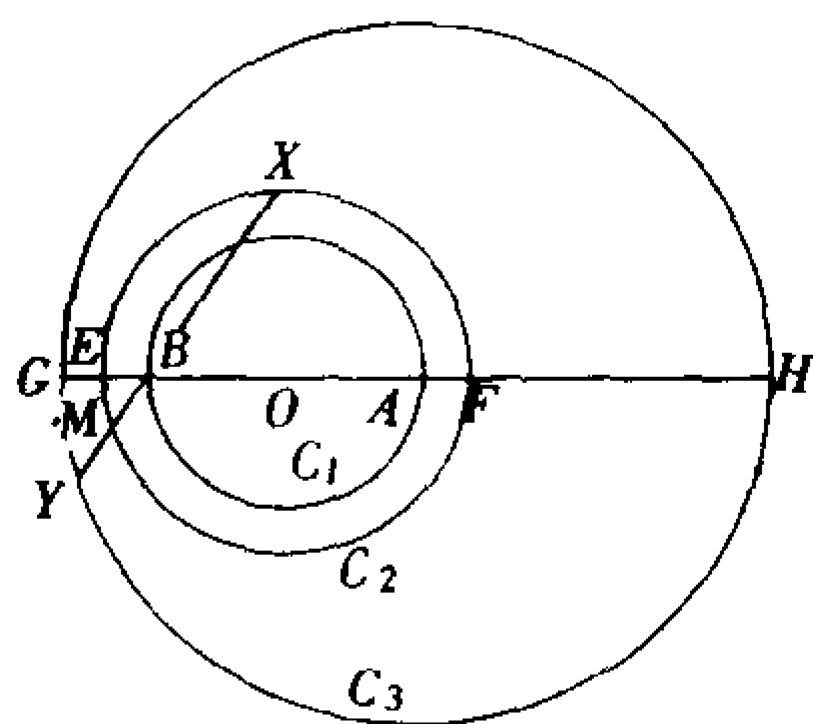
由于 $\quad \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=k$，$x=\sin^2\alpha$，则 $\quad x=\sin^2\alpha=\dfrac{9-k^2}{8}=\dfrac{9-\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}}{8}$,

由此可求得 $\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{k}$.

于是有 $\dfrac{XB}{BY}=\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin(\alpha-\gamma)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{2(\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma)}$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}+1}{2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}-1\right)}=\frac{k\cdot\dfrac{3}{k}+1}{2\left(k\cdot\dfrac{3}{k}-1\right)}=1.$$

即$\dfrac{XB}{BY}=1$时,XY的长度最小.



[**解 2**] 记 XY 与圆 C_2 的另一交点为 M,直线 AB 交圆 C_2 于 E、F,交圆 C_3 于 G、H,

于是 $BE=\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{1}{2}BG$, $BF=\dfrac{k+1}{2}=\dfrac{1}{2}BH$.

可见,B 为圆 C_2 与 C_3 的位似中心且位似比为$\dfrac{1}{2}$.

所以有 $BM=\dfrac{1}{2}BY$.

由相交弦定理有

$BX\cdot BM=BE\cdot BF=\dfrac{k^2-1}{4}$,

从而知 $BX\cdot BY=\dfrac{k^2-1}{2}$为常数.

故当 $BX=BY$ 时,线段 XY 的长度取最小值.

此外,当 XY 变为EH时,$BX<BY$;当 XY 变为FG时,

$BY=k-1=\dfrac{k+1}{2}+\dfrac{k-3}{2}=BF-\dfrac{3-k}{2}<BF=BX$.

由连续函数介值定理知 $BX=BY$ 确能实现.

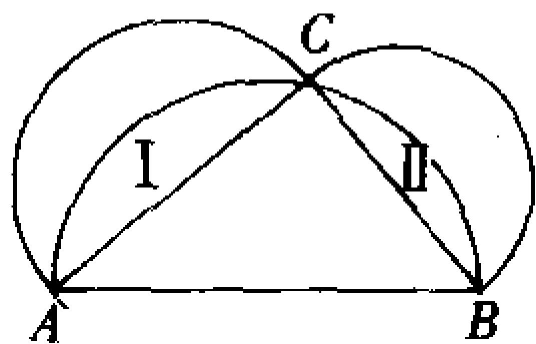
故知当 $BX=BY$,即二者比值为 1 时,XY 的长度取最小值.

13·60 在以 AB 为直径的半圆上取一点 C,以线段 AC 和 BC 为直径在$\triangle ABC$ 外作半圆.必须如何取点 C,才能使所得到月牙形的面

积之和最大?

（基辅数学奥林匹克,1958年）

［解］ 如图.设 AB 为直径的半圆面积为 S_c，BC、CA 为直径的半圆面积分别为 S_a、S_b.



两个月牙形的面积之和为 S，AC 边上的弓形面积为Ⅰ，BC 边上的弓形面积为Ⅱ.则

$$S = S_b + S_a - \text{Ⅰ} - \text{Ⅱ} = S_c - (\text{Ⅰ} + \text{Ⅱ})$$
$$= S_c - (S_c - S_{\triangle ABC}) = S_{\triangle ABC}.$$

今欲 S 最大，即 $S_{\triangle ABC}$最大，由于 AB 固定，只要高最长，取$\overset{\frown}{AB}$上的中点 C 即可.

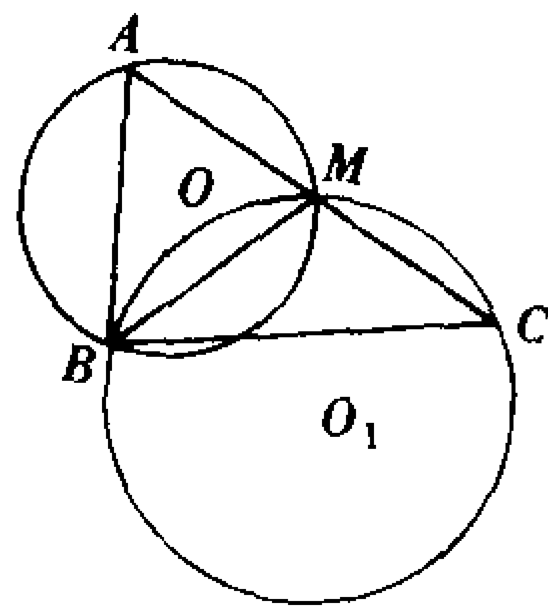
13·61 点 M 在锐角三角形 ABC 的 AC 边上，作$\triangle ABM$ 和$\triangle CBM$ 的外接圆.问当 M 点在什么位置时，两外接圆公共部分的面积最小.

（第20届全苏数学奥林匹克,1986年）

［解］ 设 O，O_1 分别是$\triangle ABM$ 和$\triangle CBM$ 外接圆的圆心.两外接圆的公共部分面积是两个以 BM 为公共弦的弓形面积之和.

注意到 $\angle BOM = 2\angle BAM =$ 常数.

且 $\angle BO_1M = 2\angle BCM =$ 常数.



因此，我们研究当弓形弧所对的圆心角固定时，弓形面积与弓形弦的关系.

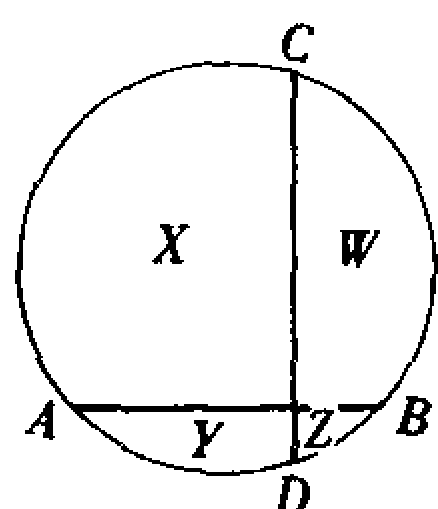
设圆心角为 α，弓形弦长为 b，则弓形面积为

$$\frac{b^2(\alpha - \sin\alpha)}{4 - 4\cos\alpha}$$

可见，若 BM 越小，则每个弓形的面积越小，所以当 BM 是$\triangle ABC$ 的高，即 $BM \perp AC$ 时，此时 M 为垂足，两外接圆公共部分的面积最小.

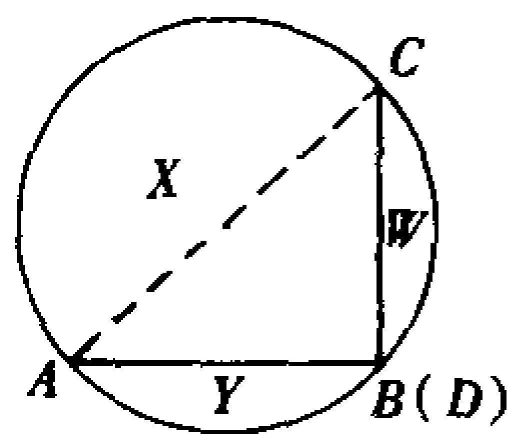
13·62 设 AB 和 CD 是以 O 为圆心，以 r 为半径的圆的两条垂直弦，以 X、Y、Z、W 循环地表示此两条垂直弦把圆盘所分成的四个部分.试求$\dfrac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$的极大值和极小值.此处记号 $A(U)$表示 U 的面积.

（第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年）



［解］ 如图，设圆心 O 所在的区域为 X，平行移动 CD 和 AB，使 B、D 两点逐渐趋于重合，从而使 $A(Z)$ 趋于零.

在这样的移动过程中，$\frac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 逐渐增大，于是当 B、D 重合时，$A(z)=0$，此时



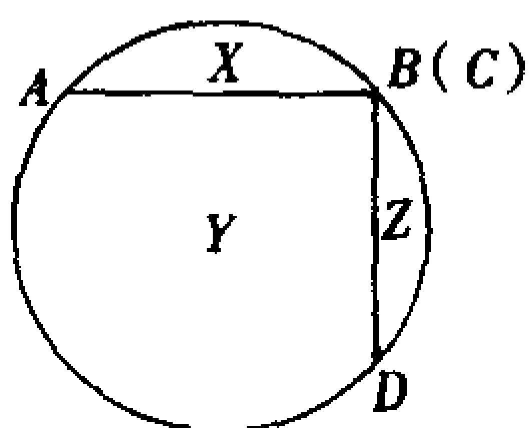
$$A(X)=\frac{1}{2}\pi r^2+S_{\triangle ABC},$$

$$A(Y)+A(W)=\frac{1}{2}\pi r^2-S_{\triangle ABC}.$$

因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形，所以当 $AB=AC$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值. $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 r^2.

因此 $A(X)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\pi r^2+r^2=\frac{1}{2}r^2(\pi+2)$.

此时 $A(Y)+A(W)$ 取得最小值为 $\frac{1}{2}\pi r^2-r^2=\frac{1}{2}r^2(\pi-2)$.



所以，$\frac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 当 AB 和 CD 的两个端点 B 和 D 重合，且这两弦相等时，取得极大值.

$$\frac{\frac{1}{2}r^2(\pi+2)}{\frac{1}{2}r^2(\pi-2)}=\frac{\pi+2}{\pi-2}.$$

同样，平行移动 AB 和 CD，使 B、C 两点趋于重合，即 $A(W)$ 趋近于零. 在这样的过程中，$\frac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 逐渐减小.

当 B 和 C 重合时，$A(W)=0$，此时

$$A(Y)=\frac{1}{2}\pi r^2+S_{\triangle ABD},\quad A(X)+A(Z)=\frac{1}{2}\pi r^2-S_{\triangle ABD}.$$

同样可得，当 AB 和 CD 的两个端点 B 和 C 重合，且这两弦相等时取得极小值 $\frac{\pi-2}{\pi+2}$.

13·63 江宽 a 千米，两岸几乎是平行线. 江滨电力厂向下游 b 千米对岸工厂供电，单位长电线的安装费，水底是陆上的 m 倍，应该怎样

安装电线使得费用最省？

（中国福建省福州市数学竞赛，1963 年）

[解 1] 设电线离电厂 x 千米处入水，而以陆上 1 千米长电线安装费为单位. 则电线安装总费用

$$y=x+m\sqrt{(b-x)^2+a^2}.$$

由此 $(y-x)^2=m^2[(b-x)^2+a^2]$,

即 $(m^2-1)x^2-2(m^2b-y)x+(m^2a^2+m^2b^2-y^2)=0.$

$\because$ x 为实数，

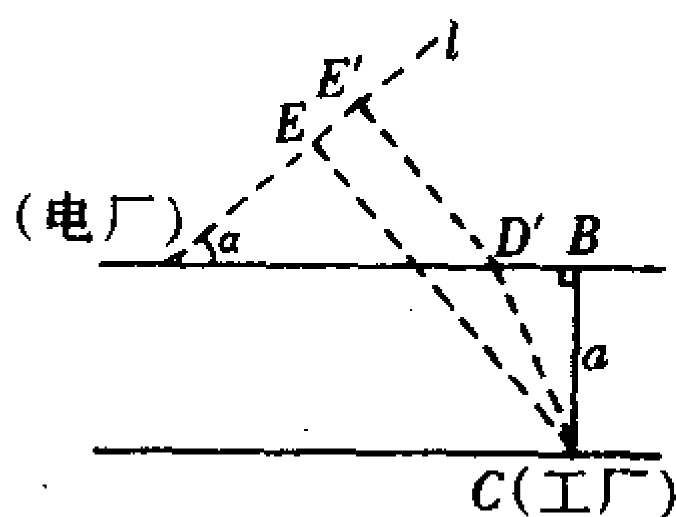
$\therefore$ $\Delta=4(m^2b-y)^2-4(m^2-1)(m^2a^2+m^2b^2-y^2)\geqslant 0$,

整理得 $(y-b)^2\geqslant(m^2-1)a^2$.

但依题意 $m>1$, $y>b$, $\therefore$ $y-b\geqslant\sqrt{m^2-1}\cdot a$.

故 $y_{\min}=a\sqrt{m^2-1}+b$.

这时 $x=\dfrac{m^2b-y}{m^2-1}=b-\dfrac{a}{\sqrt{m^2-1}}$.



[解 2] 如图，过 A 作直线 l 与 AB 成角 α，使 $\sin\alpha=\dfrac{1}{m}$.

设电线在 D' 处入水，作 $D'E'\perp l$，垂足为 E'，则

$$y=AD'+m\cdot D'C=m\left(\frac{AD'}{m}+D'C\right)$$
$$=m(D'E'+D'C).$$

显然当 C、D'、E' 三点共线时，折线 $CD'E'$ 的长 $D'E'+D'C$ 最小，这时总费用 y 也最小.

但 $\angle AED=\angle DBC=90°$, $\therefore$ $\angle BCD=\alpha$.

于是，过 C 作 l 的垂线交 AB 于 D，则 D 点就是电线入水处. 这时，

$$BD=a\,\mathrm{tg}\alpha=a\cdot\frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{m}\right)^2}}=\frac{a}{\sqrt{m^2-1}},$$

$$AD=b-\frac{a}{\sqrt{m^2-1}}.$$

[解 3] 同法 2，令 $\angle BCD'=\theta$. 则

$$y=AD'+m\cdot D'C=b-a\mathrm{tg}\theta+\frac{am}{\cos\theta}=b+a\cdot\frac{m-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=b+\frac{a}{2}\left[(m-1)\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+(m+1)\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right].$$

但 $m>1$,故 $(m-1)\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$, $(m+1)\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ 均为正数,且其积

$$(m^2-1)\cdot\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=m^2-1$$

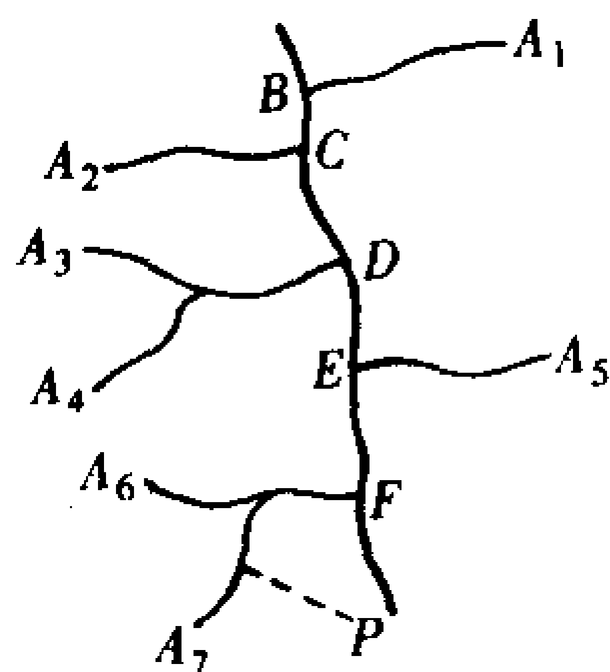
是定值,

所以,当 $(m-1)\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=(m+1)\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ 时,其和最小.

即 当 $\sin\theta=\frac{1}{m}$, $\theta=\alpha$ 时,总费用 y 最省.

13·64 下图是一个工厂区的地图,一条公路(粗线)通过这个地区,七个工厂 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 分布在公路两侧.由一些小路(细线)与公路相连.现在要在公路上设一个长途汽车站,车站到各工厂(沿公路,小路走)的距离总和越小越好.(a)这个车站设在什么地方最好?(b)证明你所作的结论.(c)如果在 P 的地方又建立了一个工厂,并且沿着图上的虚线修了一条小路,那么这时车站设在什么地方好?

(中国北京市数学竞赛,1978年)



[解] 设 B、C、D、E、F 是各小路连通公路的道口.

(a)车站设在 D 点最好.

(b)用 u_1、u_2、…、u_7 分别表示 D 到工厂 A_1、A_2、…、A_7 的路程.若车站设在 D 以北的公路上的 S 点,设 S 到 D 的路程为 $d(d>0)$,到各工厂的路程分别为 u_1'、u_2'、…、u_7',则

$$u_1'\geqslant u_1-d,\ u_2'\geqslant u_2-d,\ u_3'=u_3+d,$$

$$u_4'=u_4+d,\ \cdots,\ u_7'=u_7+d.$$

$$\therefore\quad u_1'+u_2'+\cdots+u_7'$$

$$\geqslant u_1+u_2+\cdots+u_7+3d$$

$$>u_1+u_2+\cdots+u_7.$$

这说明车站设在 D 以北都不如设在 D 点好.

同样可以证明,车站设在 D 以南都不如设在 D 点好.

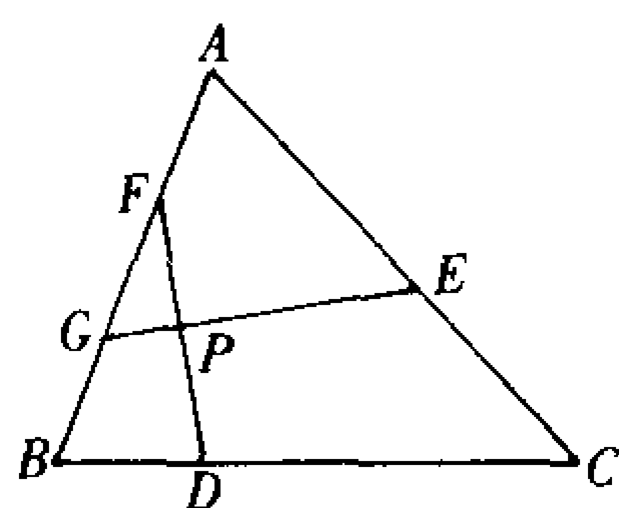
故车站设在 D 点最好.

(c)车站设在 D、E 或 D 与 E 之间的任何一个地方都可以.

第十四章　覆盖问题

14·1　已知：$\triangle ABC$ 与三个矩形 R_1、R_2、R_3，矩形的边平行于两个固定的方向．矩形的并集覆盖边 AB、BC、CA，即 $\triangle ABC$ 的周界上的每一点至少在一个矩形的内部或边上．求证：这个三角形内的每一点也被矩形 R_1、R_2、R_3 的并集覆盖．

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）



［证］　设 P 为 $\triangle ABC$ 内的任意一点．

过 P 作两条互相垂直的直线与矩形 R_i 的边平行，交 $\triangle ABC$ 的周界于 D、E、F、G 四点．

由于这四点被三个矩形 $R_i(i=1,2,3)$ 覆盖，其中必有两点属于同一矩形．

如果 D、$F\in R$，那么 P 显然属于 R_1，

如果 D、$E\in R_1$，那么由于 PD、PE 与 R_1 边平行，所以 P 也属于 R_1．

于是 $\triangle ABC$ 内任意一点一定属于某个矩形，即三角形被三个矩形 R_1、R_2、R_3 的并集覆盖．

14·2　求证：可将面积为 1 的任意锐角三角形安放在面积不超过 $\sqrt{3}$ 的直角三角形内．

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1975 年）

［证］　设面积为 1 的锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 最大，以 BC 边的中点 M 为圆心，　$R=MA$ 为半径作圆，该圆与直线 BC 交于 D、E 两点．则 $\angle DAE$ 是直角．

设 $MB=MC=a$， 则 $a<R$.（否则，$MB\geqslant MD$，$MC\geqslant ME$， 则 $\angle BAC\geqslant\angle DAE=90°$，与$\triangle ABC$为锐角三角形矛盾）

$\angle AMC$与$\angle AMB$必有一个角不是锐角，不妨设$\angle AMB=\alpha>90°$.

因为 $AB\leqslant BC=2a$（因为$\angle BAC$为锐角$\triangle ABC$中的最大角），所以由余弦定理得

$$R^2+a^2=MA^2+MB^2\leqslant MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos\alpha$$
$$=AB^2\leqslant 4a^2.$$

由此可得 $R\leqslant\sqrt{3}\,a$.

作 $AH\perp DE$ 于H， 则

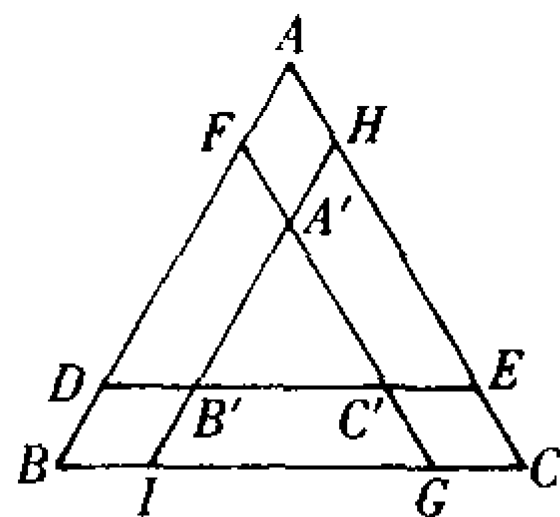
$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AH=R\cdot AH\leqslant\sqrt{3}\,a\cdot AH=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AH$$
$$=\sqrt{3}S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\ .$$

即面积为1的锐角三角形可以设在面积不超过$\sqrt{3}$的直角三角形内.

14·3 在一个面积为1的正三角形内部，任意放五个点，试证：在此正三角形内，一定可以作三个正三角形盖住这五个点，这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边，并且它们的面积之和不超过0.64.

（第2届中国中学生数学冬令营，1987年）

［证1］ 由于任意已放置了的五个点均在此三角形的内部，它们之中任一点到三边的距离均大于零，所以一定可以找到一个三边与此三角形的三边分别平行而面积小于1的正三角形，使得这五个点仍旧在这三角形的内部，记这个三角形为$\triangle ABC$.



如图所示，其中 AD、AE、BF、BG、CH、CI 均为$\triangle ABC$边长的$\frac{4}{5}$，

于是 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=0.64$

又由 $S_{\triangle ABC}<1$， 则 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BFG}=S_{\triangle CHI}<0.64$

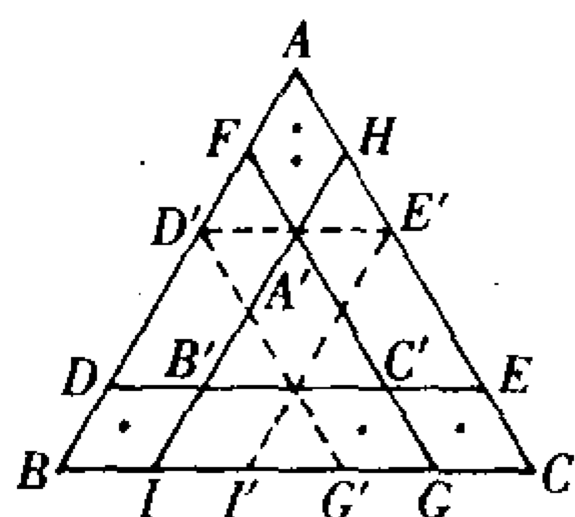
分以下几种情况讨论.

(i)这五个点至少有三个位于$\triangle ADE$、$\triangle BFG$、$\triangle CHI$ 中任何一个之内(包括边界),则其他的点至多是两个,用满足命题的足够小的正三角形分别盖住即可,此时这三个正三角形的面积之和小于0.64.

(ii)至多有两个点落在这三个三角形中任何一个之内.

注意到$\triangle ABC$ 被 DE、FG、IH 分成七个区域:$\triangle A'B'C'$及三个菱形和三个梯形,其中$\triangle A'B'C'$为此三个三角形所共有,三个梯形各为两个三角形所共有,而三个菱形各仅为一个三角形所包含.

如有一个点在$\triangle A'B'C'$中,则其余四个点在这七个区域中无论如何分布,这三个三角形总有一个至少包含三个点,这与假设矛盾,因此在$\triangle A'B'C'$中没有点.



若有一个点在某个梯形,如在 $B'C'G'I'$ 中,则在其余两个梯形中不能再有点,否则也必定导致这三个三角形会有一个至少包含三个点,这时,其余四点只能是在菱形 $BDB'I$ 及 $CEC'G$ 中各有一个,在另一个菱形 $AFA'H$ 中有两个(如图).

过 A' 作 $D'E' /\!/ BC$ 交 AB 于 D',交 AC 于 E'. 过 D'、E' 分别作 $D'G' /\!/ AC$,$E'I' /\!/ AB$ 交 BC 于 G'、I'.

显然 $D'G'$ 和 $I'E'$ 交于 DE 的中点,

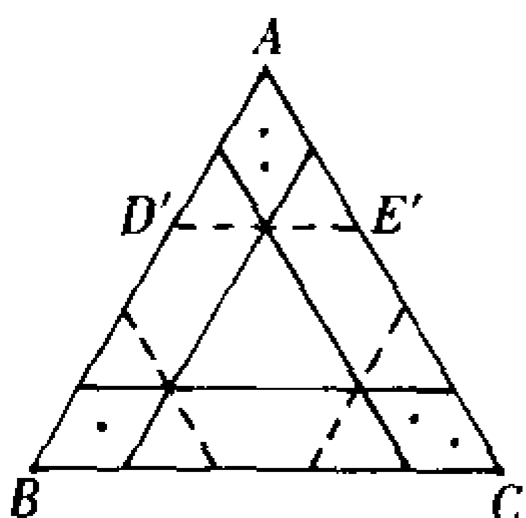
由于$\triangle BD'G'$与$\triangle CE'I'$完全盖住梯形 $DECB$,

所以这两个三角形至少有一个能盖住两个点,而$\triangle AD'E'$也盖住两个点,可以求得

$$S_{\triangle BD'G'}=S_{\triangle CE'I'}=0.36S_{\triangle ABC}<0.36,$$

$$S_{\triangle AD'E'}<0.16S_{\triangle ABC}<0.16.$$

由于$\triangle BD'G'$和$\triangle CE'I'$中的一个及$\triangle AD'E'$共盖住四个点,它们的面积之和<0.52,于是第五个点用足够小的正三角形盖住即可.

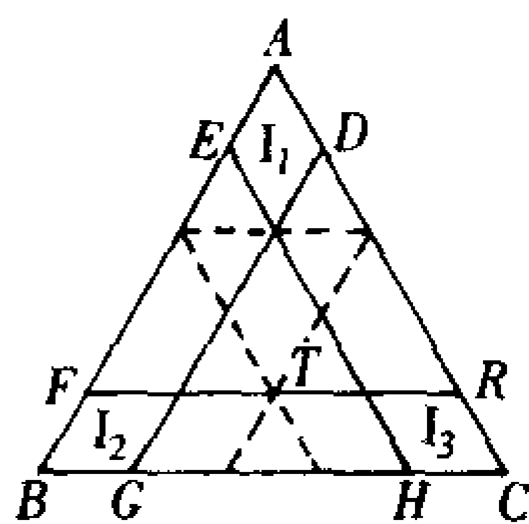


最后一种可能就是三个梯形中也没有点,于是这五个点都在这三个菱形中,而且有两个菱形中各有两点,另一个菱形中只有一点,这时可用$\triangle AD'E'$及两个全等的三角形盖住(如图),

它们的面积之和$<3\times0.16=0.48<0.64$.

[证2] 在正$\triangle ABC$ 中,$AE:EF:FB=2:6:2$,

$AD:DR:RC=2:6:2$, $BG:GH:HC=2:6:2$.



(1)若三个小菱形 I_1、I_2、I_3 中,每个小菱形至多有一个点,则余下的部分中至少有两个点,且 $\triangle AFR$、$\triangle BEH$、$\triangle CGD$ 三个三角形(面积均等于 0.64),至少有一个三角形盖住三个点,这三个点不可能分别在这个三角形的三条边上,因此可以作面积小于 0.64 的三角形盖住三个点.

设面积为 S,则 $S<0.64$,另外作两个小三角形分别盖住余下的两点,面积均等于$\frac{0.64-S}{2}$,这样所作的三个三角形盖住了五个点,且面积之和不超过 0.64.

(2)至少有一个小菱形盖住两个或两个以上的点.

若盖住三个点以上,则命题显然成立;

若盖住两点,不妨设 I_1 盖住两点,而$\triangle AFR$ 盖住三个点,则命题同样成立;

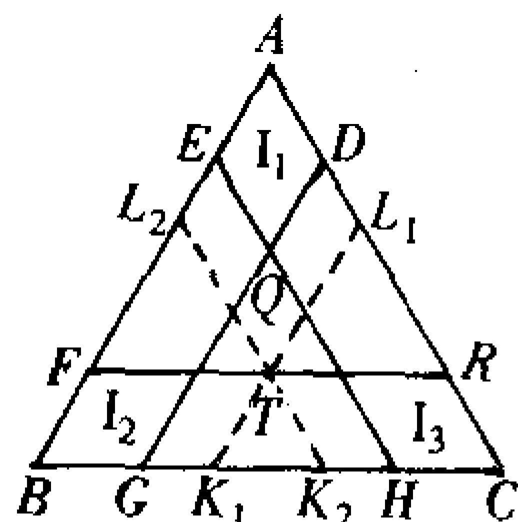
若$\triangle AFR$ 也只盖住两个点,则等腰梯形 $FBCR$ 盖住三个点,取 FR 中点 T(如图),这时可用一个面积为$\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$的三角形盖住菱形 I_1 中的两个点,用一个面积为$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$的三角形盖住另外两个点,另一个面积 δ 的小三角形盖住另外一点,则

$$\frac{4}{25}+\frac{9}{25}+\delta<0.64,$$

命题得证.

注 这个命题还可以改进为:这三个三角形的面积之和不超过$\left(\frac{10}{13}\right)^2$,且它是这三个三角形之和的最小值,现证明如下:

如图,在正$\triangle ABC$ 中,$AE:EF:FB=3:7:3$, $AD:DR:RC=3:7:3$, $BG:GH:HC=3:7:3$,



(i)若三个小菱形 I_1、I_2 和 I_3 中的每个至多包含有此五点中的一个,且余下部分中至少包含有两个点,并且$\triangle AFR$、$\triangle BEH$、$\triangle CGD$ 之中至少有一个盖住了三个点,

这三个三角形的面积等于$\left(\frac{10}{13}\right)^2$，由题中条件可知，这三个点不可能分别在这个三角形的三条边上，因此可以作面积小于$\left(\frac{10}{13}\right)^2$的三角形盖住此三点，设这个三角形的面积为$S$，另外，容易作出两个满足题设条件的小正三角形分别盖住余下的两个点，且其面积均小于或等于$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{10}{13}\right)^2-S\right]$，这样，所作的三个正三角形盖住了这五个点，且三个正三角形的面积之和不超过$\left(\frac{10}{13}\right)^2$.

(ii)若至少有一个小菱形盖住两个或两个以上的点，当盖住三个点以上时，则命题显然成立；当盖住两个点时，不妨设I_1盖住两点，

如果$\triangle AFR$盖住三个点，这时命题同样成立.

如果$\triangle AFR$也只盖住了两个点，则等腰梯形$FBCR$盖住其余三个点.这时容易看出，可用一个面积为$S_1\left(S_1<\left(\frac{6}{13}\right)^2\right)$的正三角形盖住菱形$I_1$中的两个点.

取FR的中点T，并过T作AB的平行线K_1L_1及AC的平行线K_2L_2，则$\triangle K_1L_1C$和$\triangle K_2L_2B$之中，必有一个盖住等腰梯形$FBCR$中的两个或两个以上的点，这两个三角形的面积均等于$\left(\frac{8}{13}\right)^2$，于是可用一个面积为$S_2$ $\left(S_2<\left(\frac{8}{13}\right)^2\right)$的三角形盖住这两个(或两个以上)的点，而余下的一点(如果还有的话)可用一个面积$\left(\frac{6}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2-S_1-S_2$的小正三角形盖住，这三个正三角形面积之和小于或等于

$$S_1+S_2+\left[\left(\frac{6}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2-S_1-S_2\right]=\left(\frac{10}{13}\right)^2.$$

不难发现，上述过程中所得到的数值$\left(\frac{10}{13}\right)^2$不可能再缩小.

这是因为，如果题中要求三个正三角形之和不超过M，而$M<\left(\frac{10}{13}\right)^2$，这时我们可以在正三角形中这样放置五个点：

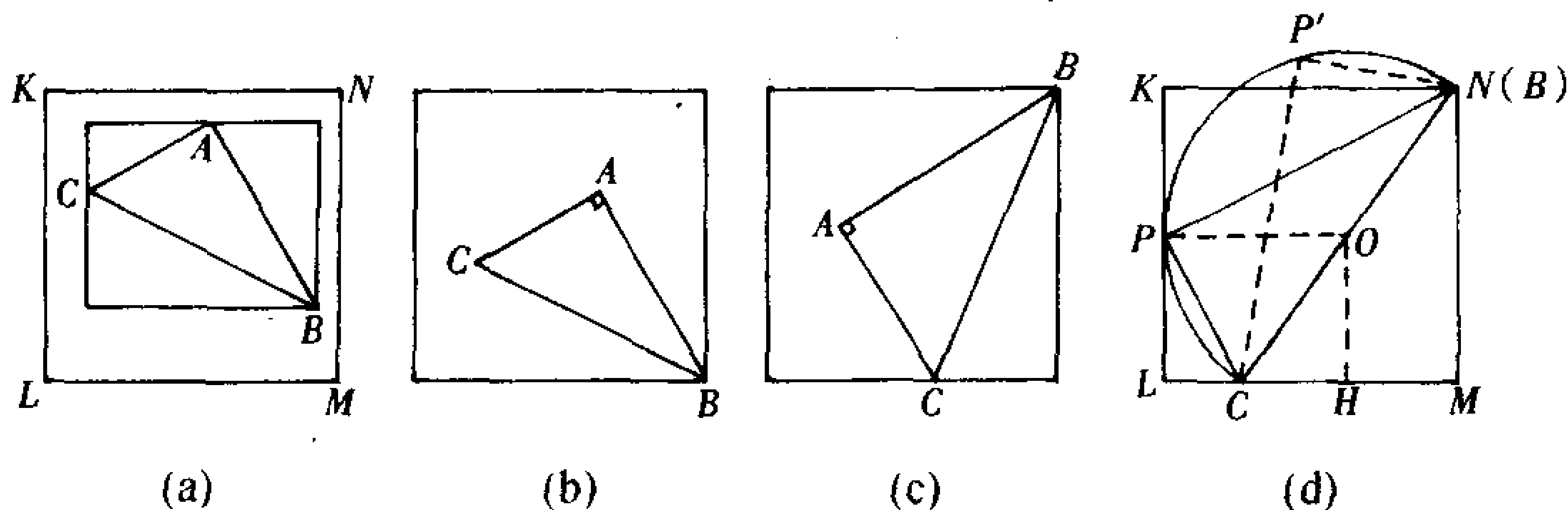
其中两个点分别放在图中的Q、T上，另外三个点分别放在非常靠近顶点A、B、C的位置上，这时盖住这五个点的三个三角形面积之和就将超过M.

14·4 求最小正实数x，使在以x为边长的正方形中可以放下任何弦长为1的直角三角形.

(前苏联教委推荐试题，1990年)

[**解**] 由于在边长为 1 的正方形中可以放入一个直径为 1 的圆，即内切圆，而在边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方形中仅能放入弦长为 1 的等腰直角三角形，所以必有 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1$.

设$\triangle ABC$为直角三角形，其中 $\angle A=90°$.



(a) (b) (c) (d)

设直角$\triangle ABC$放在正方形 $KLMN$ 中且 $BC=1$. 于是可以作包含$\triangle ABC$且边平行于正方形 $KLMN$ 的边的最小矩形.

显然，这个矩形的每条边上都至少有$\triangle ABC$的一个顶点.

从而必有$\triangle ABC$的一个顶点位于矩形的顶点上(见图(a))，不妨设 B 位于矩形的顶点.

将矩形连同$\triangle ABC$平移，即可使点 B 移到正方形的一个顶点(见图(b)).

再将$\triangle ABC$绕点 B 转动，由于 BC 不小于正方形的边长，故可使点 C 落在正方形的另一条边上，此时点 A 在正方形内，至多再经旋转和反射，总可化为图(c)所示的情形.

为了使正方形的边长最小，不难看出，应该使得以 BC 为直径的圆与正方形的边 KL 相切(参看图(d)).

设点 O 为圆心，点 P 是圆与边 KL 的切点. 过点 O 作 $OH\perp LM$ 于点 H，于是有

$$LH=PO=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}.$$

$$HM=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}\sqrt{BC^2-BM^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2},$$

$$x = LH + HM = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - x^2}).$$

解得　$x = \frac{4}{5}$.

由于　$\angle CNK > 45°$，故　在所作出的半圆与正方形的公共部分中可以放入任何一个弦长为 1 的直角三角形.

为证 $x = \frac{4}{5}$ 是最小边长，只需再证任何边长更小的正方形都不能满足题中要求.

作与 BC 垂直的直径 d_1，并作点 P 关于 d_1 的对称点 P'.

∵　P、C、M、N 四点共圆，　$NP > NK = NM$，

∴　$\angle NCP > \angle NCM = \angle CNK$.

∴　$\angle CNP' > \angle CNK$.

∴　点 P' 位于正方形外.

稍稍减小正方形的边长，于是所作的半圆上便会有一部分位于边 KL 的另一侧，即异于点 O 所在的一侧.

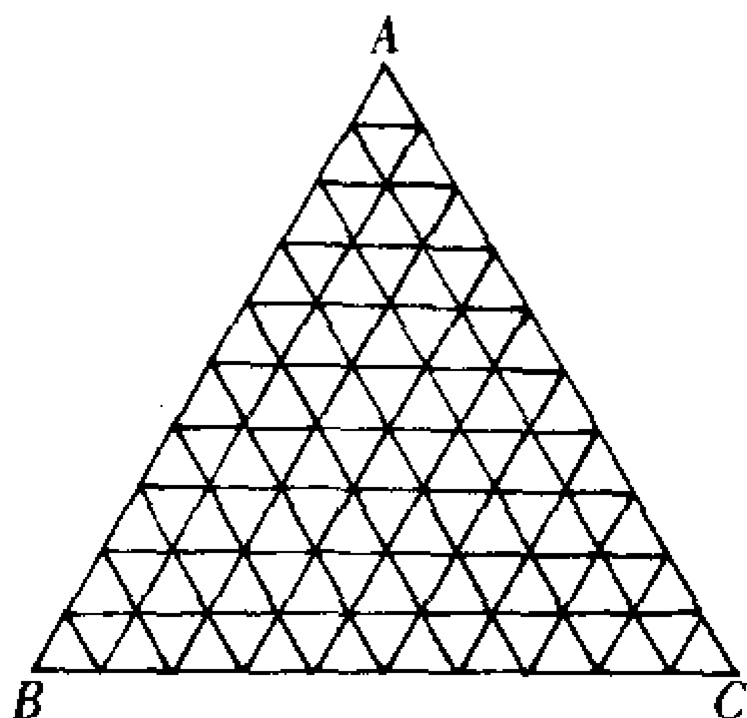
过点 O 作 ML 的平行线，交半圆在正方形外的部分于点 A，则点 A 关于 d_1 的对称点 A' 也在正方形外.

于是，与 $\triangle ACB$ 全等的三角形便无法放入正方形中，即不能满足题中的要求.

综上可知，所求的最小正实数 $x = \frac{4}{5}$.

14·5　有 111 个点在一个边长为 15 的正三角形中，证明：用一个直径为 $\sqrt{3}$ 的圆形硬币总可以至少盖住上述 111 个点中的 3 个（覆盖时，硬币的部分可以在三角形外）.

（荷兰数学奥林匹克，1983 年）



［证］　将 $\triangle ABC$ 每边 10 等分，并过分点作平行于另二边的平行线，将原 $\triangle ABC$ 分成 100 个全等的边长为 1.5 的正三角形.

其中形如▽的三角形有

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45(\text{个}).$$

形如△的三角形有 55 个.

这些边长为 1.5 的正三角形的外接圆半

径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,即直径为$\sqrt{3}$.

以形如△的三角形的中心为圆心,$\sqrt{3}$为直径作圆,这个圆不仅盖住了这个三角形,而且还盖住了一部分顶点向下的形如▽的三角形,而每个顶点向下的三角形与三个顶点向上的三角形相似,可以证明,这三个顶点向上的三角形的外接圆恰好盖住顶点向下的三角形.

所以55个直径为$\sqrt{3}$的圆能够盖住整个三角形.

又因为有111个点,这111个点分布在55个圆上,所以至少有三个点在同一个圆内,因此可以用一个直径为$\sqrt{3}$的圆形硬币至少盖住三个点.

14·6　在边长为1的正方形内放102个点,使其中任何三点都不在同一直线上.证明:在这些点中必存在这样的三点,使以这三点为顶点的三角形的面积不超过0.01.

(基辅数学奥林匹克,1965年)

[证]　任取一个以三个已知点为顶点的三角形,并且其内部没有其他的已知点.这是容易做到的.例如:设D在$\triangle ABC$的内部,则选$\triangle ABD$即可.

以选定的三角形的一边为边,再找1个具有同样性质的第2个三角形.

继续这一过程,可得到这样的100个三角形,它们互不重叠且均在正方形内.

假若这100个三角形面积都大于0.01,则总面积为$S>100\times0.01=1$.矛盾!

故存在面积不超过0.01的三角形.

14·7　在一个边长为2的正方形内,放着7个边长为1的正方形.证明:它们中可找到两个正方形,其公共部分的面积不少于1/7.

(基辅数学奥林匹克,1968年)

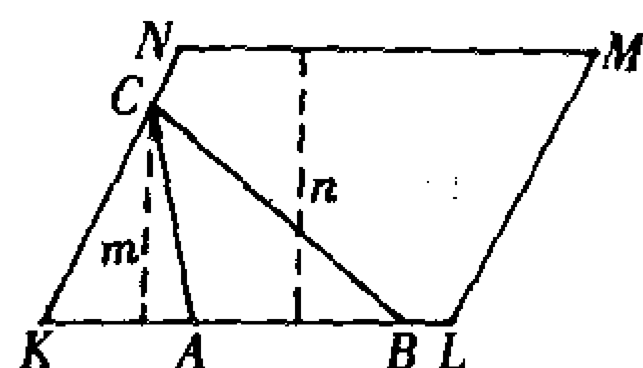
[证]　用反证法.从7个中任选2个小正方形有$C_7^2=21$种情形.

假设任两个小正方形的重叠部分的面积都小于$\frac{1}{7}$,则所有重叠部分的面积和充其量也小于　$21\times\frac{1}{7}=3$(平方单位).

这就推出边长为2的正方形内不重叠小正方形部分覆盖的总面积要大于 $7-3=4$(平方单位),矛盾.

14·8 求证:内接于平行四边形的三角形的面积不可能大于这个平行四边形的面积的一半.

(匈牙利数学奥林匹克,1915年)

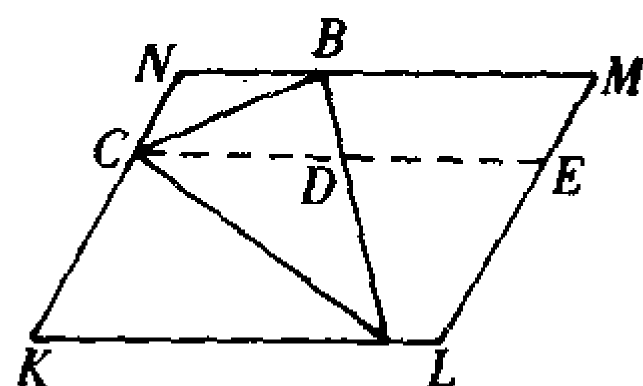


[证] (1)若$\triangle ABC$的两个顶点A和B在平行四边形的一条边上,设A、B在KL上,另一点C在KN或NM上.

S为$\triangle ABC$的面积,T为平行四边形$KLMN$的面积,C到KL的距离为m,NM与KL的距离为n,显然有

$$AB \leqslant KL, \quad m \leqslant n.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot m \leqslant \frac{1}{2}KL\cdot N=\frac{1}{2}T.$$



(2)若$\triangle ABC$的三个顶点在平行四边形的不同的边上,设A在KL上,B在MN上,C在NK上,

通过顶点C作一条与边KL平行的直线交AB于D,交LM于E.

设MN与KL的距离为n, 则

$$S=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}CD\cdot n \leqslant \frac{1}{2}CE\cdot n=\frac{1}{2}T.$$

综上,总有 $S \leqslant \frac{1}{2}T$.

14·9 给定一凸多边形,在它里面不能放入任何面积为1的三角形.求证:这个多边形可以放在面积为4的三角形中.

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[证] 凸多边形设为Q,Q的内接三角形中必存在面积最大的一个,不妨设为$\triangle ABC$,显然 $S_{\triangle ABC}<1$.

过A作直线$l /\!/ BC$,过B作$m /\!/ AC$,过C作$n /\!/ AB$.

直线l、m、n交得$\triangle A'B'C'$.则

$$S_{\triangle A'B'C'}=4S_{\triangle ABC}<4.$$

我们证明,Q的每一点都在$\triangle A'B'C'$中.如若不然,设存在 $M\in$

Q,而 M 在 $\triangle A'B'C'$ 外面,不妨设 M 在 l 关于 BC 的异侧.

连 MC、MB,得 $S_{\triangle MBC} > S_{\triangle ABC}$. 这与 $\triangle ABC$ 为 Q 的最大面积的内接三角形的假设相矛盾.

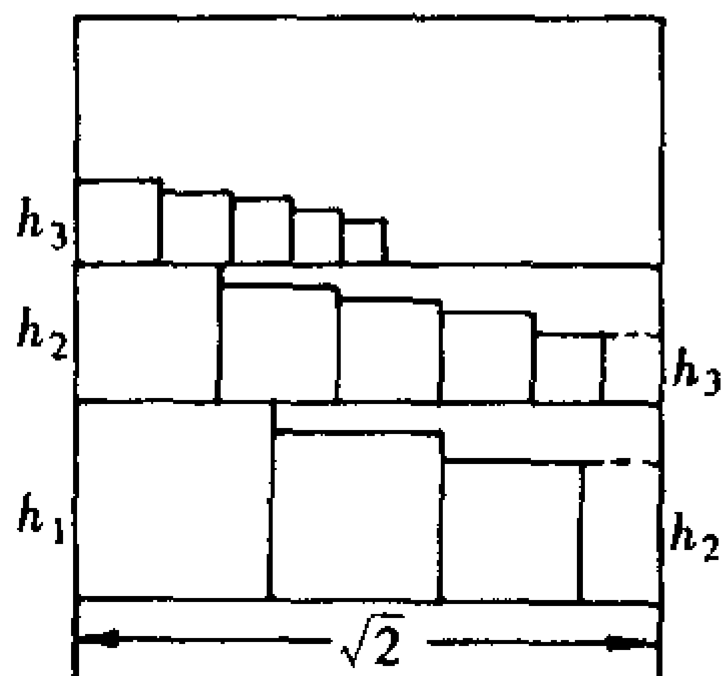
同理可证,M 点也不能在 m 关于 AC 的异侧及 n 关于 AB 的异侧.

故 $M \in \triangle A'B'C'$,即 Q 完全放入了面积小于 4 的三角形 $A'B'C'$ 中,当然更能放入面积为 4 的三角形中.

14·10 给定面积之和等于 1 的若干个正方形. 求证:可以把这些正方形不重叠地放入面积为 2 的正方形中.

(第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年)

[证] 把正方形摆成按边长递减的阶梯并把它们从最大的 $x \times x$ 的正方形开始自左至右放到 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ 的方框的下边,如图所示,对依次排列就会越出方框右边的正方形就不再接着排下去而按左边的正方形上方的水平线重新开始排列,设 $x = h_1$、h_2、h_3、…,一顺序连接在方框左边的正方形的边长,我们应证明,高 $h = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots < \sqrt{2}$,即,正方形在越出方框上边以前排完.



我们来估计它们的总面积,设想把每一个左边的边长 h_k($k = 2, 3, \cdots$)的正方形转放到前面第 $k-1$ 行的末尾,因为它越出了右边,所以在这样放之后,第 $k-1$ 列正方形的面积不小于 $(\sqrt{2} - x)h_1$;其中我们不考虑第一行里左边最大的正方形.

这样一来,按条件应等于 1 的所有的总面积不小于

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h_2 + h_3 + \cdots) = x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x).$$

由此能得出对 h 的估计:

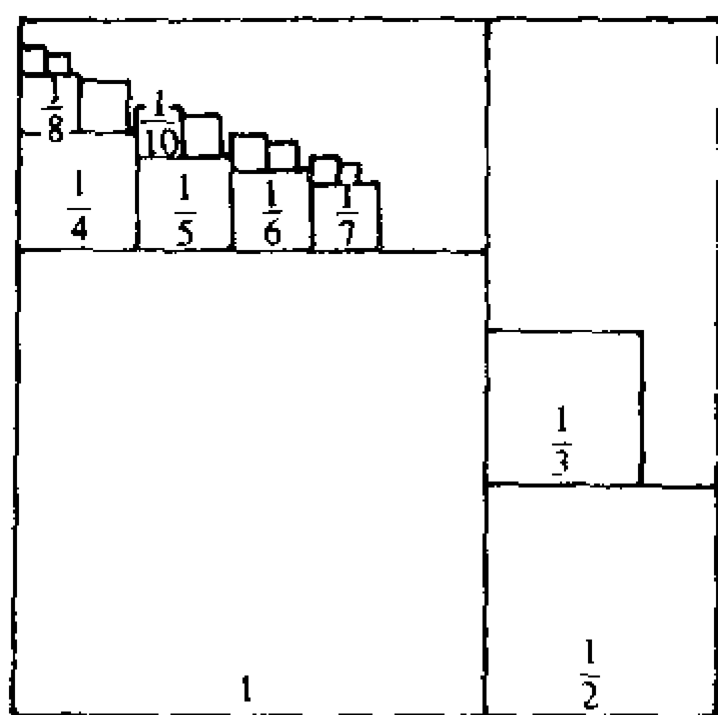
若 $\sqrt{2} - x > 0$,由不等式 $x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leqslant 1$ 得出

$$h \leqslant \frac{1 - x}{\sqrt{2} - x} + x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2 - x\sqrt{2}}\right) \leqslant \sqrt{2}.$$

注意在圆括号里形如 $t+\frac{1}{t}$ 的数不小于2,且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

14·11　给定边长为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 的正方形的无穷序列,证明 存在这样一个正方形,可以把序列中所有正方形互不重叠地放在这个正方形内,并且确定:能将所有的正方形全部放入的最小正方形的边长等于多少?

(匈牙利数学奥林匹克,1974年)



[解]　(1)我们证明:边长为 $1\frac{1}{2}$ 的正方形可以互不重叠地放入所有的边长为 $1、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\cdots、\frac{1}{n},\cdots$ 的正方形.

事实上,只要这样放置就可以了.

在边长为1的正方形旁边放置边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形;

在边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形上边放置边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形,在边长为1的正方形上面放置边长为 $\frac{1}{4}、\frac{1}{5}、\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{7}$ 的正方形;

在边长为 $\frac{1}{k}(k=4,5,6,7)$ 的正方形上面放置边长为 $\frac{1}{2k}$ 和 $\frac{1}{2k+1}$ 的正方形,即放置边长为 $\frac{1}{8}、\frac{1}{9}、\frac{1}{10}、\cdots、\frac{1}{15}$ 的正方形;

再在上面放置边长为 $\frac{1}{16}、\frac{1}{17}、\frac{1}{18}、\cdots、\frac{1}{31}$ 的正方形,如此下去.

首先可证明,边长为 $\frac{1}{k}$ 的正方形上面能放下边长为 $\frac{1}{2k}$ 和 $\frac{1}{2k+1}$ 的正方形,这是因为

$$\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}<\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}.$$

另一方面,边长为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$的正方形的边长总和不超过边长为1的正方形的边长,即

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<4\times\frac{1}{4}=1.$$

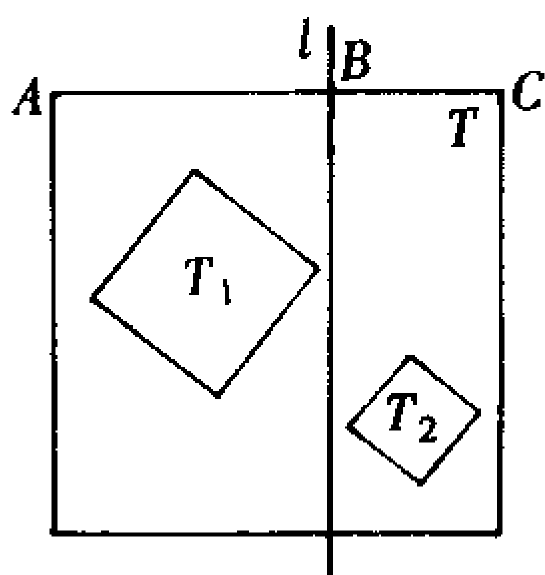
此外,放在边长为1的正方形上面的无穷多排正方形的高不超过$\frac{1}{2}$,这是因为

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{8k}+\cdots=\frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{k}<\frac{1}{2}.$$

因此,以给定的无穷序列

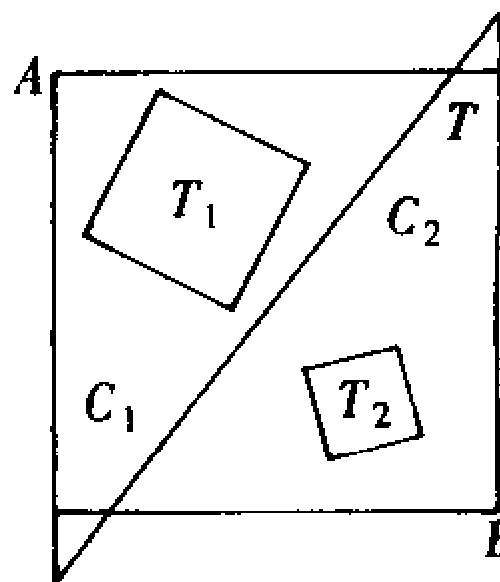
$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

为边长的所有正方形可以互不重叠地放在边长为$1\frac{1}{2}$的正方形内.



(2)我们证明$1\frac{1}{2}$为满足题目要求的最小正方形的边长.

为此只要证明不能把这些正方形放在边长小于$1\frac{1}{2}$的正方形内而使边长为1的正方形(设为T_1),和边长为$\frac{1}{2}$的正方形(设为T_2)且互不重叠.



我们把T_1和T_2放到某一个正方形T内,且互不重叠,这时存在一条直线l,把T分成两部分,T_1和T_2分别在这两部分内.

对直线l有两种可能.

若直线l与正方形的一边平行,则l把T分成两个矩形,显然这两个矩形与直线l垂直的边$AB\geqslant 1$,$BC\geqslant\frac{1}{2}$,从而正方形T的边长$AC\leqslant 1\frac{1}{2}$.

若直线l与正方形的任何一边都不平行,

注意到在直角三角形的所有内接正方形中,以两条边在直角边上,一顶点与直角顶点重合,一顶点在斜边上的正方形最大.

因此包含在直角三角形 C_1 和 C_2 的正方形中最大的正方形 T_1 和 T_2 的对角线应在正方形 T 的对角线 AB 上,此时 T_1 和 T_2 的对角线之和等于 AB,它们的边长之和等于 T 的边长.

由以上,边长 $1\frac{1}{2}$ 的正方形不能再小,即满足题目要求的最小边长为 $1\frac{1}{2}$.

14·12 平面被两族平行直线划分为单位正方形,考察由所分成的单位正方形形成的 $n\times n$ 的正方形,将其中至少有一条边位于边界上的单位正方形的并集称为该正方形的边框.现考虑由所分成的单位正方形形成的 100×100 的正方形的覆盖问题.求证:恰有一种方法利用 50 个正方形的不重叠的边框盖住它.

(第 20 届全俄数学奥林匹克,1994 年)

[证] 设所给的 100×100 的正方形 $ABCD$,则两条对角线 AC 和 BD 上共分布着 200 个单位正方形,而每一个"边框"至多能盖住其中 4 个单位正方形,这是因为每条对角线与一个"边框"至多有两个公共的单位正方形.

因此,我们所考察的 50 个"边框"中的每一个都应刚好盖住对角线 AC 上的两个单位正方形,也应刚好盖住对角线 BD 上的两个单位正方形.

我们现在证明:正方形 $ABCD$ 的 4 个角上的单位正方形一定要为同一个"边框"所盖住.

为方便起见,我们将一个单位正方形被某个"边框"所盖住就叫做该单位正方形"属于"这个"边框".

如果顶点 A 和 C 属于同一个边框 K,且它往往于该边框的相邻的边上,那么边框的这两条边的公共顶点也应当属于 K,设该顶点为 B,因而以 D 为顶点的单位正方形也应当属于 K.因此,K 应当盖住对角线 BD 上的两个单位正方形.

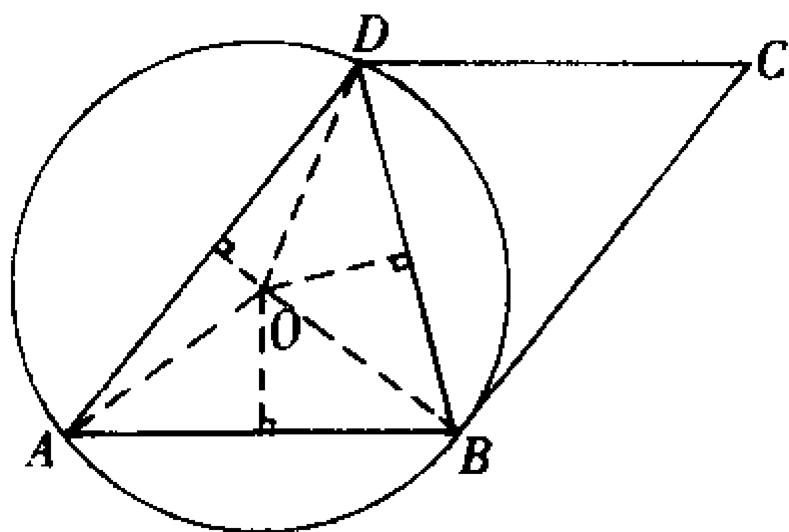
如果顶点 A 和 C 位于 K 的相对边上,则 K 的边应当由 100 个单位正方形所构成,所以顶点 B 和 D 也属于边框 K.

最后，我们指出，A 和 C 不可能属于不同的边框，因为不然的话，两者中较小的一个的边上不多于 50 个单位正方形，从而这个边框至多能盖住位于对角线 BD 上的一个单位正方形，导致矛盾.

这样一来，边框之一应盖住顶点 A、B、C、D. 去掉这个边框后，得到一个 98×98 的正方形，对它再作类似的讨论. 如此下去，便得出我们的结论.

14·13　在平行四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 为锐角三角形，$AB=a$，$AD=1$，$\angle BAD=\alpha$，K_A、K_B、K_C、K_D 是分别以平行四边形的顶点 A、B、C、D 为圆心，以 1 为半径的圆. 求证：四个圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖平行四边形 $ABCD$ 的充分必要条件是 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

（第 9 届国际数学奥林匹克，1967 年）



［证］　作 $\triangle ABD$ 的外接圆，因为 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，所以它的外接圆的圆心 O 必在 $\triangle ABD$ 的内部.

首先我们证明，$\square ABCD$ 的第四个顶点 C 必在 $\odot O$ 的外部.

用反证法. 若 C 点在 $\odot O$ 上，则由 C 与 A 在 BD 的两侧，必有（注意到 $\angle BAD<90^\circ$）

$$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD>90^\circ.$$

这与 $\square ABCD$ 的对角相等，即 $\angle BCD=\angle BAD<90^\circ$ 相矛盾.

若 C 点在 $\odot O$ 内，则仍有

$$\angle BCD>180^\circ-\angle BAD>90^\circ,$$

也与 $\angle BCD=\angle BAD<90^\circ$ 相矛盾.

因此，C 点只能在 $\odot O$ 外.

其次我们证明：$\square ABCDD$ 被四个圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖的充分必要条件是 $\triangle ABD$ 的外接圆半径 $R\leqslant 1$.

先证必要性.

设 $\square ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 所覆盖，我们证明 $R\leqslant 1$.

仍用反证法. 若　$R>1$，则　$OA=OB=OD>1$.

此时，圆 K_A、K_B、K_D 不可能覆盖点 O，又因为 C 点在 $\odot O$ 外，则 $OC>R>1$，圆 K_C 也不能覆盖点 O，而 O 点在 $\triangle ABD$ 的内部，因而也在 $\square ABCD$ 的内部，这样，在 $\square ABCD$ 内有一点 O 不能被圆 K_A、K_B、

K_C、K_D 所覆盖,导致矛盾.

因此 $R\leqslant 1$.

再证充分性.

设 $R\leqslant 1$,我们证明▱$ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 所覆盖.

从点 O 向三边作垂线,显然,这些垂线分别将对应的各边平分,于是,这三条垂线与三条半径 OA、OB、OD 将△ABD 分成六个直角三角形,并且每个直角三角形的斜边都等于半径 R.

由于直角三角形的任一顶点到该直角三角形中的任一点的距离都不大于斜边,所以△ABC 内任一点 M,必定与△ABD 的某一顶点的距离不大于 R,于是以对应的这个顶点为圆心,以 1 为半径的圆就覆盖了点 M.

因此当 $R\leqslant 1$ 时,△ABD 被圆 K_A、K_B、K_D 所覆盖,由对称性,△CDB 被圆 K_C、K_D、K_B 所覆盖,所以,▱$ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 所覆盖.

最后,我们证明,$R\leqslant 1$ 的充分必要条件是

$$a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

在△ABD 中,由正弦定理 $R=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$, ①

由已知 $AD=1$, $AB=a$, $\angle BAD=\alpha$, 则由余弦定理可得

$BD^2=1+a^2-2a\cos\alpha$,

即 $BD=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}$, ②

把②代入①得 $R=\dfrac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

因此,$R\leqslant 1$ 的充分必要条件是 $\dfrac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\leqslant 1$.

因为 $\sin\alpha>0$, 所以 $1+a^2-2a\cos\alpha\leqslant 4\sin^2\alpha$.

即 $a^2-2a\cos\alpha+1-4\sin^2\alpha\leqslant 0$,

解关于 a 的不等式得

$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

又因为 $a=AB>AD\cos\alpha=\cos\alpha\geqslant\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$,

于是 $a\geqslant\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ 总是成立的.

因此　$R\leqslant 1$ 的充分必要条件是　$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

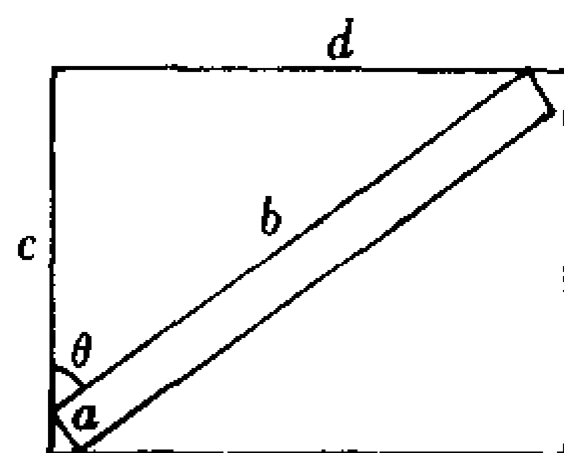
又因为 $R\leqslant 1$ 是圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖平行四边形 $ABCD$ 的充分必要条件.

因而本题得证.

14·14　设$\{a,b\}$,$\{c,d\}$分别是两个矩形的长与宽,且 $a<c<d<b$,$ab<cd$.证明:可将第一个矩形放入第二个矩形内部的充分必要条件是 $(b^2-a^2)^2\leqslant(bd-ac)^2+(bc-ad)^2$.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证]　设第一个矩形已放入第二个矩形内,且第一个矩形长为 b 的边与第二个矩形长为 c 的边的夹角为 θ,$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.计算第一个矩形两边分别在第二个矩形两边上的投影的长度,可得



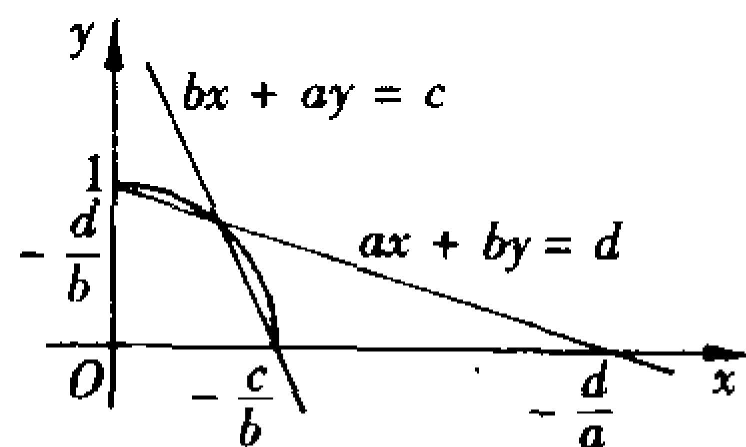
$$\begin{cases} b\cos\theta+a\sin\theta\leqslant c,\\ b\sin\theta+a\cos\theta\leqslant d.\end{cases}\qquad(*)$$

反过来,若存在 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得(*)式成立,则可依上面所述将第一个矩形放入第二个矩形内.因此,可将第一个矩形放入第二个矩形内的充要条件为:存在 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使(*)式成立.

设 $x=\cos\theta$,$y=\sin\theta$.则存在 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使(*)式成立的充要条件为,存在 $x,y>0$ 使下式成立:

$$\begin{cases} bx+ay\leqslant c,\\ ax+by\leqslant d,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

借助解析几何的知识,参考右图可知这又等价于直线 $br+ay=c$ 与直线 $ax+by=d$ 的交点$\left(\frac{bc-ad}{b^2-a^2},\frac{bd-ac}{b^2-a^2}\right)$不在圆 $x^2+y^2=1$ 的内部,它等价于



$$(b^2-a^2)^2\leqslant(bc-ad)^2+(bd-ac)^2.$$

14·15　三角形 T 的内切圆为C,边长为 a 的正方形的内切圆也

是C.证明:这正方形的四边被T覆盖部分的总长不小于$2a$.

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

[证] $\triangle PQR$(即T)的边与圆C的三个切点把圆C的圆周分成三段弧,正方形$DEFG$与图C的四个切点为D'、E'、F'、G',这四个切点必有两个切点在同一段弧上.

记正方形的周长为S.$S=4a$.

(1)D'、E'在一条弧上,F'、G'在另一条弧上.这时

$$DD'+E'D+FF'+FG'=4\times\frac{S}{8}=\frac{S}{2}=2a.$$

(2)F'、G'在同一条弧上,D'、E'分别在另外两条弧上.

这时设EE'、EF'分别与QR相交于E''、F'',PQ切圆C于P',则

$$2(E'E''+F'F'')=2E''F''>EE''+EF''.$$

$$\therefore\quad E'E''+F'F''>\frac{1}{3}(EE'+EF')=\frac{1}{3}\times\frac{S}{4}=\frac{1}{3}a.$$

所以被$\triangle PQR$覆盖的正方形的边的总长大于

$$3\times\frac{1}{3}a+\frac{S}{4}=2a.$$

综合(1)、(2)命题得证.

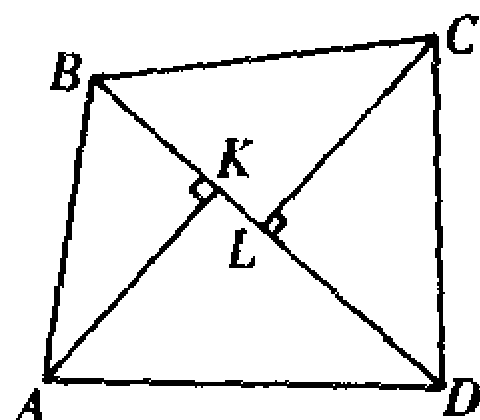
14·16 求证:以任意四边形的边长为直径所作的四个圆能完全覆盖这个四边形.

(基辅数学奥林匹克,1967年)

[证1] 设$ABCD$为任意一个四边形.

作$AK\perp BD$于K,$CL\perp BD$于L(K,L可能重合).如图

则$\triangle ABK$、$\triangle ADK$、$\triangle CBL$、$\triangle CDL$分别由AB、DA、CB、CD为直径的圆所覆盖.



[证2] 假设以四边形$ABCD$各边为直径的四个圆不能完全覆盖这个四边形,则必有一点P在上述四个圆的外部,从而$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$、$\angle DPA$均大于$90°$,从而

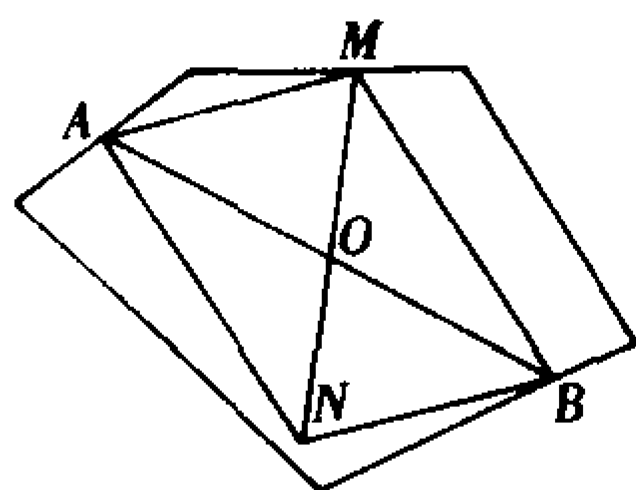
$$\angle APB+\angle BPC+\angle CPD+\angle DPA>360^\circ,$$

这是不可能的.因而原命题成立.

14·17 设平面闭折线的周长为1,求证:可以用一个半径是$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条闭折线.

(第12届莫斯科数学奥林匹克,1949年)

[证] 设A为闭折线上任意一点,取B点,使折线AB与折线BA的长均为$\frac{1}{2}$.



连结AB取AB的中点O,作$\odot O\left(\frac{1}{4}\right)$.

设M为折线上任意一点,而N是M关于O点的中心对称点,如图.

则$AMBN$是平行四边形,

$$\because\quad 2OM=MN\leqslant AM+AN=AM+BM$$

$$\leqslant 折线\ AM+折线\ BM=\frac{1}{2}.$$

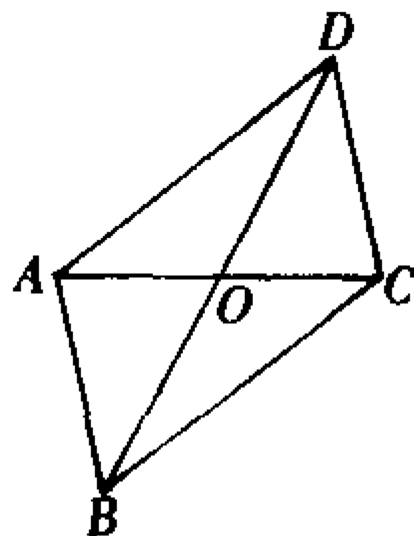
$$\therefore\quad OM\leqslant\frac{1}{4}.$$

即 M在$\odot O\left(\frac{1}{4}\right)$内.

14·18 设在桌面上有一个丝线做成的线圈,它的周长是21.我们又用纸剪成一个直径是1的圆形纸片,试证:(1)当线圈作成一平行四边形时,我们可以用所剪的圆纸片完全盖住它;(2)不管线圈作成什么形状的曲线,我们都可以用此圆形纸片完全盖住它.

(中国北京市数学竞赛,1964年)

[证] (1)如图,线圈作成的平行四边形为$ABCD$,其对角线AC、BD相交于O,则



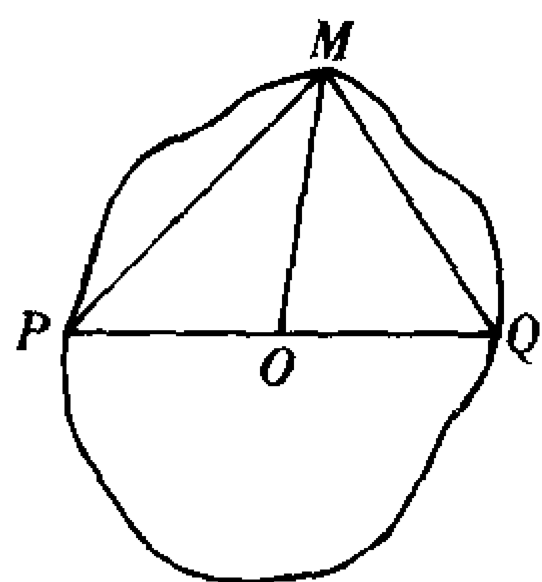
$$OD=\frac{1}{2}BD\leqslant\frac{1}{2}(BC+CD)=\frac{1}{2}l,$$

同理 $OC\leqslant\frac{1}{2}l.$

即平行四边形的四个顶点到中心O的距离都不超

过$\frac{1}{2}l$.

因此,将圆纸片的圆心置于 O 点,就可完全盖住这个平行四边形.



(2)设线圈作成一任意形状的曲线 C.在 C 上取一点 P 和一点 Q,使 P 和 Q 将曲线 C 分为等长的两段,长各为 l.设 Q 是连接 P 和 Q 的线段 PQ 的中点,在 C 上任取一点 M,联结 MO、MP、MQ,则

$$OM \leqslant \frac{1}{2}(MP+MQ) \leqslant \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MP}+\overset{\frown}{MQ}) = \frac{1}{2}l.$$

即曲线上任意一点到 O 的距离都不超过$\frac{1}{2}l$.

因此,将圆纸片的圆心置于 O 点,就可完全盖住整个曲线.

14·19　在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 为钝角,求作一个面积最小的圆,把这个三角形完全盖住,并说明理由.

(中国高中数学联赛;1979 年)

[作法]　以 BC 边为直径作一个圆 O,此圆即为所求.

[证]　(1)因 BC 是所作圆的直径,$\angle BAC$ 为钝角,故 A 点在圆内,即圆 O 盖住$\triangle ABC$.

(2)若有另一圆 O'盖住$\triangle ABC$,因 B、C 点都在圆 O'内,故 $BC<$圆 O'的直径,所以圆 O 是盖住$\triangle ABC$ 的最小圆.

14·20　在边长为 1 的正方形里,有许多直径小于 0.001 的圆,任意两个圆上的任何两个点之间的距离都不等于 0.001.求证:被这样圆覆盖部分的面积不超过 0.34.

(第 5 届全苏数学奥林匹克,1971 年)

[证]　边长为 1 的正方形里那些直径小于 0.001 的圆的总体(并集)记为图形 F,分别沿彼此交角为 60°的两个向量平移 0.001,得图形 F_1 与 F_2.

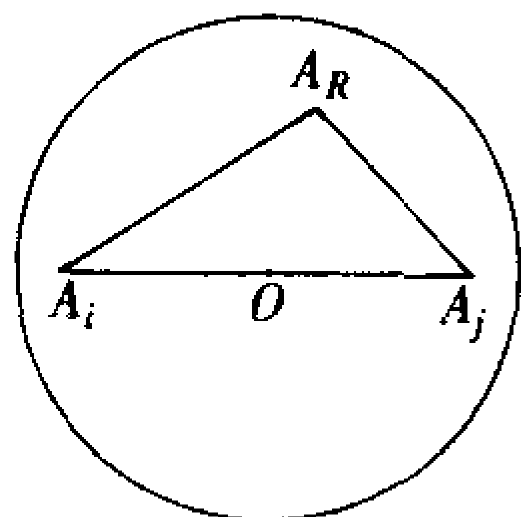
F、F_1、F_2 这三个图形都在边长为 1.001 的正方形内部并且互相不重叠.因此每一个图形的面积小于 $1.001^2/3<0.34$.

14·21　在平面上有 100 个点,其中任何两点的距离都不超过 1,

并且任何3点都构成钝角三角形.证明:能够作出一个半径为$\frac{1}{2}$的圆,使得所有这些点都在这个圆内或圆周上.

(第24届莫斯科数学奥林匹克,1961年)

[证] 设A_iA_j最长,A_iA_j的中点为O,而$|A_iA_j|\leqslant 1$,作$\odot O\left(半径为\frac{1}{2}\right)$



设AR为100个点中任意一点,则

$|A_iA_k|\leqslant 1$, $|A_kA_j|\leqslant 1$.

且 $\triangle A_iA_kA_j$为钝角三角形,由于A_iA_j最长.

$\therefore$ $\angle A_iA_kA_j>90°$, 如图.

故 $|OA_k|<\frac{1}{2}$,

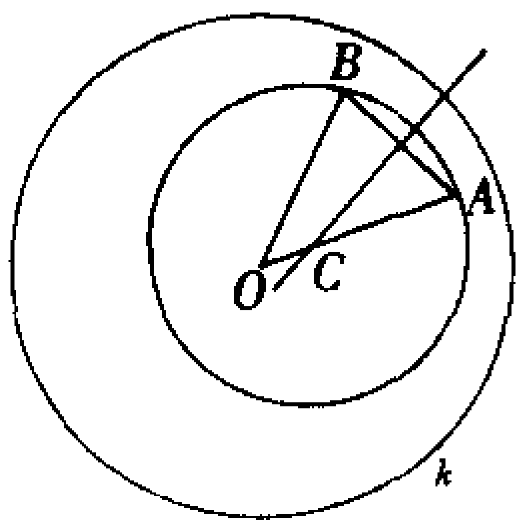
即A_k在以A_iA_j为直径的圆内,当然A_k更在$\odot O\left(半径为\frac{1}{2}\right)$内.

若$|A_iA_j|=1$,则A_i,A_j在以$\frac{1}{2}$为半径的$\odot O$上

14·22 在圆k内给定两点A和B.证明:存在这样一个圆(实际上,有无穷多个),它通过点A和B,且完全在圆k内.

(匈牙利数学奥林匹克,1917年)

[证] 连接圆k的圆心O和点A.显然,以线段OA上的任意一点C为圆心,以CA为半径的圆,一定在圆k内.



为此,作线段AB的垂直平分线,则该垂直平分线或者交于OA,或者交于OB.设交点为C,则以C为圆心,以CA为半径的圆完全在圆k内.

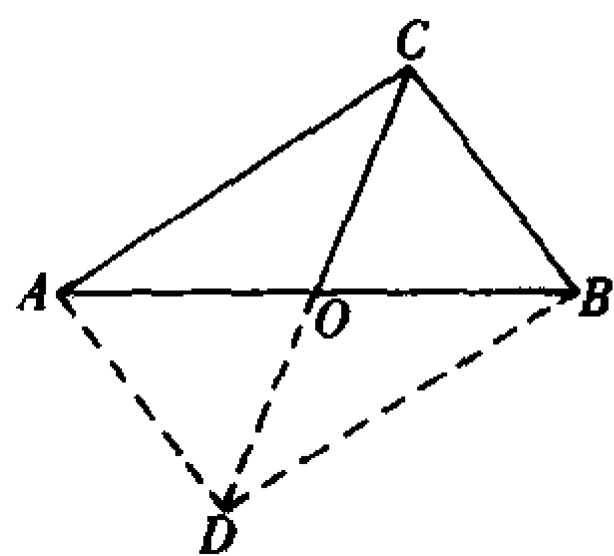
14·23 求证:任何一个周长为$2a$的多边形,总可以用一个直径为a的圆盖住.

(波兰数学奥林匹克,1955年)

[证] 首先我们证明:

三角形一边上的中线小于另两边之和的一半.

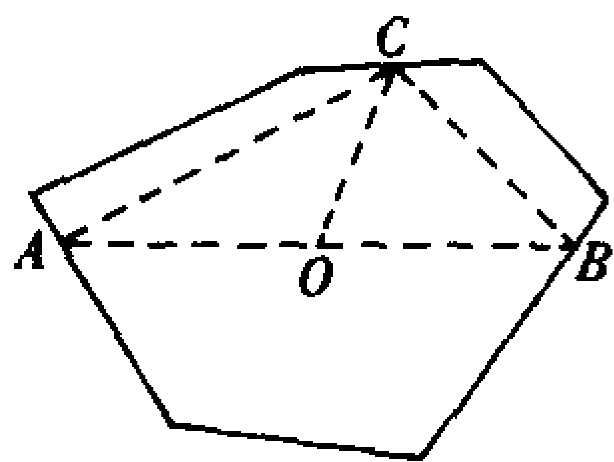
事实上,设OC为AB边的中线,延长CD到D,使$OD=CO$,连AD、DB,则 $CD=2OC$,



且 $AC+BC=AC+AD>CD=2OD$,

$\therefore\quad OD<\frac{1}{2}(AC+BC)$.

对周长为 $2a$ 的多边形 T,在边上取两点 A、B,使 A、B 平分多边形 T 的周长.设 O 是 AB 的中点.



设 C 是多边形边界或内部的任一点,连 AC、BC、OC,由上面的证明可得

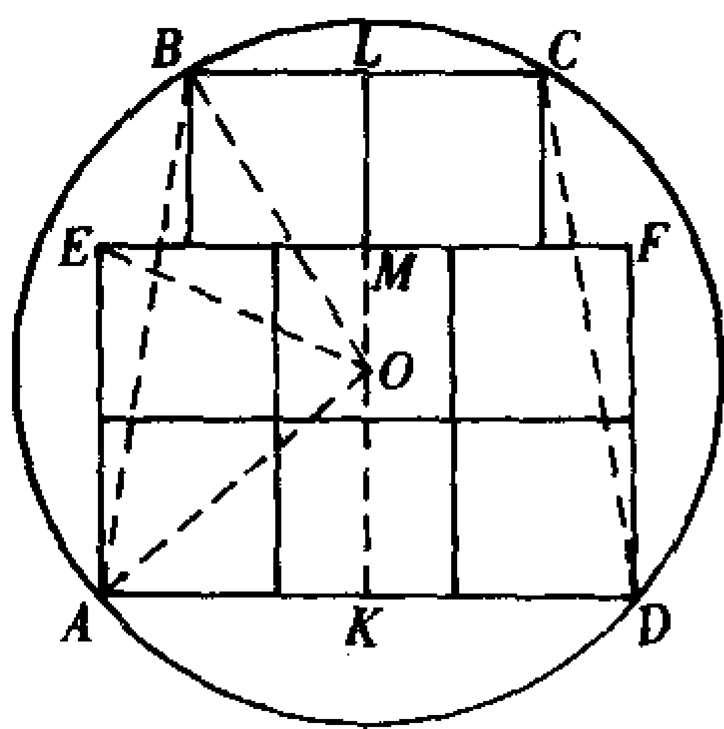
$$OC<\frac{1}{2}(AC+BC).$$

又 $AC+BC<a$, $\therefore\quad OC<\frac{1}{2}a$.

因此 C 点在以 O 为圆心,以 $\frac{1}{2}a$ 为半径的圆的内部,即以 a 为直径的圆能盖住周长为 $2a$ 的多边形.

14·24 在半径为 2 的圆内能否放进 8 个不重叠的边长为 1 的正方形?

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)



[解] 将 8 个正方形排列如图,我们证明等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆半径小于 2,以及点 E、F 都在该圆内.

记该圆圆心为 O、K、L、M 分别为 AD、BC 和 EF 的中点.

设 $OK=x$, 则 $LO=LK-OK=3-x$.

又 $OA^2=AK^2+KO^2=\frac{9}{4}+x^2$,

且 $BO^2=BL^2+LO^2=1+(3-x)^2$,

由 $AO=BO$ 可得 $\frac{9}{4}+x^2=1+(3-x)^2$, 解得 $x=\frac{31}{24}$.

则 $OA=\sqrt{\frac{9}{4}+\left(\frac{31}{24}\right)^2}<2$.

所以等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆半径小于 2.

又 $MO=2-x=\frac{17}{24}<\frac{31}{24}=OK$,

所以　$OE=\sqrt{MO^2+\frac{9}{4}}<\sqrt{\left(\frac{31}{24}\right)^2+\frac{9}{4}}<2.$

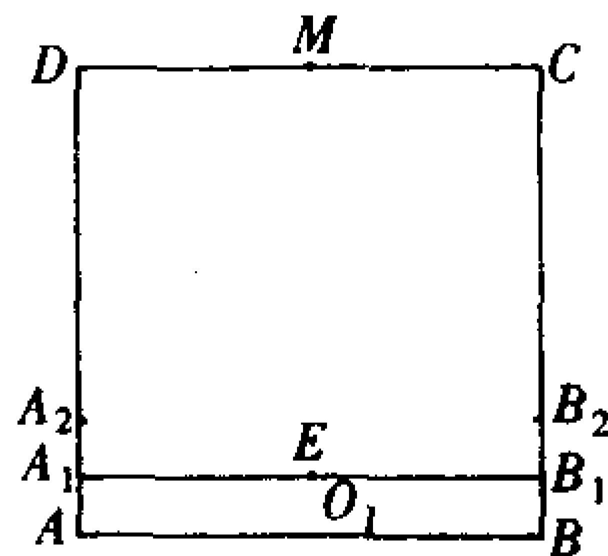
于是 E、F 均在圆 O 内.

因此半径为 2 的圆内能放进 8 个边长为 1 且互不重叠的正方形.

14·25　一单位正方形被三个相等的圆盘所覆盖.(1)证明存在半径不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$的三个相等的圆盘能够覆盖这个单位正方形;(2)求最小可能的半径.

（瑞典数学奥林匹克,1983 年）

[解]　设 $ABCD$ 为单位正方形.



取 $AA_1=A_1A_2=BB_1=B_1B_2=\frac{1}{8}$.

M 和 E 分别是 CD、A_1B_1 的中点.

O_1 点为 AB_1 和 A_1B 的交点.

$$BO_1=\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{16}=r,$$

$$MA_1=MB_1=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}=2r.$$

所以以 O_1 为圆心,r 为半径的圆 O_1 覆盖了矩形 AA_1B_1B,而以 MA_1、MB_1 为直径的圆 O_2、O_3 分别覆盖了矩形 A_1EMD 和矩形 B_1CME,因而半径为 r 的三个圆盘覆盖了整个正方形 $ABCD$.

又由于　$\frac{\sqrt{65}}{16}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以　存在三个半径不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$的等圆能够覆盖整个单位正方形.

于是(1)得证.

下面再证明:任意半径 $r'<\frac{\sqrt{65}}{16}=r$ 的三个圆盘不能覆盖单位正方形 $ABCD$.

由于四个顶点有两个相邻顶点在同一圆盘中,设 A、B 在圆 O_1 中,由于 $r'<r$,所以 A_1D、CD、B_1C 都不在圆 O_1 中.

分两种情况讨论:

若 C、D 同时属于同一圆盘,设 D、C 属于圆 O_2,但此时 A_1A_2、

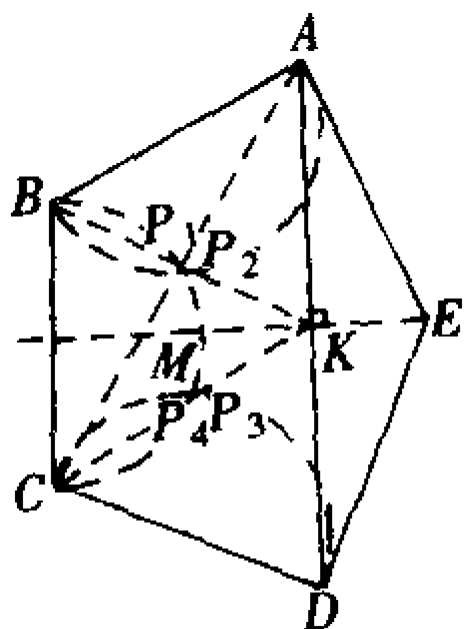
B_1B_2 不属于圆 O_2，而圆 O_3 不能同时包含 A_1、B_2 两点，因此在这种情况下不能覆盖 $ABCD$.

若 D 属于圆 O_2，C 属于圆 O_3，但由于圆 O_2 和圆 O_3 都不能同时覆盖 M、A_1、A_2 三点中的任意两点，所以这三点中至少有一点不能被覆盖.

这就说明了半径为 $r'<r$ 的三个圆盘不能覆盖正方形 $ABCD$.

14·26　若凸五边形内所有边长都相等.(1)求证:在五边形内存在这样一个点，它在最长的对角线上，而且从这点到所有边的视角不大于直角.(2)求证:以它的所有的边为直径所作的圆不能完全覆盖五边形.

（第 3 届全苏数学奥林匹克，1969 年）



[**证**]　(1)设 AD 为等边五边形 $ABCDE$ 中最长的对角线，K 为 AD 的中点.

$\because$　$AE=DE$，$\therefore$　$\angle AKE=\angle DKE=90°$.

连对角线 AC，有 $AC\leqslant AD$.

在两对边对应相等的两个三角形 ABC 与 AED 中，由 $AC\leqslant AD$，

则 $\angle ABC\leqslant\angle AED$，$\angle BAC\geqslant\angle DAE$.

更有　$\angle BAK>\angle KAE$.　　　　　　　　　　　(*)

由此可知，A、B 位于直线 EK 的同一侧.(因为若不然，直线 EK 与线段 AB 相交于点 T，$AE\geqslant AT$，$\angle ATE\geqslant\angle AET$，进而 $\angle TAK\leqslant\angle EAK$.即 $\angle BAK\leqslant\angle EAK$，与(*)矛盾.)

同理可证，点 C、D 位于直线 EK 的另一侧(与 A、B 不同的一侧).

连 BK、CK，若 $\angle BKC\geqslant 90°$，则 $BC=a$ 是 $\triangle BCK$ 中的最大边，$BK<a$ 且 $CK<a$，

又因　$AK<a$，$DK<a$，从而在 $\triangle ABK$ 中 AB 是最大边，在 $\triangle CDK$ 中，CD 是最大边.

从而　$\angle AKB>60°$，且　$\angle CKD>60°$，此时，

$$\angle AKB+\angle BKC+\angle CKD>60°+90°+60°=210°.$$

但　$\angle AKB+\angle BKC+\angle CKD$ 是平角 $\angle AKD=180°$，矛盾.

所以　$\angle BKC<90°$.

因此 K 点就是对所有边视角都不大于直角的点.

(2)以 AB 为直径画圆，因 $\angle AKB<90°$，所以 K 在该圆外，设该圆

交 BK 于 P_2,

同理 K 在以 CD 为直径的圆外,该圆交 CK 于 P_3,

又 K 也在以 BC 为直径的圆外,该圆交 BK 于 P_1,交 CK 于 P_4,

设 $KP_1 \leqslant KP_2, KP_3 \leqslant KP_4$,则 $\triangle KP_1P_3$ 中的点同时在上述三个圆之外,

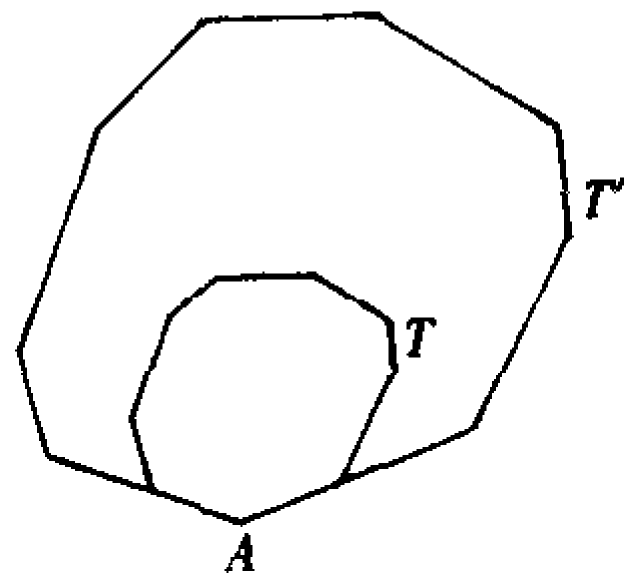
设 EK 交 P_1P_3 于 M,在线段 KM 上任取一点 P,则 $\angle APE < 90°$, $\angle DPE < 90°$, D 点同时在五条边为直径所作的五个圆的外面,

即 P 点不能被这五个圆所覆盖.

14·27 将凸九边形 T 的一个顶点记作 A. 在平面上平移 T,使得顶点 A 依次重合于其余 8 个顶点,得到 8 个与 T 全等的凸九边形. 试证:这 8 个凸九边形中至少有两个相交(即有公共内点).

(第 57 届莫斯科数学竞赛,1994 年)

[证] 以顶点 A 为中心,以 2 为系数作 T 的同位侧凸九边形 T',可证明平移所得 8 个凸九边形全部位于 T' 中.



$$\therefore \quad S\left(\bigcup_{i=1}^{8} T_i\right) \leqslant S(T') = 4S(T),$$

这里 $T_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$ 表示平移所得 8 个凸九边形, S 表示面积.

但 $\quad S(T_i) = S(T), \; i = 1, 2, 3, \cdots, 8,$

由上两式知 $\quad S\left(\bigcup_{i=1}^{8} T_i\right) < \sum_{i=1}^{8} S(Ti),$

此即表明 存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 8$ 使 $S(T_i \cap T_j) > 0$,即 T_i 与 T_j 具有公共内点.

14·28 九个面积都是 1 平方米的多边形放置在面积为 5 平方米的圆中. 证明:其中至少有两个多边形的重叠部分的面积不小于 $\frac{1}{9}$ 平方米.

(基辅数学奥林匹克,1960 年)

[证] 从九个多边形中任选两个,共有 $C_9^2 = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ 种情形.

假设任两个多边形的重叠部分的面积都小于 $\frac{1}{9}$ 平方米,充其量所

有重叠部分的面积和小于

$$36\times\frac{1}{9}=4(\mathrm{m}^2).$$

这就推出圆内不重叠的多边形覆盖的总面积大于

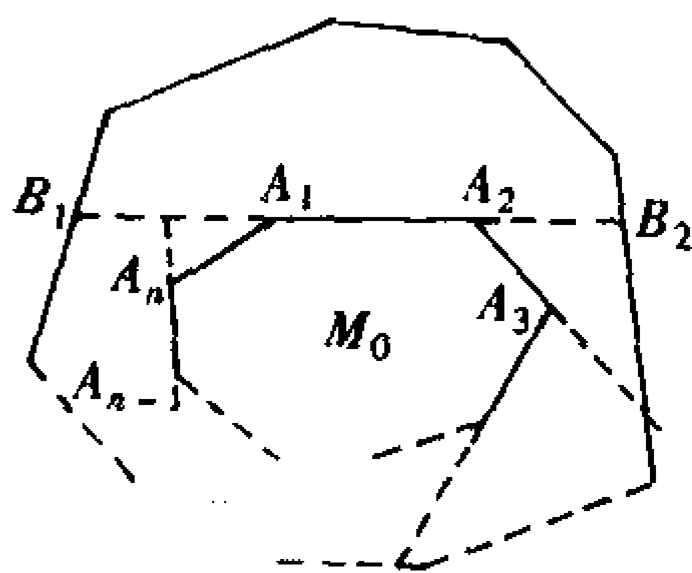
$$9\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}^2=5\mathrm{m}^2,$$

引出矛盾.

于是,至少有两个多边形的重叠部分的面积不小于$\frac{1}{9}$平方米.

14·29 求证:如果一个凸多边形落在另一个凸多边形内,则里面的凸多边形的周长小于外面凸多边形的周长.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1976年)



[证] 设凸多边形 $M_0=A_1A_2\cdots A_n$ 位于凸多边形M之内.

则直线 A_1A_2 将多边形分成两部分,其中一个包含凸多边形 M_0,记作 M_1.

记多边形 M 和M_1 的周长为 P_M 和P_{M_1}.

设直线 A_1A_2 与 M_0 的边交于 B_1、B_2,则 B_1B_2 不是 M 的边,因此有 $P_{M_1}<P_M$.

直线 A_2A_3 从多边形 M_1 中切出一个包含 M_0 的凸多边形 M_2,同样有 $P_{M_2}\leqslant P_{M_1}$.

如此继续下去,得到一系列的多边形

$$M\supset M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n.$$

其中最后一个多边形 M_n 与多边形M_0 重合,且有

$$P_M>P_{M_1}\geqslant P_{M_2}\geqslant\cdots\geqslant P_{M_n}=P_{M_0}.$$

因而本题得证.

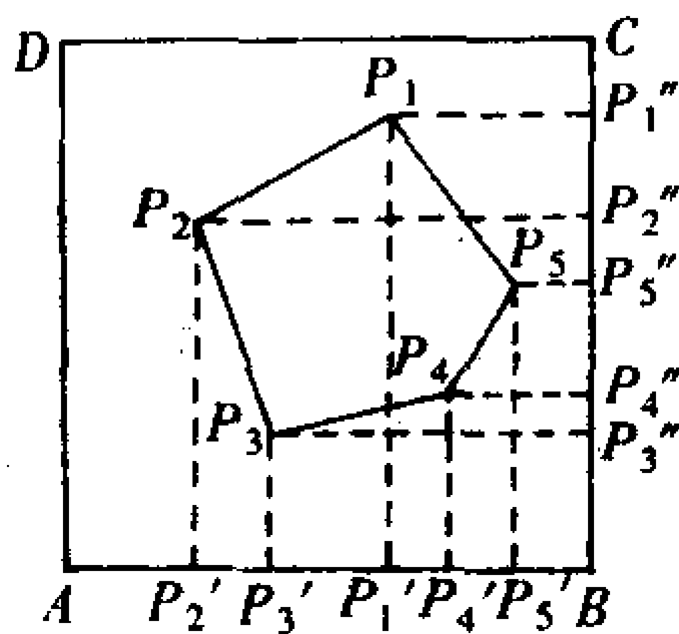
14·30 设一个凸多边形 P 含于边长为 1 的正方形内,试证:P 的各边的平方和小于或等于 4.

(第 27 届美国普特南数学竞赛,1966 年)

[证] 设 P_1、P_2、…、P_n,是 P 的顶点,边长为 1 的正方形为 $ABCD$.

且设 P'_1、P'_2、…、P'_n 是凸多边形P 的 n 个顶点在AB 边上的射影.

P''_1、P''_2、…、P''_n 是凸多边形P的n个顶点在BC上的射影.



由于多边形P是凸的,则必有

$P'_1P'^2_2+P'_2P'^2_3+\cdots+P'_{n-1}P'^2_n+P'_nP'^2_1\leqslant 2$,

$P''_1P''^2_2+P''_2P''^2_3+\cdots+P''_{n-1}P''^2_n+P''_nP''^2_1\leqslant 2$.

从而

$(P'_1P'^2_2+P''_1P''^2_2)+\cdots+(P'_nP'^2_1+P''_nP''^2_1)\leqslant 4$,

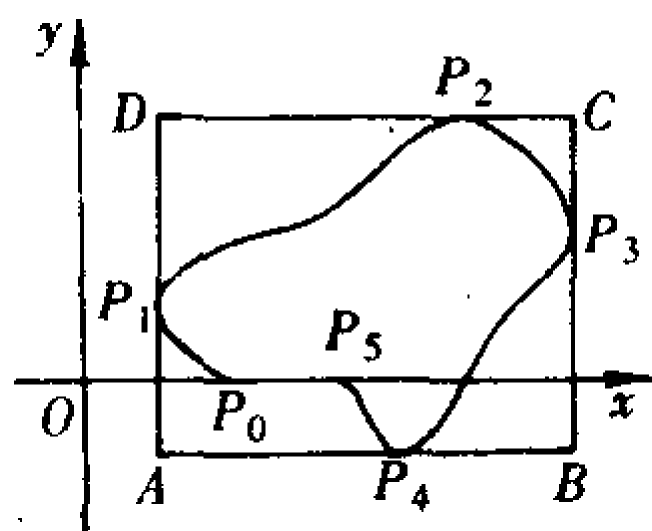
即 $P_1P_2^2+P_2P_3^2+\cdots+P_nP_1^2\leqslant 4$.

14·31 求证:任一单位长的曲线弧都能被一面积等于$\frac{1}{4}$的矩形所覆盖.

(第30届美国普特南数学竞赛,1969年)

[证] 我们来考察两个端点位于x轴上的任一单位曲线弧,令其端点为P_0与P_5.

作出一个四边分别与x轴、y轴平行且完全覆盖这个曲线弧的最小矩形(如图),并设这个矩形的长$AB=a$,宽$BC=b$.



由矩形覆盖曲线的最小性质可知,矩形的四边上必有曲线弧上的点,依次记为P_1、P_2、P_3、P_4.

作折线$P_0P_1P_2P_3P_4P_5$,则其长至多为1,其水平分量至少为a,垂直分量至少为$2b$,因此这条折线的长度不小于$\sqrt{a^2+4b^2}$.于是

$$\sqrt{a^2+4b^2}\leqslant 1,$$

即 $a^2+4b^2\leqslant 1,\ 0<a\leqslant 1,\ 0<b\leqslant 1$.

注意到 $ab=\frac{1}{4}[(a^2+4b^2)-(a-2b)^2]\leqslant\frac{1}{4}[1-(a-2b)^2]$.

于是当$a=2b$时,ab的最大值为$\frac{1}{4}$,即矩形面积的最大值为$\frac{1}{4}$.

因此任一单位长的曲线弧都能被一面积等于$\frac{1}{4}$的矩形所覆盖.

14·32 求证:任意一个凸多边形必有三个相邻顶点,过这三个点

的圆包含整个多边形.

（保加利亚数学奥林匹克，1978 年）

［证］ 考虑所有这样的圆，它过给定的多边形的某三个顶点，其中两个是相邻的，而第三个对它们所张的视角不超过 90°，这样的圆是存在的，比如过三个相邻顶点的圆即符合要求.

显然，这样的圆有限多个，一定有一个直径最大的圆 C，设此圆直径为 d.

为确定起见，设多边形的相邻顶点为 A_1、A_2，另一顶点为 A，且 $\angle A_1AA_2 \leqslant 90°$.

设给定的多边形的某个顶点 B 在圆 C 外；且 B 与 A 同在直线 A_1A_2 分成的同一半平面内，所以

$$\angle A_1BA_2 < \angle A_1AA_2 \leqslant 90°.$$

从而 $$\frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1BA_2} > \frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1AA_2} = d.$$

于是由正弦定理$\triangle A_1BA_2$ 的外接圆半径大于 R，与圆 C 的选取相矛盾.

因此，B 点一定被$\triangle A_1AA_2$ 的外接圆 C 所覆盖，从而圆 C 覆盖整个多边形.

下面证明：与顶点 A_2 相邻但不同于 A_1 的顶点 A_3 在所取的圆 C 的圆周上.

否则，若 $A_3 \neq A$ 位于圆 C 中由弦 A_2A 所确定的弓形的内部，则

$$\angle A_2A_3A > 180° - \angle A_2A_1A \geqslant 90°.$$

又由正弦定理$\triangle A_2A_3A$ 的外接圆半径大于 d，与圆 C 的选取矛盾.

因此，顶点 A_1、A_2、A_3 满足条件.

14·33 三个圆两两外切于 X、Y、Z，然后，这些圆的半径扩大到 $\frac{2}{\sqrt{3}}$倍，圆心不变.求证：$\triangle XYZ$ 的每个点至少被扩大后的一个圆所覆盖.

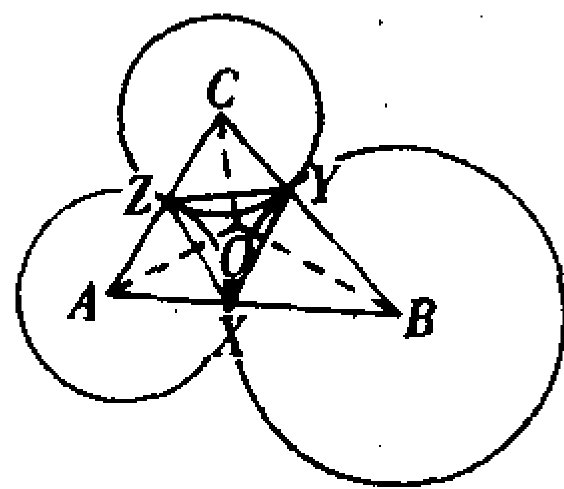
（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

［证］ 对$\triangle XYZ$ 内的任一点 O，$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COA$ 中至少有一个不小于 120°.

设$\angle AOB \geqslant 120°$，于是只需证

$$AO+OB \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}AX+\frac{2}{\sqrt{3}}BX=\frac{2}{\sqrt{3}}AB.$$

事实上



$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2+OB^2-2AO\cdot OB\cos\angle AOB. \\ &\geqslant AO^2+OB^2+AO\cdot OB \\ &\geqslant (AO+OB)^2-AO\cdot OB \\ &\geqslant (AO+OB)^2-\frac{1}{4}(AO+OB)^2 \\ &=\frac{3}{4}(AO+OB)^2. \end{aligned}$$

因此有 $AO+OB \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}AB=\frac{2}{\sqrt{3}}AX+\frac{2}{\sqrt{3}}XB.$

若 $AO>\frac{2}{\sqrt{3}}AX$，$OB>\frac{2}{\sqrt{3}}XB$，可有 $AO+BO>\frac{2}{\sqrt{3}}AB.$

因此 $AO \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}AX$，$OB \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}XB$ 至少有一个成立.

不妨设 $AO \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}AX$ 成立，即 O 点被以 A 为圆心 $\frac{2}{\sqrt{3}}AX$ 为半径的圆所覆盖.

14·34 A 是平面上 $n(n \geqslant 2)$ 个点的集合. 证明：存在以集合 A 的某两点为直径两端的圆(含周界)内至少含有集合 A 中的 $\left[\frac{n}{3}\right]$ 个点. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(日本数学奥林匹克，1991 年)

[证] 当 $n=2$ 时，结论显然.

当 $n \geqslant 3$ 时，考虑能够盖住 A 中 n 个点的所有圆中最小的一个圆，并将此圆记为圆 C.

(1)若圆 C 的圆周上只有集合 A 中的两个点 P、Q.

我们证明这两点恰好是圆 C 的直径的两个端点.

用反证法. 若 P、Q 不是直径的端点. 设集合 A 中的其余 $n-2$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-2}$ 对 PQ 的张角满足

$$\angle PA_1Q \leqslant \angle PA_2Q \leqslant \cdots \leqslant \angle PA_{n-2}Q.$$

如果$\angle PA_1Q>90^\circ$，则以PQ为直径的圆C'也包含了集合A中的全部点且半径为圆C小，从而与圆C最小矛盾.

如果$\angle PA_1Q\leqslant 90^\circ$，则过$PQA_1$三点的圆，同样也包含了集合$A$中的全部点，由正弦定理可知，此圆半径比圆$C$的半径小，从而与圆$C$最小矛盾.

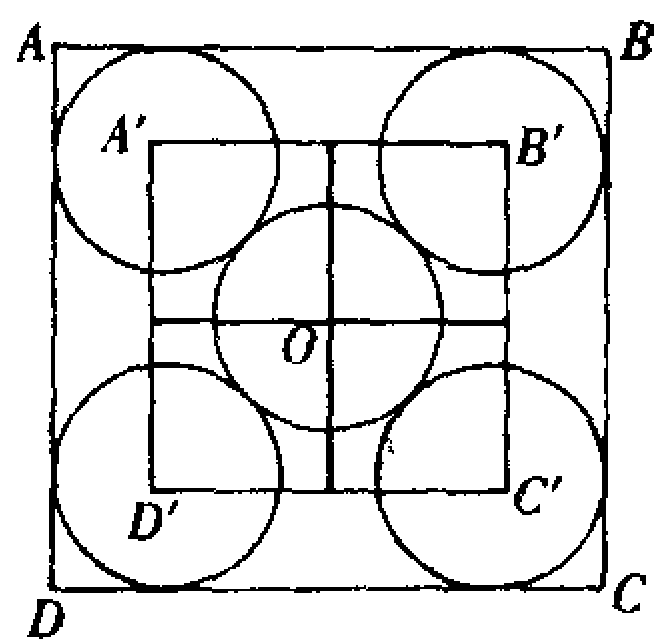
所以　P、Q是圆C直径的两个端点.圆C是满足题意的圆.

(2)现设在圆C的圆周上含集合A的点不少于3个，则从中可选出3个点，它们构成的三角形是直角三角形或锐角三角形.否则，若圆C的圆周上的任意三点构成的三角形都是钝角三角形，则它们都位于圆C的一段劣弧$\overset{\frown}{PQ}$上，这样我们可作一个比圆C小的圆，它包含劣弧$\overset{\frown}{PQ}$及A中的点，这与圆C的最小性矛盾.

对于集合A中的在圆周上的三个点P、Q、R，$\triangle PQR$是锐角三角形或直角三角形，于是以PQ、QR、RP为直径分别作圆，则这三个圆覆盖了圆C，也就覆盖了集合A中的n个点，因此这三个圆中至少有一个圆含有集合A中的至少$\left[\frac{n}{3}\right]$个点.

14·35　求一个具有最小尺寸的正方形，使得其中能安放5个半径为1的圆，并且任意两个圆都没有公共内点.

(保加利亚数学奥林匹克，1983年)



[解]　设$ABCD$是以O为中心且边长为a的正方形，它含有5个两两没有公共内点的半径为1的圆.

则这些圆的圆心落在以O为中心且边长为$a-2$的正方形$A_1B_1C_1D_1$中，其中$A_1B_1/\!/AB$.

连接正方形$A_1B_1C_1D_1$的对边中点的连线把它自身分为四个小正方形.

由抽屉原理，一定有一个小正方形含有两个圆心，因此，这两个圆心的距离不超过小正方形的对角线的长，并且它们的距离不小于2，因此

$$2\leqslant OA_1=\frac{A_1B_1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-2).$$

于是得到　$a\geqslant 2\sqrt{2}+2$.

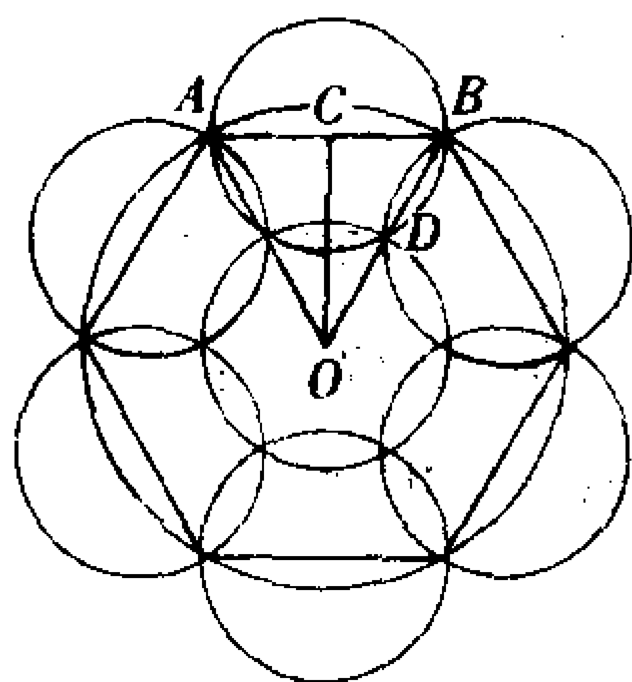
最后,如果 $a=2\sqrt{2}+2$,且五个半径为 1 的圆心为 O、A_1、B_1、C_1、D_1,则满足题目的要求.

因此正方形边长的最小值为 $a=2\sqrt{2}+2$.

14·36　设小圆的半径为$\frac{r}{2}$,大圆的半径为 r. 试问:最少要用多少个这样的小圆才能将大圆盖住?

(匈牙利数学奥林匹克,1947 年)

[解]　(1)半径为 r 的圆可用 7 个半径为$\frac{r}{2}$的圆盖住.



这 7 个圆可以这样分布:它们的圆心为圆内接正六边形各边的中点及大圆的圆心.

(2)用少于 7 个半径为$\frac{r}{2}$的圆,不能盖住半径为 r 的圆.

因为在半径为$\frac{r}{2}$的圆中,两点间的最大距离等于 r,而在半径为 r 的圆周上,弧长为圆周长的$\frac{1}{6}$的两点之间的直线距离正好等于 r,所以每一个小圆能盖住大圆的周长不超过$\frac{1}{6}$.

因此,为了盖住大圆的圆周,至少必须用 6 个小圆.

然而,这 6 个小圆不能盖住大圆的圆心. 否则,若某个小圆盖住了大圆的圆心,那么这个小圆最多和大圆的圆周有一个公共点. 所以用 6 个半径为$\frac{r}{2}$的圆不能盖住半径为 r 的圆.

因此,用 7 个半径为$\frac{r}{2}$的小圆一定能盖住半径为 r 的大圆.

14·37　平面上有 1992 个点,其中任意 12 个点中必有两点的距离小于 1,证明:存在半径为 1 的圆,它至少盖住 182 个点.

(中国黑龙江省哈尔滨市初中数学竞赛,1992 年)

[证]　在 1992 个点中任选一点 O_1,以 O_1 为圆心作半径为 1 的圆,如果$\odot O_1$ 已经盖住 1992 个点,则结论已经成立.

如果$\odot O_1$ 没有盖住全部的 1992 个点,则一定有点 O_2 在$\odot O_1$ 外

面，此时$\overline{O_1O_2}>1$，以 O_2 为圆心，以 1 为半径作$\odot O_2$. 如果点 O_3 不被$\odot O_1$、$\odot O_2$ 盖住，则作$\odot O_3$. 类似地，作$\odot O_4$、…、$\odot O_{11}$，这里 $O_iO_j>1(1<i<j<11)$.

至此，我们说这 11 个圆已盖住了全部的 1992 个点. 因为若有点 O_{12}没被盖住，则 O_1、…、O_{12}这 12 个点中两两的距离均大于 1，与假设任意 12 个点中有两点距离小于 1 矛盾.

于是，我们作的 11 个半径为 1 的圆已盖住了全部 1992 个点，由于 $1992=11\times181+1$，故由抽屉原则知，11 个半径为 1 的圆中有一个至少盖住了 182 个点.

14·38 设 C 是一个以正多边形为边界的闭凸平板，试证：对于每个正整数 n 存在这平面上的一个集合 $S(n)$，其任意 n 个点都能被 C 覆盖，但 $S(n)$本身不能被 C 覆盖.

（第 17 届美国普特南数学竞赛，1957 年）

［证］ 设 C 为一正k 边形，其内切圆半径为 r.

对于一个给定的正整数 n，令 $S=S(n)$表示半径为 $r\sec\dfrac{\pi}{2kn}$ 的圆.

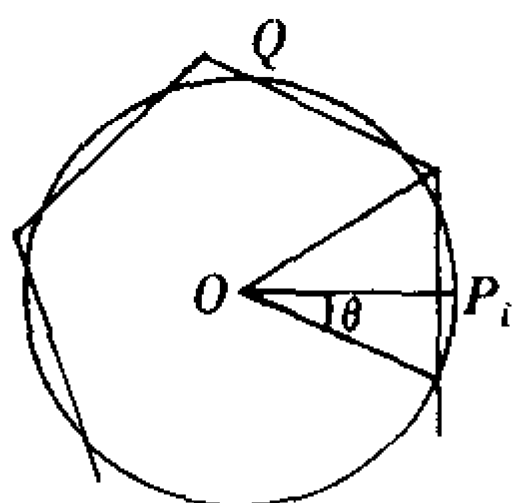
本题相当于证明：

(1)无论 C 如何放置，都不能覆盖 S；

(2)对于 S 的任意n 个点P_1、P_2、…、P_n，存在一种 C 的设置法，使 C 能盖住点集$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$.

为证明(1)，只需证明任何一个半径为 $r_1>r$ 的圆都不能在C 的内部.

事实上，以 O 为圆心(O 是正k 边形C 的中心)以 $r_1>r$ 为半径的圆不全在 C 的内部，由对称性，以 C 内其他点为圆心，r_1 为半径的圆 S 也不能被C 覆盖.



现在证明(2).

令 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是S 的点，并且在 C 内固定一个点Q，Q 到O 的距离为$r\sec\dfrac{\pi}{2kn}$.

放置 C，使得 C 的中心O 与S 的中心O 重合，则 Q 在S 上.

设 A_i 是 k 段每段长为 $\frac{\pi}{kn}$ 弧度的弧的并集，即满足条件 $\frac{2m\pi}{k} \leqslant \angle P_iOQ \leqslant \frac{2m\pi}{k} + \frac{\pi}{kn}$ 的弧的并集.

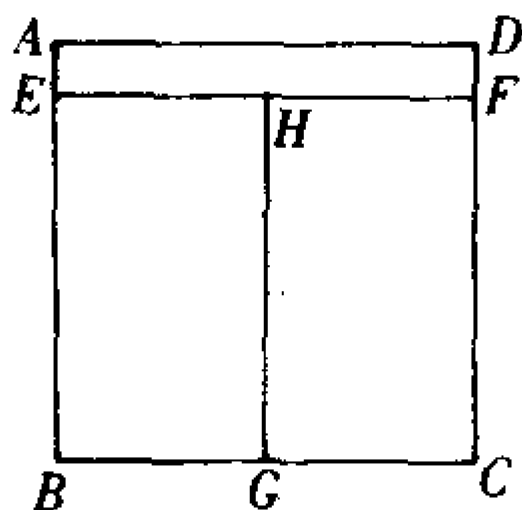
若 $Q \in A_i$，则 P_i 位于 C 上或 C 外，A 的总长为 $\frac{\pi}{n}$ 弧度，从而整个 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 的长至多为 π，所以，$S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 至少有长度 π，因此只要将 C 旋转，使得 $Q \in S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 时，则点 P_1、P_2、…、P_n 就全在 C 的内部，因而(2)得证.

由(1)、(2)，本题得证.

14·39　平面的一个子集如果含有所有的边界点，则称为闭集. 闭集的直径是指它的任意两点间距离的最大值. 求证：(1)一个单位正方形可以用三个直径不超过 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 的闭集覆盖. (2)一个单位正方形不能用三个直径均小于 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 的闭集覆盖.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

[证]　(1)在正方形 $ABCD$ 的边 AB、DC 上分别取 $AE = DF = \frac{1}{8}$，连 EF，又设 H 和 G 分别是 EF 和 BC 的中点，连 HG，这样得到三个矩形.



我们计算这三个矩形的对角线长(矩形的直经)，由勾股定理得

$$AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8},$$

$$EG = FG = \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8}.$$

因此正方形 $ABCD$ 可用矩形 $AEFD$、$BGHE$ 和 $GCFH$ 覆盖，它们的直径均不超过 $\frac{\sqrt{65}}{8}$.

(2)假设有三个直径小于 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 的集合 M_1、M_2、M_3 覆盖正方形

$ABCD$.

由于 A 与 C 不可能在同一个 M_i 中，B 与 D 也不可能在同一个 M_i 中，由于 A、B、C、D 四点分布在三个集合 M_i 中，则必有两点在同一个 M_i 中，所以可假设 A、D 在集 M_1 中.

设 $AF=DE=\frac{\sqrt{65}}{8}$(其中 E、F 在边界 AB、DC 上)，由于 M_i 的直径小于 $\frac{\sqrt{65}}{8}$，则 E、F 均不在 M_1 中，不妨设 E 在 M_2 中，

设 $EG=FG=\frac{\sqrt{65}}{8}$(其中 G 在边界 BC 上)，则 G 不在 M_2 中，G 应在 M_3 中，从而 B、C 均在 M_3 中.

设 K 为 AB 的中点，我们计算 KF 与 KC 的长：

$$KF=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}>\frac{\sqrt{65}}{8},$$

$$KC=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}>\frac{\sqrt{65}}{8}.$$

所以 K 不在 M_2、M_3 中，显然 K 也不在 M_1 中，这与 M_1、M_2、M_3 覆盖正方形 $ABCD$ 矛盾.

14·40　同一平面上的四个半平面完全覆盖了这个平面，即：平面上的任意一点至少和四个半平面中的一个半平面的某一个内点相重合. 求证：从这四个半平面中，可以挑选出三个半平面，它们仍能覆盖全平面.

（匈牙利数学奥林匹克，1951 年）

［证 1］　用反证法. 假设结论不成立.

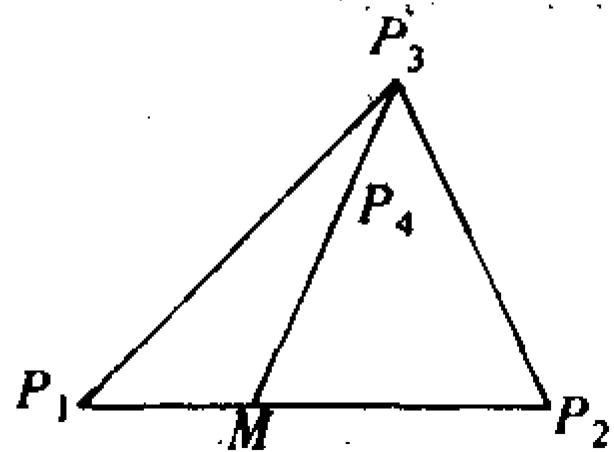
那么，如果从四个半平面中去掉一个半平面时，则平面上至少有一点未被盖住. 这就相当于在平面上有四个点 P_1、P_2、P_3、P_4，它们之中的每一个仅被一个半平面所覆盖，并且四个半平面中的每一个仅仅盖住点 P_1、P_2、P_3、P_4 中的一个.

我们证明这是不可能的，即证明在任何盖住全平面的任意四个半平面中，总可以找到这样一个半平面，它们盖住了四个给定点中的两个点.

(1)如果 $P_i(i=1,2,3,4)$中有三个点在一条直线上，那么必有一

点在另两点的中间,盖住中间一点的半平面至少应该盖住该点两边的两个点中的一个,此时这个半平面至少盖住两个点.

(2)如果 $P_i(i=1,2,3,4)$ 中任意三点都不共线,且有一点(设为 P_4)在其他三点为顶点的三角形(即 $\triangle P_1P_2P_3$)内.

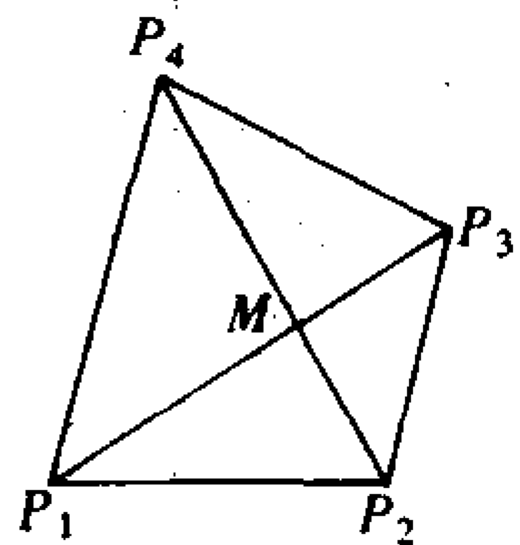


设直线 P_3P_4 与边 P_1P_2 交于 M 点.由(1)盖住了 P_4 点的半平面一定还盖住 P_3 或 M.

若这个半平面还盖住了 P_3,则它至少盖住了两个点 P_4 和 P_3.

若这个半平面还盖住了 M,同样还盖住 P_1 或 P_2,于是它盖住了 P_4 和 P_1 或 P_2 中的一个.

(3)如果 $P_i(i=1,2,3,4)$ 中任意三点都不共线,且这四点构成一个凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$.



设 $P_1P_2P_3P_4$ 的对角线的交点 M.

由(1),盖住点 M 的半平面至少盖住了 P_1 或 P_3 中的一个(设为 P_1),也同时盖住了 P_2 或 P_4 中的一个(设为 P_2),即盖住 M 的半平面至少盖住了 P_1 和 P_2.

由以上,四个半平面中的一个至少盖住了四个点中的两个.于是本题得证.

[证 2] 先考虑一个引理:

如果三条射线盖住了一条直线,那么可以从中挑出两条射线盖住整条直线.

事实上,盖住整个直线的三条射线中有两条射线是指同一方向,这时这两条射线中的一个完全包含在另一个里面,如果把这条完全包含在另一条射线里面的射线去掉,那么剩下的两条射线将盖住整个直线,从而引理得证.

我们研究一个半平面(我们把这个半平面叫第一个半平面)的边界直线.

第一个半平面的边界直线被其他三个半平面盖住,如果它们之中的一个盖住了整个边界线,那么它将把整个第一个半平面包含在里面(否则,这两个半平面盖住了整个平面),因此去掉第一个半平面,剩下的三个半平面盖住了整个平面.

如果三个半平面中的每一个半平面盖住的仅仅是两条射线(这个半平面边界线把第一个半平面的边界线所成的两条射线)中的一条,那么由引理,被三个半平面盖住的三条射线中的两个盖住了第一个半平面的整个边界线,如果这三个半平面的每一个与第一个半平面的边界线没有任何一个公共点,则结论成立.

我们再来研究盖住第一个半平面的边界线的两个半平面的边界线.如果这两个半平面的边界直线平行,那么这两个半平面盖住了整个平面.

如果这两个半平面的边界线交于点 M,当点 M 在第一个半平面内时,这两个半平面和第一个半平面一起盖住了整个平面,当点 M 不在第一个半平面内时,那么第一个半平面可以去掉,而其他三个半平面将盖住整个平面,因为在这种情况下,边界线交于点 M 的两个半平面完全盖住了第一个半平面.

由以上,本题得证.

[证 3] 我们用 $f_i(i=1,2,3,4)$表示四个半平面.

假设本题的结论不成立,那么存在一个点 P_1,在四个半平面 f_1、f_2、f_3、f_4 中仅仅 f_1 盖住了它.此外还存在点 P_2、P_3、P_4,每一个这样的点仅仅被半平面 f_2、f_3、f_4 中的一个盖住.

连接点 P_1 和 P_4 的直线段应该和半平面 f_4 的边界线有公共点 Q_1,因为 f_4 盖住了点 P_4,但没有盖住 P_1,半平面 f_2 和 f_3 没有盖住点 Q_1,这是因为 f_2 和 f_3 都不能盖住线段 P_1P_4 的端点,因而不能盖住 P_1P_4 的内点,因此,在四个半平面中,盖住点 Q_1 的只能是半平面 f_1.

类似地,半平面 f_4 的边界上还有这样的点 Q_2 和 Q_3,它们中的一个只被半平面 f_2 盖住,另一个点只被半平面 f_3 盖住,然而这是不可能的,因为 Q_1、Q_2 和 Q_3 是一条直线(半平面 f_4 的边界线)上三个互不相同的点,盖住它们中间的点半平面至少盖住两个边上的点中的一个.

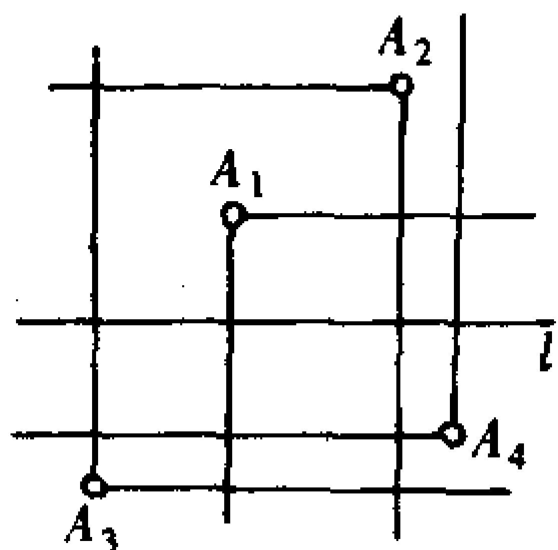
所得到的矛盾证明了本题断言的正确性.

14·41 (1)探照灯的照射角为 $90°$,证明如果将四架探照灯放在广场的任意四个点上,总可以调整它们使整个广场各处都被照到.(2)在空间的八个点上放置探照灯,若它的照射范围是以此点为顶点的直三

面角(即棱互相垂直的三面角).证明:这些探照灯能照亮所在的整个空间.

(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[证] (1)今在平面上引直线 l,把平面分成两个半平面.使每一个半平面内都有已知点中的两个点.显然,分别位于一个半平面的两个点上的两个探照灯在旋转时可以照到另一个半平面.

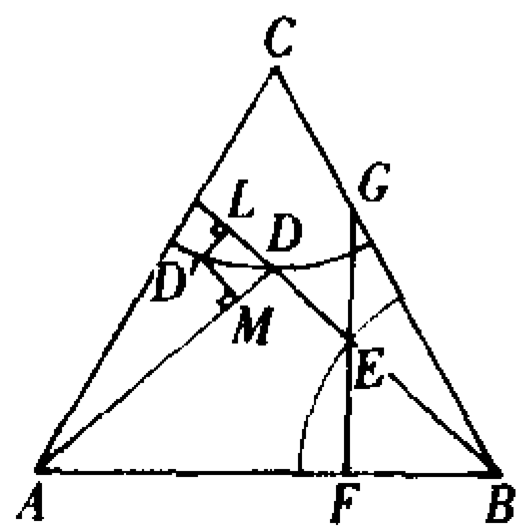


(2)作一平面,使已知点中有四个在它的甲侧,而其余的四个在乙侧,利用(1)的结果,甲侧的四个点上的探照灯可以照亮乙侧半个空间,乙侧的四个点上的探照灯也可以照亮甲侧半个空间.

14·42 一个战士想要查遍一个正三角形区域内及边界上有无地雷,他的探测器的有效半径等于正三角形高的一半,这个战士从三角形的一个顶点出发开始探测,问他循怎样的探测路线才能使查遍整个区域的路程最短?

(第15届国际数学奥林匹克,1973年)

[解] 如图,设士兵从 A 点出发,为了检查点 B 和 C,士兵必须达到分别以 B 和 C 为中心,以 $\frac{h}{2}$ 为半径的弧上的某点 D 和 E(h 为正三角形 ABC 的高).



由于 $BE=\frac{h}{2}$,所以当路径 $ADEB$ 最短时,ADE 也最短,此时,从 A 到 D 和从 D 到 E 的路径必须是直线段,且 E 必须在线段 DB 上.

在这种情况下,为使 $ADEB$ 最短,点 D 必须取在 $AD+DB$ 达到最小的位置,此时必有 $DA=DB$,即点 D 是从 C 到 AB 边上的高的中点.

事实上,若取弧上的另一点 D',我们作 $D'L\perp DB$ 于 L,作 $D'M\perp AD$ 于 M,那么,D' 必在 DL 和 $\angle LDM$ 的平分线之间,从而有

$D'L<D'M,LD>MD.$

$AD'+D'B>AM+LB=(AD+DB)+(LD-MD)>AD+DB.$

最后,我们证明:士兵在通过上述路径 ADE 时,可以查遍整个正 $\triangle ABC$.

为此,在路径上任意一点作 AB 的垂线 GF,显然这点和垂线与正三角形边的交点的距离不大于 $\frac{h}{2}$. 由于这些垂线覆盖四边形 $AFGC$,所以四边形 $AFGC$ 将被完全探测到. 另外,点 F、B、G 被以 E 为圆心,$\frac{h}{2}$ 为半径的圆所覆盖,所以剩下的 $\triangle FBG$ 也将被完全探测到.

因此,士兵可以查遍整个正 $\triangle ABC$.

第十五章　杂题

15·1　正整数 a、b、c、d 满足 $ab=cd$，$a+b=c-d$，求证：存在一个直角三角形，各边的长为整数，面积为 ab.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

[证]　由　$ab=cd$　及 $a+b+d=c$　得

$$(a+d)(b+d)=ab+d(a+b+d)=ab+cd=2ab.$$

$$\begin{aligned}(a+d)^2+(b+d)^2&=a^2+b^2+2d(a+b+d)=a^2+b^2+2cd\\&=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.\end{aligned}$$

所以以 $a+d$，$b+d$ 为直角边的三角形斜边为 $(a+b)^2$，面积为 $\frac{1}{2}(a+d)(b+d)=ab$.

15·2　若直角三角形两直角边均为整数，且是方程 $mx^2-2x-m+1=0$ 的根（m 为整数），这样的三角形存在否？若存在请给出满足题设的三边长；若不存在请说明理由.

（中国湖北省黄冈市数学竞赛，1996 年）

[解]　若 $m=0$ 时，$x=\frac{1}{2}$，这时原方程无整数根，则 $m\neq 0$. 那么，

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

当 $m=1$ 时，$x=2$ 或 0，这样的直角三角形也不存在.

假设还存在不为 0 或 1 的整数 m，使得方程

$$mx^2-2x-m+1=0$$

有整数根，则必有 m^2-m+1 是一个整数的平方.

令 $m^2-m+1=k^2$（k 为整数），即 $m^2-m=1\cdot(k^2-1)$.

则有 $(m-1)m=(k-1)(k+1)$.

而 $m(m-1)$是两个连续不为 0 的整数的乘积，但$(k-1)$和$(k+1)$或 1 和(k^2-1)不是两个连续整数，故 $m\neq 0$ 且 $m\neq 1$ 时，m^2-m+1 不是某整数的平方.

综上所述，满足条件的直角三角形不存在.

15·3 若三角形三边 a、b、c 均为正整数，其中 $a\leqslant b\leqslant c$，(1)若 $b=5$，则这样的三角形有几个？(2)若 $b=l$（l 是正整数），问这样的三角形又有几个？

（中国江苏省数学竞赛，1978 年）

[解] (1)∵ a、b、c 均为正整数且$a\leqslant b\leqslant c$，则当 $b=5$ 时，

有 $a=5$，$c=5,6,7,8,9$ 共 5 个三角形，

$a=4$，$c=5,6,7,8$， 共有 4 个三角形，

$a=3$，$c=5,6,7$， 共有 3 个三角形，

$a=2$，$c=5,6$， 共有 2 个三角形，

$a=1$，$c=5$， 共有 1 个三角形.

∵ $5+4+3+2+1=15$.

故当 $b=5$ 时，这样的三角形有 15 个.

(2)当 $b=l$ 时，

$a=l$，$c=l,l+1,\cdots,2l-1$. 共 l 个三角形，

$a=l-1$，$c=l,l+1,\cdots,2l-2$. 共 $l-1$ 个三角形，

$a=l-2$，$c=l,l+1,\cdots,2l-3$. 共 $l-2$ 个三角形，

……………………………

$a=1$，$c=l$， 只有一个三角形.

∵ $l+(l-1)+(l-2)+\cdots+2+1=\dfrac{l(l+1)}{2}$.

故当 $b=l$ 时，这样的三角形有 $\dfrac{l(l+1)}{2}$ 个.

15·4 若 a、b、c 为一三角形的三条边，则方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 的根是复共轭的.试证之.

（基辅数学奥林匹克，1939 年）

[证] 题设一元二次方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\ &=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)\\ &=[(b-c)^2-a^2][(b+c)^2-a^2]\\ &=(b-a-c)(b+a-c)(b+c-a)(b+c+a),\end{aligned}$$

∵ a、b、c 是△ABC 的三条边.

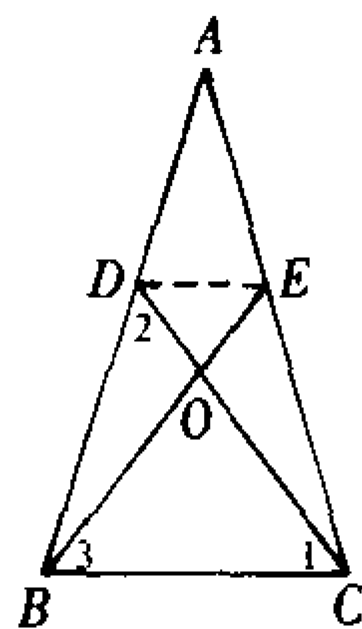
$$\therefore\quad \begin{cases} a+b>c,\\ b+c>a,\\ a+c>b.\end{cases}$$

从而 $\Delta<0$. 故所论的二次方程没有实根,因此为共轭复根.

15·5 在等腰△ABC 中,已知 $AB=AC=kBC$,这里 k 为大于 1 的自然数,点 D、E 依次在 AB、AC 上,且 $DB=BC=CE$,CD 与 BE 相交于 O. 求使 $\dfrac{OC}{BC}$ 为有理数的最小自然数 k.

(中国上海市数学竞赛,1991 年)

[解] 如图,连 DE,易知 $BCED$ 为等腰梯形.



又由题设知 $\angle 2=\angle 1=\angle 3$,

∴ $\triangle OBC\backsim\triangle BCD$,

从而 $OC\cdot CD=BC^2$. ①

又∵ $\dfrac{CO}{OD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AB}{AB-DB}=\dfrac{k}{k-1}$,

∴ $\dfrac{CO}{CD}=\dfrac{k}{2k-1}$. ②

①×②,得 $\dfrac{OC^2}{BC^2}=\dfrac{k}{2k-1}$,

∴ $\dfrac{OC}{BC}=\sqrt{\dfrac{k}{2k-1}}$.

因 $\sqrt{\dfrac{k}{2k-1}}$ 为有理数,且 k 与 $2k-1$ 互质,故 k 与 $2k-1$ 都是完全平方数.

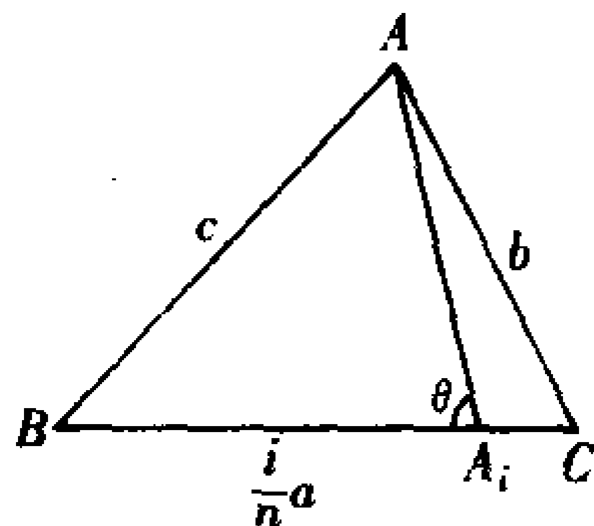
当 $k=4,9,16$ 时, $2k-1=7,17,31$ 都不是完全平方数.

当 $k=25$ 时, $2k-1=49$ 是完全平方数.

综上所述,$k=25$ 时是使 $\dfrac{OC}{BC}$ 为有理数的最小自然数.

15·6 $\triangle ABC$ 三边长为 a、b、c，将各边 n 等分，令各顶点到其对边上的 $n-1$ 个分点的距离平方的总和为 S. 求证：$\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$是一个有理数.

（第 3 届拉丁美洲地区数学奥林匹克，1988 年）



［证］ 如图，设 A_i 为 BC 边上从 B 算起的第 i 个分点，$\angle AA_iB=\theta$.

由余弦定理得

$$c^2=AA_i^2+\frac{i^2}{n^2}a^2-2AA_i\cdot\frac{i}{n}a\cos\theta, \qquad ①$$

$$b^2=AA_i^2+\frac{(n-i)^2}{n^2}a^2+2AA_i\cdot\frac{n-i}{n}a\cos\theta. \qquad ②$$

①×$(n-i)$+②×i 得 $\quad (n-i)c^2+ib^2=nAA_i^2+\dfrac{(n-i)i}{n}a^2$,

即 $\quad AA_i^2=\dfrac{i}{n}b^2+\dfrac{n-i}{n}c^2-\dfrac{(n-i)i}{n^2}a^2.$

同理，对 AB、CA 上第 i 个分点 B_i、C_i 分别有

$$BB_i^2=\frac{i}{n}c^2+\frac{n-i}{n}a^2-\frac{(n-i)i}{n^2}b^2,$$

$$CC_i^2=\frac{i}{n}a^2+\frac{n-i}{n}b^2-\frac{(n-i)i}{n^2}c^2.$$

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{n-1}(AA_i^2+BB_i^2+CC_i^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\\&=(a^2+b^2+c^2)\left[(n-1)-\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right]\\&=(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{(n-1)(5n-1)}{6n}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{S}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(n-1)(5n-1)}{6n}.$$

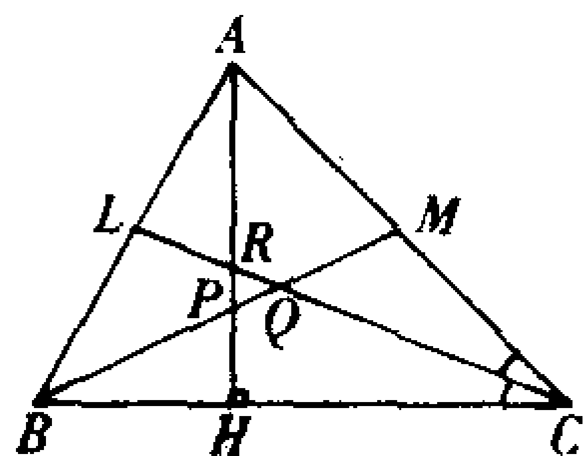
于是 $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ 是一个有理数.

15·7 给定不等边锐角三角形，过其中一顶点作高，过另一顶点作

中线,过第三个顶点作角的平分线.求证:如果这三条线相交构成一个三角形,则它不可能是等边三角形.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1981年)

[证] 设不等边锐角$\triangle ABC$的高AH,中线BM与角的平分线CL相交构成等边三角形.



线段AH与BM、BM与CL、CL与AH的交点依次用P、Q、R表示.

在$\triangle CHR$中,

$\because$ $\angle CHR=90^\circ$, $\angle CRH=60^\circ$,

$\therefore$ $\angle RCH=30^\circ$. 于是 $\angle ACB=60^\circ$.

在$\triangle CMQ$中, $\because$ $\angle QCM=\angle RCH=30^\circ$, $\angle MQC=60^\circ$.

($\angle BQC=60^\circ$是不可能的,否则$\angle ABC>\angle QBC=180^\circ-\angle BQC-\angle QCB=90^\circ$,从而$\angle ABC>90^\circ$,即$\triangle ABC$是钝角三角形矛盾).

于是 $\angle QMC=90^\circ$, $BM\perp AC$.

又因为BM是AC的中线,则 $\angle MBC=30^\circ$, $\angle AMB=30^\circ$,

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ABC=\angle BAC=60^\circ$.

即$\triangle ABC$是等边三角形,与已知矛盾.

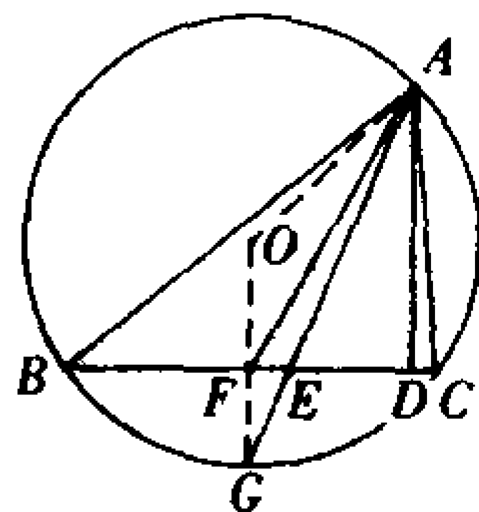
$\therefore$ $\triangle PQR$不是等边三角形.

15·8 在$\triangle ABC$中,BC边上的高$AD=12$,$\angle A$的平分线$AE=13$,设BC边上的中线$AF=m$,问m在什么范围内取值时,$\angle A$分别为锐角、直角、钝角.

(第1届中国中学生数学冬令营,1986年)

[解1] 我们先证明一个辅助命题:

命题 作题设$\triangle ABC$的外接圆O,延长AE交外接圆O于G,连FG,则$FG\perp BC$,且直线FG过圆心O,同时



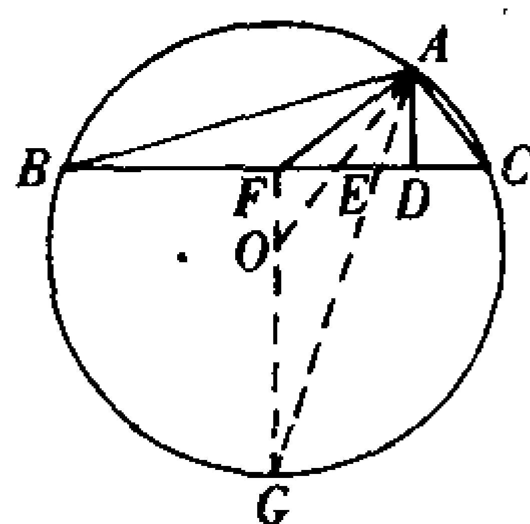
A为锐角时, $AF>OA>FG$;

A为直角时, $AF=OA=FG$;

A为钝角时, $AF<OA<FG$.

由 $\triangle ADE\backsim\triangle GFE$, 及 $DE=5$,

得 $\dfrac{FG}{AD}=\dfrac{EF}{DE}$, $\dfrac{FG}{12}=\dfrac{EF}{5}$.



$\therefore$ A 为锐角时，$\dfrac{m}{12}>\dfrac{FG}{12}=\dfrac{EF}{5}$.

即 $EF<\dfrac{5}{12}m$.

同理 A 为直角时，$EF=\dfrac{5}{12}m$，A 为钝角时，

$EF>\dfrac{5}{12}m$.

下面研究命题本身.

由勾股定理得 $EF=\sqrt{m^2-12^2}-5$.

$\therefore$ A 为锐角时，$\sqrt{m^2-12^2}-5<\dfrac{5}{12}m$.

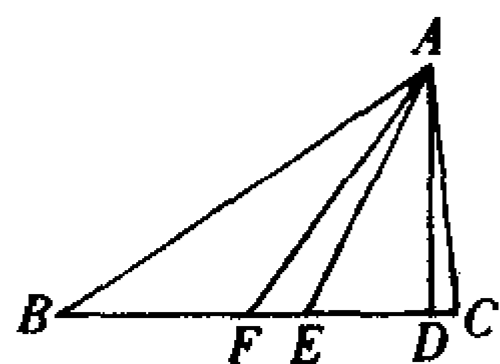
解得 $m<\dfrac{12\times13^2}{119}$.

另一方面有 $m>13$，$\therefore$ $13<m<\dfrac{12\times13^2}{119}$ 时,A 为锐角.

同理 $m=\dfrac{12\times13^2}{119}$ 时,A 为直角，$m>\dfrac{12\times13^2}{119}$ 时,A 为钝角.

[解 2] 首先由勾股定理得

$ED=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.



不论△ABC 怎样变化,直角△AED 总是固定的.

设 $\angle EAD=\alpha$，于是 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{5}{12}$.

又设 $\angle BAE=\angle CAE=\beta$,

则$\angle BAD=\beta+\alpha$,$\angle CAD=\beta-\alpha$.

从而 $BD=AD\cdot\mathrm{tg}(\beta+\alpha)=12\mathrm{tg}(\beta+\alpha)$.

且 $CD=AD\cdot\mathrm{tg}(\beta-\alpha)=12\mathrm{tg}(\beta-\alpha)$.

由 $BD=BF\pm FD$. $CD=CF\mp FD$ 及 $BF=CF$ 有

$$FD=\frac{1}{2}|BD-CD|=6|\mathrm{tg}(\beta+\alpha)-\mathrm{tg}(\beta-\alpha)|$$

$$=6\left|\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}-\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\right|$$

$$=6\left|\frac{2\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}\right|=5\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2\operatorname{tg}^2\beta}\qquad ㊟$$

下面分三种情况进行讨论：

(i)当 A 为锐角时，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$0<\operatorname{tg}^2\beta<1$.

由(＊)式　$5<FD<\frac{1440}{119}$.

∵　$m=AF=\sqrt{AD^2+FD^2}=\sqrt{144+FD^2}$,

∴　$\sqrt{144+5^2}<m<\sqrt{144+\frac{1440^2}{119^2}}$，即　$13<m<\frac{12\times13^2}{119}$;

(ii)当 A 为直角时，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\operatorname{tg}^2\beta=1$,

由(＊)式　$FD=\frac{5\times2}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$,

∴　$m=\sqrt{12^2+FD^2}=\frac{12\times13^2}{119}$;

(iii)当 A 为钝角时，$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$,

$$1<\operatorname{tg}^2\beta<\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}^2\alpha=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

由㊟式可得　$DF>\frac{12^2\times10}{119}$，从而　$m>\frac{12\times13^2}{119}$.

综上可有：

当 $13<m<\frac{12\times13^2}{119}$时，$A$ 为锐角；

当 $m=\frac{12\times13^2}{119}$时，$A$ 为直角；

当 $m>\frac{12\times13^2}{119}$时，$A$ 为钝角.

15·9　一个三角形三边之长为6、8、10，求证：仅仅存在一条直线同时平分这个三角形的面积和周长.

（第17届加拿大数学奥林匹克，1985年）

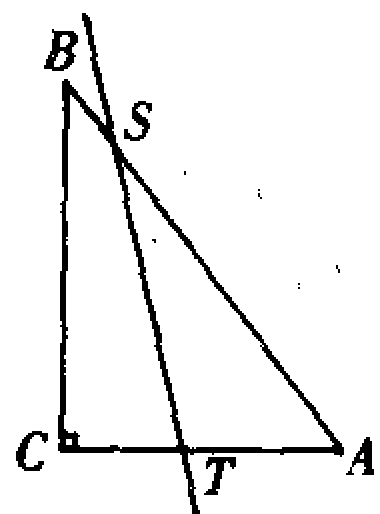
[证] 由 $6^2+8^2=10^2$ 可知此三角形为直角三角形，

设此三角形为$\triangle ABC$，且$\angle C$ 为直角，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$.

则$\triangle ABC$ 的周长为 24，面积也为 24.

显然，过$\triangle ABC$ 的任一顶点的直线不能满足题目的要求.

这是因为，任何平分面积的直线必定平分对边，这时，这样的直线自然不能平分原三角形的周长，所以，符合要求的直线只能是与三角形的二边相交的直线.



(1)设符合要求的直线与 AB 及 AC 相交，交点记为 S 与 T.

设 $CT=x$，$AT=6-x$，于是由

$$AS+AT=\frac{1}{2}\times 24=12$$

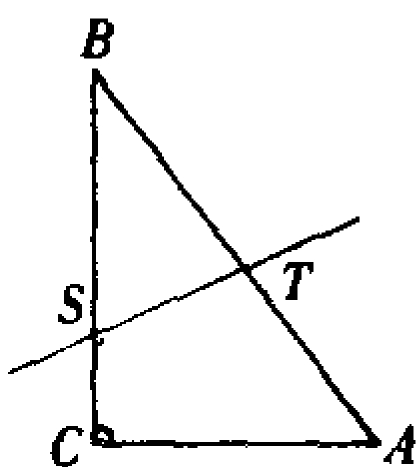
得 $AS=6+x$.

又因为这条直线也平分三角形的面积，那么

$$12=S_{\triangle AST}=\frac{1}{2}(6-x)(6+x)\sin A=\frac{1}{2}(36-x^2)\cdot\frac{8}{10}$$

$$=\frac{2}{5}(36-x^2).$$

得 $x=\sqrt{6}$.

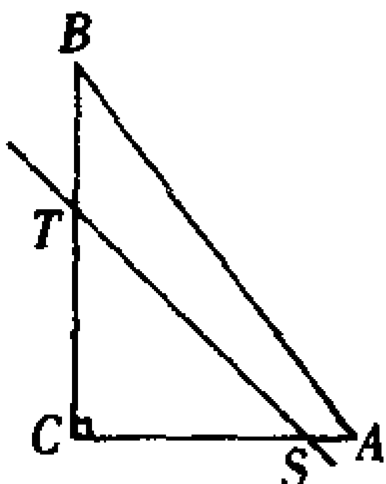


从而，令 $AT=6-\sqrt{6}$，$AS=6+\sqrt{6}$，得到 S 和 T 两点，直线 ST 满足要求.

(2)设符合要求的直线与 BC 及 BA 分别相交于 S 及 T.

设 $BS=6-x$，$BT=6+x$.

由平分面积的要求，应有



$$12=S_{\triangle BST}=\frac{1}{2}(6-x)(6+x)\sin B$$

$$=\frac{3}{10}=(36-x^2).$$

此方程无实数解.

因此，这样的直线不存在.

(3)设符合要求的直线与 CA 及 CB 分别相交于 S 及 T.

设 $CS=6-x$，$CT=6+x$.

由平分面积的要求，应有

$$12=S_{\triangle CST}=\frac{1}{2}(36-x^2),$$

解得　$x=2\sqrt{3}$.

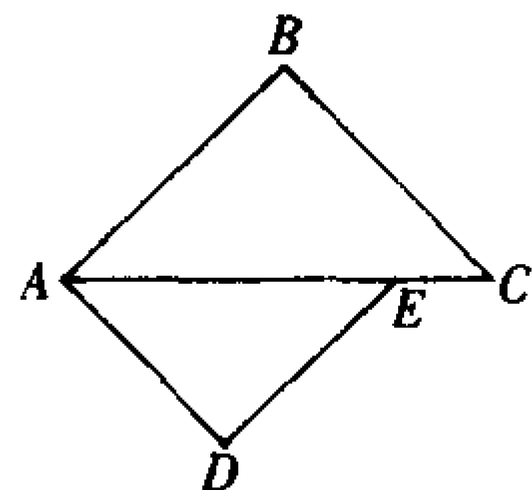
从而　$CS=6-2\sqrt{3}$，$CT=6+2\sqrt{3}$.

但　$CT=6+2\sqrt{3}>8=CB$.

所以这样的直线不存在.

由以上，仅有(1)中情况发生，即仅仅存在一条直线平分这个三角形的面积和周长.

15·10　如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形. 现固定 $\triangle ABC$，而将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转. 试证：不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.



(中国高中数学联赛，1987 年)

[证 1]　$\because$　$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 不全等，

$\therefore$　不论 $\triangle ADE$ 在平面上绕 A 点怎样旋转，BD、CE 必不为零，且 B、C、D、E 四点不共线.

过 A，C，E 及 CE 的中点 M 作 BD 的垂线，交 BD 或 BD 的延长线于 A'、C'、E' 及 M'(如图 1).

容易证得　$\triangle AA'B\cong\triangle BC'C$,

$\triangle AA'D\cong\triangle DE'E$.

$\therefore$　$CC'=BA'$，$EE'=DA'$,

　　$BC'=AA'=DE'$,

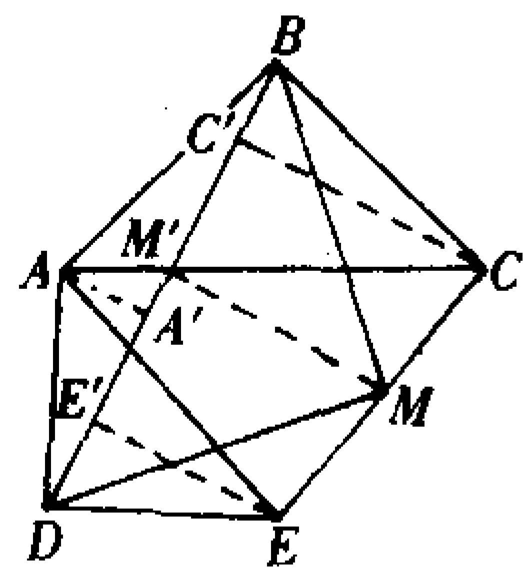


图 1

又　$MM'/\!/CC'/\!/EE'$，且 M 是 EC 的中点，

于是，当 C、E 位于 BD 同侧时(图 1)：

$$MM'=\frac{1}{2}(CC'+EE')=\frac{1}{2}(BA'+A'D)=\frac{1}{2}BD.$$

当 C、E 位于 BD 异侧时(图 2)：

$$MM'=\frac{1}{2}|CC'-EE'|=\frac{1}{2}|BA'-DA'|=\frac{1}{2}BD.$$

当 E 在 BD 上时，E 与 E' 重合，同样有

$$MM' = \frac{1}{2}BD.$$

而 C 不可能在 BD 上.

$MM' \neq 0$,否则将有$\triangle ABC \cong \triangle ADE$,与题设矛盾.

图 2

总之,M'是 BD 的中点,所以$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

[证 2] 设 A 为坐标原点,由 A 到 C 的方向为 x 轴正向,建立直角坐标系. $\triangle ADE$ 绕 A 点旋转后,设 x 轴正向按逆时针旋转到 AD 的角为 θ,则 AE 与 x 轴正向夹角为 $\theta + \frac{\pi}{4}$.

图 3

再设$\triangle ADE$ 的直角边长为 1,$\triangle ABC$ 的直角边长为 a,$a>1$,则 A、B、C、D、E 坐标分别为:

$$A(0,0),\ B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right),\ C(\sqrt{2}a,0),\ D(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$E\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

直线 CE 的方程是: $y = \dfrac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-a}(x-\sqrt{2}a)$,

即 $$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot x + \left[a-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]-y = \sqrt{2}a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right). \qquad ①$$

设点 M 在直线 CE 上,其坐标为(x,y),且$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形,则 M 点的坐标除了满足①式外,还必须满足以下两个方程:

一个是等腰条件:

$$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2 = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,$$

即 $$(\sqrt{2}a-2\cos\theta)x+(\sqrt{2}a-2\sin\theta)y = a^2-1 \qquad ②$$

②式就是线段 BD 的垂直平分线方程.

另一个是垂直条件：

$$\frac{y-\sin\theta}{x-\cos\theta}\cdot\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=-1, \qquad ③$$

解由①、②组成的关于 x、y 的二元一次方程，注意到

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) & a-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}a-2\cos\theta & \sqrt{2}a-2\sin\theta\end{vmatrix}=-\sqrt{2}a^2+4a\cos\theta-\sqrt{2},$$

当 $\Delta\neq0$ 时，由①，②组成的方程组有惟一解，那当 $\cos\theta\neq\frac{a^2+1}{2\sqrt{2}a}$ 时，方程组有惟一解.

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta),\\ y=\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta).\end{cases} \qquad ④$$

将上述 x、y 值代入③式左端得

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}=-1.$$

所以④满足③式，从而④即为所求满足题设条件的点的坐标. 此点恰为线段 CE 的中点.

当 $\cos\theta=\frac{a^2+1}{2\sqrt{2}a}$ 时，有

$$\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}a-2\cos\theta}=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}a-\frac{a^2+1}{\sqrt{2}a}}=\frac{\sqrt{2}a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{a^2-1}.$$

所以，BD 的垂直平分线与 CE 重合，取 CE 的中点 M，代入②，③，显然满足.

综上所述，可以对一切 $a>1$，无论 $\triangle ADE$ 绕 A 点怎样旋转，线段 CE 上总存在中点 M，使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

[证3]　把△ABC放置到复平面中，使A、B、C所对应的复数为

$$0,\ ae^{i\frac{\pi}{4}},\ \sqrt{2}a\ (a>1).$$

设AD的长为1，则D、E所对应的复数分别为$e^{i\theta}$，$\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

CE的中点M所对应的复数为

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

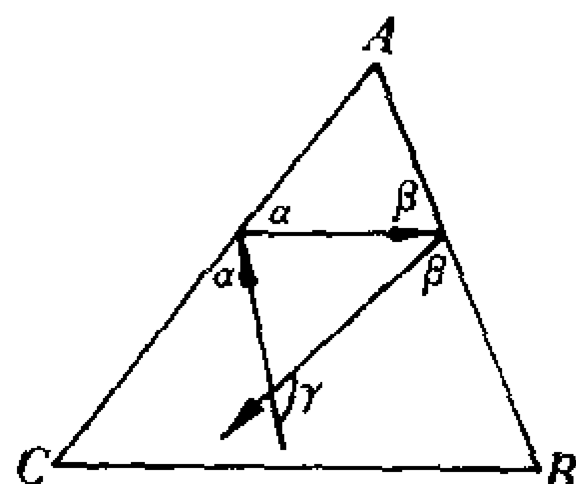
注意到
$$|BD|=|ae^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\theta}|$$
$$=\sqrt{\left(a\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\right)^2+\left(a\sin\frac{\pi}{4}-\sin\theta\right)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+1-\sqrt{2}a(\cos\theta+\sin\theta)}.$$
$$|BM|=\left|ae^{i\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right|,$$
$$|DM|=\left|e^{i\theta}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right|,$$

计算得知　$|BM|=|DM|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|BD|$.

故△BMD为等腰直角三角形.

15·11　台球桌的形状是三角形的，这三角形的内角之比是有理数.用台球杆撞击位于台球桌内某点的台球，台球按"反射角等于入射角"的规律由台球桌旁反射出来.求证：台球只可能沿有限多个方向运动(假定台球不落到台球桌外).

(波兰数学奥林匹克，1970年)



[证]　首先证明，当台球先由△ABC的AC边反射出来，再由AB边反射，则台球运动方向偏转的角度等于$2\angle BAC$.

如图，设台球入射AC边的方向与AC边成α角，入射AB边的方向与AB边成β角，偏转角度为γ，则

$$\gamma=(180°-2\alpha)+(180°-2\beta)=2(180°-\alpha-\beta)=2\angle BAC.$$

由于已知三角形ABC的内角之比是有理数，所以存在数λ及自然数r、s、t适合

$\angle BAC=\lambda r$, $\angle ABC=\lambda s$, $\angle ACB=\lambda t$.

于是由三角形内角和定理得 $\lambda(r+s+t)=\pi$.

记 $n=r+s+t$, 则 $\lambda=\dfrac{\pi}{n}$, n 为自然数.

若台球经过偶数次反射后,其运动方向偏转的角度等于$\dfrac{\pi}{n}$的偶数倍,即等于下列各数之一:

2λ, 4λ, 6λ, $\cdots$, $2n\lambda=2\pi$.

因此,台球经过偶数次反射后的运动方向有 n 种可能,类似地,台球经过奇数次反射后的运动方向也有 n 种可能.

于是,台球可能运动方向不超过 $2n$ 种.

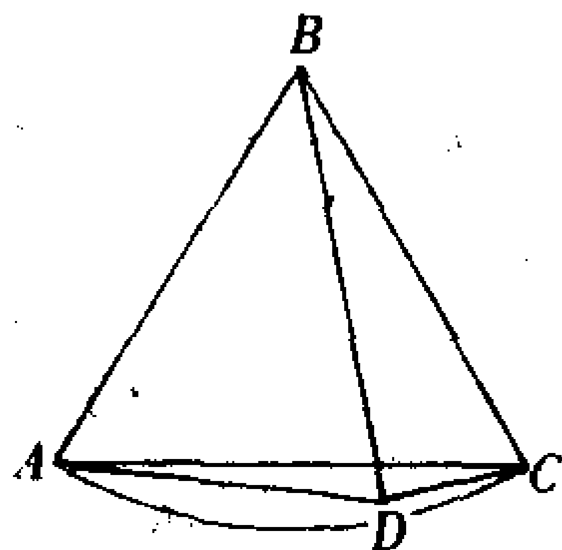
15·12 是否任意一个凸四边形都可用折线分成两部分,使得其中每一部分的直径都小于原四边形的直径?

(前民主德国数学奥林匹克,1982 年)

[解] 答案是否定的.

事实上,考虑一个凸四边形 $ABCD$,其中

$$AB=AC=BC=d,\quad BD<d.$$



这个四边形的直径为 d.

当用折线将该四边形分成两部分时,三个顶点 A、B、C 中至少有两个属于同一部分,于是这一部分的直径等于 d 而不是小于 d.

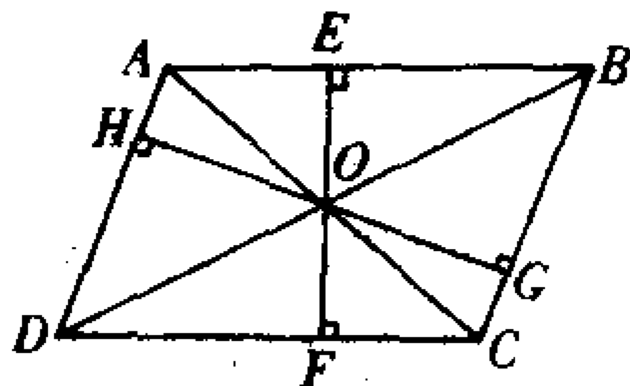
15·13 过平行四边形对角线的交点作各边(或其延长线)的垂线.求证这些垂足是某一平行四边形的顶点.

(基辅数学奥林匹克,1966 年)

[证] 在▱$ABCD$ 中,O 是 AC、BD 的交点.

过 O 点作 $EF\perp AB$ 于 E,交 CD 于 F;

过 O 点作 $GH\perp BC$ 于 G,交 DA 于 H.如图.

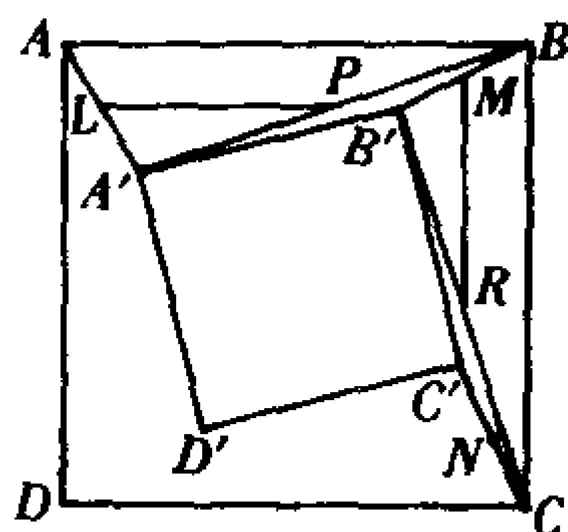


易证 $OE=OF$, $OG=OH$.

故 $EGFH$ 是平行四边形.

15·14 在正方形 $ABCD$ 内放一个正方形 $A'B'C'D'$. 求证:线段 AA'、BB'、CC'、DD'的中点也是某个正方形的顶点.

(基辅数学奥林匹克,1962 年)



[证] 设 L、M、N、P、R 分别是线段 AA'、BB'、CC'、$A'B$、$B'C$ 的中点.如图

$\because$ $LP \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}AB$, $MR \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}BC$,

$\therefore$ $LP=MR$, $LP\perp MR$.

同理 $PM=RN$, $PM\perp RN$.

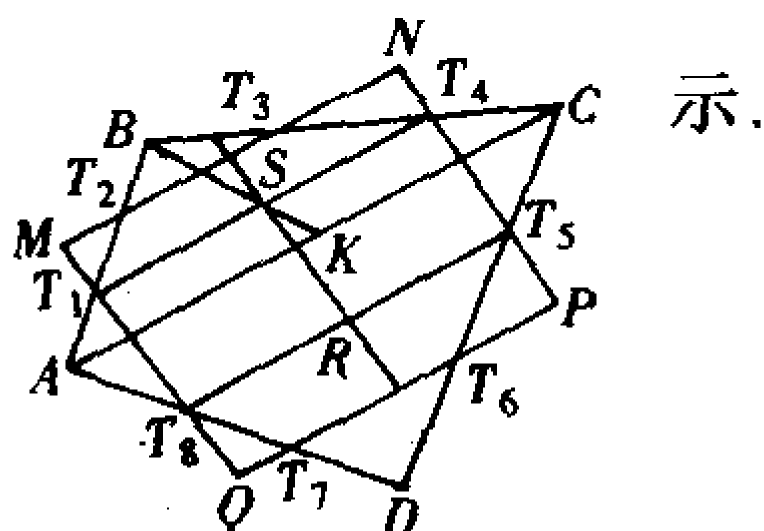
$\therefore$ $\angle LPM=\angle MRN$, $\triangle LPM\cong\triangle MRN$.

故 $LM=MN$, $LM\perp MN$.

同理可证其他.

15·15 将四边形 $ABCD$ 的每条边三等分,过边 AB 及 AD 上靠近顶点 A 的两个分点作一直线,类似地分别过靠近顶点 B、C、D 的两个分点各作一直线,这些直线交出一个新的四边形.求证:新四边形与原来的四边形 $ABCD$ 的重心互相重合.

(波兰数学奥林匹克,1957 年)



[证] 设新四边形为 $MNPQ$,各分点如图所示.

$\because$ $MN/\!/AC$, $PQ/\!/AC$,

$\therefore$ $MN/\!/PQ$.

同理 $MQ/\!/NP$.

因此 $MNPQ$ 为平行四边形.

我们首先求$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 的重心.

设 K 是 AC 的中点,则$\triangle ABC$ 的重心在中线 BK 上,设 BK 交 T_1T_4 于 S,

又 $\dfrac{BS}{BK}=\dfrac{2}{3}$, 则 S 为$\triangle ABC$ 的重心.

因为 $\triangle BT_1T_4\backsim\triangle BAC$,则 S 是 T_1T_4 的中点.

同理, $\triangle ADC$ 的重心 R 也是 T_5T_8 的中点.

由于如果一个图形由两个互不重迭的部分组成,那么这个图形的重心在这两部分重心的连线上.

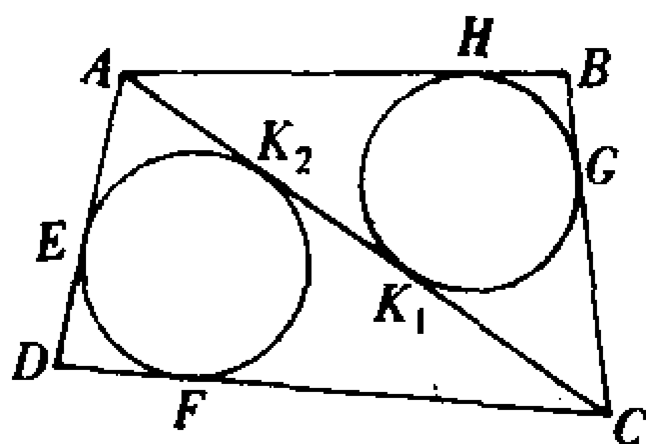
因此,四边形 $ABCD$ 的重心在 SR 上.即在平行四边形 $MNPQ$ 的边 MN 和 PQ 的中点连线上.同样,$ABCD$ 的重心也在平行四边形 $MNPQ$ 的边 MQ 和 NP 的中点连线上.

这两条中点连线的交点是平行四边形 $MNPQ$ 的中心,也就是它的重心,因而也是 $ABCD$ 的重心,于是四边形 $ABCD$ 与 $MNPQ$ 的重心重合.

15·16　设在凸四边形中有关系式 $AB+CD=BC+AD$ 成立.求证:$\triangle ABC$ 的内切圆与$\triangle ACD$ 的内切圆相切.

(第 15 届莫斯科数学奥林匹克,1952 年)

[证]　设$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的内切圆分别与对角线 AC 相切于K_1 点和 K_2 点.不失一般性,设 K_2 在 A、K_1 之间.



设其他切点分别为 E、F、G、H.(如图)

$\because\quad AK_2=AE,\quad AK_1=AH,$

$$\begin{aligned}\therefore\quad K_1K_2&=AH-AE=(AB-BH)-(AD-DE)\\&=AB-BH-AD+DE\\&=AB-AD-(BC-CG)+(CD-CF)\\&=AB+CD-AD-BC+CG-CF.\end{aligned}\quad ①$$

$\because\quad CK_1=CG,\quad CK_2=CF,$

$\therefore\quad K_1K_2=CF-CG.\quad ②$

①+②得　$2K_1K_2=(AB+CD)-(AD+BC)=0,$

$\therefore\quad K_1K_2=0.$

即 AC 是两圆的公切线,故两圆相切.

15·17　求证:至少存在两个互不全等的四边形,它们具有相同的面积和周长,且每一个都有外接圆.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证]　考虑第一个凸四边形 T_1,设 T_1 的周长为 $2p$,面积为 S,边长分别为 a、b、c、d,且 a、b、c 两两不等.并设 T_1 有外接圆.

因为 T_1 为圆内接四边形,所以

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

由算术-几何平均值不等式

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$
$$<\left(\frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}\right)^4=\frac{p^4}{16}\,.$$

第十五章　杂题

因此有 $S<\dfrac{p^2}{4}$.

下面我们证明还存在一个凸四边形 T_2,它内接于圆,其周长为 $2p$,面积为 S.但与 T_1 不同的是它有三条边相等.

设三条相等的边为 x,则另一边为 $2p-3x$.

考虑函数 $f(x)=\sqrt{(p-x)(p-x)(p-x)(3x-p)}$.

容易验证 $f\left(\dfrac{p}{3}\right)=0$, $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{p^2}{4}$.

由于 $S<\dfrac{p^2}{4}$, 及 $f(x)$是连续函数,则必存在一个 $x_0\in\left(\dfrac{p}{3},\dfrac{p}{2}\right)$,使 $f(x_0)=S$.

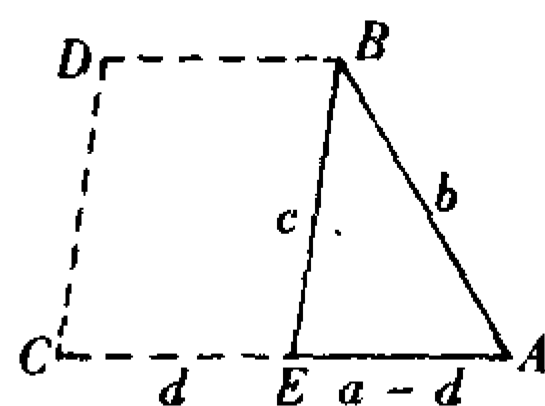
因此以 x_0 为三条边的边长,$2p-3x_0$ 为第四条边的四边形合乎题设要求.

由以上,T_1 与 T_2 不全等,且都有外接圆以及有相同的面积和周长.

15·18 求证:用任何四边形的4条边都可以作成一个梯形.

(第23届莫斯科数学奥林匹克,1960年)

[证] 设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$ 为四边形之边.



$\because\ b+c+d>a$,

$\therefore\ b+c>a-d.$ ①

$\because\ a+c>b+d$,

$\therefore\ (a-d)+c>b.$ ②

显然更有 $(a-d)+b>c$ ③

由①、②、③知可用 $a-d$、b、c 为边长作一个三角形,设为$\triangle ABE$.如图.

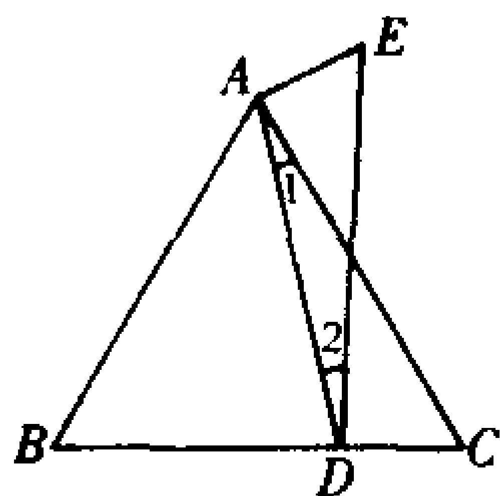
延长 AE 到C 使$EC=d$, 过点 B 作$BD \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} EC$, 连 CD.

则梯形 $ABCD$ 即为所求.

15·19 命题"一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形"对吗? 如果对,请证明;如果不对,请作一四边形满足已给条件,但它不是平行四边形,并证明你的作法.

(中国高中数学联赛,1979年)

[解] 命题不真. 反例如下:



任意作一等边△ABC,在底边 BC 上取 D,使得 $BD>DC$,由 D 作$\angle 2=\angle 1$(如图,取 $DE=AC$,连结 AE,△ADC≌△DAE 知,$\angle E=\angle C=\angle B$).

∵ $DE=AC=AB$,

∴ 四边形 $ABDE$ 满足已给条件,

但 $AE=DC<BD$,故四边形 $ABDE$ 不是平行四边形.

15·20 在平面上,给定两条封闭折线.每条都是奇数段线段组成.这些线段所在的直线是各不相重合的.且其中任意三条均不交于一点.试证 可在每条折线中各选取一线段.使得它们可以作为凸四边形的对边.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[证] 如果第一条折线中的一线段平行于第二条折线中的某线段,那么结论显然成立(以它们作为梯形或平行四边形的一组对边).现考虑不同折线的任二线段都不平行的情况.

我们称线段所在的直线为这条线段的生成直线.因为两条折线均有奇数段线段,所以一条折线的生成直线与另一折线的生成直线的交点数目 N 是奇数.

今用反证法.假设题断不成立.那么在每条折线上不论怎样各选一条线段,则它们的生成直线的交点将必在其中的一条线段上.因此,两折线的生成直线间的交点数目

$N=$(第一条折线与第二条折线的生成直线的交点数)+(第二条直线与第一条直线的生成直线的交点数)-(两条折线之间的交点数).

请注意,最后一项的交点数在头两个项的和式中被重复计算了一次,故减去.

我们对一条折线沿着某个方向移动,直至两条封闭折线之间没有交点为止.

在这个移动过程中,它们的交点数可能随之在某瞬间发生变化.即当一条折线的某个顶点 A 落到另一折线的某段线段 l 上时,关于移动的方向可这样选择:顶点在移动过程中不会与另一折线的顶点或自交点重合.

只需研究两种情况:当交于顶 A 的两条线段位于 l 的两侧(图 1)

或同侧(图 2).

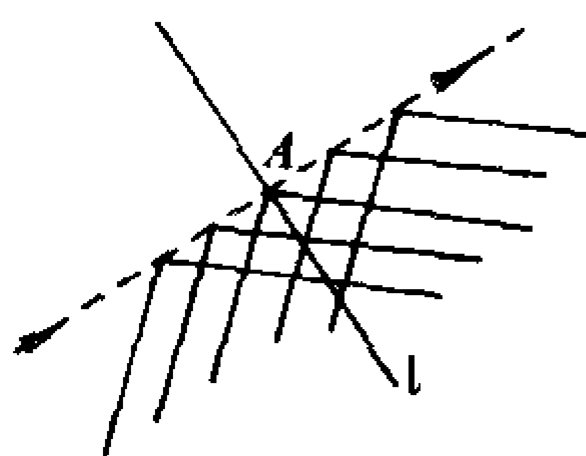


图 1

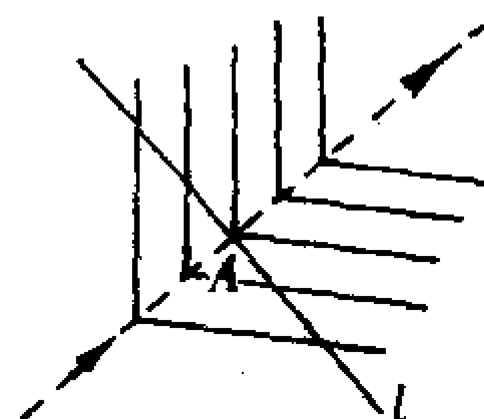


图 2

在第一种情况下,交点数不变;在第二种情况下,交点数增加或减少 2. 不论哪种情况,交点数的奇偶性不变. 当最终移到两折线不相交时,交点数为偶数(0).

类似地可以证明,一折线与另一折线的生成直线的交点数也是偶数,由此,N 是偶数,这与 N 是奇数相矛盾. 命题得证.

15·21　试证:在平面上不存在 A、B、C、D 四点,使得$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 都是锐角三角形.

(第 19 届莫斯科数学奥林匹克,1956 年)

[证]　分两种情况:

第一种情况,有一点在某三角形内,不失一般性,设 D 在$\triangle ABC$ 内.(如图 1)

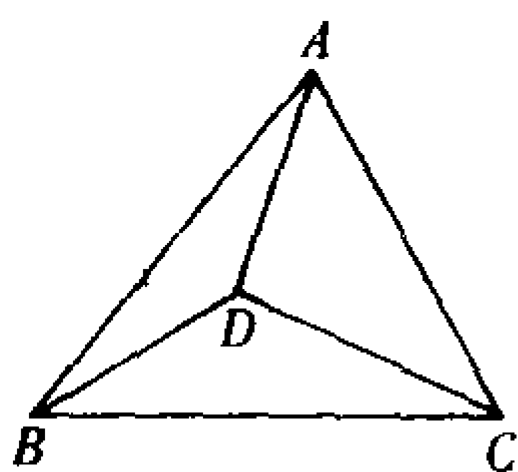


图 1

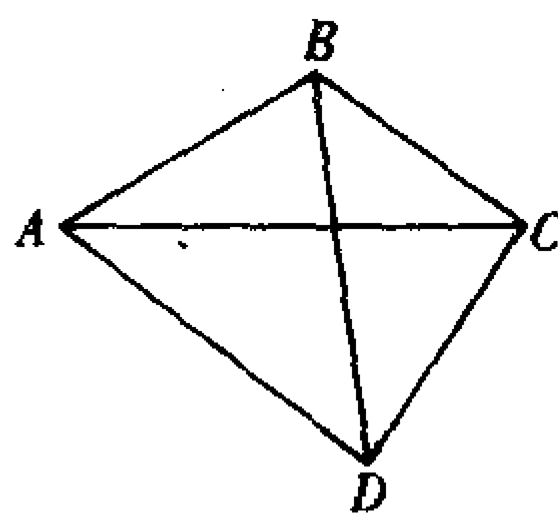


图 2

假若　$\angle ADB<90°$,　$\angle ADC<90°$,　$\angle BDC<90°$,

则　$360°=\angle ADB+\angle ADC+\angle BDC<270°$, 矛盾.

第二种情况,任何点均在其他三角形外,不失一般性,设 D 在$\triangle ABC$ 外,且设 A、B、C、D 组成凸四边形 $ABCD$.(如图 2)

假若　$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$、$\angle DAB$ 均小于 90°，

则　$360^\circ=\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<4\times90^\circ$，矛盾.

综上，命题得证.

15·22　已知：凸四边形 $ABCD$，它的所有的边和对角线的长度都是有理数，设 O 是对角线的交点. 求证：线段 AO 的长度也是有理数.

（第2届全苏数学奥林匹克，1968年）

［证］　设　$\angle ABC=\beta,\angle ABD=\beta_1,\angle DBC=\beta_2$.

由 AB、BC、AC 均为有理数，可知 $\cos\beta$ 为有理数，由 AB、BD、AD 为有理数，由余弦定理易知 $\cos\beta_1$ 是有理数.

由 BD、BC、CD 是有理数，可由余弦定理求得 $\cos\beta_2$ 为有理数.

而　$\cos\beta=\cos(\beta_1+\beta_2)=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$

∴　$\sin\beta_1\sin\beta_2$ 为有理数.

$\sin^2\beta_2=1-\cos^2\beta_2$ 是有理数.

∴　$\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\dfrac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2}$ 是有理数.

又　$\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot BO\sin\beta_1}{\frac{1}{2}CB\cdot BC\sin\beta_2}=\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=r$，

（其中 r 是有理数）

∴　$\dfrac{AO}{AO+OC}=\dfrac{r}{r+1}$.

即　$\dfrac{AO}{AC}=\dfrac{r}{r+1}$ 是有理数，又 AC 为有理数，

∴　$AO=\dfrac{AC\cdot r}{r+1}$为有理数.

15·23　在平面上引四条直线，使得其中每两条都相交，而任意三条不共点. 这些直线中的每一条都与其余的直线有三个交点. 于是分割出两条相邻接的线段. 试问：这样的8条线段的长度能否分别等于(1) 1,2,3,4,5,6,7,8?(2)不同的自然数值.

（第25届全苏数学奥林匹克，1991年）

［解］　(1)不可能. 如图1长度为1的线段既不能是$\triangle ABE$也不能是$\triangle EFD$的边. 这由三角形的两边之和大于第三边容易推出. 故只

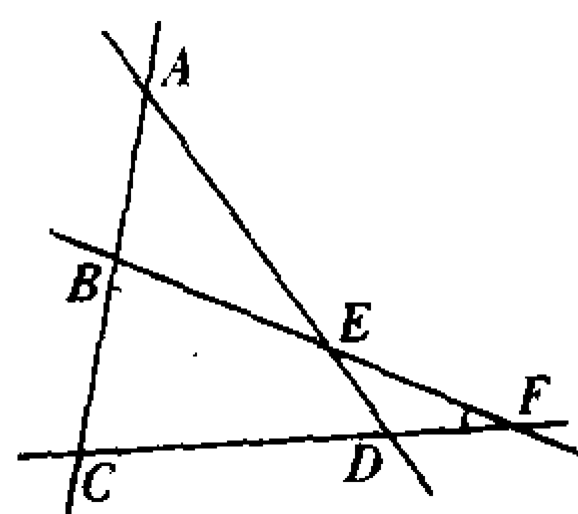


图 1

能 $BC=1$ 或 $CD=1$.

设 $BC=1$,则 $BF=CF$,因为$\triangle BCF$ 中两边之差要小于第三边.在等腰$\triangle BFC$ 中,由余弦定理知

$$\cos\angle F=1-\frac{1}{2BF^2}.$$

再用余弦定理于$\triangle EFD$,得

$$DE^2=EF^2+FD^2-2EF\cdot FD+EF\cdot\frac{FD}{BF^2},$$

$$\because \quad \frac{EF}{BF}<1,\quad \frac{FD}{BF}=\frac{FD}{FC}<1,$$

$$\therefore \quad \frac{EF\cdot FD}{BF^2}\text{不是整数},$$

从而 ED^2,进而 ED 也非整数,矛盾!

若 $CD=1$,同样推出矛盾.

所以(1)的情况是不存在的.

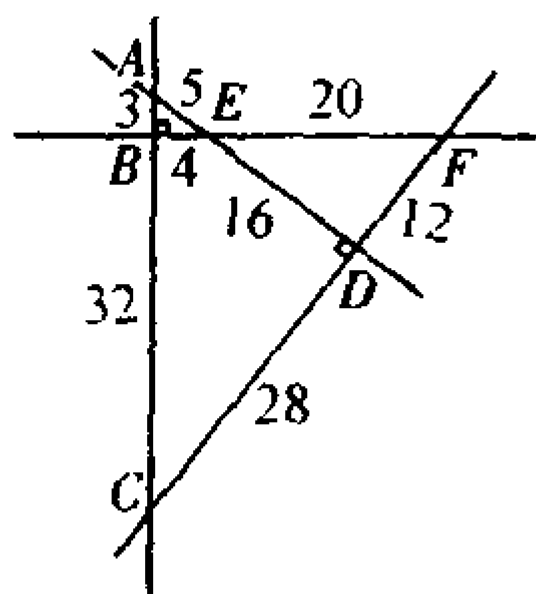
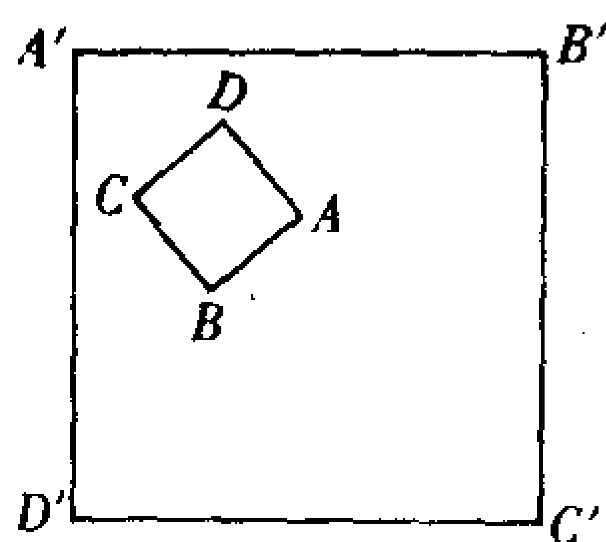


图 2

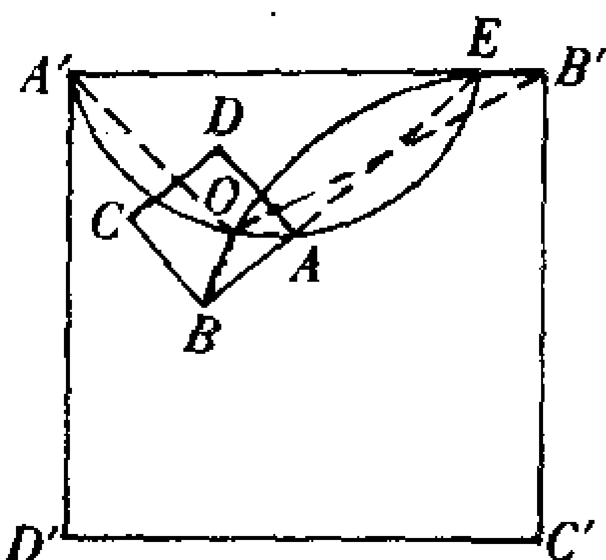
(2)的情况存在,如图 2,其中$\triangle ABE$、$\triangle FDE$、$\triangle FBC$、$\triangle ADC$ 都是边长比为 3∶4∶5的相似直角三角形.

15·24 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是一个国家的同一区域的正方形地图,但是按不同的比例尺画出,并且重叠如图所示.求证:小地图上只有一点 O 和大地图上表示同一地点 O'重合,再给出点 O 的欧几里得作图(用直尺和圆规).



(第 7 届美国数学奥林匹克,1978 年)

[解 1] 把 $ABCD$ 变成$A'B'C'D'$可以看作是旋转和位似变换的复合,其中旋转角是 AB 和 $A'B'$所成的角,位似比是$\dfrac{A'B'}{AB}$.



延长 BA 交$A'B'$于E.

过 A、A'、E 作圆,过 B、B'、E 作圆,两圆交于 O,我们证明 O 点即为小地图上和大地图上惟一重合的点.

连 $O'A$、OB'、OA、OB.

$\because$ $\angle OAB$ 是圆内接四边形 $A'OAE$ 的外角，

$\therefore$ $\angle OA'B' = \angle OAB$.

又$\because$ $\angle OB'A'$ 和$\angle DBA$ 都对$\overparen{OE}$，$\angle O'B'A = \angle OBA$.

于是 $\triangle A'OB' \backsim \triangle AOB$，有 $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB}$，

$\therefore$ O 是正方形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的位似中心.

由作图可知，O 是惟一的交点，于是 O 点即为惟一的重合点.

[解 2] 问题等价于：已知线段 AB 和 $A'B'$，能找到一点 O，使 $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$.

设 $\triangle OAB$ 与 $\triangle O'A'B'$ 的相似比为 λ.

首先我们证明：到 A、A' 两点的距离之比为定值 λ 的点的轨迹是一个圆.

设 P 是轨迹上的一点.

连 PA、PA'，则 $\dfrac{PA}{PA'} = \lambda$.

作 $\angle A'PA$ 的内角及外角平分线，分别交 $A'A$ 及其延长线 M，M'，则

$$\lambda = \frac{PA}{PA'} = \frac{AM}{MA'} = \frac{AM'}{M'A'}.$$

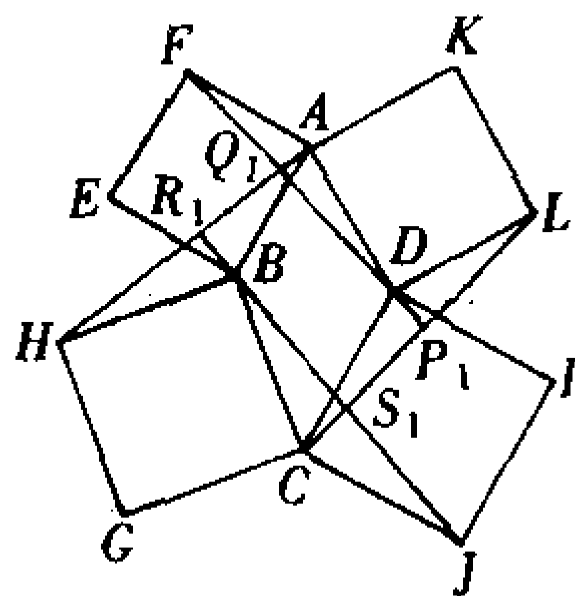
因此，$\angle M'PM = 90°$，而 M 及 M' 为分线段 AA' 为 λ 的定比分点，因此为定点. 所以 P 点的轨迹是以 $M'M$ 为直径的圆.

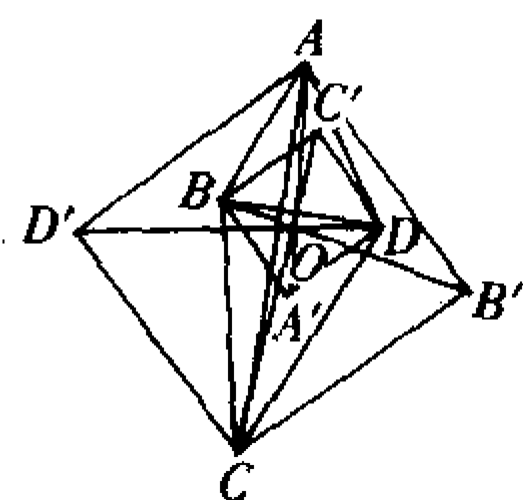
同样，以 N 及 N' 为分 BB' 为定比 λ 的定比分点，则到 B，B' 两点的距离之比为 λ 的轨迹为以 NN' 为直径的圆.

这两个圆的交点就是地图的重合点 O.

当 $AB /\!/ A'B$ 时，AA' 与 BB' 的交点，即为所求的重合点 O.

15·25 设四边形 $ABCD$ 满足条件 $AC \perp BD$. 在 $ABCD$ 之外作四个正方形 $ABEF$、$BCGH$、$CDIJ$、$DAKL$. 将四条直线 CL、DF、AH、BJ 的交点分别记为 P_1、Q_1、R_1、S_1（如图）. 将四条直线 AI、BK、CE、DG 的交点分别记作 P_2、Q_2、R_2、S_2（图略）. 求证 四边形 $P_1Q_1R_1S_1$ 与四边形 $P_2Q_2R_2S_2$ 全等. （第 33 届国际数学奥林匹克预选题，1992 年）



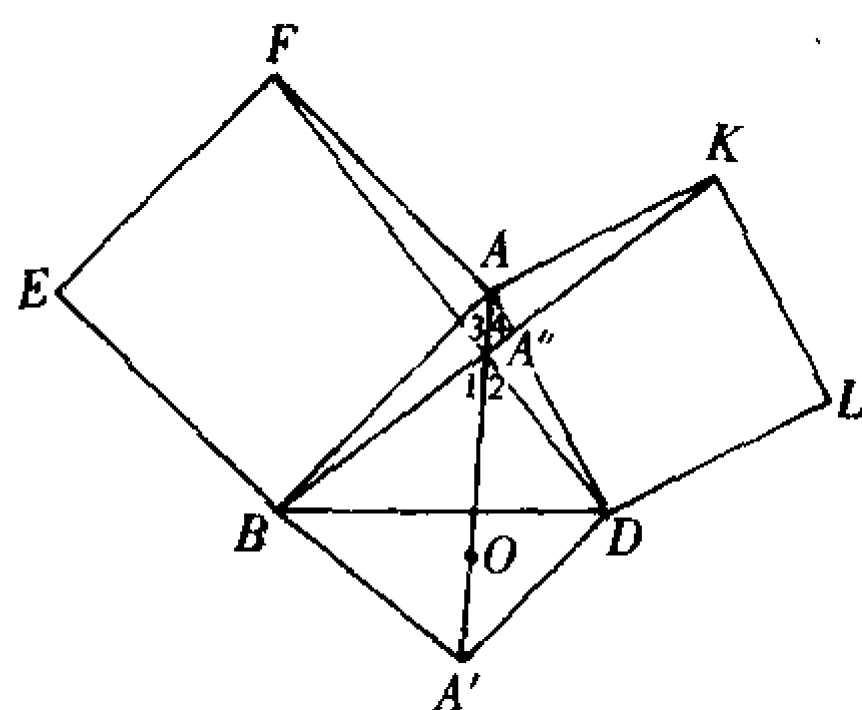


［证］ (1)以四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 作为对角线，作两个正方形 $AB'CD'$ 和 $BC'DA'$，由于 $BD\perp AC$，所以这两个正方形同位相似.

因而 AA'、BB'、CC'、DD' 相交于一点 O.

(2)如图，A'、O 的意义如(1).

记直线 DF 与 BK 交于 A''.



由于 $FA=AB$，　$AD=AK$，

$\angle FAD=\angle BAK$，

∴　$\triangle AFD\cong\triangle ABK$.

因而　$\angle AFA''=\angle ABA''$.

于是　A、F、B、A'' 四点共圆，从而 $\angle BA''F=\angle BAF=90°$.

即　$FD\perp BK$.

又　$\angle 3=\angle AA''F=\angle ABF=45°$.

同理　$\angle 4=45°$.

又　$\angle BA''D=\angle BA'D=90°$，　所以 B、A'、D、A'' 四点共圆，因而　$\angle 1=\angle 2=45°$.

于是　$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=45°$.

由此可知，点 A、A''、A' 共线，　且 $A''A'$ 是 $\angle BA''D$ 的平分线.

由(1)，O 在 AA' 之上，所以 O 到 DF、BK 的距离相等.

逆时针旋转 90°可将 DF 变为 BK.

类似地可以证明，在这一旋转下，可分别将 AH、BJ、CL 变为 CE、DG、AI.

因而　四边形 $P_1Q_1R_1S_1$ 变为四边形 $P_2Q_2R_2S_2$，亦即　四边形 $P_1Q_1R_1S_1\cong$ 四边形 $P_2Q_2R_2S_2$.

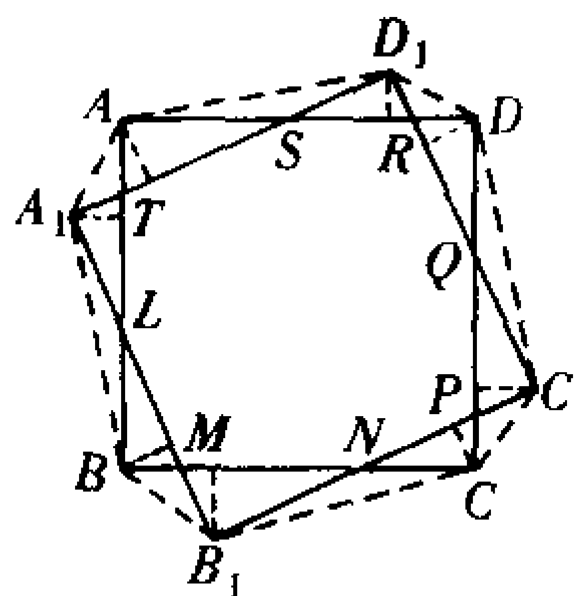
15·26　两个同样大小的正方形相重叠，其公共部分构成一个八边形. 一个正方形的边是蓝色的，另一个正方形的边是红色的. 证明：八边形中蓝色的边长之和等于它的红色边长之和.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［证］ 设水平位置放置的正方形 $ABCD$ 是红色的，斜置的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 是蓝色的.

容易发现直角三角形 ATS、BML、CPN、DRQ、A_1TL、B_1MN、

C_1PQ、D_1RS 都是相似的. 分别由这些直角三角形的直角顶点作斜边上的高,(斜边是红色的,对应的叫红高,斜边是蓝色的,对应的叫蓝高). 注意到相似三角形对应线段之比相等,以及利用等比定理,得



"红边"之和:红高之和 = "蓝边"之和:蓝高之和(此处"红边","蓝边"皆指八边形 $LMNPQRST$ 的边).

注意到 $S_{\triangle AA_1B}+S_{\triangle BB_1C}+S_{\triangle CC_1D}+S_{\triangle DD_1A}=S_{\triangle A_1BB_1}+S_{\triangle B_1CC_1}+S_{\triangle C_1DD_1}+S_{\triangle D_1AA_1}$.

其底都是正方形边长,所以,红高之和 = 蓝高之和.

因此 "红边"之和 = "蓝边"之和.

15·27 试证:不能把十个尺寸相同的正方形放在平面上,使得其中任何两个正方形均没有公共的内点而又有一个正方形触及其他各正方形的边.

(第 18 届美国普特南数学竞赛,1958 年)

[证] 设所给的尺寸相同的正方形为边长是 1 的单位正方形.

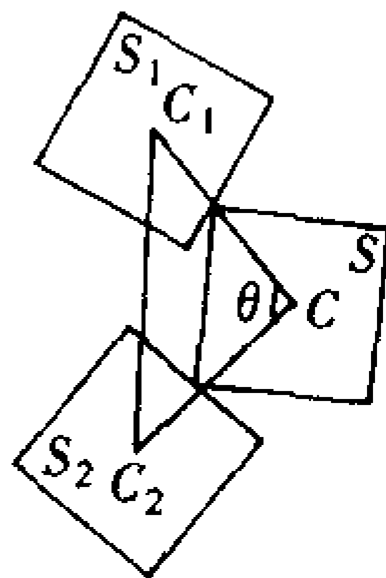
假设存在符合题设要求的十个单位正方形.

令 S、S_1、S_2 是三个互不重叠的正方形,其中心分别为 C、C_1、C_2,并且 S 触及 S_1 和 S_2.

令 $\theta=\angle C_1CC_2$, $a=C_1C$, $b=C_2C$, $c=C_1C_2$, 则 $1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$, $1\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$, $c\geqslant 1$.

由余弦定理可得

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leqslant\frac{a^2+b^2-1}{2ab}.$$



设 $f(a,b)=\dfrac{a^2+b^2-1}{2ab}$.

固定 b,可知 $f(a,b)$在 $1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$上是增函数,

同样固定 a, 可知 $f(a,b)$在 $1\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$上是增函数,于是

$$f(a,b)\leqslant f(\sqrt{2},\sqrt{2})=\frac{3}{4}.$$

即 $\cos\theta \leqslant \frac{3}{4}$， 有 $\theta \leqslant \arccos\frac{3}{4}$.

令 $\alpha = \arccos\frac{3}{4}$， 则

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3\times\frac{3}{4} = -\frac{9}{16} < -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}.$$

$\therefore$ $3\alpha > \frac{2\pi}{3}$， 故 $\angle C_1CC_1 = \theta \geqslant \alpha > \frac{2\pi}{9}$.

现在设 S、S_1、S_2、…、S_9 是互不重叠的正方形，并且 S 与其他每一个都触及，令 C、C_1、C_2、…、C_9 分别是它们的中心，则

$$\angle C_1CC_2 + \angle C_2CC_3 + \cdots + \angle C_9CC_1 = 2\pi,$$

而由前所证 $\angle C_iCC_{i+1}$ $(i \equiv 1, 2, \cdots, 9 \pmod 9)$ 均大于 $\frac{2\pi}{9}$，于是

$$\angle C_1CC_2 + \angle C_2CC_3 + \cdots + \angle C_9CC_1 > 2\pi.$$

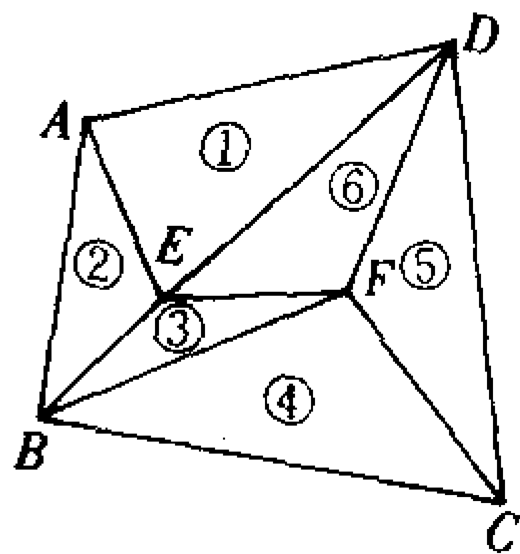
导致矛盾.

所以题设要求的放法不可能.

15·28 1000 个点是凸 1000 边形的顶点，在这个多边形内部还有 500 个点，这一共 15000 个点中的任何 3 点都不共线. 将上述凸 1000 边形分割成为一些三角形，所有 1500 个点都是这些三角形的顶点，此外这些三角形再无别的顶点. 在这样的分割之下，凸 1000 边形被分成了多少个三角形?

（第 16 届莫斯科数学奥林匹克，1953 年）

[解] 何谓分割? 例如下图



在凸四边形 $ABCD$ 内还有两个点 E、F，下面就是一种分割，共分成 6 个三角形：

$\triangle ADE$，$\triangle ABE$，$\triangle BEF$，

$\triangle BFC$，$\triangle FCD$，$\triangle DEF$.

凸多边形的三角形分割即所有三角形互不重叠，且所有三角形恰拼合成原凸多边形.

显然由 1000 边形所分成的所有 N 个三角形的内角之和为

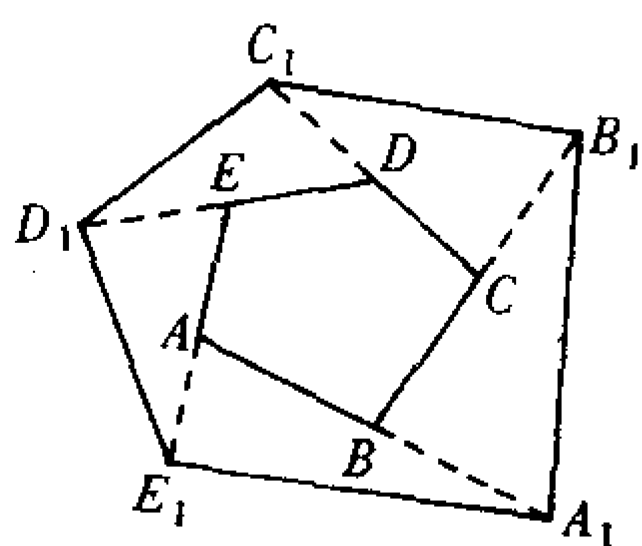
$$N\cdot 180^\circ = 998\cdot 180^\circ + 500\cdot 360^\circ,$$

故　$N=998+2\cdot500=1998.$

15·29　在平面上画一个凸五边形 $ABCDE$，作点 A 关于点 B 的对称点 A_1，再作点 B 关于点 C 的对称点 B_1，…，再作点 E 关于点 A 的对称点 E_1，然后将五边形 $ABCDE$ 抹去，求证：用圆规和直尺便可将五边形复原.

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

［证］　设 O 为平面上任意一点. 对于平面上任意点 X，记 $\overrightarrow{OX}=\vec{X}$. 由题目条件，有



$\vec{E}+\vec{E_1}=2\vec{A}$,

$\vec{A}+\vec{A_1}=2\vec{B}$,

$\vec{B}+\vec{B_1}=2\vec{C}$,

$\vec{C}+\vec{C_1}=2\vec{D}$,

$\vec{D}+\vec{D_1}=2\vec{E}$,

解这个方程组，得

$$\vec{A}=\frac{16\vec{E_1}}{31}+\frac{8\vec{D_1}}{31}+\frac{4\vec{C_1}}{31}+\frac{2\vec{B_1}}{31}+\frac{\vec{A_1}}{31}.$$

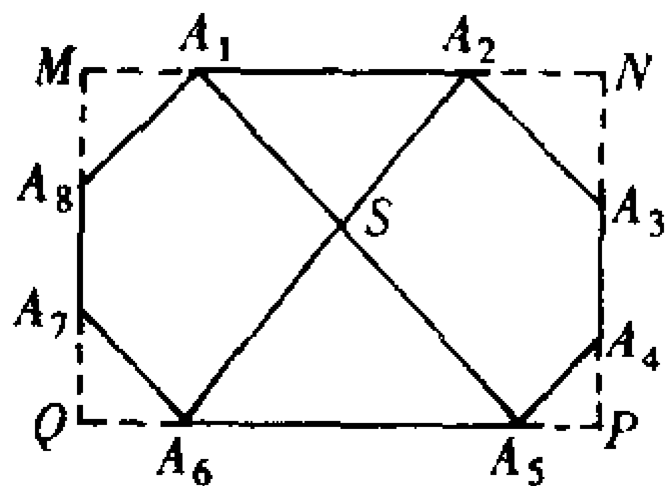
由方程组各式的轮换对称性，可得 $\vec{B}$、$\vec{C}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$.

根据这些式子便可用圆规和直尺作出点 A、B、C、D、E.

15·30　求证：如果一个八边形的所有内角都相等，且边长为有理数，那么它有对称中心.

（波兰数学奥林匹克，1968 年）

［证］　由于八边形的所有内角都相等，则它的每一个外角都等于 $\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$.



考虑八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的三条相邻边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4.

延长 A_1A_2 与 A_4A_3 交于 N，由于八边形的外角为 45°，则这两条直线互相垂直，即 $\angle A_2NA_3=90^\circ$（如图）.

同理可得　$\angle A_1MA_8=90^\circ, \angle A_7QA_6=90^\circ, \angle A_5PA_4=90^\circ$.

于是 $MNPQ$ 为矩形.

因为已知八边形的边长是有理数,可以证明 $A_1A_2=A_5A_6$.

为简单起见,令 $A_iA_{i+1}=a_i(i=1,2,\cdots,7), A_8A_1=a_8$.

$MN=MA_1+A_1A_2+A_2N=a_8\cos 45^\circ+a_1+a_2\cos 45^\circ$,

$PQ=PA_5+A_5A_6+A_6Q=a_4\cos 45^\circ+a_5+a_6\cos 45^\circ$,

因为 $MN=PQ$, 则

$$a_8\cos 45^\circ+a_1+a_2\cos 45^\circ=a_4\cos 45^\circ+a_5+a_6\cos 45^\circ,$$

$$a_1-a_5=(a_4+a_6-a_8-a_2)\cos 45^\circ.$$

由于数 a_1-a_5, $a_4+a_6-a_2-a_8$ 为有理数,而 $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$是有理数,因此当且仅当上式两边都为零时,等式成立,于是

$a_1-a_5=0$, 即　$a_1=a_5$, ∴　$A_1A_2=A_5A_6$.

于是,四边形 $A_1A_2A_5A_6$ 的两条边平行且相等,因而,这个四边形是平行四边形,其对角线 A_1A_5 和 A_2A_6 在其交点 S 互相平分.

同理可证　四边形 $A_2A_3A_6A_7$ 及 $A_3A_4A_7A_8$ 也是平行四边形,因此对角线 A_2A_6 与 A_3A_7 交于 A_3A_7 的中点 S, A_4A_8 的中点也与 A_3A_7 的中点 S 重合.

所以　八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 有对称中心 S.

15·31　在正 1990 边形 $A_1A_2\cdots A_{1990}$的各顶点上随意地填上数字 $1,2,3\cdots,497$ 中的一个,证明:必存在着四个顶点,满足条件:(1)以此四点为顶点的四边形为矩形;(2)此四边形相对二顶点上所填数字之和相等.

(中国安徽省合肥市数学竞赛,1990 年)

[证]　设正 1990 边形的中心为 O,则 A_1 与 A_{996}, A_2 与 A_{997}, $\cdots$, A_{995}与 A_{1990}分别关于 O 点成中心对称.这样的中心对称点共有 995 对,且以其中任二点对为顶点的四边形必为矩形.

又设这 995 对成中心对称的两顶点上所填数字之和为 M,则有

$$\alpha\leqslant M\leqslant 994\ (M\text{ 为自然数}),$$

即 M 最多只可能取 993 个不同的值.

由抽屉原则可知,至少存在着两对顶点:

A_i 与 A_{i+995}, A_j 与 A_{j+995}($1\leqslant i, j\leqslant 995, i\neq j$)在其上所填数字之

和相等.知(2)成立.

又显见,以 $A_i, A_j, A_{i+995}, A_{j+995}$为顶点的四边形为矩形,知(1)成立.

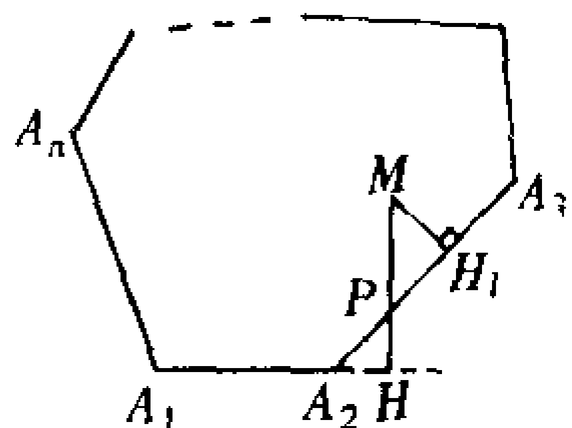
故命题为真.

15·32　在一个给定的凸多边形内任取一点 M,过 M 向该多边形的各边或延长线作垂线.证明:至少有一垂线和多边形的边相交而不和它的延长线相交.

(基辅数学奥林匹克,1952 年)

[证]　设 M 是凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内的任意一点.则多边形各边所在直线中一定有一条到点 M 的距离最短的直线.不失一般性,设此边为 A_1A_2.

作 $MH\perp A_1A_2$ 于 H 点.如果 H 在线段 A_1A_2 的延长线上,则 MH 与多边形的某一条边相交于 P 点.设此边为 A_2A_3.如图.



由于该多边形是凸多边形,H 在多边形外,

$\therefore\quad MP<MH$.

作 $MH_1\perp A_2A_3$ 于 H_1, $MH_1<MP<MH$.

与边 A_1A_2 的选取标准矛盾.

故　H 在边 A_1A_2 上.

15·33　在凸多边形中最多可能有几个锐角?

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

[解]　最多可能有 3 个锐角.

显然三角形、四边形均不可能有 4 个锐角.

当 $m\geqslant5$ 时,凸 n 边形可能有 3 个锐角,例如内角为 80°、80°、80°、150°、150°的五边形存在.

但不可能有 4 个或 4 个以上锐角.否则,设有 x 个锐角,其中 $x\geqslant4$.

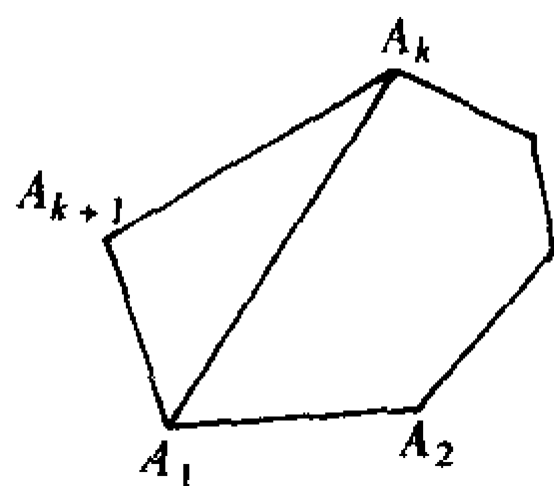
则此 x 个内角的邻补角——外角均大于 90°,其余 $n-x$ 个内角的邻补角——外角均大于 0°

故　外角总和为 $360°>x\times90°\geqslant4\times90°$. 矛盾.

15·34　试用数学归纳法证明凸 n 边形对角线的数为$\frac{n(n-3)}{2}$条.

(中国天津市数学竞赛,1957 年)

[证]　(1)三角形的对角线数为 0,



∴ 当 $n=3$ 时,显然命题成立.

(2)当 $n=k$ 时,命题成立.

(3)当 $n=k+1$ 时,作对角线 A_1A_k,则凸 $K+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 的对角线恰包括凸 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的所有的对角线、边 A_1A_k 以及由 A_{k+1} 点出发的 $k-2$ 条对角线,其总数为

$$\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{(k+1)(k-2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}.$$

由归纳法可得,凸 n 边形对角线数为 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条.

15·35 在平面上给定多边形的有限集合,这些多边形中每两个都有公共点.求证:存在与所有多边形都相交的一条直线.

(第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年)

[解] 在平面上取直线 l,所有多边形都向 l 投影,每个的投影都是一条线段,设有限个数 k 个多边形在 l 上的投影线段分别是

$$A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3、\cdots、A_kB_k.$$

因为每两个多边形都有公共点,所以每两个射影线段都有公共点.

设 A_1、A_2、A_3、$\cdots$、A_k 中最右面的点为 A; B_1、B_2、B_3、$\cdots$、B_k 中最左面的点为 B.

则线段 AB 为 A_1B_1、A_2B_2、$\cdots$、A_kB_k 的交集且非空,即 A_1B_1、A_2B_2、$\cdots$、A_kB_k 必存在公共点 P.过 P 作 l 的垂线 m,则 m 必与这 k 个多边形都相交.

15·36 一个多边形可按照下述变换得到一个新的多边形:沿着某条线段将多边形分割为两个部分,将其中一部分翻转到背面,然后再沿原先的截痕接到另一部分上(这两部分除了截痕上的点外,设有其他的公共点).可否通过有限次的这样的变换,将一个正方形变为六个三角形?

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[解] 结论不真.

事实上,每次经过这样的变换后,先后两个多边形的周长和面积均不改变,但是,如果一个三角形与正方形有相同的周长,那么三角形的面积必较小,证明如下:

周长为 p 的正方形面积为 $\frac{p^2}{16}$.

设周长为 p 的三角形一边长为 x，这边上的高将小于 $\frac{p-x}{2}$，于是三角形的面积小于

$$\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}(p-x)=\frac{p^2}{16}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{p}{2}\right)^2\leqslant\frac{p^2}{16}.$$

15·37 设有一凸 n 边形，我们把任意两个不相邻的顶点的联线叫做它的对角线. 假定没有任意三条对角线交于(凸 n 边形内部)一点，求这些对角线彼此(在凸 n 边形内部)的交点的总数.

(中国北京市数学竞赛，1963 年)

[解] 任取凸 n 边形的四个顶点就可以构成一个凸四边形. 这个凸四边形的两条对角线交于凸 n 边形的内部且交点只有一个.

由于这凸四边形的对角线也就是凸 n 边形的对角线，因此，每一个凸四边形都决定了凸 n 边形的对角线的一个交点.

反之，凸 n 边形的任何两条(在形内)相交的对角线的四个端点都构成一个这样的凸四边形.

因为已知的凸 n 边形的任意三条对角线都不交于一点，所以不同的这样凸四边形的对角线的交点是不能重合的.

即这种凸四边形与凸 n 边形对角线(在形内)的交点间可建立一一对应关系.

于是这个凸 n 边形的对角线(在形内)的交点的总数就等于所得到的凸四边形的个数，即

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

15·38 有若干点，其中每三点都不在一条直线上，连结这些点共得 m 条直线，试求这些点的数目，并研究 m 该是什么样的自然数才使得本题有意义.

(中国福建省福州市数学竞赛，1958 年)

[解] 设点的数目为 k. $\because$ 每三点都不共线，

$$\therefore\quad m=C_k^2=\frac{k(k-1)}{2},$$

解得　$k=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8m})$.(负根舍去)

要使本题有意义,必须且只需 $1+8m$ 为奇数的平方.

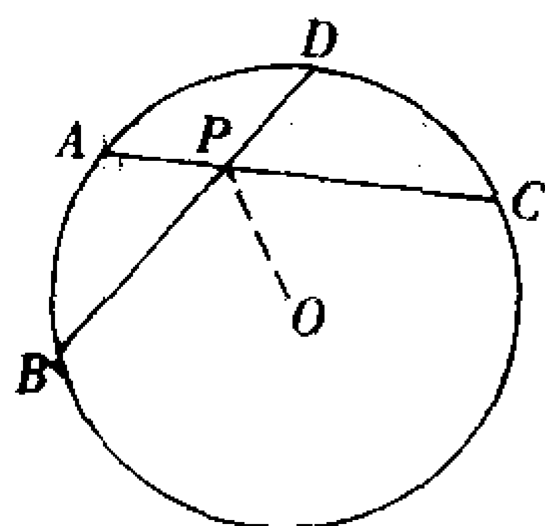
设　$1+8m=(2n+1)^2$,(n 为自然数)

求得　$m=\frac{1}{2}n(n+1)$,

故当 m 为形如$\frac{1}{2}n(n+1)$(n 为自然数)的自然数时,本题有意义.〔由 $m=C_k^2$ 也可知道 m 应为形为$\frac{1}{2}k(k-1)$的数($k\geqslant 2$).〕

15·39　圆内两条非直径的弦相交，试证:它们不能互相平分.

(中国高中数学联赛,1979 年)



[证]　如图,设 AC、BD 是圆 O 内的不是直径的两弦,二者相交于 P.

下面证明 AC、BD 不能互相平分.

用反证法.假若 P 是 AC 和 BD 的中点,连结 OP,则 $OP\perp AC$,$OP\perp BD$(圆心与弦的中点的连线垂直于弦)得出矛盾(因为一条直线不能同时垂直于两条相交的直线).

所以 P 不能同时是 AC、BD 的中点.

15·40　已知:$\triangle ABC$,过某点 P(非顶点)引直线 PA、PB、PC,分别交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1、B_1、C_1(它们均不与$\triangle ABC$ 的顶点重合),使得$\triangle A_1B_1C_1$ 全等于$\triangle ABC$.求证:对每一个$\triangle ABC$,具有上述性质的点 P 不多于 8 个.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证]　由题设要求知,P 不能在直线 AB、BC、CA 以及$\triangle ABC$ 的外接圆上.

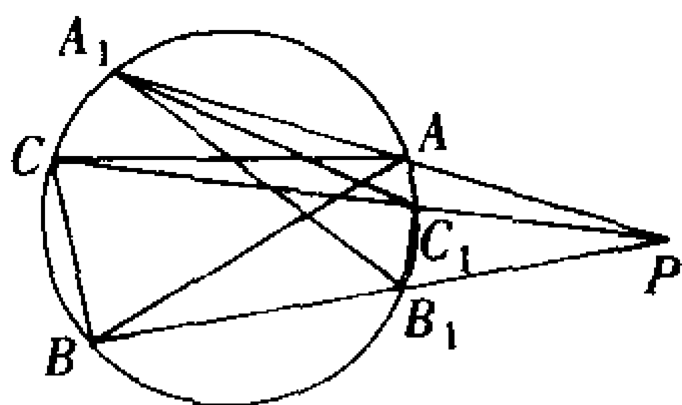


图 1

(1)点 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆之外,那么

$$\angle APB=\left|\frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}-\frac{\overset{\frown}{A_1C_1B_1}}{2}\right|=|\angle C-\angle C_1|.$$

在图 1 中,A、B、C 的排列是可能情况之一.

类似地有　$\angle BPC=|\angle A-\angle A_1|$，$\angle CPA=|\angle B-\angle B_1|$，

$\because$　$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$，$\therefore$　各内角必须对应相等.

但$\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPA$ 均不为0，所以只有两种情况：

①$\angle A_1=\angle B_1$，$\angle B_1=\angle C_1$，$\angle C_1=\angle A$，

②$\angle A_1=\angle C$，$\angle B_1=\angle A$，$\angle C_1=\angle B$.

在这两种情况下，满足条件的点 P 都不超过1个，因此，在外接圆外，满足条件的点不超过2个.

(2)今设点 P 在$\triangle ABC$ 外接圆内，我们规定：$\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPA$ 是指分别不包含 PC、PA、PB 的角.

在关于角的基本关系式的证明中，为确定起见，认定点 P 在$\angle BAC$ 内部. 这时又可分点 P 在$\triangle ABC$ 之内和之外两种情况(图2、图3).

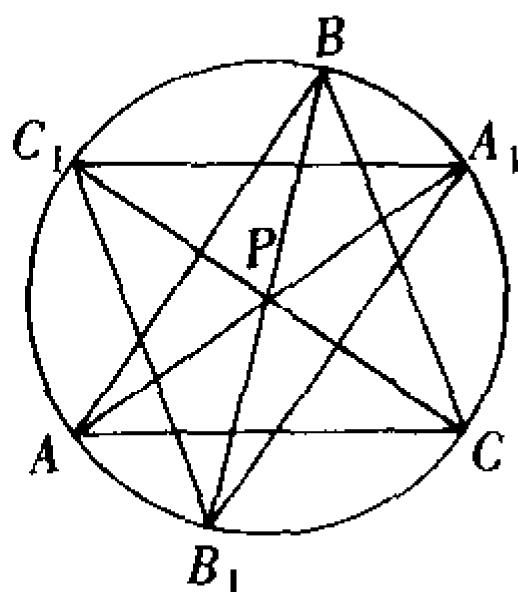


图2

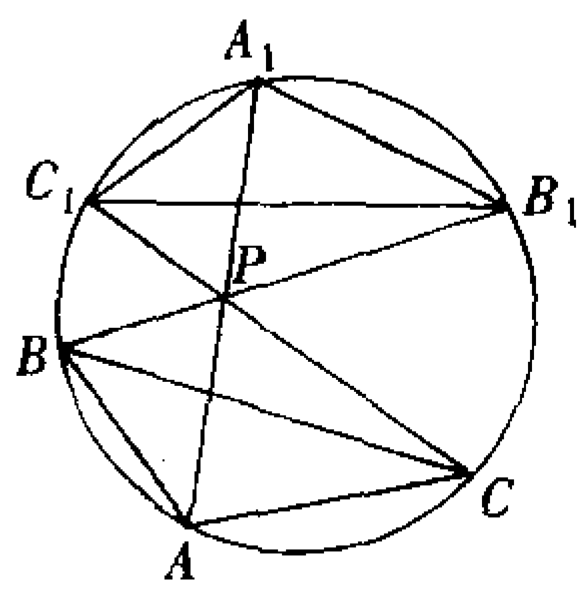


图3

不过，在这两种情况下都有

$\angle CPA=\angle AC_1C+\angle A_1AC_1=\angle B+\angle B_1$.

类似地有　$\angle APB=\angle C+\angle C_1$.

因此　$\angle BPC=2\pi-\angle APB-\angle CPA$

$=(\pi-\angle B-\angle C)+(\pi-\angle B_1-\angle C_1)$

$=\angle A+\angle A_1$.

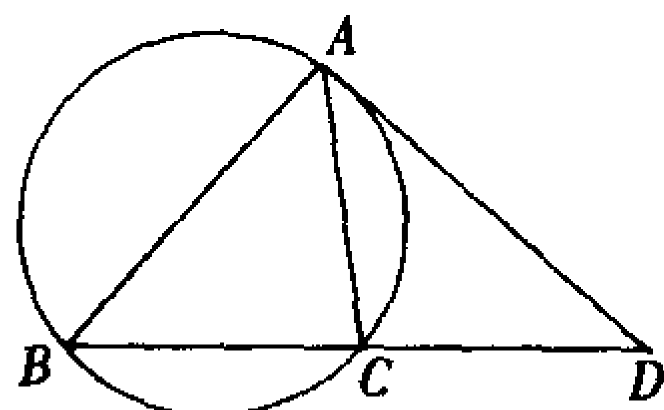
如果点 P 满足条件，那么$\angle A_1$、$\angle B_1$、$\angle C_1$ 就是分别对应于 A、B、C 的一种排列顺序，A、B、C 有6种排列方式，相应地$\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPA$ 也可能有6种不同情况，对每种情况，可以检验满足条件的点 P 都不多于一个.

这样，在外接圆内满足条件的点不超过6个.

综上满足题设条件的点 P 不超过 8 个.

15·41 设$\triangle ABC$ 的各条边长均为自然数,且 AB 和 AC 互质,$\triangle ABC$ 的外接圆过 A 点的切线交 BC 的延长线于 D. 证明:AD 和 CD 都是有理数但不是整数.

(澳大利亚数学奥林匹克,1994 年)



[证] 设 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

$\because$ $\triangle ADC \backsim \triangle BDA$,

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BD}{AD}$,

即 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD+a}{AD}$.

从中可解得 $AD=\dfrac{abc}{c^2-b^2}$, $CD=\dfrac{ab^2}{c^2-b^2}$.

AD 和 CD 均为有理数.

因为 $(b,c)=1$, 故 $(b,c\pm b)=1$, $(c,c\pm b)=1$.

于是 $(b,c^2-b^2)=1$, $(c,c^2-b^2)=1$, $(bc,c^2-b^2)=1$.

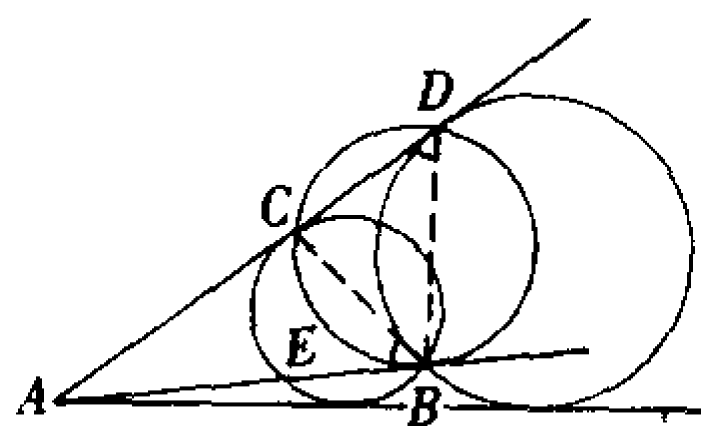
又 $a<b+c$, 故 $a<c^2-b^2$, 从而 $c^2-b^2 \nmid abc$.

即 AD 不是整数.

同理可证 CD 也不是整数.

15·42 已知:内切于$\angle A$ 的两圆相交.其中一个交点为 B、C、D 分别是两圆与$\angle A$ 一边的切点.求证:直线 AB 切过点 B、C、D 的圆.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)



[证] 为确定起见,设 C 在 A、D 之间,由所给两圆关于 A 点位似,可知$\overset{\frown}{CE}$和$\overset{\frown}{DB}$也是位似的,因而它们的量数也相等(如图).

于是$\angle CBE=\angle CDB$,因为它们分别是圆周角和弦切角,各等于所对或所含弧的量数的一半.

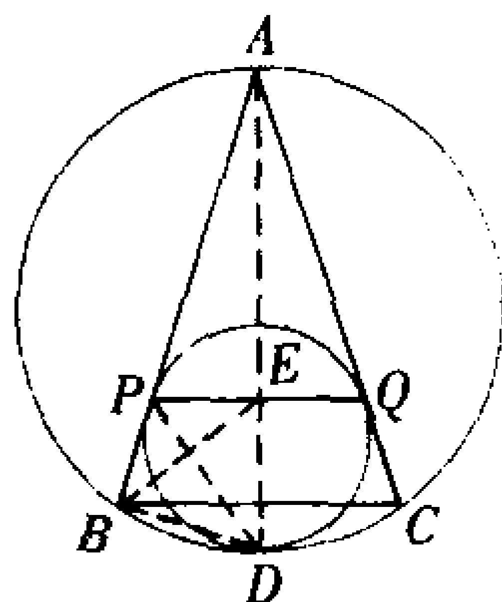
由于$\angle CDB$等于通过 B、C、D 的圆上$\overset{\frown}{CB}$量数的一半,从而$\angle CBE$ 也等于$\overset{\frown}{CB}$量数的一半,所以直线与该圆的切线重合,即 AB 切过点 B、C、D 的圆.

15·43 在$\triangle ABC$ 中,边 $AB=AC$,有一个圆内切于$\triangle ABC$ 的外

接圆，并且与 AB、AC 分别相切于 P、Q. 求证：P、Q 两点连线的中点是$\triangle ABC$ 的内切圆圆心.

（第 20 届国际数学奥林匹克，1978 年）

[证] 如图，设 D 是两圆的切点，E 是 PQ 的中点，连结 AD、BE、PD、BD.



由于$\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 AD 是$\triangle ABC$ 外接圆的直径.

又因为 AB、AC 是圆的切线，所以 $AP=AQ$.

因此，E 点一定在 AD 上，并且 AE 平分$\angle A$，$AE\perp PQ$.

于是$\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{DQ}$. $\therefore\ \angle BPD=\angle EPD$.

又因为 PD 是公共边，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle BPD\cong\text{Rt}\triangle EPD$，则 $PB=PE$，$\angle PBE=\angle PEB$.

又$\because$ $AD\perp BC$，$AD\perp PQ$.

$\therefore$ $BC/\!/PQ$，$\angle PEB=\angle EBC$.

于是有 $\angle PBE=\angle EBC$.

即 BE 平分$\angle ABC$，所以 E 点是$\triangle ABC$ 的内心.

15·44 D、E、F 分别在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上，并且$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}$. 求证：$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 有公共的重心.

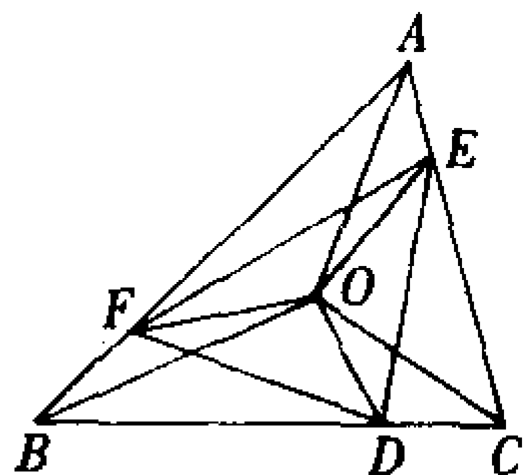
（中国江苏省南京市数学竞赛，1957 年）

[证 1] 设 O 为$\triangle ABC$ 的重心，

令 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=\lambda$，

则 $\dfrac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}}=\dfrac{S_{\triangle COE}}{S_{\triangle COA}}=\dfrac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，

$\dfrac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle BOC}}=\dfrac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle COA}}=\dfrac{1}{1+\lambda}$



但 O 为$\triangle ABC$ 的重心，$\therefore$ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COA}$，

于是 $S_{\triangle BOD}=S_{\triangle COE}=S_{\triangle AOF}$，

且 $S_{\triangle BOF}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOE}$.

但 $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$, 及 $\dfrac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$,

又 $\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$,

∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BFD}=S_{\triangle CDE}$.

而 $S_{\triangle EOF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle AOE}-S_{\triangle AEF}$,

$S_{\triangle DOF}=S_{\triangle BOD}+S_{\triangle BOF}-S_{\triangle BDF}$,

$S_{\triangle DOE}=S_{\triangle COE}+S_{\triangle DOC}-S_{\triangle DCE}$,

∵ $S_{\triangle EOF}=S_{\triangle DOF}=S_{\triangle DOE}$,

故 O 也是 $\triangle DEF$ 的重心.

[证 2] 设 A、B、C 三点的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3),则 D、E、F 三点的坐标分别为

$$\left(\frac{x_2+\lambda x_3}{1+\lambda},\frac{y_2+\lambda y_3}{1+\lambda}\right),\left(\frac{x_3+\lambda x_1}{1+\lambda},\frac{y_3+\lambda y_1}{1+\lambda}\right),\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right).$$

$\triangle ABC$ 重心 O 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$,

$\triangle DEF$ 的重心 O' 的坐标为

$$\left(\frac{\frac{x_2+\lambda x_3}{1+\lambda}+\frac{x_3+\lambda x_1}{1+\lambda}+\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}}{3},\frac{\frac{y_2+\lambda y_3}{1+\lambda}+\frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}+\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}{3}\right),$$

即 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 有公共的重心.

15·45 若 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 相似,它们的顶点按所给次序对应,且 X 在 BC 上,Y 在 AC 上,Z 在 AB 上.求证:$\triangle XYZ$ 的垂心就是 $\triangle ABC$ 的外心.

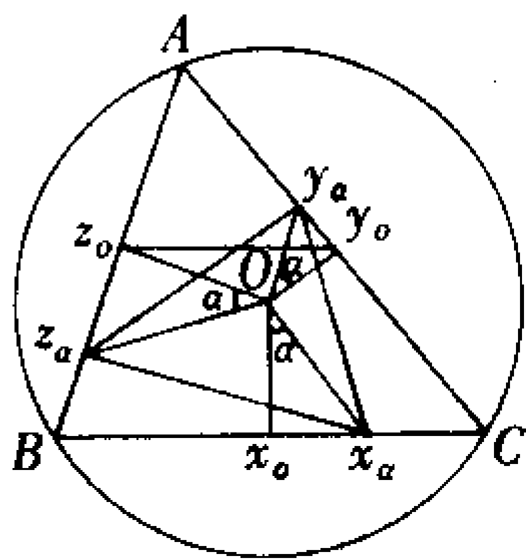
(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证] 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,X_0、Y_0、Z_0 分别是 BC、CA、AB 边的中点,因为

$OX_0\perp BC$, $Y_0Z_0/\!/BC$, $OX_0\perp Y_0Z_0$.

从而,OX_0,是 $\triangle X_0Y_0Z_0$ 的一条边的垂线,同理,OY_0、OZ_0 是

$\triangle X_0Y_0Z_0$ 另外两条边的垂线.



故　O 是$\triangle X_0Y_0Z_0$ 的垂心.

以 O 为旋转中心,依逆时针方向将$\triangle X_0Y_0Z_0$ 旋转一个角 α,这儿 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

然后,再适当地按所给角 α 放大这一三角形,得到$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$,使得 X_α、Y_α、Z_α 分别在 BC、CA、AB 上,显然

$$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha\backsim\triangle X_0Y_0Z_0\backsim\triangle ABC.$$

且$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 的垂心仍是 O,这是因为$\triangle X_0Y_0Z_0$ 的旋转与放大中心就是它的垂心.

下面我们来证明,题中的$\triangle XYZ$ 必能通过适当选择 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,使它与某个$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 重合.

不失一般性,设 B 和 C 为锐角,显然,$YZ\perp BC$ 是不可能的.因此,对于适当的 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,必有 $YZ/\!/Y_\alpha Z_\alpha$.

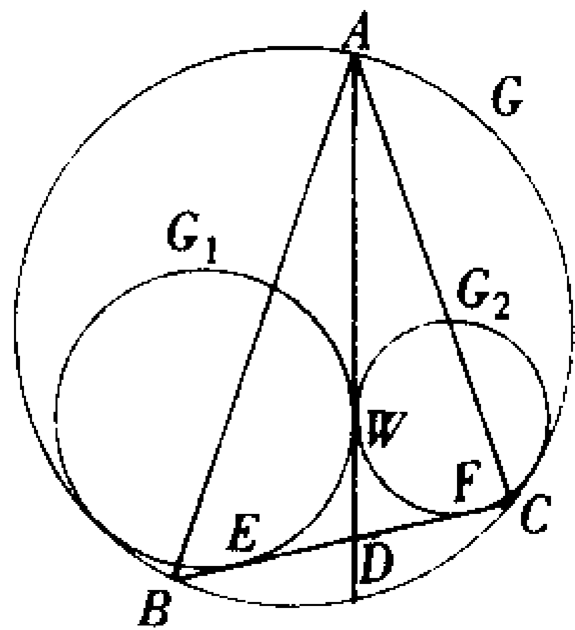
但由于$\triangle XYZ$ 与$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 相似且同向,所以 $YZ/\!/Y_\alpha Z_\alpha$,意味着$\triangle XYZ$ 是$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 关于 A 点的一个位似放大.

若放大系数不等于 1,则 X 点就不在线段 BC 上,因此,放大系数必须为 1,即$\triangle XYZ$ 与$\triangle X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 重合.

15·46　圆 G、G_1、G_2 的关系如下:G_1 和 G_2 外切于点 W,而这两个圆同时内切于 G,点 A、B、C 分布在 G 上,直线 BC 是圆 G_1 和 G_2 的外公切线,WA 是它们的内公切线,且 W 和 A 在 BC 的同侧.试证:W 是$\triangle ABC$ 的内切圆圆心.

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

[证]　设 AW 与 BC 的交点为 D,圆 G_1、G_2 与 BC 的切点分别为 E、F,并设各线段之长为



$$BE=x,\ DF=y,\ BD=\beta,\ CD=\gamma,$$

$AD=d$.

于是有　$DE=\beta-x$,$DF=\gamma-y$.

$\because$　$DE=DW=DF$,$\therefore$　$\beta-x=\gamma-y$,

$$AW=d-\beta+x=d-\gamma+y.$$

第十五章　杂题

用(x,r)表示以 x 为圆心，以 r 为半径的圆，并把点看作 $r=0$ 的圆.

考察四个圆(A,O)，$G(B,O)$，(C,O). 这四个圆中有三个圆是点，即半径为零的圆，存在着一个圆 G，与这四个圆中的每三个都相切，于是各条公切线的长度应满足广义托勒密定理所给之比，而这些公切线的长度为

(A,O)对 G_1：　$d-\beta+x$，　　(A,O)对(B,O)：c，

(A,O)对(C,O)：b，　　G_1 对(B,O)：x，

G_1 对(C,O)：$a-x$，　　(B,O)对(C,O)：a.

所以由广义托勒密定理得

$$(2-\beta+x)\cdot a+b\cdot x=c(a-x).$$

从而有　$x=\dfrac{a}{2s}(\beta+c-d)$.　　①

其中　$2s=a+b+c$　为$\triangle ABC$ 的周长.

类似地，考察 G_2 与上述三个半径为零的圆，亦可得

$$y=\frac{a}{2s}(\gamma+b-\alpha).\qquad ②$$

又∵　$\beta-x=\gamma-y$. 于是由①和②得

$$\beta-\frac{a}{2s}(\beta+c-d)=\gamma-\frac{a}{2s}(\gamma+b-d).$$

即　$(b+c)(\beta-\gamma)=a(c-b)$.

∵　$\beta+\gamma=a$，∴　$(b+c)(\beta-\gamma)=(\beta+\gamma)(c-b)$.

化简后即为　$c\cdot\gamma=b\cdot\beta$，

即　$\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{c}{d}$.　　$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$.

于是 AD 是$\angle BAC$ 的平分线，所以　$\beta=\dfrac{ac}{b+c}$，$\gamma=\dfrac{ab}{b+c}$.

由此得　$\beta-x=\dfrac{ac}{b+c}-\dfrac{a}{2s}\left(\dfrac{ac}{b+c}+c-d\right)$.

将 $2s=a+b+c$ 代入并化简，即得　$\beta-x=\dfrac{ad}{2s}$.

因而　$$\frac{d}{\beta-x}=\frac{d}{\frac{ad}{2s}}=\frac{2s}{a}=\frac{a+b+c}{a}.$$

于是 $\dfrac{AE}{DW}=\dfrac{AD}{DW}-1=\dfrac{d}{\beta-x}-1=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c}{\dfrac{ac}{b+c}}=\dfrac{BA}{BD}$.

因此,BW 是$\angle ABC$ 的平分线,

于是,W 是$\triangle ABC$ 内切圆的圆心.

15·47 设$\overset{\frown}{BC}$为圆周上的一段定弧,A 为$\overset{\frown}{BC}$上的一个动点,$\triangle ABC$ 的内切圆分别与边AB、AC 切于点K 和M,求证:直线 KM 总与某固定的圆相切.

(前苏联教委推荐试题,1989 年)

[证] 分别过 B 和C 作$BL\perp KM$ 于点L,$CN\perp KM$ 于点N(如图).

$\because$ K 和M 都是切点,

$\therefore$ $AK=AM$,

$\therefore$ $\angle AKM=\angle AMK=90^\circ-\dfrac{A}{2}$.

$\therefore$ $\angle BKL=\angle CMN=90^\circ-\dfrac{A}{2}$.

$\therefore$ $BL+CN=(BK+CM)\cos\dfrac{A}{2}=BC\cdot\cos\dfrac{A}{2}$.

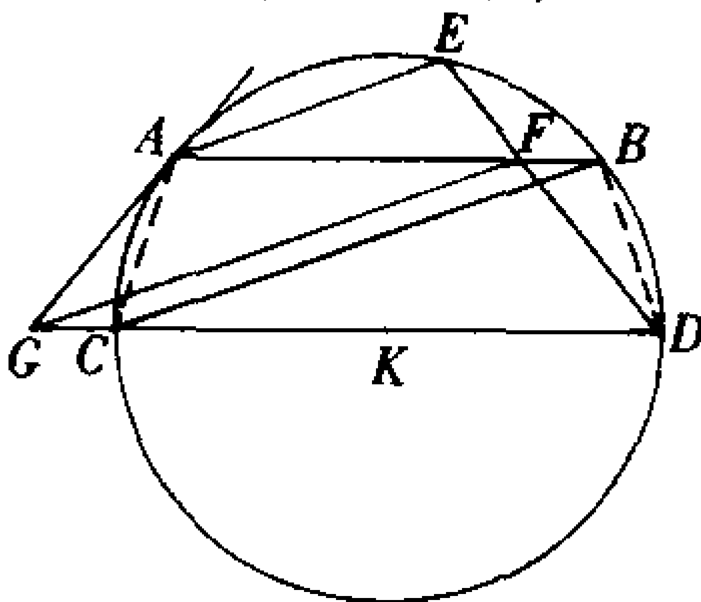
注意,上式右端为定值.

所以,由 BC 中点O 列直线KM 的距离$\dfrac{1}{2}BC\cdot\cos\dfrac{A}{2}$也是定值,

这表明直线 KM 总与以定点O 为心,以定长$\dfrac{1}{2}BC\cdot\cos\dfrac{A}{2}$为半径的圆相切.

15·48 CD 为$\odot K$ 的直径,AB 为平行于 CD 的弦,弦 $AE/\!/CB$,F 为AB、DE 的交点,$FG/\!/CB$,G 在DC 上,GA 是否与$\odot K$ 相切于 A?

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)



[解] 因为 $AB/\!/CD$, $FG/\!/CB$,

$\therefore$ $CA=BD$, $GC=FB$,

又 $\angle GCA=\angle FBD$,

$\therefore$ $\triangle GCA\cong\triangle FBD$.

故 $\angle GAC=\angle FDB=\angle EAB$.

又∵ $AE /\!/ CB$，∴ $\angle EAB = \angle ABC$.

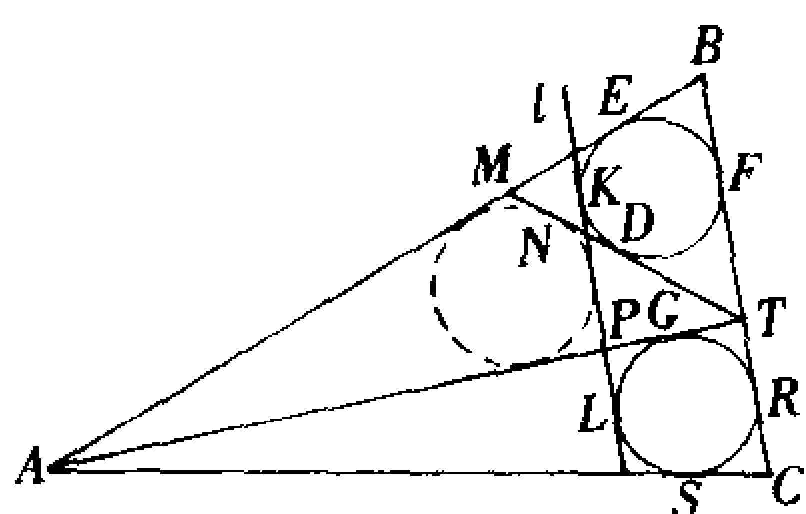
于是 $\angle GAC = \angle ABC$.

因此 GA 与$\odot K$ 相切于A.

15·49 设 M 是$\triangle ABC$ 内切圆与AB 边的切点. T 是BC 边上除顶点外的任一点.求证:分别内切于$\triangle BMT$、$\triangle MTA$ 和$\triangle ATC$ 的圆都与同一直线相切.

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[证] 设 l 是$\triangle BMT$ 和$\triangle ATC$ 内切圆的外公切线(如图)



D、E、F、K;Q、R、S、L 分别是切点. l 分别交MT、AT 于N、P,利用切线长定理.可得

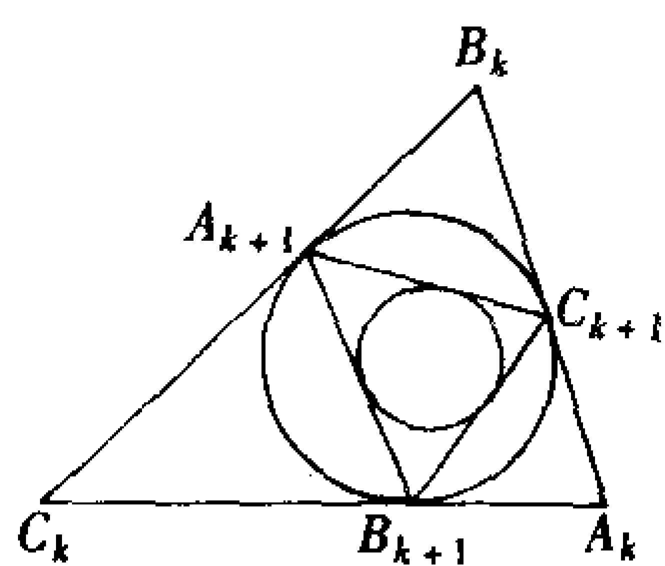
$$AM = AB + AC - BC - AM,$$
$$PN = RF - ND - PL,$$
$$MN = AB - AM - BF - ND,$$
$$AP = AC - RC - PL.$$

又 $-BC + RF = -BF - RC$，∴ $AM + PN = MN + AP$

因此 $APNM$ 有内切圆.即$\triangle ATM$ 的内切圆也与直线l 相切.

15·50 在不等边$\triangle ABC$ 中内切一个圆.它的三个切点是第二个三角形的三个顶点,再作第二个三角形的内切圆,它的三个切点是第三个三角形的三个顶点,依此类推,试证:这样得到的一系列三角形都不相似.

(基辅数学奥林匹克,1961 年)



[证] 设$\triangle A_kB_kC_k$ 和$\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$是三角形串中的连续两个三角形.

由已知可得

$$\angle A_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,\ \angle B_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B,$$
$$\angle C_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C,$$

依此类推得 $\angle A_{k+1} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A_k, \angle B_{k+1} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B_k$, $\angle C_{k+1} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C_k$.

不失一般性,假定$\angle A > \angle B > \angle C$,则$\angle B_k$ 始终在$\angle A_k$与$\angle C_k$之

间($k=1,2,\cdots$),而$\angle A_k$与$\angle C_k$随着h的变化,交替成为最大角与最小角,由于$\angle A>\angle C$及

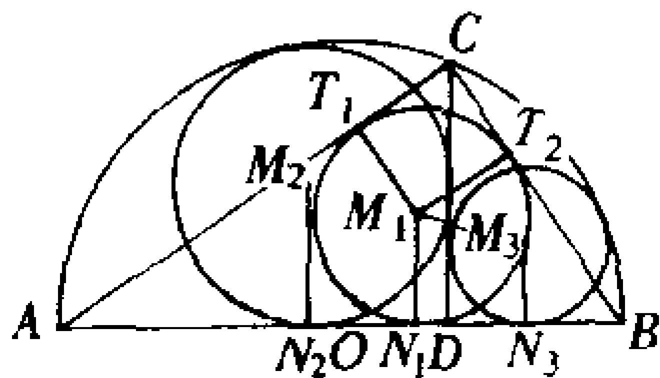
$$\angle A_{k+1}-\angle C_{k+1}=\frac{1}{2}(\angle C_k-\angle A_k).$$

所以每转到下一个三角形时,最大角和最小角的差在减小.因此,这些三角形都不相似.

15·51 设Y是以线段AB为直径的半圆弧,C是Y弧上异于A与B的点,D是从C到AB上的垂线的垂足,又Y_1、Y_2、Y_3是以AB为公切线的三个圆,其中Y_1是$\triangle ABC$的内切圆,而Y_2与Y_3都与CD和半圆Y相切.求证:圆Y_1、Y_2、Y_3有第二条公切线.

(第11届国际数学奥林匹克,1969年)

[证] 设圆Y_i的圆心为M_i,半径为r_i,点M_i在AB上的射影为$N_i(i=1,2,3)$.圆Y的圆心为O.



设$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AD=p$, $DB=q=c-p$, $\frac{a+b+c}{2}=S$.

又设点N_2在线段AD内,点N_3在线段BD内.

首先计算r_2和r_3.

因为N_2是圆Y_2在AB上的切点,所以有

$$N_2O=N_2D+DB-OB=r_1+q-\frac{c}{2}.$$

同样地,因为圆Y_2与半径为$\frac{C}{2}$的圆Y相内切,所以有

$$OM_2=\frac{c}{2}-r_2.$$

从而在$\triangle OM_2N_2$中由勾股定理可得

$$\left(r_2+q-\frac{c}{2}\right)^2+r_2^2=\left(\frac{c}{2}-r_2\right)^2,$$

即 $(r_2+q)^2-cq-cr_2+\frac{c^2}{4}+r_2^2=\frac{c^2}{4}-cr_2+r_2^2$,

$\therefore$ $(r_2+q)^2=cq$.

又$\because$ $AB\cdot DB=CB^2$, 即 $cq=a^2$,

$\therefore \quad (r_2+q)^2=a^2$, 即 $\quad r_2+q=a$,

或 $\qquad r_2=a-q$. ①

同理可得 $\quad r_3=b-p$. ②

再求圆 y_1 的半径 r_1.

因为圆 y_1 与 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AC、BC 分别切于点 T_1 和 T_2,所以四边形 $CT_1M_1T_2$ 是正方形,从而有

$$r_1=M_1T_1=CT_1=s-c. \qquad ③$$

由①、②和③可得

$$\frac{1}{2}(M_2N_2+M_3N_3)=\frac{1}{2}(r_2+r_3)=\frac{1}{2}(a-q+b-p)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c=M_1N_1 \qquad ④$$

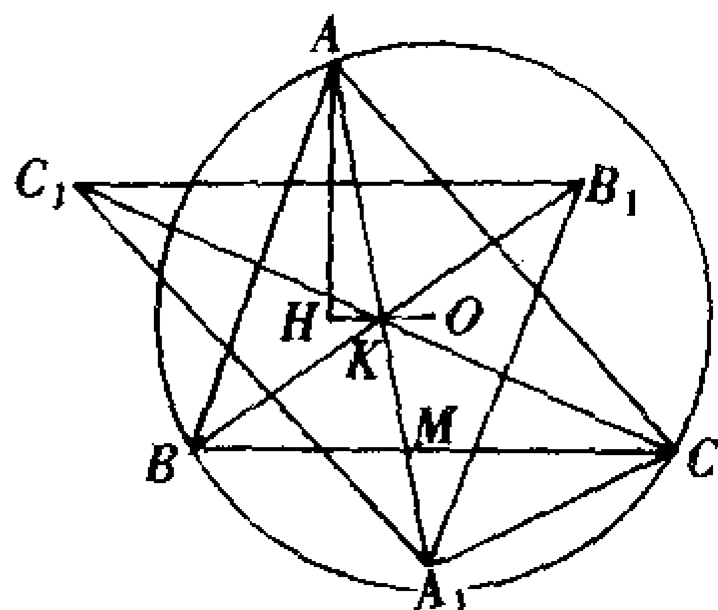
$$\frac{1}{2}(BN_2+BN_3)=\frac{1}{2}(q+r_2+q-r_3)=\frac{1}{2}(2q+a-q-b+p)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c-b)=BN_1. \qquad ⑤$$

由⑤可知,N_1 是线段 N_2N_3 的中点,再由④可知,M_1 是线段 M_2M_3 的中点,也就是说,M_1、M_2、M_3 在同一条直线上,由此可见,直线 AB 关于直线 M_2M_3 的对称直线也与三个圆 y_1、y_2、y_3 相切,即这三个圆除了公切线 AB 外,还有第二条公切线.

15·52 在$\triangle ABC$ 中,O 为外心,H 是垂心,作$\triangle CHB$、$\triangle CHA$ 和$\triangle AHB$ 的外接圆,依次记它们的圆心为 A_1、B_1、C_1. 求证:$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$,且这两个三角形的九点圆重合.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)



[证] 容易证明$\angle CHB=180°-\angle A$.

因此,$\triangle CHB$ 与$\triangle CAB$ 的外接圆半径相等. 由此可得,A_1 是 O 关于 BC 的对称点.

同样 B_1、C_1 是 O 关于 AC、AB 的对称点.

由于 H 是垂心,设 M 是 BC 的中点,则

$$OM\perp BC,\quad AH=2OM.$$

于是 $\quad AH=OA_1$. 又$\because \quad AH /\!/ OA_1$,

则 AHA_1O 是平行四边形，AA_1 与 OH 互相平分于 K.

同理，BB_1、CC_1 也经过 K，且被 K 平分.

由此可知，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 K 点中心对称，所以

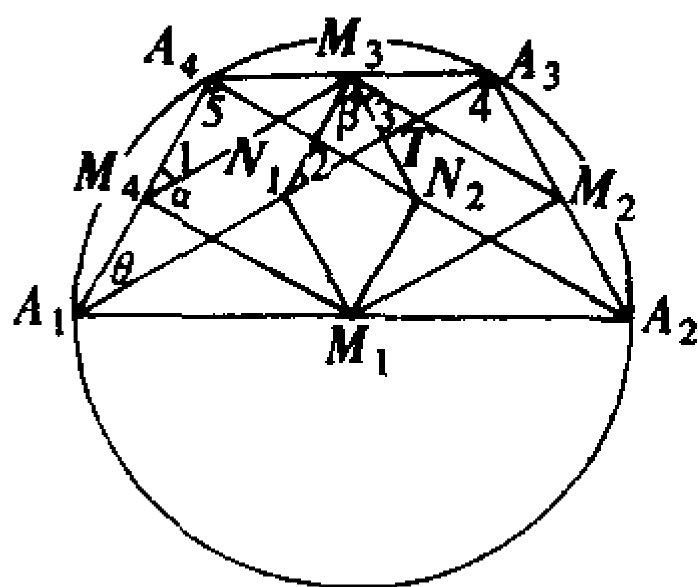
$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

由于 K 是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心连线的中点，所以 K 是 $\triangle ABC$ 九点圆的圆心，这个圆关于 K 作中心对称时不变，因而也是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的九点圆，即两个三角形的九点圆重合.

15·53 等腰梯形 $A_1A_2A_3A_4$ 的两底为 A_1A_2、A_3A_4、M_1、M_2、M_3、M_4 分别是边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 的中点. N_1、N_2 分别是对角线 A_1A_3、A_2A_4 的中点. 求证：当且仅当 M_1 或 M_3 为梯形外接圆的圆心时，平行四边形 $N_1M_3N_2M_1$ 和 $M_1M_2M_3M_4$ 相似.

（奥地利数学奥林匹克，1988 年）

［证］ 由题设，四边形 $N_1M_3N_2M_1$ 与四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 都是菱形.



设 $\angle M_3M_4M_1=\alpha$， $\angle N_1M_3N_2=\beta$，

$\angle A_4M_4M_3=\angle 1$，$\angle M_3N_1A_3=\angle 2$，

$\angle M_2TA_3=\angle 3$， $\angle A_1A_3A_2=\angle 4$，

$\angle A_1A_4A_2=\angle 5$， $\angle A_4A_1A_3=\theta$.

若菱形 $N_1M_3N_2M_1 \backsim$ 菱形 $M_1M_2M_3M_4$，其充要条件是 $\alpha=\beta$.

不妨设 $A_1A_2>A_3A_4$.

$\because$ $M_3N_1 /\!/ A_1A_4$，$M_4M_3 /\!/ A_1A_3$，$M_1M_4 /\!/ A_2A_4$.

$\therefore$ $\angle 2=\theta$，$\angle 1=\theta$.

又 $\angle 3=\angle 2+\beta=\theta+\beta=\angle 4=\angle 5$.

则 $\beta=\angle 5-\theta$ ①

而 $\angle 1+\alpha+\angle 5=180°$，

即 $\theta+\alpha+\angle 5=180°$.

有 $\alpha=180°-\angle 5-\theta$ ②

由①、②可知，$\alpha=\beta$ 的充要条件是

$\angle 5-\theta=180°-\angle 5-\theta$，即 $\angle 5=90°$.

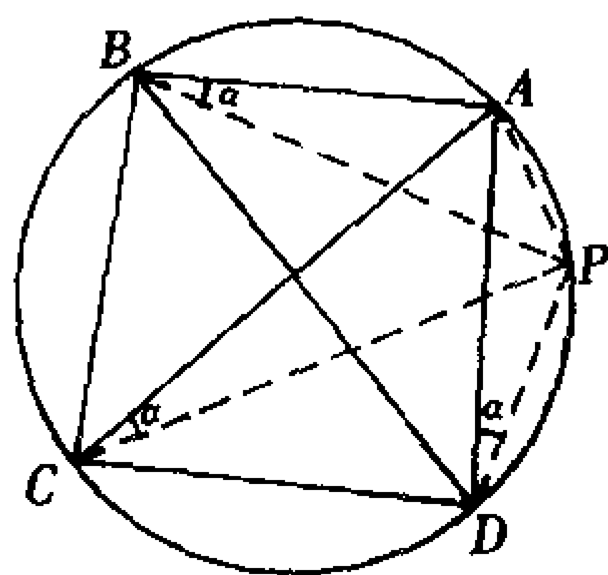
所以 M_1 是外接圆的圆心.

15·54　求证：从圆周上一点到圆内接正方形的顶点的四个距离不能都是有理数.

（美国纽约数学奥林匹克，1975 年）

［证］　设正方形 $ABCD$ 内接于直径为 d 的圆，并设点 P 在 $\overset{\frown}{AD}$ 上.

记 $\alpha=\angle ACP$. 则　$AP=d\sin\alpha$，$CP=d\cos\alpha$.



假设 AP 与 CP 都是有理数.

$$PB=d\sin\angle PDB=d\sin(45^\circ+\alpha)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}d(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(AP+CP).$$

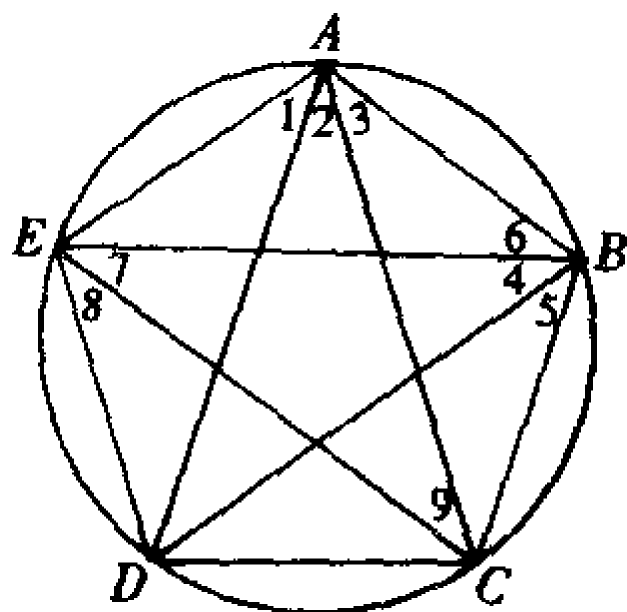
于是 PB 是无理数.

因此，AP、CP、PB 和 PD 不可能都是有理数.

15·55　设 $ABCDE$ 是圆内接五边形，假设 AC、BD、CE、DA 和 EB 分别平行于 DE、EA、AB、BC 和 CD，问是否可以推出这个五边形是正五边形？证明你的结论.

（英国数学奥林匹克，1992 年）

［解］　结论是肯定的.



下面我们来证明五边形 $ABCDE$ 为正五边形.

易知　　$\angle1=\angle4$，$\angle2=\angle5$.

∵　　$AB/\!/CE$，∴　$\angle6=\angle7$.

又　　$\angle3=\angle7$，∴　$\angle6=\angle3$.

因而　　$\angle1+\angle2+\angle3=\angle4+\angle5+\angle6$.

即　$\angle A=\angle B$.

同理可证　$\angle B=\angle C$，$\angle C=\angle D$，$\angle D=\angle E$.

∴　　$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.

又∵　$\angle2=\angle8=\angle9=\angle3$.　∴　$BC=CD$.

进而　　$AB=BC=CD=DE=EA$.

综上可得 $ABCDE$ 为正五边形.

15·56　设平面上有四点，其中任何三点不共线，且此四点不共圆.

求证:这四个点中必有一点位于过其余三点所作的圆的内部.

(第 22 届美国普特南数学竞赛,1961 年)

[证] 设四个已知点为 P_1、P_2、P_3、P_4.

依次作出$\triangle P_2P_3P_4$、$\triangle P_3P_4P_1$、$\triangle P_4P_1P_2$、$\triangle P_1P_2P_3$.

若 P_1、P_2、P_3、P_4 这四个点中有一个出现在这四个三角形的某一个内部,则作该三角形的外接圆,即包含第四个已知点在图上.

若 P_1、P_2、P_3、P_4 这四个点中任一点都不在这四个三角形的内部,则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形.

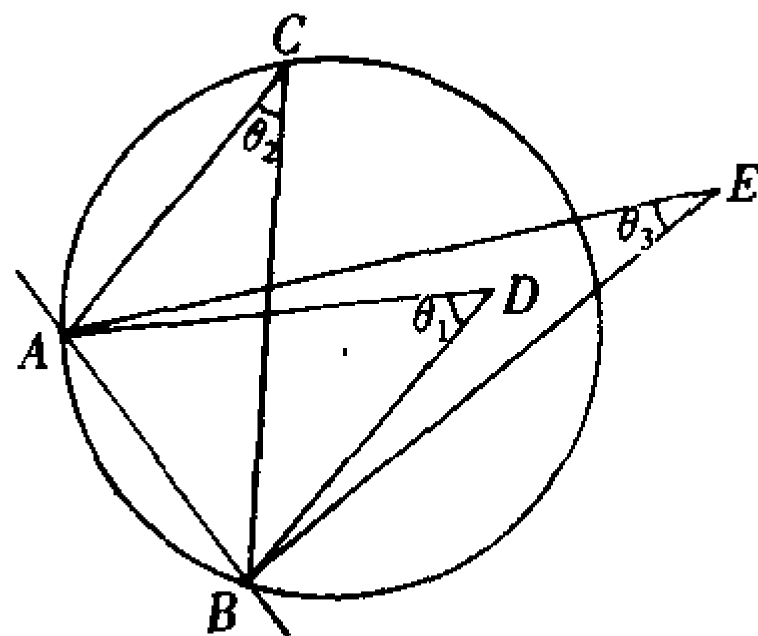
由已知,这个四边形不是圆内接四边形,故$\angle P_1+\angle P_3\neq\angle P_2+\angle P_4$.

不妨设$\angle P_1+\angle P_3>\angle P_2+\angle P_4$,则$\triangle P_1P_2P_4$ 及$\triangle P_2P_3P_4$ 的外接圆内分别含有 P_3 与 P_1.

15·57 在平面上有五个点,其中任何三点不在一条直线上,任何四点不在一个圆上,证明:一定能通过其中三点作一个圆,使得其余的两个点一个在圆内,一个在圆外.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证] 作直线 l,使得这五个点在直线 l 的同侧,找出其中与这直线距离最近的一点记为 A,过点 A 作直线 l 的平行线 l',再将直线 l' 绕点 A 旋转,设最先碰到的点为 B,则其余三点在直线 AB 的同侧.



因为这五点中无四点共圆,所以这三点对线段 AB 的视角必须各不相等.将这三个角按大小排列:

$\theta_1>\theta_2>\theta_3$.

设对应的点分别为 D、C、E.那么过 A、B、C 的圆就是所求的,点 D 在圆内,点 E 在圆外.

15·58 已知:平面上有$2n+3(n\geqslant1)$个点,其中没有三个点共线,也没有四个点共圆.能不能通过它们之中的某三个点作一个圆,使得其余的 $2n$ 个点一半在圆内,一半在圆外?证明你的结论.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证] 由上一题解法知,这 $2n+3$ 个点中一定可以找到两点 A、

B,使得其余 $2n+1$ 个点都在直线 AB 的同侧.

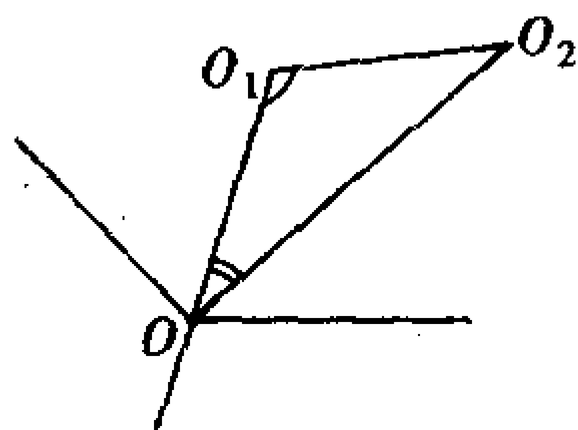
因为其中没有四点共圆,故这 $2n+1$ 个点对线段 AB 的视角各不相等,将这 $2n+1$ 个角从大到小排列起来:

$$Q_1>Q_2>\cdots>Q_n>Q_{n+1}>Q_{n+2}>\cdots>Q_{2n}>Q_{2n+1}.$$

设对应于 Q_{n+1} 的点为 C,则过 A、B、C 三点的圆就是所求的圆,因为这时对应着 Q_1、$Q_2\cdots$、Q_n 的 n 个点在圆内,而对应着 Q_{n+2}、Q_{n+3}、$\cdots$、Q_{2n+1} 的 n 个点在圆外.

15·59 设单位圆内的七个点彼此间的距离都不小于 1,证明:其中必有一个点与圆心重合.

(英国数学奥林匹克,1975 年)



[证] 假设题目的结论不正确,即单位圆内的七个点 O_1、O_2、$\cdots$、O_7 没有一个点与圆心 O 重合.

$\because$ $\angle O_1OO_2+\angle O_2OO_3+\cdots+\angle O_7OO_1=360^\circ$,

$\therefore$ 其中必有一个角小于 60°,不妨设 $\angle O_1OO_2<60^\circ$.

如果 $\angle O_1OO_2=0^\circ$,则必有 $O_1O_2<1$,与已知矛盾.

如果 $\angle O_1OO_2\neq0^\circ$,考虑 $\triangle O_1OO_2$.

设 $\angle OO_1O_2$ 是 $\triangle O_1OO_2$ 中三个内角中最大者,则有

$\angle OO_1O_2>60^\circ>\angle O_1OO_2$.

因而 $O_1O_2<O_2O<1$ 与已知矛盾.

所以七个点 $O_i(i=1,2,\cdots,7)$ 中必有一点与圆心重合.

15·60 设在 $2n$ 边形中有 $n-1$ 对对边互相平行,$n>1$,求:所有可能的 n,使得余下的一对对边也是平行的.

(芬兰数学奥林匹克,1980 年)

[证] 我们证明,所对的大于 1 的自然数 n 是奇数.

(1)设 n 是奇数,且在 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 中,除对边 A_1A_{2n} 与 A_nA_{n+1} 外,其他对边都是平行的.

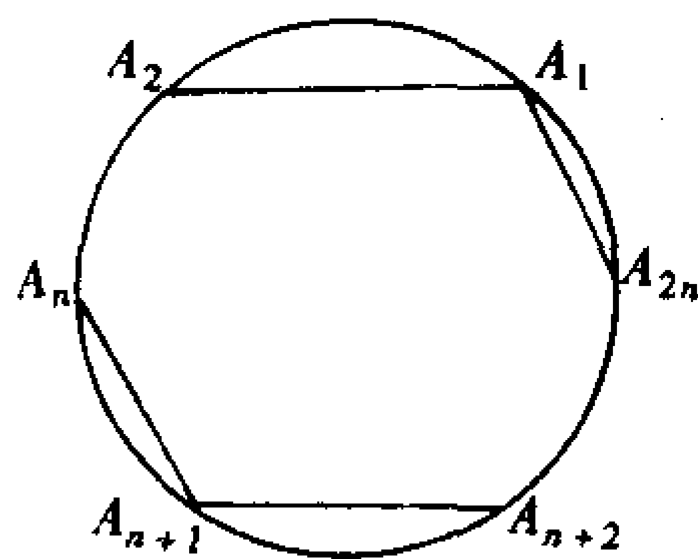
如果 $\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}}=180^\circ+\alpha$,则由 $A_1A_2/\!/A_{n+1}A_{n+2}$,

$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}$

$= \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} + \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}}$

$= \overset{\frown}{A_1A_{2n}A_{n+2}} + \overset{\frown}{A_{n+2}A_{n+1}}$

$= 360° - \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = 180° - \alpha.$



同理　$\overset{\frown}{A_3A_{n+2}A_{n+3}} = 180° + \alpha$，⋯，

$\overset{\frown}{A_nA_{n+1}A_{2n}} = 180° + (-1)^{n+1}\alpha = 180° + \alpha.$

$\therefore\quad \overset{\frown}{A_1A_2A_n} = 180° + \alpha - \overset{\frown}{A_nA_{n+1}} = \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}}.$

从而　$A_nA_{n+1} /\!/ A_1A_{2n}$.

(2)对奇数 n，我们证明存在 $2(n-1)$ 边形，使得题中条件不满足.

任取一个 $2n$ 边形，使得每对对边平行，但 $\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} \neq 180°$.

为此只需将弧 $\overset{\frown}{A_1A_{n+1}} < 180°$ 用点 A_2、⋯、A_n 等分，并依次作弦 $A_{n+1}A_{n+2} /\!/ A_1A_2$，⋯，$A_{2n-1}A_{2n} /\!/ A_{n-1}A_n$.

如(1)所记，将有 $A_{2n}A_1 /\!/ A_nA_{n+1}$，且

$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = \overset{\frown}{A_2nA_1A_n} \neq 180°.$

$\therefore\quad \overset{\frown}{A_2A_3A_n} - \overset{\frown}{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}}$

$= \overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \overset{\frown}{A_{2n}A_{n+1}A_n}$

$= \overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - (360° - \overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n}) \neq 0.$

即线段 A_2A_{2n} 与 A_nA_{n+2} 不平行，而 $2(n-1)$ 边形 $A_2A_3\cdots A_nA_{n+2}\cdots A_{2n}$ 恰有 $n-2$ 对对边平行.

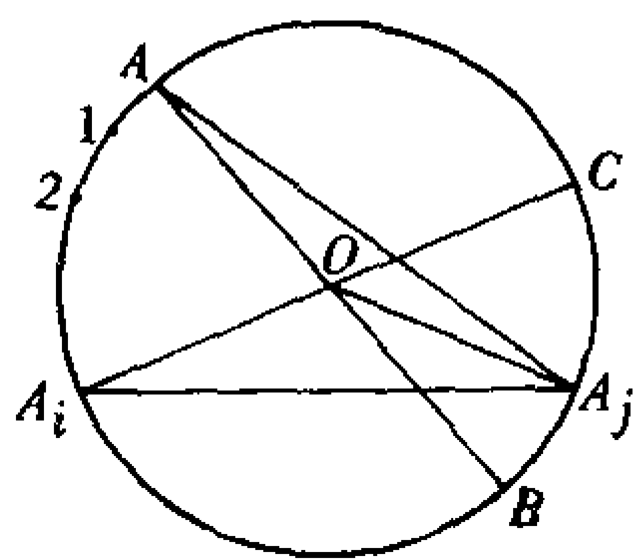
由(1)、(2)，所求的 n 为大于 1 的奇数.

15·61　设正 $2n+1$ 边形内接于一个半径为 r 的圆，考虑所有以这 $2n+1$ 边形的顶点为顶点的三角形.(1)其中有多少个三角形的内部含有圆心？(2)求所有内部含圆心的那些三角形的面积的和.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

[解]　(1)先取定一个顶点 A，将其他顶点顺次标为 $1,2,\cdots,2n$.

设 A，$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的对经点分别为 B、C，则 $\overset{\frown}{BC}(=\overset{\frown}{AA_i})$ 上有 i 个顶点.这些顶点而且只有这些顶点与 A 点和 i 点构成的三角形内部含圆心.



于是以 $A,A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为顶点的，内部含圆心的三角形个数有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

由于 A 有 $2n+1$ 种取法，在 $(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ 个三角形中，每个三角形出现三次，所以共有 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 个三角形内部会有圆心.

(2)由于 $\triangle OA_i$ 的面积为 $\frac{r^2}{2}\sin\frac{2i\pi}{2n+1}$，在 i 个三角形 A_iA_j 中，均含有 $\triangle OAA_i$，由于 A 有 $2n+1$ 种取法，每个三角形 A_iA_j 在和 $(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ 中出现三次，而每个三角形又可分为三个以 O 为顶点的等腰三角形，所以面积的和为

$$S=(2n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{r^2}{2}\sin\frac{2i\pi}{2n+1}\right)=\frac{(2n+1)r^2}{2}\sum_{i=1}^{n}i\sin i\theta.$$

其中 $\theta=\frac{2\pi}{2n+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}i\sin i\theta&=\frac{\sum_{i=1}^{n}2i\sin i\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{i=1}^{n}i\left(\cos\frac{2i-1}{2}\theta-\cos\frac{2i+1}{2}\theta\right)\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{2}\theta-n\cos\frac{2n+1}{2}\theta\right)\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{2}\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+n\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\sin n\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + n\right)$$

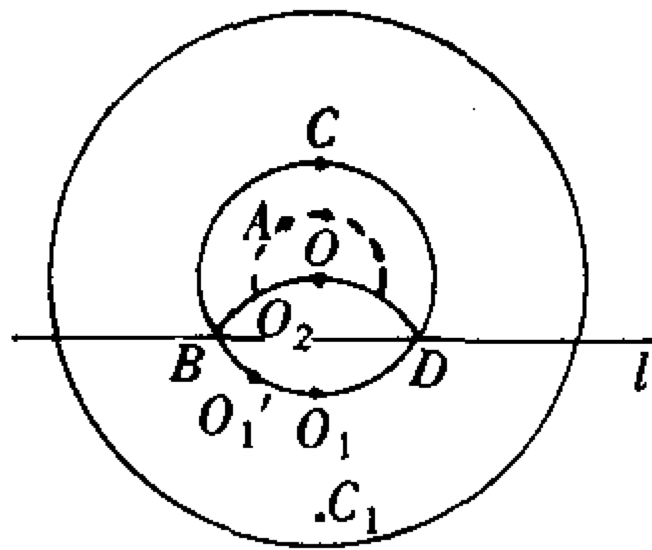
$$= \frac{2n+1}{4\sin\frac{\theta}{2}}.$$

因而有 $S = \dfrac{(2n+1)^2 r}{8\sin\frac{\pi}{2n+1}}$.

15·62 在平面上给定直线 l,直线外一点 O 以及任意点 A,求证:只要运用关于直线 l 的轴对称和关于点 O 的旋转,就可将点 O 变换为点 A.

(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[证] A 与 O 重合时,显然不成问题.



若 A 与 O 不重合,将 O 变到关于 l 对称的点 O_1 再绕 O 旋转,可变到以 O 为圆心、OO_1 为半径的圆上任何点.

如果 A 在这个圆上,问题就解决了.

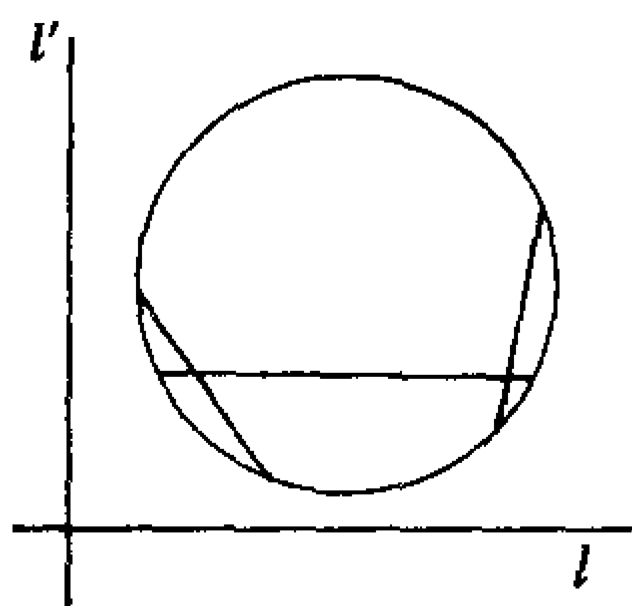
若 A 不在圆上,先设 A 在$\odot O$ 内,以 OA 为半径的同心圆必与$\overset{\frown}{BO_1D}$的轴对称形$\overset{\frown}{BOD}$相交,交点 O_2 是$\overset{\frown}{BO_1D}$上 O_1'的轴对称点,于是可将 O_1 绕 O 旋转到 O_1',再变到关于 l 对称的 O_2,又将 O_2 旋转到 A,问题就解决了.

再设 A 在$\odot O$ 外,这时可将 O_1 绕 O 旋转到距 l 最远的点 C,再变到关于 l 的对称点 C_1.那么以 O 为心 OC_1 为半径的圆必大于原来的圆 O.

如果 A 在大圆上或圆内,就仿上解决之.如果 A 在这个大圆外,就重复以上步骤,经过有限次重复,可得充分大的圆,使 A 不再在这圆外,而 O 终于可变换到 A.

15·63 在半径为 $n\in N$ 的圆内有 $4n$ 条长为 1 的线段.证明:如果给定某条直线,则必有另一条直线,使得要么与它平行,要么与它垂直,并且至少和两条线段相交.

(比利时数学奥林匹克,1977 年)



［证］ 设直线 l' 与给定直线 l 垂直，这 $4n$ 条长为 1 的线段在 l 与 l' 上的射影分别为 a_i 和 $b_i(i=1,2,\cdots,4n)$. 则 $a_i+b_i\geqslant 1$.

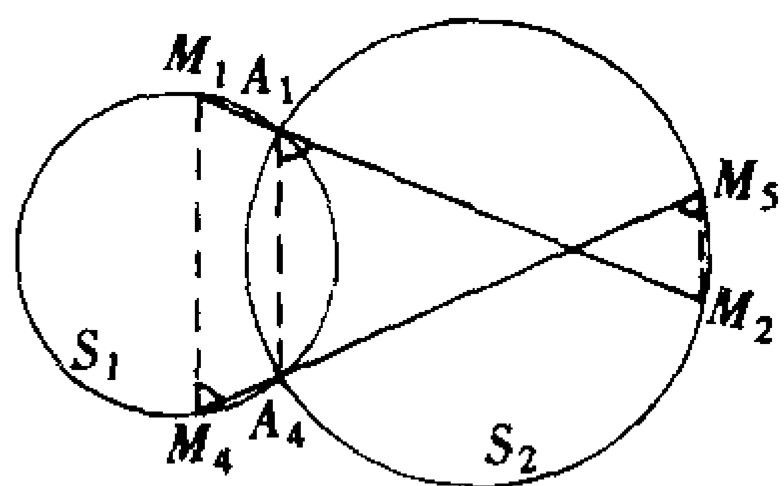
因而 $\sum_{i=1}^{4n}(a_i+b_i)\geqslant 4n$.

即 $\sum_{i=1}^{4n}a_i+\sum_{i=1}^{4n}b_i\geqslant 4n$.

于是 $\sum_{i=1}^{4n}a_i$ 与 $\sum_{i=1}^{4n}b_i$ 中至少有一个不小于 $2n$，而圆的直径为 $2n$，因此在 l 或 l' 上至少有一点，这点至少是两条线段射影的交点. 例如是 l' 上的点，则过该点作 l 的平行线，则该线至少与两条线段相交.

15·64 设⊙S_1 与⊙S_2 交于点 A_1 和 A_4，⊙S_2 和⊙S_3 交于点 A_2 和 A_5，⊙S_3 与⊙S_1 交于点 A_3 和 A_6. 已知折线 $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$ 具有如下性质：在每条直线 M_iM_{i+1} 上，都包含着点 A_i，而点 M_i 与 M_{i+1} 分别位于上述圆周上且点 M_{i+1} 异于点 A_{i+1}. 求证：$M_7=M_1$.

（前苏联教委推荐试题，1991 年）



［证］ 考察⊙S_1 和⊙S_2 相交的图形，其上分布着折线的线段 M_1M_2 和 M_4M_5 的端点. 连结 M_1M_4、A_1A_4 和 M_2M_5.

∵ $\angle M_1M_4A_4=\angle A_4A_1M_2=\angle A_4M_5M_2$，

∴ $M_1M_4/\!/M_5M_2$.

同理 $M_5M_2/\!/M_6M_3$，$M_6M_3/\!/M_7M_4$.

∴ $M_1M_4/\!/M_7M_4$.

∵ 点 M_1 和 M_7 都在⊙S_1 上，∴ 点 M_1 与 M_7 重合.

15·65 圆周上有 12 个点，其中有一个点涂上了红色，还有一个点涂了蓝色，其余 10 个点没有涂色. 以这些点为顶点的凸多边形中，其顶点包含了红色点及蓝色点的多边形称为“双色多边形”；只包含涂了红色(蓝色)点的多边形称为“红色”(蓝色)多边形”，不含涂色点的称为“无色多边形”，试问：以这 12 个点为顶点的所有凸多边形(从三角形到十二边形)中，双色多边形与无色多边形个数孰多？多

多少？

（第9届祖冲之杯数学邀请赛，1996年）

［解］ 对任一个双色 $n(n\geqslant5)$ 边形，显然，去掉红顶点及蓝顶点后，得到一个无色 $n-2$ 边形，不同的双色 n 边形去掉红、蓝顶点后得到的是不同的无色 $n-2$ 边形；

反过来，对任一个无色多边形，添上红、蓝顶点后，总可以得到一个双色多边形，由此可知，无色多边形（从三边到十边）的个数与双色多边形（从五边到十二边）的个数相等.

因此，双色多边形的个数多.

多出来的数目恰是双色三角形和双色四边形的数目，容易算出

双色三角形有10个；

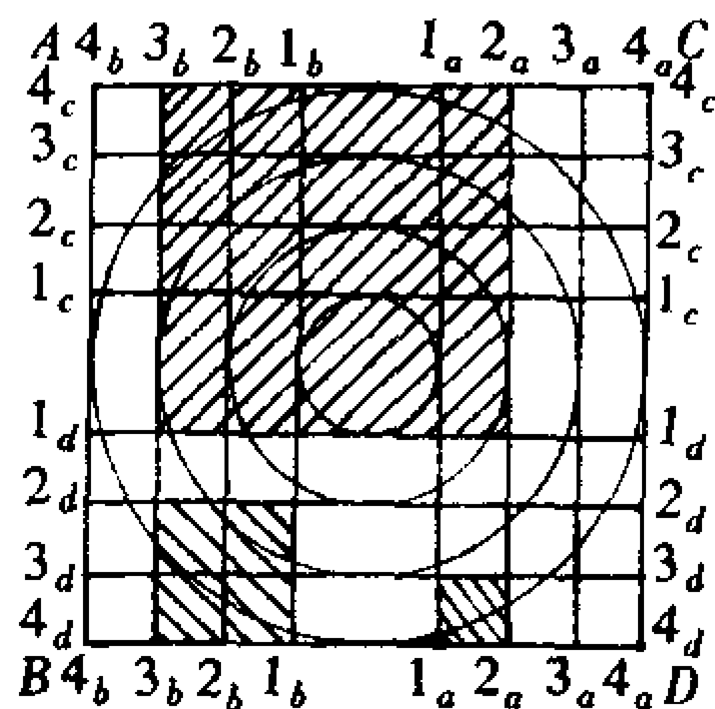
双色四边形有 $\frac{1}{2}\times10\times9=45$（个），

即 双色多边形多55个.

15·66 设有四个同心圆，其半径顺次为1、2、3、4，且 $ABCD$ 是最大圆的外切正方形.（1）求作含于 $ABCD$ 内的一个正方形，使它的四边分别与四圆相切，且与 $ABCD$ 的四边平行或重合.（2）这样的正方形可作多少个？

（中国上海市数学竞赛，1957年）

［解］ 作平行于 AB 与 BC 的各圆的切线，并按照所切圆半径的大小分别标以1、2、3、4等符号，同时按照在各圆的左右上下分别在这些符号的右下足标以 a、b、c、d 等符号.



这样以1、2、3、4等四条线所围成的正方形即为所求的正方形.

现在来研究下面几种情况：

①其中边长为1的，各切线依左右上下排列有8个为

$1_a,2_a,3_d,4_d$；$1_a,2_a,4_c,3_c$；$2_b,1_b,3_d,4_d$；$2_b,1_b,4_c,3_c$；$3_a,4_a,1_d,2_d$；$3_a,4_a,2_c,1_c$；$4_b,3_b,1_d,2_d$；$4_b,3_b,2_c,1_c$.

②其中边长为 2 的各切线依左右上下排列也有 8 个为

$1_a,3_a,2_d,4_d$；$1_a,3_a,4_c,2_c$；$3_b,1_b,2_d,4_d$；$3_b,1_b,4_c,2_c$；$2_a,4_a,1_d,3_d$；$2_a,4_a,3_c,1_c$；$4_b,2_b,1_d,3_d$；$4_b,2_b,3_c,1_c$.

③其中边长为 3 者是不可能的,因假定先用 1_a、4_a 两边后,则其余两边必为 2、3,不论其指标 c、d 如何安排,其距离决不能等于 3. 要是假定别的其他两边,也一样的不可能,所以没有以边长为 3 的适合条件的正方形.

④其中边长为 4 者,同上是不可能的.

⑤其中边长为 5 的各切线依左右上下排列共有 8 个为

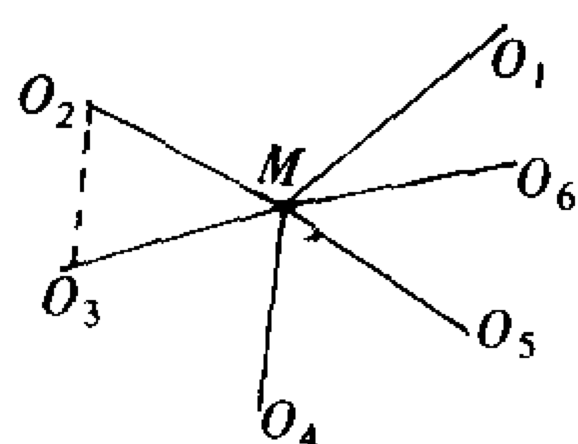
$1_b,4_a,2_c,3_d$；$1_b,4_a,3_c,2_d$；$4_b,1_a,2_c,3_d$；$4_b,1_a,3_c,2_d$；$2_b,3_a,1_c,4_d$；$2_b,3_a,4_c,1_d$；$3_b,2_a,1_c,4_d$；$3_b,2_a,4_c,1_d$.

⑥其中边长为 6 或 6 以上同前是不可能的.

这样的正方形共有 24 个,适为 4!.

15·67　设平面上有六个圆,每个圆的圆心都在其余各圆的外部. 试证:平面上任一点都不会同时在这六个圆的内部.

(中国北京市数学竞赛,1962 年)



[证]　用反证法. 设平面上有一点 M 同时在这六个圆的内部. 连接 M 与六个圆的圆心,如图. 则

$\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots+\angle O_6MO_1=360^\circ$.

因此其中至少一个角不大于 60°. 不妨设　$\angle O_2MO_3\leqslant 60^\circ$.

而在　$\triangle O_2MO_3$ 中,$\angle O_2MO_3+\angle MO_2O_3+\angle MO_3O_2=180^\circ$,

故　$\angle MO_2O_3$、$\angle MO_3O_2$ 必有一个不小于 60°. 不妨设 $\angle MO_3O_2\geqslant 60^\circ$,

则　$\angle MO_3O_2\geqslant\angle O_2MO_3$,

$\therefore$　$O_2O_3\leqslant O_2M<r_2$($\odot O_2$ 半径).

即 O_3 在$\odot O_2$ 内,这与已知条件矛盾.

故平面上任一点都不会同时在这六个圆的内部.

15·68　是否存在平面上的无穷多个闭圆盘 D_1、D_2、D_3,…,其圆心分别为 C_1、C_2、C_3,…,使得(1)C_i 在有限平面内没有极限点.(2)D_i

的面积之和为有限值.(3)平面上任一直线都至少与某个 D_i 相交.

(第 52 届美国普特南数学竞赛,1991 年)

[解] 存在符合题设要求的无限多个闭圆盘.

设 $\{a_i\}$ 是一个递减的正数序列,满足

$$\sum a_i = \infty, \ \sum a_i^2 < \infty.$$

例如 $\{a_i\} = \{\frac{1}{i}\}$ 就是这样的正数序列.

对任何整数 $i > 0$,设 x_i^+ 是半径为 a_i,圆心在 $(\sum_{k=1}^{i} a_k, \ 0)$ 上的闭圆盘.

显然,圆盘 X_i^+ 的集合覆盖了包含原点在内的 x 轴的正半轴.

类似地,沿 y 的正半轴定义 Y_i^+,沿 x 的负半轴定义 x_i^-,沿 y 的负半轴定义 y_i^-.

然后,令 $D_{4i} = x_i^+$, $D_{4i-1} = y_i^+$, $D_{4i-2} = x_i^-$, $D_{4i-3} = y_i^-$,

则 D_i 覆盖了 x 轴与 y 轴.

于是,平面上任一直线都至少与某个 D_i 相交,所有 D_i 的面积总和是有限值,其圆心没有极限点,因为对任一给定的圆盘,只能包含 D_i 的有限个圆心.

15·69 平面上有 n 个不同的圆,每圆半径都是 1.试证:其中必有一个圆含有一段弧,其长度不小于 $\frac{2\pi}{n}$,且和所有其他的圆都不相交.

(保加利亚数学奥林匹克,1982 年)

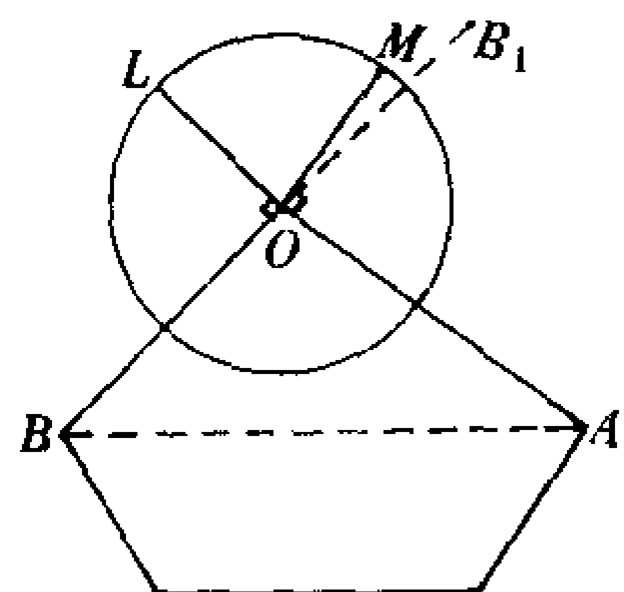
[证] 当 $n=1$ 时,单位圆的整个弧长为 $2\pi \geqslant \frac{2\pi}{n}$,从而题中结论成立.

当 $n \geqslant 2$ 时,首先设这 n 个圆的圆心都在一条直线上.

从这些圆的圆心中,选取位于最左端的点 O,过圆心 O 作该直线的垂线,把 $\odot O$ 截成两个弧长(半圆长)都是 $\pi \geqslant \frac{2\pi}{n}$ 的半圆弧.取位于左边的那个半圆弧,该弧和其他的圆不相交.

现在考虑这些圆的圆心不在同一直线上的情形.

从所有以这些圆的圆心为顶点的凸多边形中(因为所有圆心不共线,其中至少有一个三角形,所以这样的多边形集合非空)取出一个,使



得在这个多边形外面的圆心个数最少.

我们证明,所取的多边形外面不可能有这些圆的圆心.

如果某个点 O 在多边形外面,则过 O 作一条与多边形不相交的直线,并将它绕点 O 旋转直到它过多边形的第一个顶点 A,然后过多边形最后一个顶点 B(如果有如几个顶点落在直线上,则取距 O 最远的那个点),最后只需用 A、O、B 三个顶点取代多边形所有落在$\triangle AOB$ 内的顶点,则得到的多边形外面的点比原多边形外面的点少,与原多边形的选取矛盾.

因此,存在一个以这些圆心为顶点的凸 k 边形包含所有圆心,知 $k\leqslant n$.

因为 k 边形各外角之和为 360°,所以必有一个外角不小于$\frac{360°}{k}\geqslant\frac{360°}{n}$,设这个外角为$\angle B_1OA$,则分别垂直于线段 OB 与 OA 的垂线 OL 与 OM 截出一段外弧 $\overset{\frown}{LM}$.

因为 $\angle LOM=\angle B_1OA$,所以$\overset{\frown}{LM}$的长度不小于$\frac{2\pi}{n}$,下面证明,$\overset{\frown}{LM}$与其他圆不相交.

事实上,设 N 是$\overset{\frown}{LM}$上任意一点,由于$\angle NOA>90°$,且$\angle NOB>90°$,因此,以 N 为圆心且半径为 1 的圆与 k 边形只有惟一公共点 O,这表明,在所有给定的圆中,过点 N 的圆周只能以点 O 为中心.

15·70 确定平面上所有至少包含三个点的有限点集 S,它们满足下述条件:对于 S 中任意两个互不相同的点A 和B,线段 AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴.

(第 40 届国际数学奥林匹克,1999 年)

[解] 设 G 为S 的重心.对 S 中任意两点A、B,记 r_{AB}为 S 关于线段AB 的垂直平分线的对称映射.

因为 $r_{AB}(S)=S$, 所以 $r_{AB}(G)=G$,

这说明 S 中每个点到G 的距离都相等,因而 S 中的点全在一个圆周上,它们构成一个凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n(n\geqslant3)$.

因为 S 的对称映射 $r_{A_1A_3}$ 把以 A_1A_3 为边界的两个半平面分别映成它们自己，所以有 $r_{A_1A_3}(A_2)=A_2$，即得 $A_1A_2=A_2A_3$.

同理可证 $A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=\cdots=A_nA_1$.

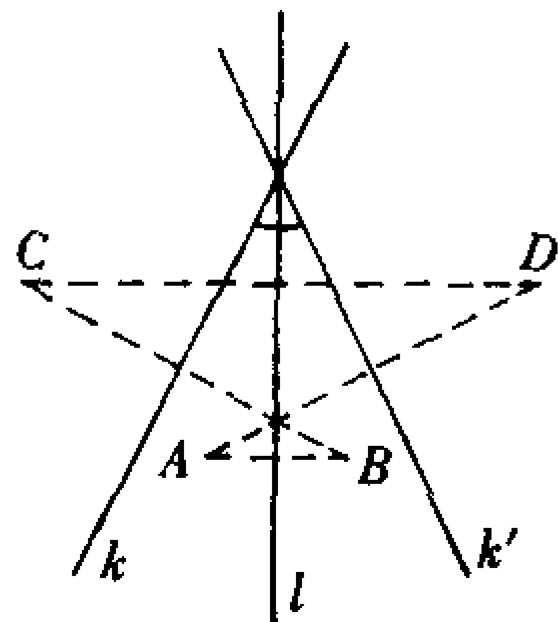
这说明 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形.

反之易验证，正 n 边形($n\geqslant 3$)的顶点集合满足题目要求.因此，S 为正多边形的顶点集合.

15·71 求证：如果一个平面图形具有并且只有两条对称轴，那么这两条对称轴互相垂直.

（波兰数学奥林匹克，1952年）

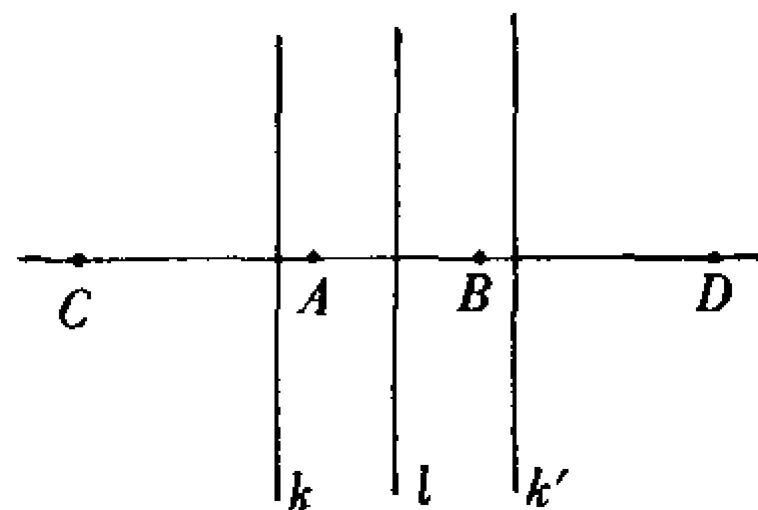
[证] 我们首先证明：任何平面图形，如果它具有两条不互相垂直的对称轴，那么它一定还至少具有第三条对称轴.



假定平面图形 F 有两条互不垂直的对称轴 k 和 l，k 和 l 有可能相交，也可能互相平行(如图).

设 k' 是关于直线 l 与直线 k 对称的直线.

显然，直线 k' 与直线 k 及直线 l 是不同的，下面我们证明直线 k' 也是图形 F 的一条对称轴.



如果图形 F 含有某个点 A，那么它一定含有 A 关于对称轴 l 的对称点 B，B 关于对称轴 k 的对称点 C，以及 C 关于对称轴 l 的对称点 D.

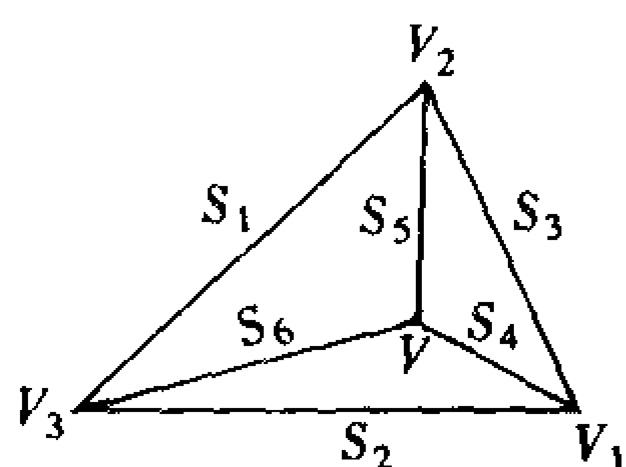
由于 A 与 B、C 与 D 关于轴 l 对称，则线段 AD 与 BC 关于轴 l 对称.

因此，线段 AD 的垂直平分线与线段 BC 的垂直平分线(即 k)关于轴 l 对称，这就是说，直线 k' 与线段 AD 的垂直平分线重合.

于是，A 与 D 关于直线 k' 对称，即 k' 是图形 F 的对称轴.

于是，当图形 F 有且只有两条对称轴时，这两条对称轴一定互相垂直.

15·72 给定一平面图形(如图)以及在该平面内但不在线段 S_1、S_2、…、S_6 上任意两点 Q_1 和 Q_2.证明：连结 Q_1 和 Q_2 且具有下述性质的折线 P 不存在：(1)P 穿过每一 S_i($i=1,2,\cdots,6$)恰有一次；(2)P



不与它自身相交;(3)P 不通过任一顶点 V_1、V_2、V_3、V.

(第7届美国普特南数学竞赛,1947年)

[证] 首先证明一个引理:

在内三角形确定的一个平面内有一条折线,如果它不经过三角形的顶点,它穿过三角形的每条边恰好一次,它的两个端点又都不在三角形的边界上,则此折线必有一个端点位于三角形的内部.

为证明引理,我们设 T 为已知的三角形,以 Q_1 和 Q_2 为端点的折线满足引理条件.

如果 Q_1 在 T 的内部,则引理已成立.

如果 Q_1 在 T 的外部,当我们沿着 P 从 Q_1 移向 Q_2 时,我们只遇到外点,直到我们穿过 T 的第一条为止,然后就只遇到内点,直到穿过 T 的第二条边为止,此后又只遇到外点,直到穿过 T 的第三条边为止,而且从这里开始,包括端点 Q_2 在内的所有点全在 T 的内部.所以 Q_2 是一个内点,由此引理得证.

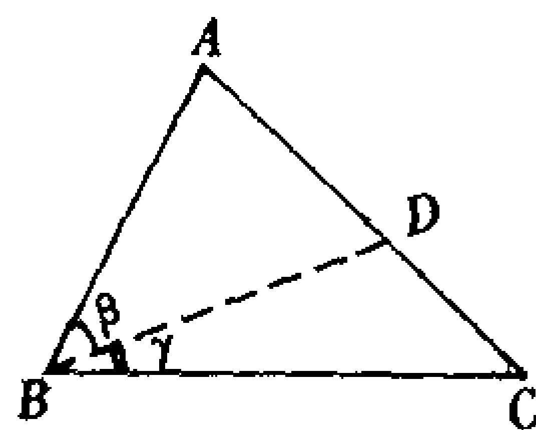
下面证明本题.

假设存在一条符合题设条件的折线 P,P 穿过每个三角形 $\triangle VV_1V_2$,$\triangle VV_2V_3$ 和 $\triangle VV_3V_1$ 的每条边恰好一次,则由引理,这三个三角形的每一个内部都必有 P 的一个端点,而 P 只有两个端点,所以这是不可能的,即不存在符合题设条件的折线 P.

15·73 已知:一个红三角形与一个蓝三角形.将每个三角形用两刀分成三个三角形,使得每个蓝色的部分与一个相应的红色的部分相似.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[解] (1)如果$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$相似.



在相应位置各剪一刀就可以得到两组相似三角形,于是,将其中一组的两个三角形在相应位置再各剪一刀便得出三组相似的三角形.

(2)如果$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$恰有一组角相等,不妨设 $\angle C=\angle C'$, $\angle B>\angle B'=\beta$.

在$\triangle ABC$中,作　$\angle ABD=\beta$, 设　BD交AC于D.这时

$\angle B'A'C'=\angle BAD+\angle DBC>\angle DBC=\gamma$.

因此可在$\angle B'A'C'$内作$\angle C'A'D'=\gamma$, 设$A'D'$交$B'C'$于D'.易知

$$\angle A'D'B'=\angle C'+\gamma=\angle ADB.$$

于是　$\triangle BCD\backsim\triangle A'C'D'$, $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$.

再由(1),在一组相似三角形的相应位置再剪一刀,又出现一组相似三角形.

于是结论成立.

(3)如果$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$没有角对应相等.

设$\angle B>\angle B'$,则$\angle A'>\angle A$,$\angle C'>\angle C$中至少有一个成立.不妨设$\angle C'>\angle C$.

在AC上取D,$A'B'$上取D',使

$\angle DBC=\angle B'$, $\angle D'C'B'=\angle C$,

$\therefore$　$\triangle DBC\backsim\triangle D'B'C'$.

这时由　$\angle ADB=\angle A'D'B'=\angle B'+\angle C$,

在$\triangle ABD$和$\triangle A'D'C'$中有一个角相等,这就化归成(2)的情形,从而结论成立.

由(1),(2),(3),结论均成立.

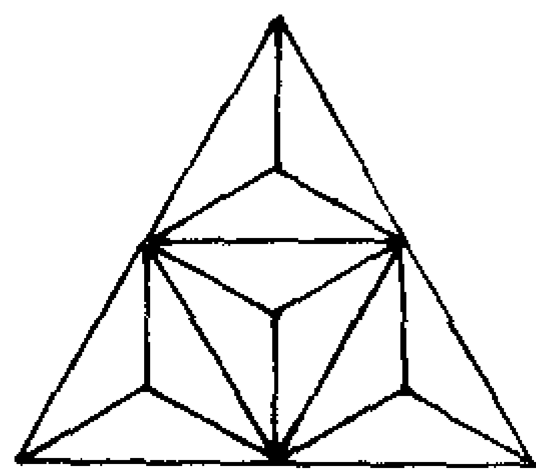
15·74　试给出具有如下性质的三角形的例子:

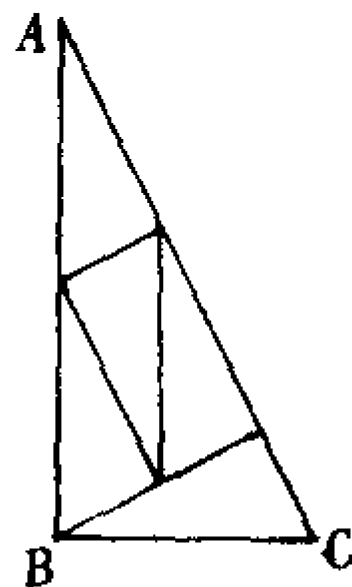
(1)该三角形可以划分成12个全等三角形;

(2)该三角形可以划分成5个全等三角形.

(第15届全俄数学奥林匹克,1989年)

[**解**]　(1)如图,正三角形的各边中点可分成四个全等的正三角形,而每个正三角形的中心又可分成三个全等的三角形.





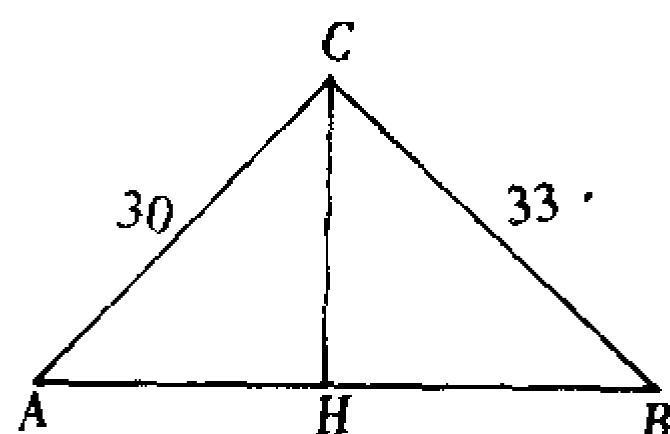
所以正三角形可以分为如图的 12 个全等的三角形.

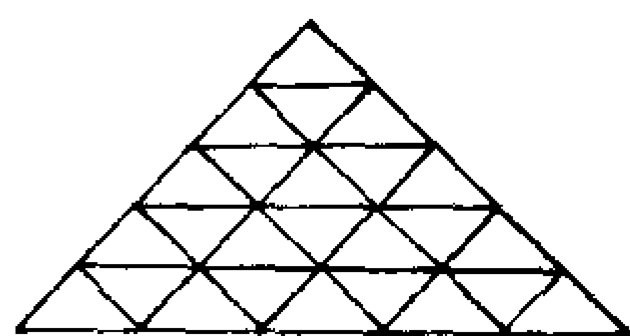
(2)如图,Rt△ABC,∠ABC 为直角,且两直角边 $AB:BC=2:1$,可分为如图的 5 个全等的三角形.

15·75　试证:存在这样的三角形,它可以划分成 1989 个彼此全等的三角形.

(前苏联教委推荐试题,1989 年)

[证]　经证两条直角边分别为 30 和 33 的直角三角形即具有题中所要求的性质.





首先注意,高 CH 将△ABC 分成相似的两部分且相似比为 30:33.

分成的两个三角形中的每个都可以用平行于边的网格线划分成 n^2 个与原三角形相似比为 n 且彼此全等的三角形,上面右图中画出了 $n=5$ 的情形.

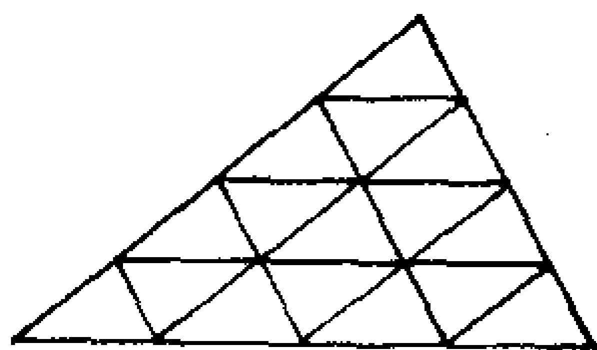
将△ACH 划分成 30^2 个这样的三角形,每个小三角形斜边长为 1.将△CBH 划分成 33^2 个这样的三角形,它们的斜边长也都是 1.所以,分成的 $30^2+33^2=1989$ 个小三角形全都彼此全等.

注　此问题为后一问题的特例.

15·76　求证:对于每个可以表示成两个自然数的平方和的 n,都存在这样的三角形,它可以划分成 n 个全等的三角形.

(第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年)

[证]　首先,对于任意给定的自然数 m,任何三角形都可以划分为 m^2 全等的三角形,其形状均同原三角形相似.

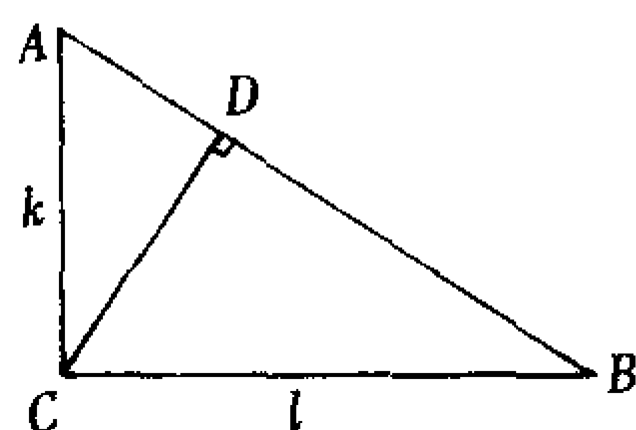


事实上,只要把这个三角形的各边 m 等分,并把相应的分点连起来(如图),就得到

$$1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2.$$

个全等的且与原三角形相似的三角形.

设 $n=k^2+l^2$,我们考察以 $AC=k$ 和 $BC=l$ 为直角边的直角△ABC.



作斜边 AB 的高 CD,则 CD 把△ACB 分成两个相似三角形且均△ABC 相似.

在△ACD 中,可以将该三角形分成斜边为 1 的 k^2 个与△ABC 相似的直角三角形.

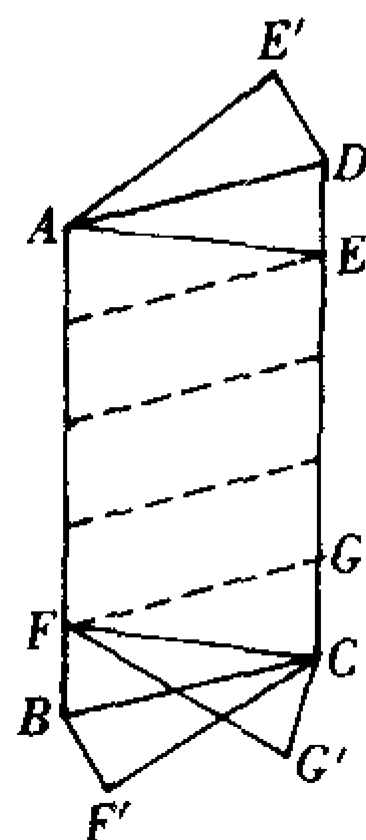
在△BCD 中,可以将该三角形分成斜边为 1 的 l^2 个与△ABC 相似的直角三角形.

于是得到 $k^2+l^2=n$ 个全等的斜边为 1 的直角三角形.

15·77 试证:对每个整数 $n\geqslant6$,存在一个凸六边形,它可以分为 n 个全等的三角形.

(亚太地区数学奥林匹克,1990 年)

[证] 考虑平行四边形 $ABCD$.其中$\angle BAD$ 为钝角.



将这平行四边形用与 AD 平行的直线分成 n 个全等的平行四边形,每个平行四边形又用对角线分成两个三角形,从而得到 $2n$ 个全等的三角形.

将图中的△AED 作出关于 AD 对称的△$AE'D$.

再将图中的△BFC 作出关于 BC 对称的△$BF'C$.

则凸六边形 $ABF'CDE'$可以分成 $2n+2$ 个全等三角形.

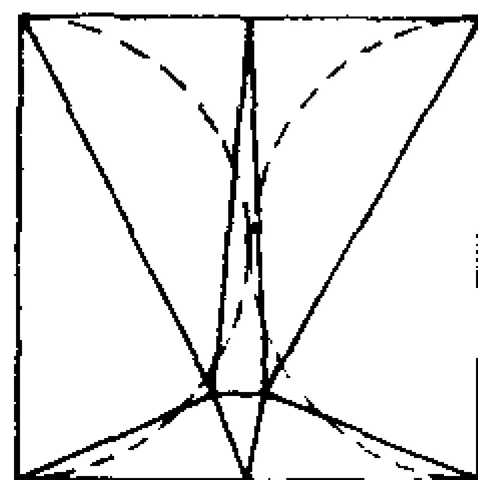
若作出△GFC 作出关于 FC 的对称△$FG'C$,则六边形 $AFG'CDE'$可分为 $2n+1$ 个全等三角形.

综上,对每个 n,都有一个凸六边形,它可以分成 n 个全等三角形(n 为偶数时,为六边形 $ABF'CDE'$,n 为奇数时,为六边形 $AFG'CDE'$).

15·78 试将一个正方形分为 8 个锐角三角形.

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1985 年)

[解] 具体分法如图:



关于这些小三角形均为锐角三角形的证明并不困难.

15·79 求证:任一正方形可以剖分成任意个数

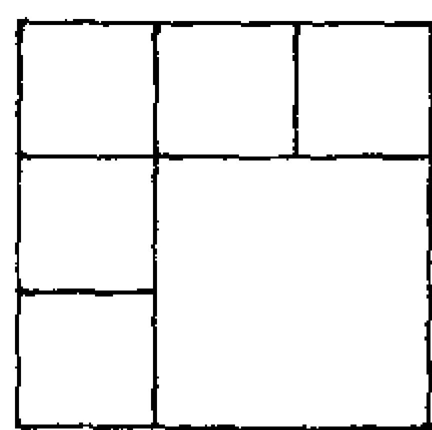
多于 5 个的正方形，但不能恰好剖分成 5 个正方形.

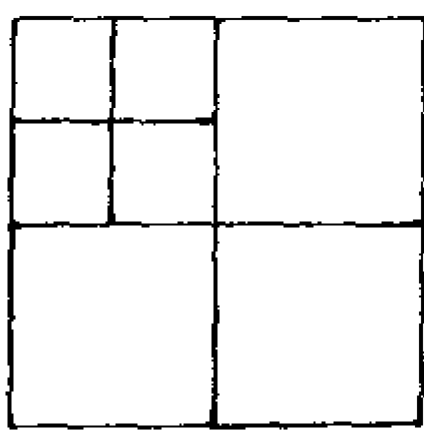
（波兰数学奥林匹克，1964 年）

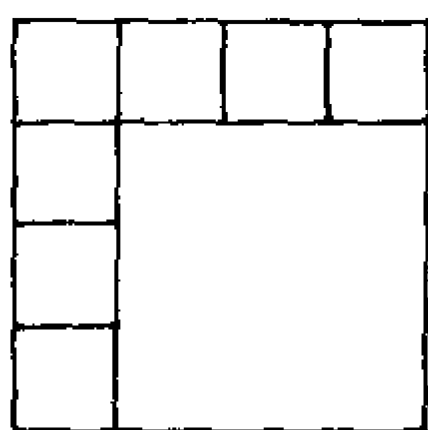
[证] (1)首先证明，任一正方形可以剖分成任意 $n(n>5)$ 个正方形.

我们用数学归纳法证明.

当 $n=6、7、8$ 时，容易得出正方形可剖分为 6 个、7 个、8 个正方形，如图.


$n=6$


$n=7$


$n=8$

假设正方形可以剖分为 $k(k\geqslant 6)$ 个正方形，那么把其中一个小正方形等分成 4 个小正方形，就得到 $k+3$ 个小正方形，因此命题对 $n=k+3$ 成立.

于是对所有 $n\geqslant 6$，正方形都可以剖分为 n 个小正方形.

(2)下面证明，正方形不能剖分成 5 个小正方形.

设正方形 Q 的边长为 1，顶点为 $A、B、C、D$，它被剖分为 5 个正方形 $Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5$.

正方形 Q 的每个顶点都是正方形 $Q_i(i=1,2,3,4,5)$ 之一的顶点，并且 Q 的两个不同的顶点不可能属于同一个正方形 Q_i.

设 $A、B、C、D$ 分别是边长为 $a、b、c、d$ 的正方形 $Q_1、Q_2、Q_3、Q_4$ 的顶点.

如果正方形 Q_5 的所有顶点都在正方形 Q 的内部，这时正方形 Q_i $(i=1,2,3,4)$ 完全布满在 Q 的各边，则有

$$a+b=b+c=c+d=d+a=1.$$

由此可得 $c=a,\ d=b$.

于是正方形 Q 的面积为 $S_Q=2a^2+2b^2+S_{Q_5}$.

又 $S_Q=(a+b)^2$,

则 $S_{Q_5}=(a+b)^2-(2a^2+2b^2)=-(a-b)^2\leqslant 0$，这是不可能的.

如果正方形 Q_5 的某个顶点位于正方形 Q 的一条边上，比如在

AB 上，则 Q_5 的某条边 MN 在 AB 上，Q_5 的另两个顶点位于 AB 的经过 M、N 的两条垂线上，而且与 AB 的距离小于 1. 因而这两个顶点在 Q 的内部，这表明

$$b+c=1,\ c+d=1,\ d+a=1,\ a+b<1$$

而由前三个等式可推得

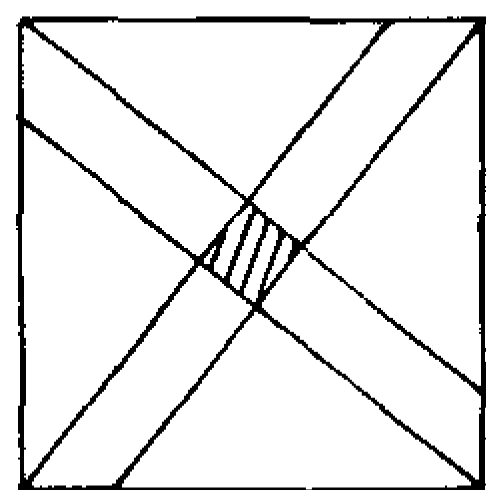
$$(b+c)+(d+a)-(c+d)=a+b=1.$$

从而导致矛盾.

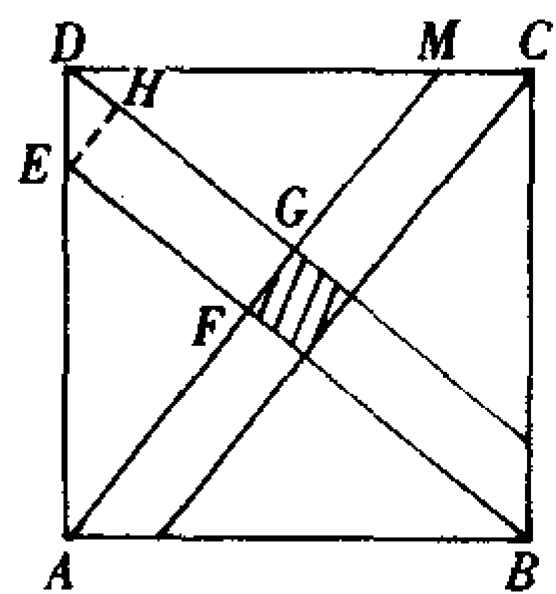
因此，正方形不能剖分为 5 个小正方形.

15·80　如图，把单位正方形的每边分为 n 等分，再连接每个顶点与相对顶点最近的分点，这样在正方形的内部做出了一个小正方形(图中用阴影表示)的面积恰好是 $\frac{1}{1985}$，求：n 的值.

(第 3 届美国数学邀请赛，1985 年)



[解]　如图，作 $EH\perp DG$ 于 H.



由已知　$DM=\frac{n-1}{n}$.

$\therefore\quad AM=\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$,

$$\cos\angle DEH=\cos\angle DAM=\frac{DA}{DM}=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}.$$

$$EH=DE\cdot\cos\angle DEH=\frac{1}{n\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}.$$

中间阴影小正方形的面积 $S=FG^2=EH^2$.

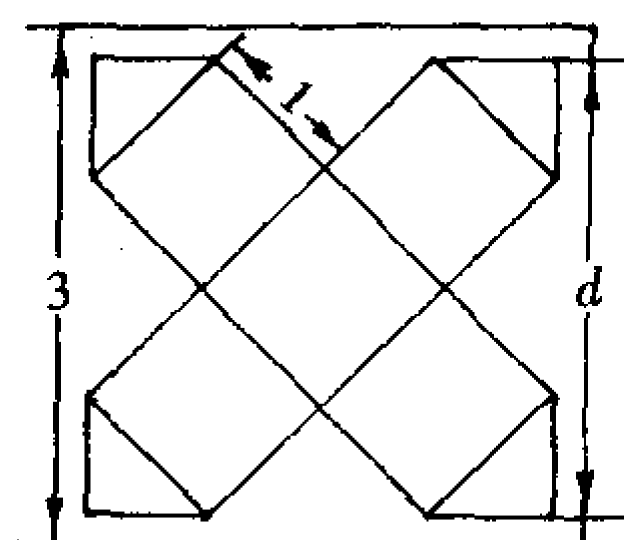
于是有　$S=\frac{1}{n^2\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]}=\frac{1}{1985}$.

$\therefore\quad 2n^2-2n+1=1985$,

即　$n^2-n-992=0$,

得　$n=32$，$n_2=-31$(舍去). 因此　$n=32$.

15·81 试从尺寸为 3×3 的正方形中划出一个图形，使得它是棱长为 1 的正方体的表面展开图.



（第 17 届莫斯科奥林匹克，1954 年）

[解] 依题意所画图形如：

注意，上、下距离 d 为：

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times2=2\sqrt{2}\approx2.828\cdots<3$$

15·82 试将正六角星形分成四个部分，使得这四个部分可以拼成一个凸多边形.

（第 17 届莫斯科数学奥林匹克，1954 年）

[解] 所分四部分如图 1 所示即分割或如下四块：

Ⅰ：$ABCDMLA$，　　Ⅱ：$LMKJ$，

Ⅲ：$DFGHIKM$，　　Ⅳ：DEF.

拼成的梯形如图 2.

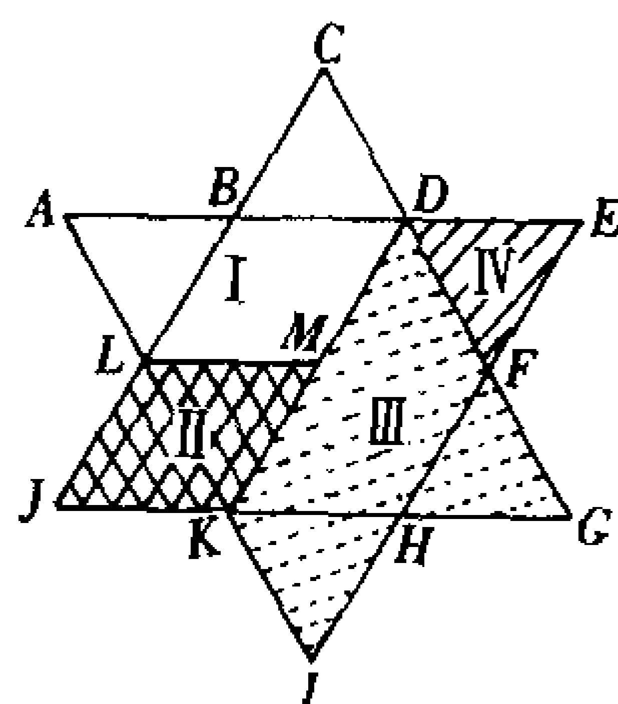


图 1

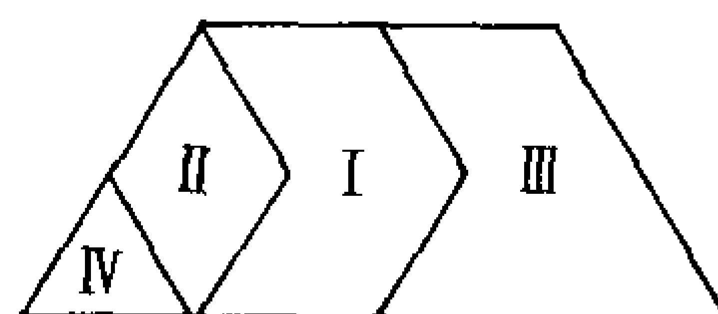
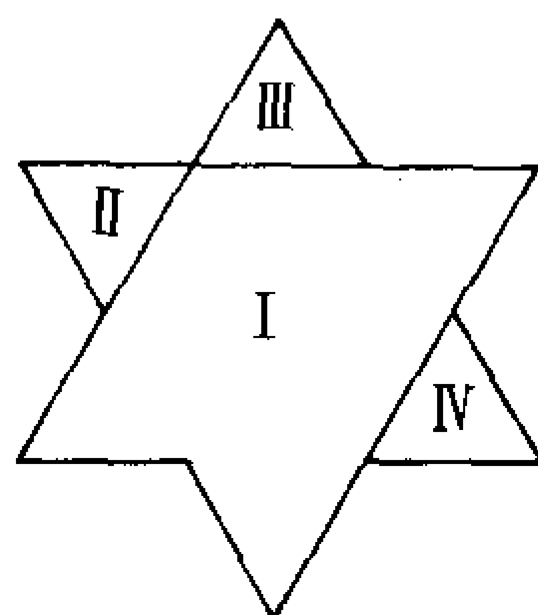
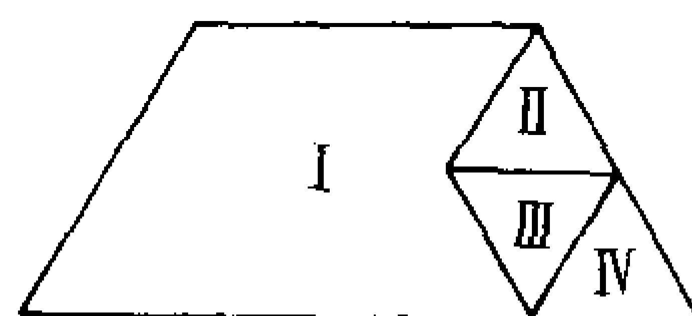


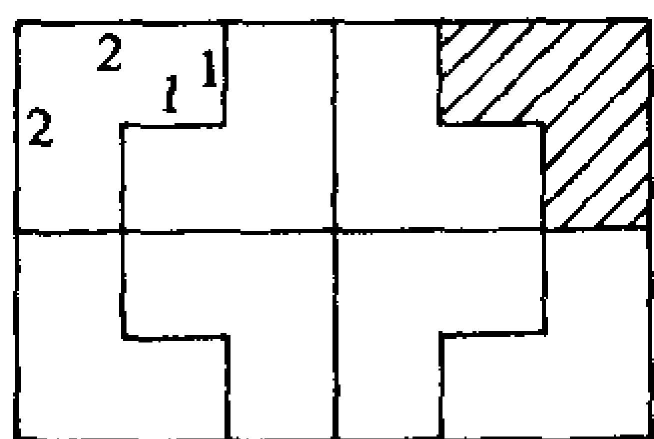
图 2

显然解法不惟一，比如下面的剖、拼方法更简单：

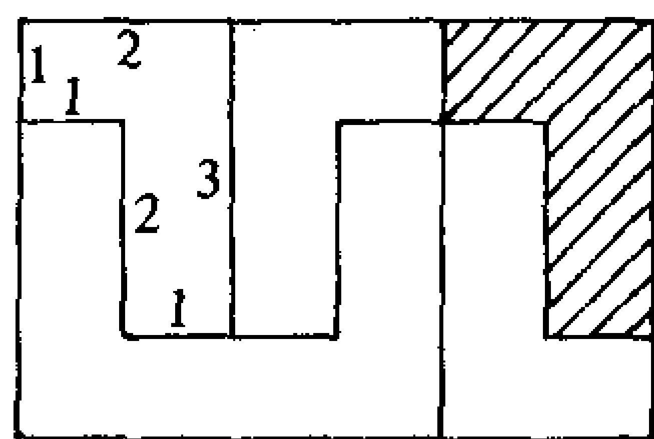




15·83　两个 4×6 的矩形,分别被 8 个"V"和 6 个"L"纸片(这两



(1)

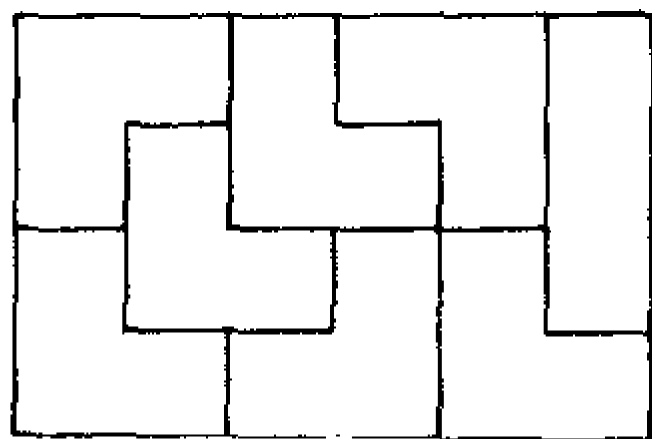


(2)

种形状纸片尺寸见图)覆盖.请问:(a)从(1)中拿走一个"V"形纸片后,用 1×3 矩形纸片替代,矩形还能铺满吗?(b)从(2)中取走一个"L"形纸片后代以 1×4 矩形情况又如何?

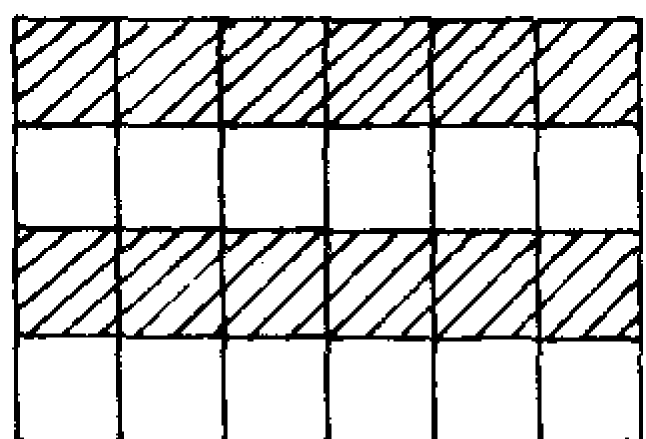
(加拿大埃德蒙顾市数学竞赛,1996 年)

[**解**]　(a)答案是肯定的,具体摆法如右图所示(答案不惟一).



(b)不可能.用黑、白两种颜色交替地将矩形的 4 行着色.把 1×4 矩形纸片放入时,它要覆盖 4 个小方格,其中黑色的方格有偶数个.

另外,把"L"形纸片放入矩形时,每张也要覆盖 4 个方格,其中黑色方格为奇数个.

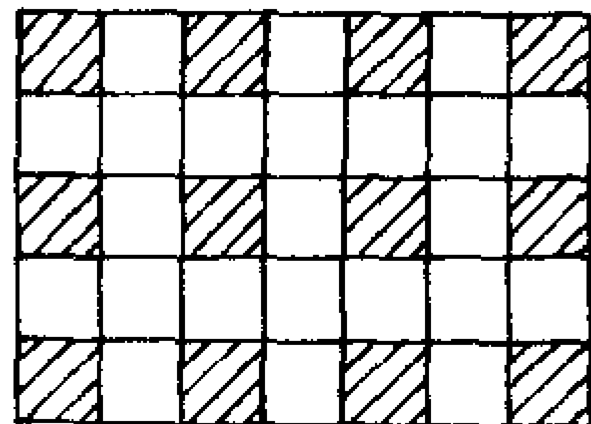


若能把全部 6 张纸片都放入矩形,则黑色方格的总数必是奇数个,这显然是不可能的.

15·84　用边长是 2 的正方形去掉一个单位正方形后所得"L 形"图形去覆盖 5×7 的矩形,可以重叠但不可超出矩形.那么,能否使矩形中每个单位正方形上覆盖的图形层数都相等?证明你的结论.

(第 22 届全俄数学奥林匹克,1996 年)

[**证**]　如图所示,将矩形的方格涂成黑、白两色.在黑色方格中记以数字 -2,在白色方格中记以数字 1.我们发现,被任意一个"L 形"所覆盖的方格中的数字和非负.



假设我们能将矩形中的方格覆盖满足问题要求的 k 层,那么被"L 形"所覆盖的所有方格中的

数字和 s 非负.

如果设矩形中所有的数字和等于 S,那么,

$S=ks=k(-2\times12+23\times1)=-k<0$.

此与假设矛盾.

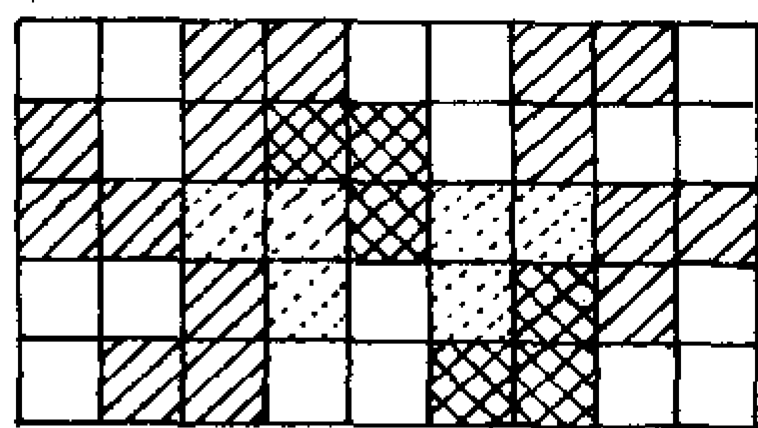
注 若矩形的尺寸为 $3\times(2n+1)$ 或 5×5,则同理可证满足题设条件的覆盖不存在.

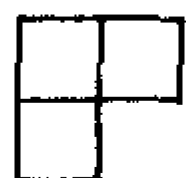
矩形的尺寸为 2×3,可被 2 个"L 形"覆盖 1 层.矩形的尺寸为 5×9,可被 15 个"L 形"覆盖 1 层.正方形的尺寸为 2×2,可被 4 个"L 形"覆盖 3 层.组合这三种覆盖,不难证明,对其余所有的尺寸为 $m\times n(m、n\geqslant2)$ 的矩形都可以完成满足题设条件的覆盖.

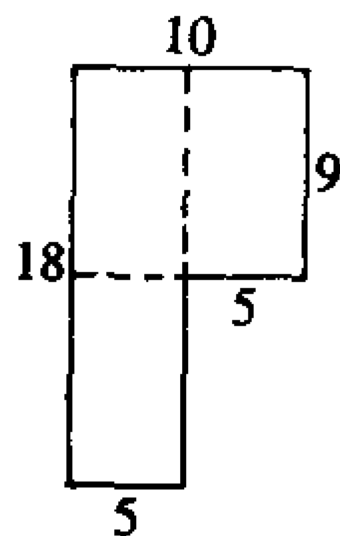
15·85 是否存在:(1)一个矩形,它可被分割成 15 个非矩形的全等多边形?(2)一个正方形,它可被分割成 15 个非正方形的全等多边形?

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

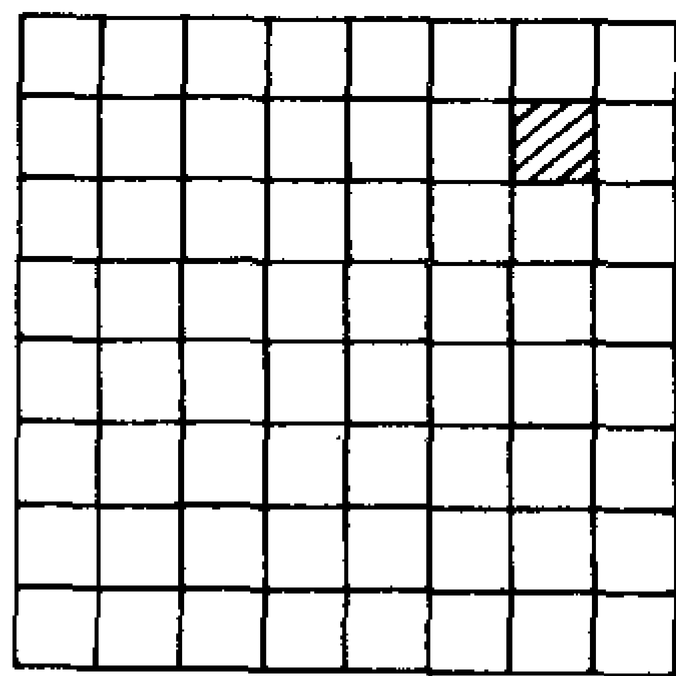
[解] (1)一个 5×9 的网格可以被分成 15 个"L"形块(它们彼此全等,且是非矩形),见下图:

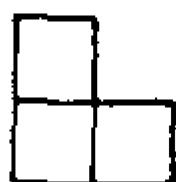






(2)将上述 5×9 网格,水平方向扩大 5 倍,竖直方向扩大 9 倍,则网格变成外框是 45×45 的正方形,而其中的每个小网格尺寸为 9×5,这时被割分的每个"L"形块形状如上右图.





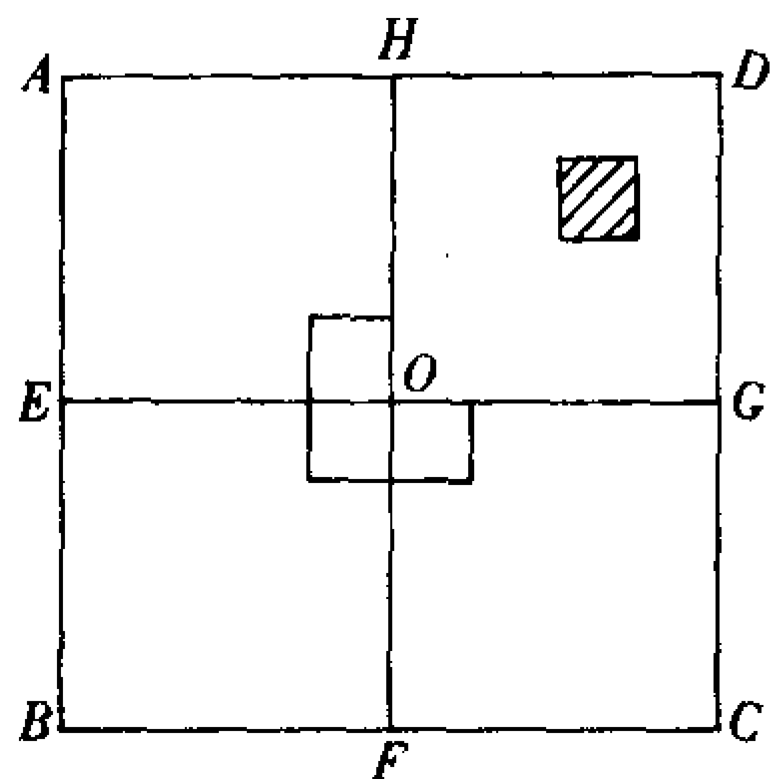
15·86 试证:在 $2^n\times2^n(n\in N)$ 个正方形网格中挖去一个小方格后,总可以由三个小方格构成的"L"形块恰好铺满(既不重叠,也无空隙).

(中国上海市中学数学竞赛,1981 年)

[证] 用数学归纳法.

(1)$n=1$ 时,命题显然真.

(2)若 $n=k$ 时命题真,则 $n=k+1$ 时,则把挖去一个小方格的 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 网格的 $ABCD$ 一分为四,且每一块皆为 $2^k\times 2^k$ 的网格.其中必有一块是挖去一个小方格的,无妨设它是 $HOGD$.



在 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 网格中心 O 处,依图再挖去一个"L"形块,这样四个方块皆成为被挖去一个小方格的 $2^k\times 2^k$ 网格.由归纳假设,显然它们皆可被"L"形块铺满.

综上,对任何自然数 n 结论成立.

15·87　若将 $1\times k$ 的矩形($k\in N$)称为"长条",试问对怎样的自然数 n,可将 $1995\times n$ 的矩形分成两两不同的"长条"?

(第 58 届莫斯科数学竞赛,1995 年)

[解]　显然,"长条"的边应平行于所给矩形的边.不妨假定矩形的边长以厘米为单位.分以下两种情况讨论:

(1)$n<1995$.此时所能分出的最大的"长条"的长度等于 1995cm.但因用大小不同的"长条"所能覆盖的面积不超过

$$1+2+\cdots+1995=\frac{1}{2}\times 1995\times 1996(\mathrm{cm}),$$

而所给矩形的面积为 $1995n\,\mathrm{cm}^2$.由此知

$$\frac{1}{2}\times 1995\times 1996\geqslant 1995n,$$

即　$$n\leqslant\frac{1}{2}\times 1996=998.$$

对于 $n\leqslant 998$,可以给出适当的将 $1995\times n$ 的矩形分为两两不同的"长条"的分法.例如,先将 $1995\times n$ 的矩形分成 n 条长度均为 1995 的"长条",留下其中一条,将第二条分成长度分别为 1 与 1994 的两条,将第三条分成长度分别为 2 与 1993 的两条,如此等等.

(2)$n\geqslant 1995$.此时所能分出的最大的"长条"的长度等于 $n$cm.由于长度不超过 n 的大小不同的"长条"所能覆盖的面积不超过

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

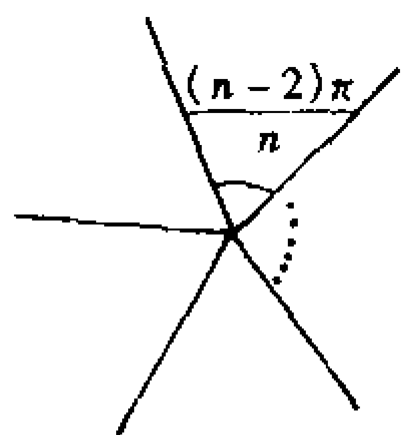
所以 $\frac{1}{2}n(n+1)\geqslant 1995n$，故知 $n\geqslant 3991$.

可以类似地给出此种情况下的分法：

综上，知 $n\leqslant 998$ 或 $n\geqslant 3991$.

15·88 用怎样的同一种正多边形可以嵌拼成木地板(无缝隙且无重叠).

(基辅数学奥林匹克,1960 年)



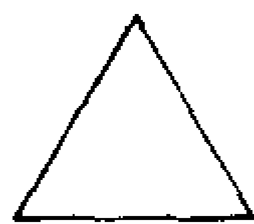
[解] 在嵌拼合木地板时,设有 m 个正 n 边形的顶点集中在平面上某一个点上.

$$\therefore\quad m\cdot\frac{(n-2)\pi}{n}=2\pi,\quad m=\frac{2n}{n-2}.$$

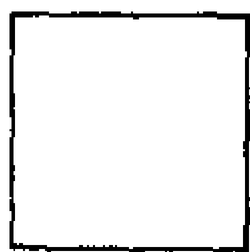
当 $n>6$ 时，$0<\frac{4}{n-2}<1$.

$$\because\quad \frac{2n}{n-2}=\frac{2n-4+4}{n-2}=\frac{2(n-2)}{n-2}+\frac{4}{n-2}=2+\frac{4}{n-2},$$

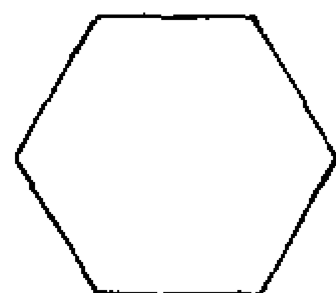
$$\therefore\quad 2<\frac{2n}{n-2}<3.$$



$n=3$



$n=4$



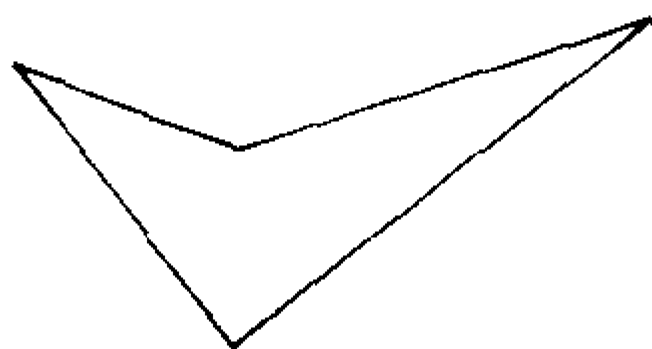
$n=6$

故 n 只能取值 3、4、5、6.

经检验:当 $n=3$、4、6 时适合;当 $n=5$ 时不适合.

故 正三角形、正方形和正六边形可以嵌拼成木地板.

15·89 如果一个四边形任意一对边不相交,且有一个内角大于 180°,则我们称之为“标形”(如图).设 C 是一个凸 n 边形,其内部区域被划分成 q 个四边形之并,即任意两四边形不重叠(也无空隙),设其中有 p 个标形.求证:$q\geqslant p+\frac{n-2}{2}$.



(加拿大数学奥林匹克,1995 年)

[证] 为方便计,下称标形中大于 180°的角为优角.

显然所划的 q 个四边形中,有 p 个优角.

在 C 中不同的标形中的每个优角相对应的顶点(它们显然两两不同),绕这 p 个顶点各一圈共得到的角度和为 $2p\pi$.

另外,C 的内角和为 $(n-2)\pi$,而 q 个四边形的内角和为 $2\pi q$.

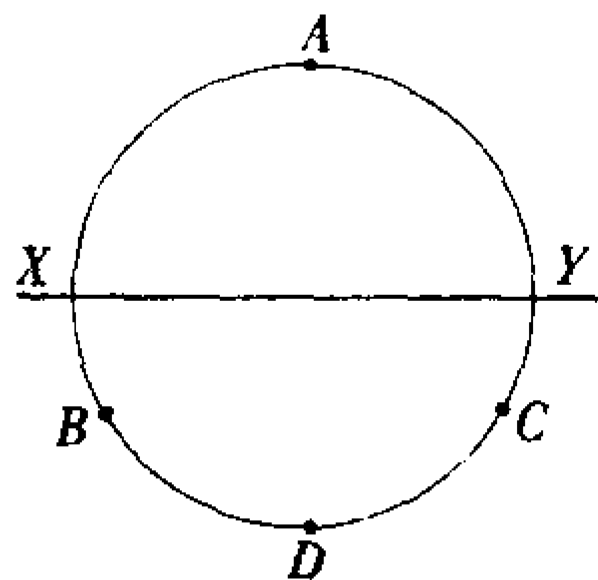
$\therefore\quad 2\pi q \geqslant 2p\pi+(n-2)\pi$,

即 $\quad q \geqslant p+\dfrac{n-2}{2}$.

15·90 在单位圆周上,任给 n 个不同的点,设以这 n 个点为端点的长度大于 $\sqrt{2}$ 的线段的条数为 q,求证:$3q \leqslant n^2$.

(波兰数学奥林匹克,1997 年)

[证] 设 A 为圆周上一点,称以 A 为中点的半圆弧为"A 半圆".



先证:任给圆周上 n 个点,必有一点 P,使得"P 半圆"覆盖这 n 个点中的至少 s 个点,这里当 $3|n$ 时,$s=\dfrac{n}{3}$;当 $3\nmid n$ 时,$s=\left[\dfrac{n}{3}\right]+1$.

事实上,如图所示,设 A 为其中一点,弧 $\overparen{XAY}$ 为"A 半圆".

若 D 也为所给点,则由于"A 半圆"与"D 半圆"覆盖整个圆周,此时取 P 点为 A 或 D 均可;

若 D 不是所给 n 个点中的点,当 $\overparen{XD}$ 或 $\overparen{YD}$ 内部不含给定点时,结论也是显然的,当 $\overparen{XD}$ 与 $\overparen{YD}$ 内部都有给定点时,如图,考虑"A 半圆"、"B 半圆"与"C 半圆",它们覆盖整个圆周,此时 A、B、C 中有一点满足题意.

下面用归纳法证明:当 $3|n$ 时,$3q \leqslant n^2$,当 $n\nmid n$ 时,$3q<n^2$.

事实上,当 $n=1$ 时,$q=0$,显然成立.

设 $n=k$ 时,命题成立,则当 $n=k+1$ 时,由前所证,可知存在一点 P,使"P 半圆"覆盖这 $k+1$ 个点中 s 个点,这里的 s 如前定义.

显然"P 半圆"上任意一点到 P 的距离$\leqslant \sqrt{2}$,所以,以 P 为端点的线段中,长度$>\sqrt{2}$ 的至多 $k+1-s$ 条.

记 q' 为除点 P 外,其余 k 个点中长度$>\sqrt{2}$ 的线段条数,由归纳假设,当 $3|k$ 时,当然 $3\nmid k+1$,有 $3q' \leqslant k^2$,此时

$3q \leqslant 3q'+3(k+1-s)$

$$= k^2 + 3k + 3 - 3\left(\left[\frac{k+1}{3}\right] + 1\right)$$

$$= k^2 + 3k - 3\left[\frac{k+1}{3}\right]$$

$$= k^2 + 2k < (k+1)^2,$$

当 $3+k$ 时,若 $3+k+1$,则 $S = \left\{\frac{k+1}{3}\right\} + 1$,此时

$$3q \leqslant 3q' + 3(k+1-s)$$

$$< k^2 + 3k + 3 - 3\left(\left[\frac{k+1}{3}\right] + 1\right)$$

$$= k^2 + 3k - (k-1) = (k+1)^2.$$

当 $3 \nmid k$ 时,若 $3 \nmid k+1$,则 $3q' \leqslant k^2 - 1$,此时

$3q \leqslant 3q' + 3(k+1-s) = k^2 - 1 + 3k + 3 - (k+1) = (k+1)^2.$

综上,对一切自然数 n,均有 $3q \leqslant n^2$.

15·91 给定四个全等的直角三角形.每次将一个三角形沿斜边上的高剪成两个三角形.求证:无论经多少次上次操作,在所得的三角形总能找到两个全等的三角形.

(第 58 届莫斯科数学竞赛,1995 年)

[证] 用反证法.若不然,我们考察具有如下性质的最小的 n:在经过 n 次操作之后,可从某四个全等的直角三角形得到两两皆不全等的三角形.假定一开始给定的就是这样四个三角形.

应当指出,此处操作的顺序已不重要(意即无论先剪哪个三角形,再剪哪个三角形,都不会影响最终的结果).

既然一开始给的是四个全等的三角形,所以必定要剪开其中的三个(否则就始终保留有两个全等的三角形).

不妨假定开头的三次操作就分别剪开了这三个三角形.

于是,由剪法可知,所剪成的六个三角形可以分为两组,每组中的三个三角形全等.这样一来,每一组中都必须要再剪开两个三角形(否则就始终保留有两个全等的三角形).

此后分别剪开它们,不难看出,我们再次拥有四个全等的三角形.这意味着我们要在剩下来的 $n-7$ 次操作中,要把它们剪成两两互不全等的三角形.这与 n 的最小性相矛盾.

所以,在任何一次操作之后都能找到两个全等的三角形.

15·92　在坐标平面上有4个棋子，它们的中心皆为格点. 每个棋子均可按以另外任意两个棋子的中心为起点和终点的向量移动. 求证：任何棋子皆可按此规则设法最终重叠在一起.

（第22届全俄数学奥林匹克，1996年）

［证］　我们先来证明一个引理　假如三个棋子位于同一直线上且具有整数坐标，则其中任意两个棋子均可重叠.

引理的证　设棋子 A 和 B 之间的距离为三对棋子间距离中的最小值. 将第三个棋子 C 按 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{BA}$ 移动，直到将第三个棋子 C 移到线段 AB 上，这时三对棋子间距离中最小值将减小.

由于位于同一直线上两点间距离是整数，经过这样若干步之后，这个最小距离将变成0. 如果指定的两个棋子已经重叠，则引理得证.

否则，可将两个重叠的棋子中指定的那一个移动到另一个指定的棋子上，引理得证.

将所有棋子向一个坐标轴投影，可以把投影看作棋子，即如果棋子按某个向量移动，则它的投影便按这个向量的投影移动. 将其余两个棋子中的一个看作第三个，就可以将指定的两个棋子的投影重叠.

我们再将两个指定的棋子看作一个棋子（需要移动时可以移动两次. 先移动其中一个，然后再移动另一个. 这样移动后，它们的投影仍旧重叠）. 这"一个"棋子可以和其余两个棋子中的任何一个棋子的投影重叠.

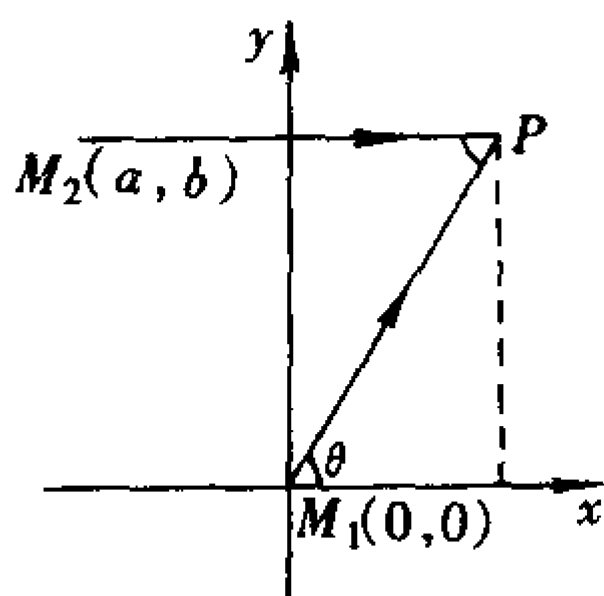
于是，我们可以使这三个棋子有相同的投影，即它们位于同一直线上且具有整数坐标，并且其中有两个要求重叠的棋子.

根据引理，它们可以重叠.

15·93　质点 M_1、M_2 的位置是 $M_1(0,0)$，$M_2(a,b)$（$a<0,b>0$）. M_2 由原位置以等速度 V 沿 X 轴正方向运动，同时 M_1 也由原位置作等速直线运动. 为了使 M_1 以最慢的速度与 M_2 相碰，试确定：(1) M_1 运动的速度（大小和方向），(2)质点从开始运动到相碰所需的时间.

（中国福建省数学竞赛，1978年）

［解1］　设质点 M_1 以等速 u 作直线运动，运动方向与 X 轴正方向成 θ 角，经过时间 t 与质点 M_2 相碰于点 P.



于是得 $t=\dfrac{\dfrac{b}{\sin\theta}}{u}=\dfrac{-a+b\text{ctg}\theta}{v}$,

$$\therefore\quad u=\frac{bv}{b\cos\theta-a\sin\theta}$$
$$=\frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)}$$
$$=\frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)},$$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

当 $\cos(\theta-\alpha)=1$ 即 $\theta=\alpha=\text{arctg}\left(-\dfrac{a}{b}\right)$时,$u$ 最小,记这最小值为 $\overline{u}$.

(1)M_1 运动速度为 $\overline{u}=\dfrac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$,运动方向与 X 轴正方向所成的角 $\theta=\text{arctg}\left(-\dfrac{a}{b}\right)$.

(2)质点从开始运动到相碰的时间是 $t=\dfrac{\dfrac{b}{\sin\alpha}}{\overline{u}}=\dfrac{a^2+b^2}{-av}$.

[**解 2**] 设质点 M_1M_2 相碰于 $P(x,b)$,则所需的时间为

$$t=\frac{\sqrt{x^2+b^2}}{u}=\frac{x-a}{v}.$$

由此得 $v^2(x^2+b^2)=u^2(x-a)^2$,

即 $(u^2-v^2)x^2-2au^2x+a^2u^2-b^2v^2=0.$ $(*)$

因 x 是实数,所以$(au^2)^2-(u^2-v^2)(a^2u^2-b^2v^2)\geqslant0$.

$$a^2u^2v^2+b^2u^2v^2-b^2v^4\geqslant0.$$

$\because$ $v>0$, $u>0$, $b>0$. $\therefore$ $u\geqslant\dfrac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(1)M_1 运动速度 u 最小是 $\overline{u}=\dfrac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 代入$(*)$得

$$x=\frac{a\,\overline{u}^2}{\overline{u}^2-v^2}=-\frac{b^2}{a}.$$

运动方向与 X 轴正方向所成的角是

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{x}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right).$$

(2)所需时间是 $t=\frac{x-a}{v}=\frac{a^2+b^2}{-av}$.

15·94 序列$\{a_1,a_2,\cdots\}$定义为:$a_{2n}=a_n,a_{2n+1}=(-1)^n$.在坐标平面上,一点 P 依如下方式运动:(1)P_0 为原点,开始时 P 由 P_0 移到$(1,0)$,记为 P_1.(2)当 P 移到P_i 后,若 $a_i=1$,则将方向左转 90°并前进一格;若 $a_i=-1$,则将方向右转 90°并前进一格.求证:P 点不会两次通过同一条线段.

(日本数学奥林匹克,1995 年)

[证] 用反证法.若 P 点两次经过某条线段,那么可能有两种情况:

(1)P 点由不同的方向两次经过某条线段.我们考察 $P_i(x_i,y_i)$的两坐标的奇偶性,易知 $i\equiv1,2,3,4(\mathrm{mod}4)$时,$P_i$ 的横、纵坐标的奇偶性分别为(奇,偶),(奇,奇),(偶,奇),(偶,偶),易知不存在 i,j 使

$x_1\equiv x_{j+1},\ y_i\equiv y_{j+1},\ x_{i+1}\equiv x_j,\ y_{i+1}\equiv y_j(\mathrm{mod}2)$,

从而这种情况不可能发生.

(2)P 点由同一方向两次经过某条线段,考察由 P_0、P_2、$P_4\cdots$这样的点 P_i 连成的折线,易知:定义 $a_n=a_{2n}$,$p'_n=p_{2n}$,则折线 $P'_0P'_1P'_2\cdots$与折线 $P_0P_1P_2\cdots$相似,即前者可由后者绕原点逆时针旋转 45°并放大 $\sqrt{2}$ 倍得到.

于是我们有:$x_{2n}=x_n-y_n,\ y_{2n}=x_n+y_n$.

对图形略加观察可得:

①$a_{2n+1}=1$ 时,$x_{2n+1}=x_{n+1}-y_n,\ y_{2n+1}=y_{n+1}+x_n$;

②$a_{2n+1}=-1$ 时,$x_{2n+1}=x_n-y_{n+1},\ y_{2n+1}=x_n+x_{n+1}$.

现设 P_iP_{i+1}和 $P_jP_{j+1}(i<j)$是初次走过的相同的线段(初次走过的含义是 i 最小),则 $P_i=P_j,P_{i+1}=P_{j+1}$.

首先,由(1)中的讨论知 $4|(j-i)$.我们分两种情况进行讨论:

(i) $2|i$,则由 $p_i=P_j$ 知$P_{\frac{i}{2}}=P_{\frac{j}{2}}$,再由 $P_{i+1}=P_{j+1}$和 $4|(j-i)$得 $a_{i+1}=a_{j+1}$,

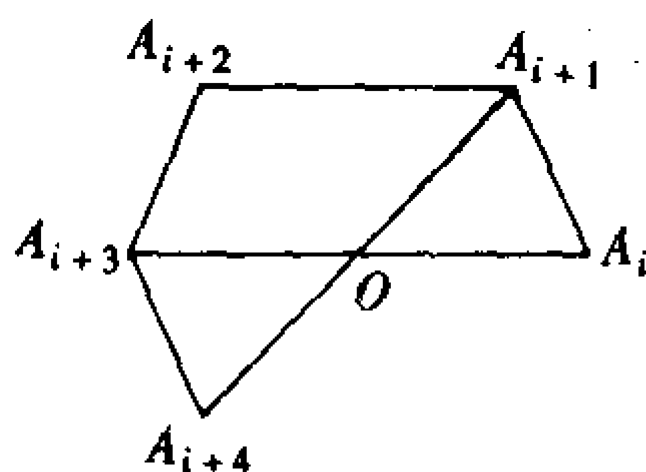
于是 $P_{i+1}=P_{j+2}$,即 $P_{\frac{i}{2}+1}=P_{\frac{j}{2}+1}$,与 i 最小矛盾;

(ii)$2\nmid i$,类似有 $P_{\frac{i-1}{2}}=P_{\frac{i-1}{2}}$，$P_{\frac{i+1}{2}}=P_{\frac{i+1}{2}}$，亦与 i 最小矛盾.

综上所述,命题成立.

15·95 设 $n\geqslant 5(n\in N)$,求最大的正整数 k(用 n 表示)使得存在一个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中恰好存在 k 个四边形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$,它们均有内切圆,这里 $A_{n+i}=A_i$.

(美国数学奥林匹克,1988 年)



[解] 满足题目要求的最大整数 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.

(1)先证 $k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.事实上可以证明四边形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ 与四边形 $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$ 不同时具有内切圆.

如图,若 $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ 与 $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$,A_{i+4}都有内切圆,则

$$A_iA_{i+1}+A_{i+2}A_{i+3}=A_{i+1}A_{i+2}+A_{i+3}A_i,$$

$$A_{i+1}A_{i+2}+A_{i+3}A_{i+4}=A_{i+2}A_{i+3}+A_{i+1}A_{i+4},$$

上两式相加有 $A_iA_{i+1}+A_{i+3}A_{i+4}=A_{i+1}A_{i+4}+A_iA_{i+3}$.

但

$$A_{i+1}A_{i+4}+A_iA_{i+3}=A_iO+A_{i+1}O+A_{i+3}O+A_{i+4}O$$
$$>A_iA_{i+1}+A_{i+3}A_{i+4},$$

矛盾!

由上述结论可知,有内切圆的四边形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$由边 $A_{i+1}A_{i+2}$惟一确定,且任意相邻两边(如 A_iA_{i+1},$A_{i+1}A_{i+2}$)不都是某个有内切圆的四边形的惟一确定边,这表明 $k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.

(2)再证 $n\geqslant 5$ 时可取 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$满足题设.

若 n 为偶数,设 $n=2m$.构造一个凸 $2m$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2m}$使得此 $2m$ 边形的每个内角均为$\frac{n-1}{m}\pi$,且

$$A_1A_2=A_3A_4=\cdots=A_{2m-1}A_{2m}=a,$$

$$A_2A_3=A_4A_5=\cdots=A_{2m-2}A_{2m-1}=A_{2m}A_1=b,$$

这里 $b=\frac{a}{1+\cos\theta}$，$\theta=\frac{m-1}{m}\pi$.

此时该凸 n 边形有 m 个四边形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}(i=1,2,\cdots,2m)$ 有内切圆.

若 n 为奇数,设 $n=2m-1$. 考虑上述的凸 $2m$ 边形,可在四边形 $A_{2m}A_1A_2A_3$ 中取一点 P,使得四边形 $PA_3A_4A_5$ 和 $PA_{2m-2}A_{2m-1}A_{2m}$ 为有内切圆的四边形,这时凸 $2m-1$ 边形 $PA_3A_4\cdots A_{2m}$ 中有 $m-1$ 个满足题目要求的四边形.

综上，所求 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.

中篇　立体几何

第十六章　直线与平面

16·1　空间有同样长的三条线段，证明：存在一个平面，使这三条线段在平面上的投影也相等.

（第 11 届全俄数学奥林匹克，1985 年）

［证］　首先指出，在空间中长度相等且相互平行的线段在任意平面上的投影都是相等的.

我们对题中的三条线段作平移，使之成为有公共顶点的线段 DA、DB、DC.

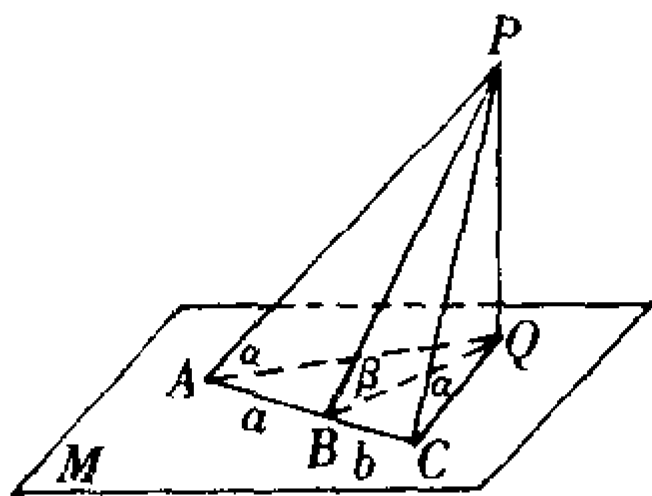
若 A、B、C 三点共线，则过此直线的平面即为所求.

若 A、B、C 不共线，则此三点确定的平面 α 为所求.

如果 D 在 α 内，则结论显然.

如果 D 不在 α 内，易证 DA、DB、DC 在 α 内投影相等.

16·2　从平面 M 外一点 P，向平面 M 引三条斜线，这三条斜线在同一平面内，斜线足顺次为 A、B、C，斜线与平面 M 所成的角分别为 α、β、α，并且 $AB=a$，$BC=b$，求：P 点到平面 M 的距离.



（中国辽宁省数学竞赛，1978 年）

［解 1］　从 P 引 M 的垂线，垂足为 Q，于是

$\angle PAQ=\angle PCQ=\alpha$，$\angle PBQ=\beta$，$AB=a$，$BC=b$.

设 $PQ=d$，则 $AQ=CQ=PQ\text{ctg}\alpha=d\text{ctg}\alpha$，$BQ=PQ\text{ctg}\beta=d\text{ctg}\beta$，

由 $AQ=CQ$，并且 A、B、C 在同一直线上，得知 $\triangle ACQ$ 是等腰

三角形，

$\therefore \quad \angle QAB=\angle QCB$.

在$\triangle AQB$中，由余弦定理得

$$\cos\angle QAB=\frac{a^2+d^2\text{ctg}^2\alpha-d^2\text{ctg}^2\beta}{2ad\,\text{ctg}\alpha}$$

在$\triangle BQC$中，由余弦定理得

$$\cos\angle QCB=\frac{b^2+d^2\text{ctg}^2\alpha-d^2\text{ctg}^2\beta}{2bd\,\text{ctg}\alpha}.$$

$\because \quad \angle QAB=\angle QCB$,

$\therefore \quad b[a^2+d^2(\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta)]=a[b^2+d^2(\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta)]$,

整理得 $(a-b)d^2(\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2)=ab(a-b)$,

因此，当$a\neq b$时，得 $d=\sqrt{\dfrac{ab}{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}}$.

当$a=b$时，$\because$ $\triangle AQC$是等腰三角形，$\therefore$ $QB\perp AC$,

$\therefore$ $\triangle AQB$是直角三角形.

由勾股定理得 $a^2+d^2\text{ctg}^2\beta=d^2\text{ctg}^2\alpha$.

$$\therefore \quad d=\sqrt{\frac{a^2}{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}}=\frac{a}{\sqrt{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}}=\frac{a\sqrt{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}}{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}.$$

[解2] 在$\triangle ABQ$中，利用余弦定理得

$$\cos\angle ABQ=\frac{AB^2+BQ^2-AQ^2}{2AB\cdot BQ}=\frac{a^2+d^2(\text{ctg}^2\beta-\text{ctg}^2\alpha)}{2ad\,\text{ctg}\beta},$$

在$\triangle CBQ$中，利用余弦定理得

$$\cos\angle CBQ=\frac{BC^2+BQ^2-CQ^2}{2BC\cdot BQ}=\frac{b^2+d^2(\text{ctg}^2\beta-\text{ctg}^2\alpha)}{2bd\,\text{ctg}\beta},$$

$\because$ $\angle ABQ$与$\angle CBQ$互为补角，

$\therefore$ $\cos\angle ABQ=-\cos\angle CBQ$,

即 $$\frac{a^2+d^2(\text{ctg}^2\beta-\text{ctg}^2\alpha)}{2ad\,\text{ctg}\beta}=-\frac{b^2+d^2(\text{ctg}^2\beta-\text{ctg}^2\alpha)}{2bd\,\text{ctg}\beta}.$$

得 $(a+b)d^2(\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta)=(a+b)ab$.

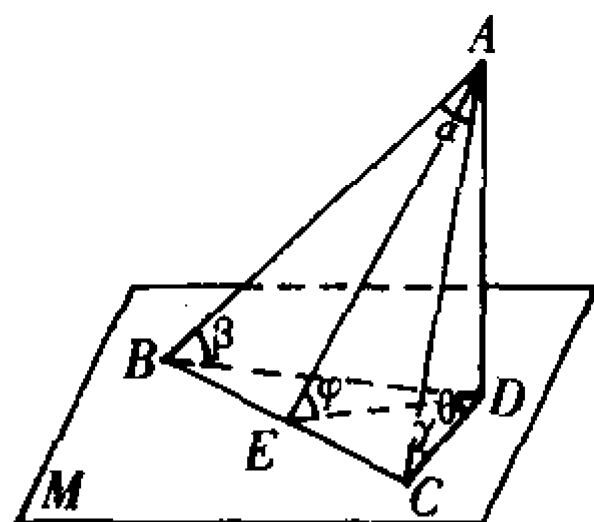
$$\therefore \quad d=\sqrt{\frac{ab}{\text{ctg}^2\alpha-\text{ctg}^2\beta}}.$$

16·3 由平面M外一点A向平面M引斜线AB、AC，使$\angle BAC=\alpha$，又AB、AC与平面M的交角分别为β、γ.(1)求AB、AC在平面M

上的射影所成的角;(2)求平面 ABC 和平面 M 的交角.

(中国福建省数学竞赛,1962 年)

[解] (1)作 $AD\perp$平面 M,垂足为 D.令 $AD=1$, $\angle BDC=\theta$,



则 $AB=\dfrac{1}{\sin\beta}$, $AC=\dfrac{1}{\sin\gamma}$.

由余弦定理得

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha$$
$$=\csc^2\beta+\csc^2\gamma$$
$$=2\csc\beta\csc\gamma\cos\alpha, \qquad ①$$
$$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\theta$$
$$=\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma-2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\cos\theta, \qquad ②$$

由①,②解得

$$\cos\theta=\frac{\csc\beta\csc\gamma\cos\alpha-1}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}=\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

$\therefore\quad \theta=\arccos(\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)$.

(2)在平面 M 内作 $DE\perp BC$,垂足为 E,连 AE,则 $AE\perp BC$.设 $\angle AED=\varphi$,则 φ 为所求平面 ABC 与平面 M 的交角.

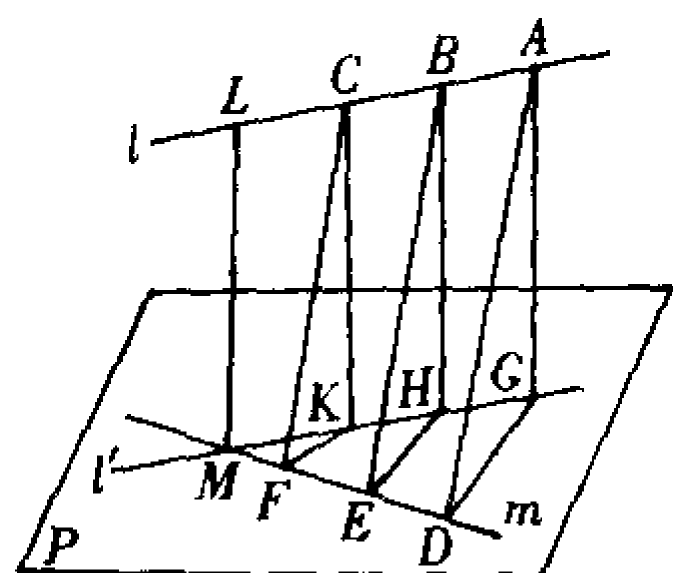
$$\because\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AE\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad \sin\varphi=\frac{1}{AE}=\frac{BC}{AB\cdot AC\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha}}{AB\cdot AC\sin\alpha}$$
$$=\csc\alpha\sqrt{\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}-\frac{2}{AB\cdot AC}\cos\alpha}$$
$$=\csc\alpha\ \sqrt{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha},$$

故 $\quad\varphi=\arcsin(\csc a\ \sqrt{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha})$.

16·4 设 l、m 是两条异面直线,在 l 上有 A、B、C 三个点,且 $AB=BC$.过 A、B、C 分别作 m 的垂线 AD、BE、CF,垂足依次为 D、E、F.已知 $AD=\sqrt{15}$, $BE=\dfrac{7}{2}$, $CF=\sqrt{10}$,求:l 与 m 的距离.

(中国高中数学联赛,1992 年)



[解] 设 LM 为直线 l 与 m 的公垂线，$L \in l, M \in m$.

过 m 作平面 P 平行于直线 l，过 A、B、C 分别作平面 P 的垂线 AG、BH、CK，垂足分别为 G、H、K，则点 G、H、K 落在与 l 平行的直线 l' 上，连 GD、HE、KF.

$\because \quad AB = BC, \ AG // BH // CK,$

$\therefore \quad GH = HK.$

又$\because \quad AD \perp m, \ BE \perp m, \ CF \perp m$. 由三垂线定理得

$GD \perp m, \ HE \perp m, \ KF \perp m$

故 $GD // HE // KF$，且 E、H 分别为 FD、KG 的中点.

设 l 与 m 的距离为 x，则 $\quad AG = BH = CK = LM = x.$

$$\because \quad GD = \sqrt{AD^2 - AG^2}, \ HE = \sqrt{BE^2 - BH^2},$$

$$KF = \sqrt{CF^2 - CK^2}.$$

又 $\quad AD = \sqrt{15}, \ BE = \dfrac{7}{2}, \ CF = \sqrt{10},$

当点 A、B、C 在点 L 的同一侧时，有 $\quad 2HE = KF + GD.$

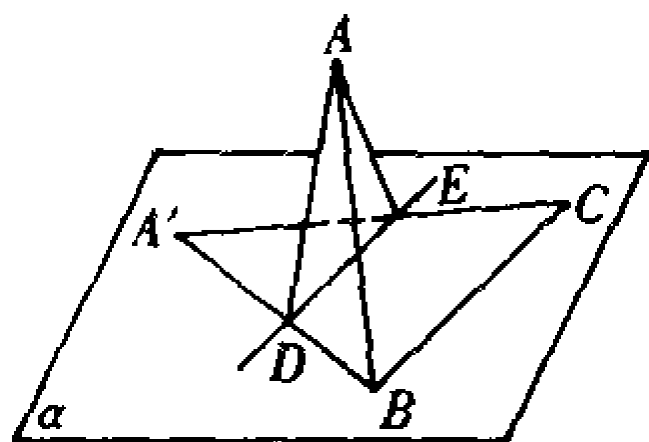
于是 $\quad 2\sqrt{\dfrac{49}{4} - x^2} = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{15 - x^2}.$

解此方程，得 $\quad x = \pm\sqrt{6}$，舍去负根，求得直线 l 与 m 的距离为$\sqrt{6}$.

注 当 A、B、C 不全在 L 的同一侧时，有

$$2\sqrt{\frac{49}{4} - x^2} = \sqrt{15 - x^2} - \sqrt{10 - x^2}.$$

此方程无解，故 A，B，C 必在点 L 的同侧.



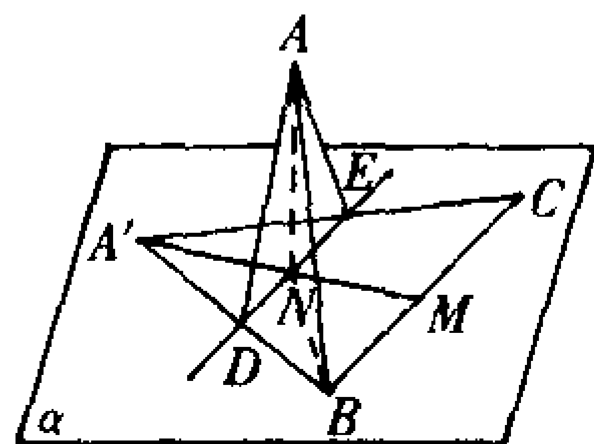
16·5 平面 α 内有一个正$\triangle A'BC$(如图). 直线 $DE // BC$ 且分别交 $A'B$、$A'C$ 于 D、E，沿 DE 将$\triangle A'DE$ 折起使之与平面 α 垂直至$\triangle ADE$ 位置. 问与 BC 平行的直线 DE 取在何处的 AB 最短?

(中国北京市数学竞赛，1979 年)

[解] 在$\triangle A'BC$ 中作BC 边上的高$A'M$ 使与DE 交于N，连 BN. 当$\triangle A'BC$ 折起与平面α 垂直时，$AN \perp$平面 α， 则 $AN \perp BN$.

设正$\triangle A'BC$边长为a，且$A'N=X$.

在$\mathrm{Rt}\triangle NMB$中和$\mathrm{Rt}\triangle ANB$中有



$$BN^2=NM^2+BM^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

及　$AB^2=AN^2+BN^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\frac{5}{8}a^2.$

故　当$x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$时，AB最短，此即DE是$A'B$与$A'C$中点连线时.

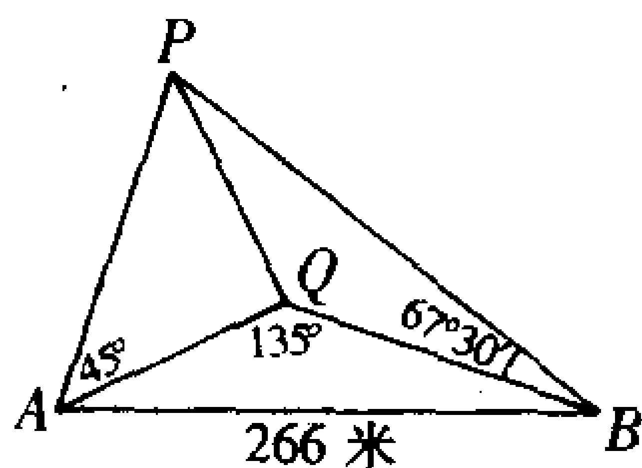
16·6　空中有一气球，在它的正西方A点，测得它的仰角为45°，同时在它的正南偏东45°的B点，测得它的仰角为67°30′，A、B两点间的距离为266米，这两测点均离地1米，问当测量时这气球离地多少米?

（中国上海市数学竞赛，1956年）

[解]　$\angle AQB=135°$，　令　$PQ=x$，

因　$\angle PAQ=45°$，　则　$AQ=x$.

又　$BQ=x\ \mathrm{ctg}67°30'=x\ \mathrm{tg}22\frac{1}{2}°$.



在$\triangle ABQ$中，根据余弦定理得

$AB^2=AQ^2+BQ^2-2\cdot AQ^2\cdot BQ\cdot\cos135°$,

即　$266^2=x^2+x^2\,\mathrm{tg}^2 22\frac{1}{2}°+2\cdot x^2\cdot\mathrm{tg}22\frac{1}{2}°\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故　$266^2=x^2\left(1+\frac{1-\cos45°}{1+\cos45°}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin45°}{1+\cos45°}\right)$,

从而　$266^2=x^2\frac{3}{1+\cos45°}$，　即　$x^2=266^2\cdot\frac{1+\cos45°}{3}$,

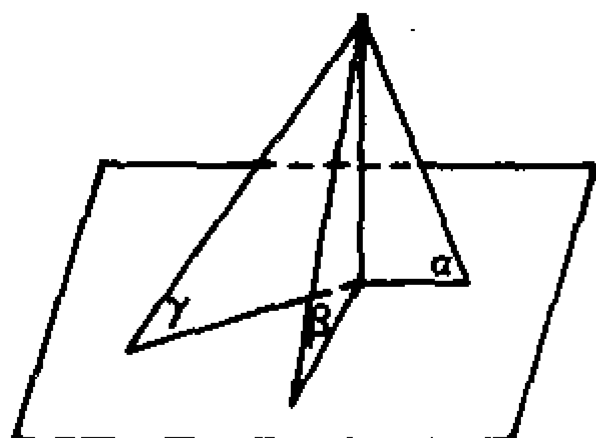
$x=266\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{6}}\approx266\times0.754\approx201$(米),

因测点离地1米，　故　$201+1=202$(米).

故气球离地约202米.

16·7 在水平面上,三个点和天线的基点相距100米、200米、300米,从这三点测得天线的视角的和为90°,天线的高等于多少?

(匈牙利数学奥林匹克,1959年)



[解] 设天线的高为 x 米,和天线基点相距100米、200米和300米点对天线顶端的张角分别为 α、β、γ. 这时有

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{x}{100},\quad \mathrm{tg}\beta=\frac{x}{200},\quad \mathrm{tg}\gamma=\frac{x}{300}.$$

又 $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{x}{300}=\mathrm{tg}[90°-(\alpha+\beta)]=\frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}$$

$$=\frac{1-\dfrac{x}{100}\cdot\dfrac{x}{200}}{\dfrac{x}{100}+\dfrac{x}{200}}=\frac{100\times200-x^2}{300x},$$

有 $300x^2=100\times200\times300-300x^2$,

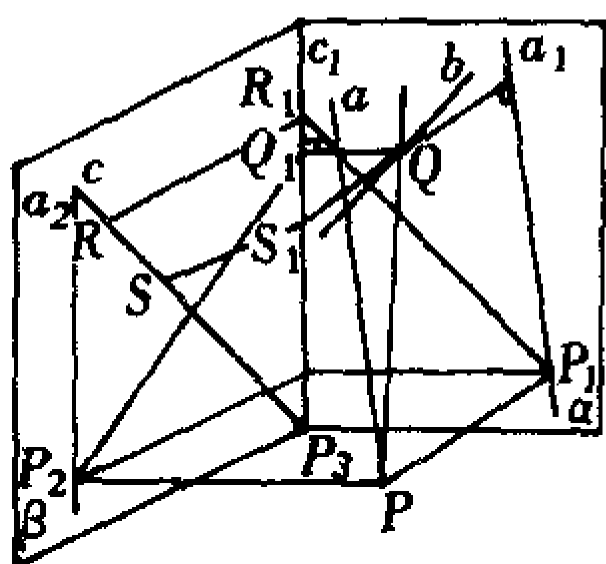
即 $2x^2=100\times200$,

$\therefore$ $x=\pm00$(舍负值)

即天线的高等于100米.

16·8 已知:空间中三条直线 a、b、c. 直线 a、b 均不与直线 c 垂直,点 P、Q 分别在 a、b 上变动,使 PQ 与 c 垂直,过 P 点与 b 垂直的平面交 c 于 R,过 Q 点与 a 垂直的平面交 c 于 S. 求证:RS 的长度为定值.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)



[证] 先设 a、b 为异面直线.

过 b 作平面 α 与直线 a 平行,a_1 是 a 在 α 上的射影.

由于 a、b 均不与 c 垂直, 则 c 不与平面 α 垂直.

设 c 在 α 上的射影为 c_1,β 是由 c 和 c_1 确定的平面,则平面 $\alpha\perp$平面 β.

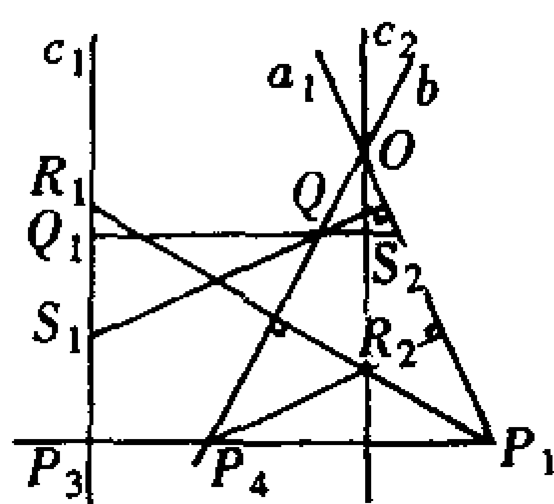
设 a_2 为 a 在平面 β 上的射影,则 $a_1/\!/c_1$.

记 P_1, P_2, P_3 分别为 P 在 α, β, c_1 上的射影，Q_1 为 Q 在 c_1 上的射影，则 $PQ \perp$ 直线 c，$P_2Q_1 \perp$ 直线 c.

由 $P_2Q_1 \perp c$，$a_2 /\!/ c_1$，可证得 P_3Q_1 为定长.

过 P_1 作直线 b 的垂线交 c_1 于 R_1，过 Q 作直线 a 的垂线交 c_1 于 S_1，则 R_1、S_1 是 R、S 在平面 α 上的射影，从而只要证得 R_1S_1 为定长就可证得 RS 为定长.

下面只需证明，若 P_3Q_1 为定长，则必有 R_1S_1 为定长.



事实上，记 P_4 为 P_1P_3 与 b 的交点，则 P_3Q_1 为定长必有 P_4Q 为定长.

如图，过 a_1、b 的交点 O 作直线 c_2，使 $c_1 /\!/ c_1$.

设 R_2、S_2 分别为 P_1R_1、QS_1 与 c_2 的交点，过 P_4 作 a_1 的垂线必经过 $\triangle OP_1P_4$ 的垂心 R_2 点.

则 P_4Q 为定长必有 R_2S_2 为定长，显然有 R_2S_2 为定长必定有 R_1S_1 为定长，即可证明 RS 为定长.

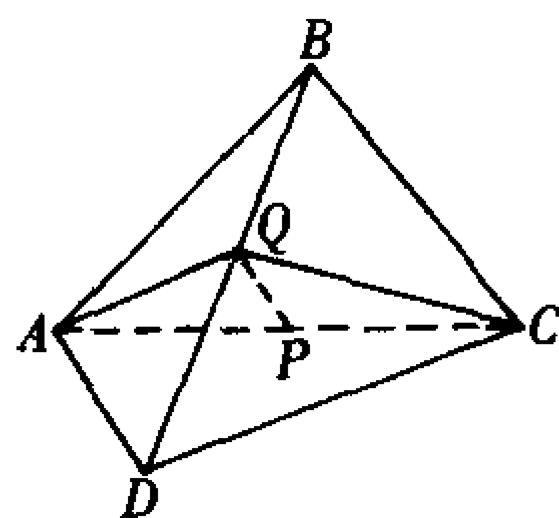
同理可证明直线 a 与 b 共面的情形.

16·9 试证：如果(异面)挠四边形的对边相等，则它的两条对角线中点连线一定垂直于这两条对角线；反之，如果挠四边形的两条对角线中点连线垂直于这两条对角线，则其对边必相等.

(第 6 届美国数学奥林匹克，1977 年)

[证 1] 由已知 $AB = CB$，$AD = BC$.

$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle CDB$.



这两个全等三角形的对应中线 AQ，CQ 满足 $AQ = CQ$.

于是 PQ 为等腰三角形 QAC 底边 AC 的中线，$PQ \perp AC$.

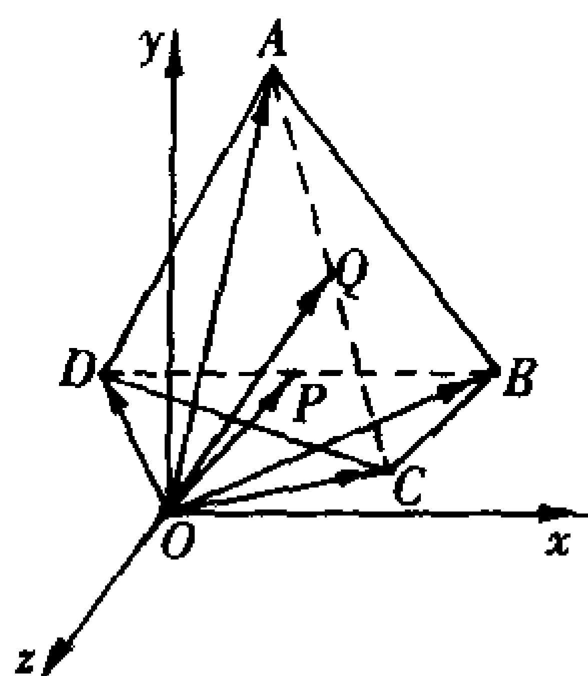
同理 $PQ \perp BD$.

即 PQ 与两条对角线 AC 和 BD 都垂直.

反之，若 PQ 是 AC 和 BD 的中垂线，则将整个图形以 PQ 为轴旋转 180°，必交换 A 和 C、B 和 D 的位置，所以有

$AB = CD$，$AD = CB$.

[证 2] 如图，用 A、B、C、D 及 P、Q 分别表示挠四边形的顶点及



对角线的中点.

用 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$、$\vec{D}$及 $\vec{P}$、$\vec{Q}$分别表示由原点出发到相应点的矢量.

用挠四边形 $ABCD$ 的对边相等,则有

$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=(\vec{C}-\vec{D})\cdot(\vec{C}-\vec{D})$, ①

$(\vec{B}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{C})=(\vec{A}-\vec{D})\cdot(\vec{A}-\vec{D})$, ②

①-②得 $[(\vec{B}+\vec{D})-(\vec{A}+\vec{C})]\cdot(\vec{A}-\vec{C})=0$. ③

又 $2(\vec{P}-\vec{Q})=(\vec{B}+\vec{D})-(\vec{A}+\vec{C})$,

$\therefore$ $2(\vec{P}-\vec{Q})\cdot(\vec{A}-\vec{C})=0$, 即 $PQ\perp AC$.

①+②得 $[(\vec{B}+\vec{D})-(\vec{A}+\vec{C})]\cdot(\vec{B}-\vec{D})=0$, ④

有 $2(\vec{P}-\vec{Q})\cdot(\vec{B}-\vec{D})=0$. 故 $PQ\perp BD$.

所以 PQ 与两对角线都垂直.

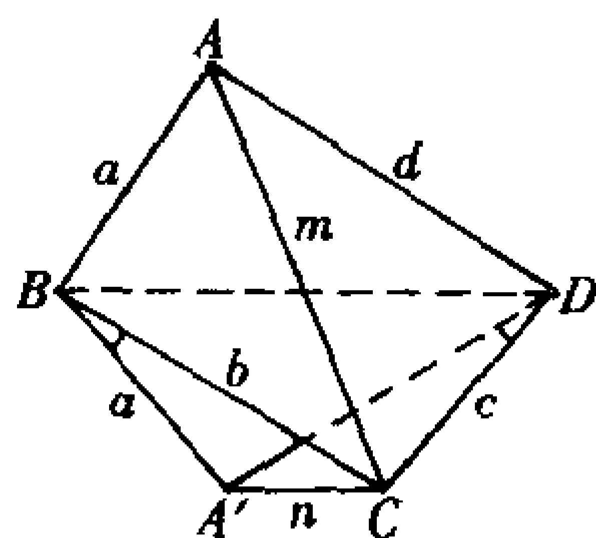
反之,由 $PQ\perp AC$, $PQ\perp BD$, 可得③,④成立.

由③+④及③-④即得①,②. 所以,有 $AB=CD$, $AD=BC$.

16·10 求证:空间中两组对角分别相等的四边形的两组对边也相等.

(第 33 届美国普特南数学竞赛,1972 年)

[证 1] 设空间四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle ABC=\angle CDA$.



又设 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 中,由余弦定理得

$$\cos\angle ABC=\frac{a^2+b^2-m}{2ab} \quad ①$$

$$\cos\angle CDA=\frac{c^2+d^2-m}{2cd} \quad ②$$

$\because$ $\angle ABC=\angle CDA$. 则由①,②得

$$\frac{a^2+b^2-m}{2ab}=\frac{c^2+d^2-m}{2cd},$$

即 $(ab-d)m^2=(ad-bc)(bd-ac)$. ③

将$\triangle ABD$ 以 BD 为轴旋转到平面 BCD 内,A 点落在平面 BCD 内

的A'，且A'、C在BD的同侧.

∵ $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle BA'D=\angle BAD$,

∴ $\angle BA'D=\angle BCD$. 于是 A'、C、D、B四点共圆.

则 $\angle A'BC=\angle CDA'$, $\cos\angle A'BC=\cos\angle CDA'$,

即 $\dfrac{a^2+b^2+-n^2}{2ab}=\dfrac{c^2+d^2-n^2}{2cd}$,

或 $(ab-cd)n^2=(ad-bc)(bd-ac)$. ④

由③、④可得 $(ab-cd)(m^2-n^2)=0$. ⑤

∵ $A'B=AB$, $A'D=AD$.

∴ B、D都在线段AA'的中垂面内.

由于A'、B、C、D在同一平面内,

∴ C不在AA'的中垂面内.

于是 $A'C\neq AC$, 即 $n\neq m$.

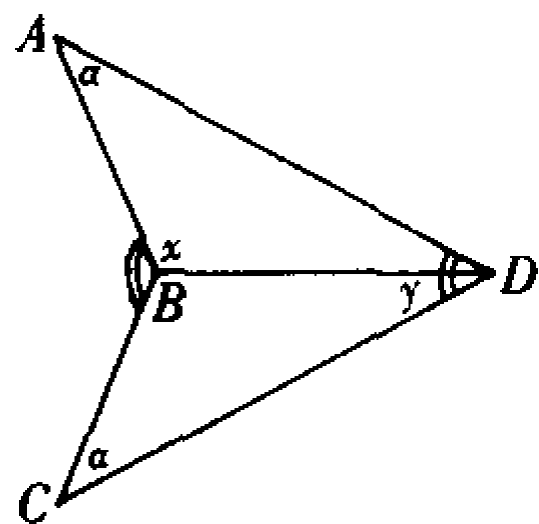
由⑤式有 $ab=cd$,

同理有 $ad=bc$, 即 $a^2bd=c^2bd$,

∴ $a=c$, 即 $AB=CD$.

同理可证 $BC=DA$.

[证2] 设空间四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\angle DCB=\alpha$, $\angle ABC=\angle CDA=\beta$, $\angle ABD=x$, $\angle CDB=y$.



则 $\angle ADB=\pi-(x+\alpha)$,

$\angle CBD=\pi-(y+\alpha)$.

记二面角$A-BD-C$的平面角为θ.

在三面角 $D-AB-C$中,

$$\cos\theta=\frac{\cos\beta-\cos[\pi-(x+\alpha)]\cos y}{\sin[\pi-(x+\alpha)]\sin y}=\frac{\cos\beta+\cos(x+\alpha)\cos y}{\sin(x+\alpha)\sin y}.$$

$$\therefore\ \cos\beta=\sin(x+\alpha)\sin y\cos\theta-\cos(x+\alpha)\cos y$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(x-y+\alpha)-\cos(x+y+\alpha)]\cos\theta$$
$$-\frac{1}{2}[\cos(x+y+\alpha)+\cos(x-y+\alpha)]$$

$$= -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cos(x-y+\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cos(x+y+\alpha).$$

在三面角 $B-ADC$ 中,同理可得

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cos(y-x-\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cos(y+x+\alpha).$$

所以有

$$(1-\cos\theta)\cos(x-y+\alpha)=(1-\cos\theta)\cos(y-x+\alpha).$$

$\because\ 1-\cos\theta\neq 0,$

$\therefore\ \cos(x-y+\alpha)-\cos(y-x+\alpha)=0,$

即 $2\sin\alpha\sin(y-x)=0.$

又$\because\ 2\sin\alpha\neq 0,\quad \therefore\ \sin(y-x)=0,$

再由 $x-y\in(-\pi,\pi)$, 则 $y-x=0,\ y=x.$

即 $\angle CDB=\angle ABD,$

又$\because\ \angle BAD=\angle DCB,\quad BD=BD,$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle CDB.$ 于是 $AB=CD,\quad BC=DA.$

[证 3] 所设同证 2. $\because\ \angle DAB=\angle BCD,$

所以$\triangle ABD$与$\triangle CDB$的外接圆半径相等,设它们的外接圆半径为 R,则

$$AD=2R\ \sin x,\quad BC=2R\ \sin y.$$

$$AB=2R\ \sin(x+\alpha),\quad CD=2R\ \sin(y+\alpha).$$

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得

$$AC^2=4R^2[\sin^2(x+\alpha)+\sin^2y-2\sin(x+\alpha)\sin y\cos\beta],$$

在$\triangle ADC$中,由余弦定理得

$$AC^2=4R^2[\sin^2(y+\alpha)+\sin^2x-2\sin(y+\alpha)\sin x\cos\beta].$$

$$\therefore\ [\sin^2(x+\alpha)-\sin^2(y+\alpha)]-(\sin^2x-\sin^2y)-2[\sin(x+\alpha)\sin y-\sin(y+\alpha)\sin x]\cos\beta=0.$$

即 $\sin(x+y+2\alpha)\sin(x-y)-\sin(x+y)\sin(x-y)-[\cos(x-y+\alpha)-\cos(y-x+\alpha)]\cos\beta=0.$

或 $\sin(x-y)[\sin(x+y+2\alpha)-\sin(x+y)]+2\sin\alpha\sin(x-y)\cos\beta=0,$

$\therefore\quad 2\sin\alpha\sin(x-y)[\cos(x+y+\alpha)+\cos\beta]=0.$

即 $4\sin\alpha\sin(x-y)\cos\dfrac{x+y+\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{x+y-\alpha-\beta}{2}=0.$ ①

由 $0<\alpha<\pi$, $\sin\alpha\neq0$, 又 $\angle DBC<\angle ABD+\angle ABC$, 则 $\pi-(y+\alpha)<x+\beta$,

故 $\dfrac{x+y+\alpha+\beta}{2}>\dfrac{\pi}{2}$.

又由于 $x+\alpha<\pi$, $y<\pi$, $\beta<\pi$,

则 $x+y+\alpha+\beta<3\pi$,

有 $\dfrac{x+y+\alpha+\beta}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$.

即 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x+y+\alpha+\beta}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$,

因此 $\cos\dfrac{x+y+\alpha+\beta}{2}\neq0$,

$\therefore\quad \angle ABD<\angle ABC+\angle DBC$,

可得 $\dfrac{x+y+\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

又由于 $x+\alpha>0$, $y>0$, $\pi-\beta>0$,

则 $\dfrac{x+y+\alpha-\beta}{2}>-\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\quad -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x+y+\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

因此 $\cos\dfrac{x+y+\alpha-\beta}{2}\neq0.$

于是由①式只有 $\sin(x-y)=0$.

再由 $x-y\in(-\pi,\pi)$, 则 $x-y=0$, $x=y$.

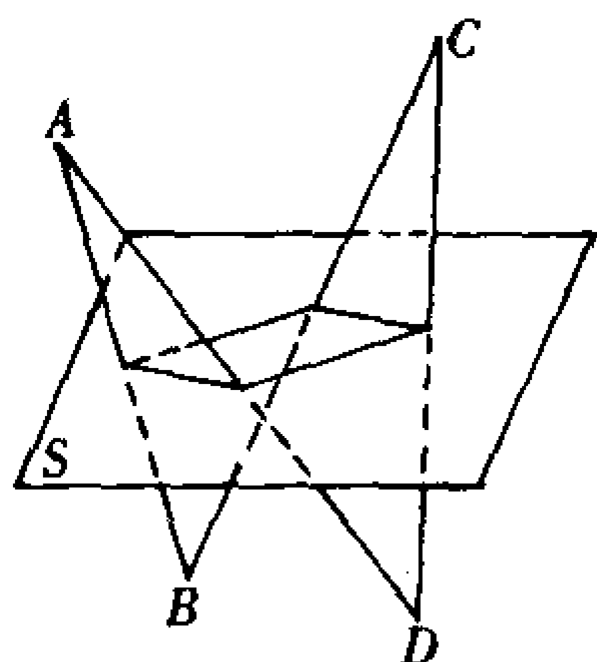
$\therefore\quad \sin x=\sin y$, 从而 $AD=BC$,

又$\because\quad \sin(x+\alpha)=\sin(y+\alpha)$, 从而 $AB=CD$.

16·11 在空间中给定四个点:A、B、C、D.试作一个平面 S,使得 A 和 C 在平面 S 的一侧,B 和 D 在平面 S 的另一侧,且点 A、B、C、D 到平面 S 的距离相等.

(匈牙利数学奥林匹克,1922 年)

[解] 若平面 S 符合题设要求,则它到点 A 和 B、B 和 C、C 和 D



的距离相等，而且每一对的两个点都分布在平面 S 的两侧. 这时 A 和 D 也在平面 S 两侧，且到平面 S 的距离相等.

显然，为满足上述条件，平面 S 应通过线段 AB、BC 和 CD 的中点.

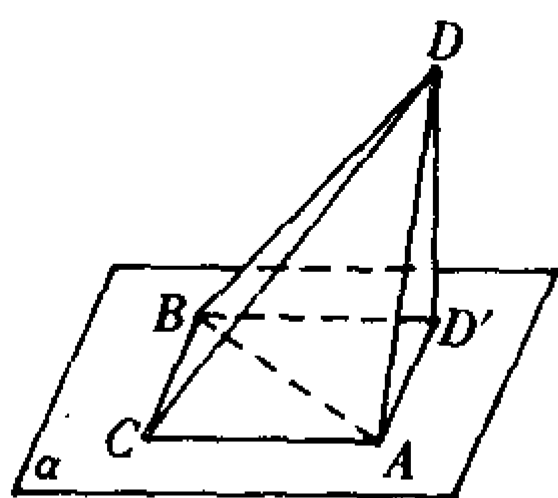
因此，只要过 AB、BC 和 CD 的中点作一平面，这个平面就是题目要求的平面 S.

如果 AB、BC 和 CD 的中点不在同一条直线上，则这样的平面只有惟一一个.

如果 AB、BC 和 CD 的中点在同一条直线上，那么过这直线的任一平面都符合题目要求，因而有无数多组解.

16·12　如果 A、B、C、D 是空间中四点，且 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=\frac{\pi}{2}$. 求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 共面.

（第 8 届加拿大数学奥林匹克，1976 年）



［证］　假设 A、B、C、D 不共面.

由　$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 知，A、B、C 不在同一直线上，于是 A、B、C 可确定一个平面 α，且 D 不在 α 上. 设 D' 为 D 在平面 α 上的射影.

因为　$\angle DBC=\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，

有　$D'D\perp$ 平面 α，

则由三垂线定理的逆定理得　$\angle D'BC=\angle D'AC=\frac{\pi}{2}$.

又∵　$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$，　∴　$\angle AD'B=\frac{\pi}{2}$.

故　$D'B^2+D'A^2=AB^2$，

再　$DB>D'B$，$DA>D'A$，

∴　$DB^2+DA^2>D'B^2+D'A^2=AB^2$.

从而　$\angle ADB\neq\frac{\pi}{2}$，与 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$ 矛盾.

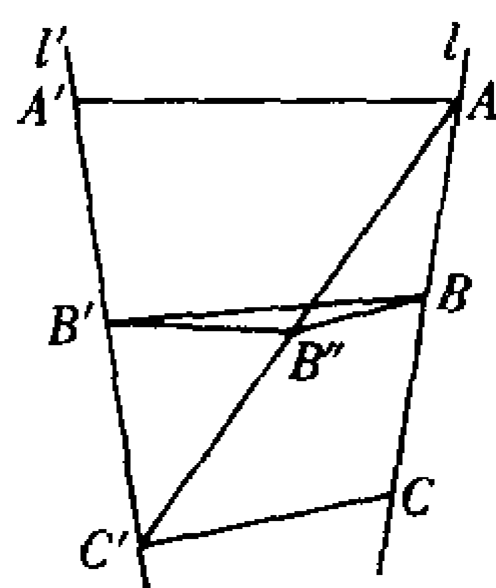
因此，A、B、C、D 共面.

16·13　设 l, l' 为空间中的两条直线，在 l 上取 A、B、C 三点，B 为线段 AC 中点. 若 a、b、c 分别为 A、B、C 到 l' 的距离. 试证：$b \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$，当且仅当 $l /\!/ l'$ 时等式成立.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[证]　设 A、B、C 在 l' 上的射影分别为 A'、B'、C'.

连接 AC'，设 AC' 的中点为 B''.



由于 B 是 AC 的中点，则

$$B'B''=\frac{a}{2},\quad BB''=\frac{c}{2}.$$

在 $\triangle BB'B''$ 中，　$BB'<BB''+B'B''$，

即　$b<\dfrac{a+c}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$.

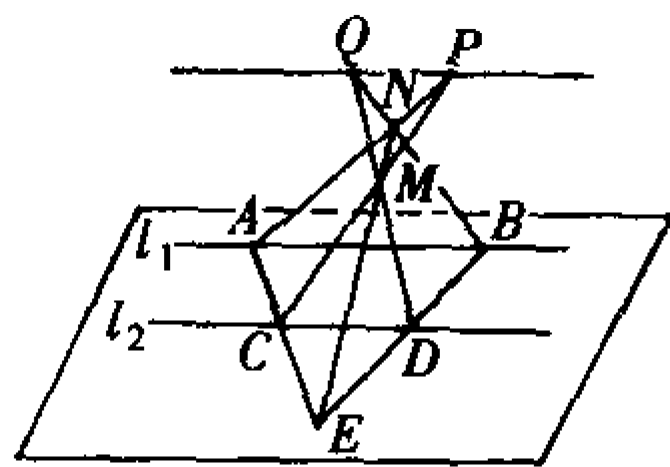
当且仅当　$l /\!/ l'$ 时，　有　$BB'=BB''+B'B''$　及　$a=b=c$，

因而　$b=\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$ 成立.

16·14　在空间已给两条平行直线，并在此两平行线所决定的平面以外给定一点，要求只用直尺过此点作一直线与此两平行线相平行.

（中国北京市数学竞赛，1957 年）

[作法]　在已给的两平行线 l_1 和 l_2 上各取两点 A、B 和 C、D，使得 AC 与 BD 交于一点 E. 设 P 为给定点，联结 PA、PC，并在 PC 上任取一点 M，联 EM 交 PA 于 N（因为直线 AP、CP、EA、EM 共面）.



联结 DM、BN 交于空间一点 Q（EN、EB、DM、BN 共面）. 联结 P、Q，PQ 即为所求的直线.

[证]　因为，DM 不平行于 BN，否则平面 CDM 就平行于平面 ABN，那么，CM 与 AN 平行，两线不相交，与我们作法相违.

所以，DM、BN 交点 Q 必存在.

Q 在 BN 上，则 Q 点在平面 PAB 上，即直线 PQ 在平面 PAB 上.

同理，Q 在 DM 上，直线 PQ 在平面 PCD 上.

因此，PQ 是平面 PAB 与平面 PCD 的交线.

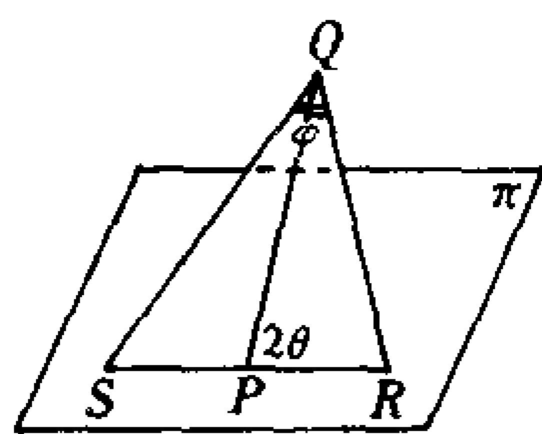
∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $AB /\!/$ 平面 $PQCD$.

故 $PQ /\!/ l_1 /\!/ l_2$.

16·15 已知：平面 π，π 上一点 P 及 π 外一点 Q，在 π 上求一点 R，使得比值 $\frac{QP+PR}{QR}$ 为最大.

（第 21 届国际数学奥林匹克，1979 年）



［解］ 对于平面 π 上任意一点 R，连结 RP 并延长到 S，使 $PS=PQ$. 连结 QS、QR，记 $\angle SQR=\varphi$，$\angle QPR=2\theta$，

于是 $\angle S=\theta$. 由正弦定理有

$$\lambda=\frac{QP+PR}{QR}=\frac{PS+PR}{QR}=\frac{SR}{QR}=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}.$$

当 R 在平面 π 上的过 P 点的一条直线上变化时，θ 取定值.

显然，当 $\varphi=90°$，即 $PR=PQ$ 时，λ 取最大值.

然后再让 θ 变化，显然 θ 为锐角，故当 θ 取最小值时 λ 最大.

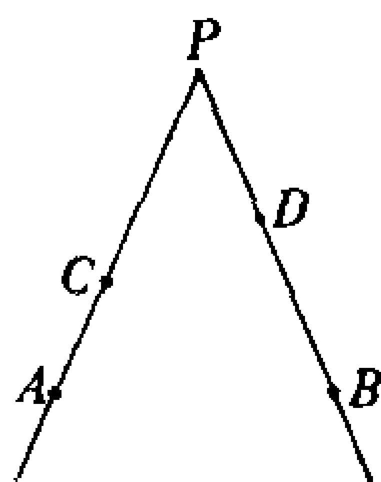
众所周知，当 2θ 为斜线 PQ 与平面 π 所成角时，最小. 因此，设 Q 在 π 上的射影为 T，若 T 不与 P 重合，则当 R 在射线 PT 上，且满足 $PR=PQ$ 时，λ 取得最大值. 若 T 与 P 重合，则平面 π 上以 P 为圆心，PQ 为半径的圆上任何一点 R 都满足要求.

16·16 P、A、B、C、D 是空间中五个不同的点. $\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\theta$，这里 θ 是已知的锐角. 试确定 $\angle APC+\angle BPD$ 的最大值和最小值.

（第 13 届美国数学奥林匹克，1984 年）

［解］ 记 $\alpha=\angle APC$，$\beta=\angle BPD$.

当 $\angle APB=\theta$，C 在 PA 上，D 在 PB 上（如图）时，此时符合题设条件



$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\theta.$$

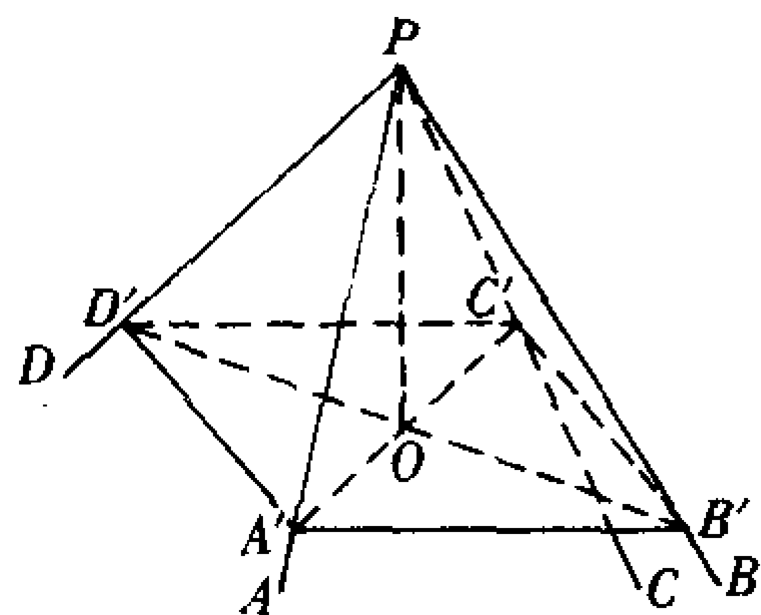
然而 $\alpha=\angle APC=0$，$\beta=\angle BPD=0$，

∴ $\alpha+\beta=\angle APC+\angle BPD$ 的最小值为 0.

下面求 $\alpha+\beta$ 的最大值.

显然，$P-ABCD$ 必须是凸四面角（如图）.

由于$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$、$\angle DPA$四个面角相等，由对称性可知



平面$APC\perp$平面BPD.

设平面APC和平面BPD相交于PO，则

$$\angle APO=\angle CPO=\frac{1}{2}\alpha,\quad \angle BPO=\angle DPO=\frac{1}{2}\beta.$$

取$PO=1$，过点O作平面垂直于PO，交PA于A'，交PB于B'，交PC于C'，交PD于D'，则$A'C'\perp B'D'$.

下面探讨α、β和θ之间的关系.

$\because\quad A'D'^2=A'O^2+D'O^2,$ ①

又 $A'D'^2=A'P^2+D'P^2-2A'P\cdot D'P\cos\angle A'PD'$. ②

由 $A'O=PO\text{tg}\frac{\alpha}{2}$，$D'O=PO\text{tg}\frac{\beta}{2}$，

$A'P=PO\cdot\sec\frac{\alpha}{2}$，$D'P=PO\cdot\sec\frac{\beta}{2}$，

及①，②式可得

$$\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\text{tg}^2\frac{\beta}{2}=\sec^2\frac{\alpha}{2}+\sec^2\frac{\beta}{2}-2\sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\cos\theta,$$

$\therefore\quad 1+1=2\sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\cos\theta,$

则 $\cos\theta=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}$，

即 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\theta-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

由于θ为定值，则当$\alpha=\beta$，即$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1$时，$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\theta-1$取得最小值.

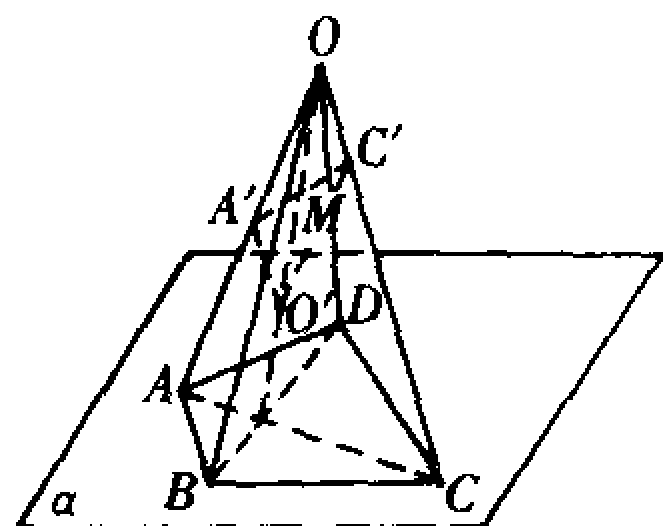
又因为 $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$，而 $y=\cos x$在$[0,\pi]$上是减函数，

所以 这时$\frac{\alpha+\beta}{2}$最大，即$\alpha+\beta$最大，

$\alpha+\beta$的最大值为$2\arccos(2\cos\theta-1)$.

16·17　给定一凸四边形 $ABCD$ 和不在 $ABCD$ 平面上的一点 O. 试分别在直线 OA、OB、OC 和 OD 上找出点 A'、B'、C' 和 D'，使得四边形 $A'B'C'D'$ 为一平行四边形.

（第 38 届美国普特南数学竞赛，1977 年）



［解］　设 O' 是平面 AOC 与平面 BOD 的交线上不同于 O 的任一点.

过 O' 作直线 $O'A'\parallel OC$ 交 OA 于 A'. 过 O' 作直线 $O'C'\parallel OA$ 交 OC 于 C'.

则四边形 $OA'O'C'$ 是平行四边形. 其对角线 OO' 与 $A'C'$ 相交于 M，则　$MA'=MC'$.

同法选取 B' 与 D'，使　$O'B'\parallel OD$，$O'D'\parallel OB$，且 B' 在 OB 上，D' 在 OD 上.

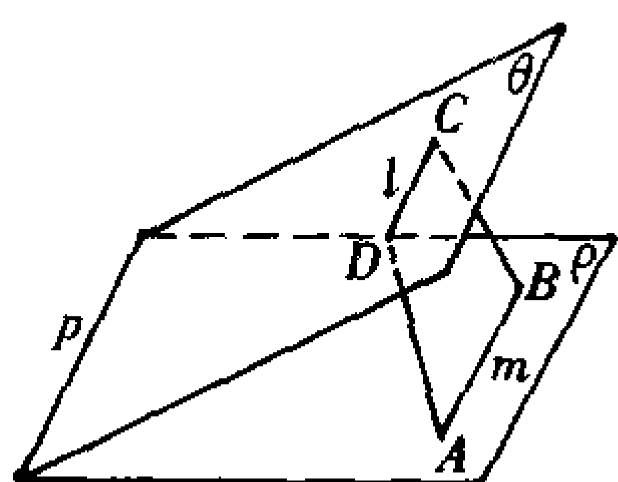
则四边形 $OB'O'D'$ 也是平行四边形，其对角线 OO' 与 $B'D'$ 相交于 OO' 的中点 M，则　$MB'=MD'$.

于是四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形.

显然这种平行四边形不是惟一的.

16·18　两个平面 P 和 Q 相交于直线 P，已知点 A 在平面 P 上，点 C 在平面 Q 上，它们都不在直线 p 上. 求作一个等腰梯形 $ABCD$，它的两底为 AB、CD，且点 B 在平面 P 上，点 D 在平面 Q 上，并使这个梯形存在内切圆.

（第 1 届国际数学奥林匹克，1959 年）



［解］　假定梯形 $ABCD$ 已作出，如图.

则 AB 在平面 P 上，CD 在平面 Q 上，并且 $AB\parallel CD$.

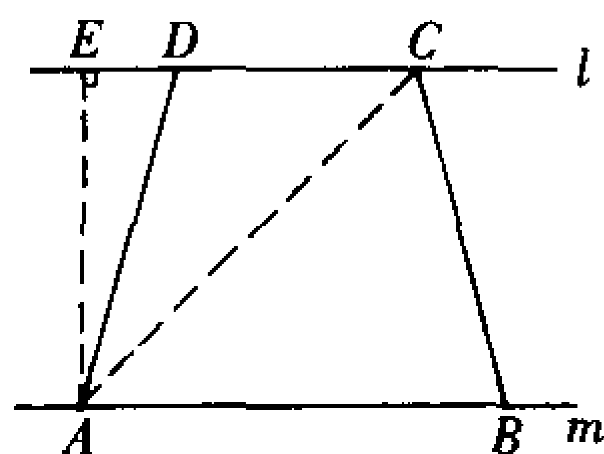
于是有　$AB\parallel$ 直线 p，$CD\parallel$ 直线 p.

这就是说，AB 在平面 P 上过 A 与交线 p 平行的直线 m 上，CD 在平面 Q 上，过 C 且与交线 p 平行的直线 l 上.

过两条平行直线 l 和 m 作一平面 M，于是本题就归结为在平面 M 上作出等腰梯形 $ABCD$，使其两底 AB、CD 分别在直线 m、l 上，并且这个梯形有内切圆.

如图，作 $AE\perp l$ 于 E.

要使梯形 $ABCD$ 有内切圆,必须且只需



$AD+BC=AB+CD$,

则 $2AD=AB+CD=2EC$, 即 $AD=EC$.

由此可作出 D 点,从而进一步可得到等腰梯形 $ABCD$.

[作法] (1)在平面 P 上,过点 A 作交线 p 的平行线 m,在平面 Q 上,过点 C 作交线 p 的平行线 l;

(2)过两平行线 l、m 作平面 M,在平面 M 上作 $AE\perp l$,垂足为 E;

(3)以 A 为圆心,以 CE 为半径画弧,与 EC 交于 D;

(4)以 C 为圆心,以 CE 为半径画弧,与直线 m 交于 B;

(5)连 AD、BC,则四边形 $ABCD$ 即为所求.

[证] $\because$ m、l 分别在平面 P、Q 上,

$\therefore$ AB、CD 分别在平面 P、Q 上.

$\because$ $m/\!/p$, $l/\!/p$, $\therefore$ $m/\!/l$, 即 $AB/\!/CD$.

又 $\because$ $AD=BC=EC$, $\therefore$ $ABCD$ 为等腰梯形.

由于 $AB+DC=2EC=AD+BC$.

所以等腰梯形 $ABCD$ 有内切圆.

当 AC 与直线 p 的交角不大于 $45°$ 时,本题有一解,其中当交角为 $45°$ 时,等腰梯形 $ABCD$ 为正方形.

当 AC 与直线 p 的交角大于 $45°$ 时,本题无解.

16·19 从空间中一点 S 引出三条射线 SA、SB 和 SC,它们中任一条都不与其余两条垂直.通过每条射线分别作一个平面与另两条射线所确定的平面相垂直,试证:所作出的三个平面交于一条直线 d.

(波兰数学奥林匹克,1962 年)

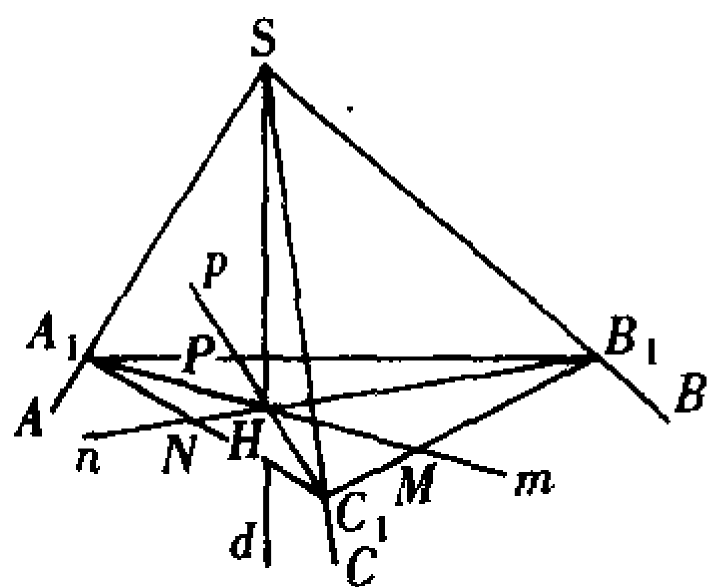
[证] 当从 S 引出的三条射线 SA、SB、SC 在同一个平面上,则问题显然成立,并且直线 d 垂直于这个平面.

设射线 SA、SB、SC 不共面,即 SA、SB、SC 组成一个三面角.

由题设,这个三面角的面角中至多有一个是直角,设 $\angle ASB\neq 90°$, $\angle ASC\neq 90°$.

在棱 SA 上任取一点 A_1(A_1 不与 S 重合),过 A_1 作平面 π 垂直于直线 SA_1,平面 π 与直线 SB 和 SC 交于点 B_1 和 C_1.

设 α、β、γ 是三个平面,它们分别通过三面角 $SABC$ 的棱 SA、SB、



SC,并且与面 BSC、CSA、ASB 垂直,又设 m、n、p 分别是平面 α、β、γ 与平面 π 的交线.

$\because\ \alpha\perp\pi$, $\alpha /\!/ BSC$, $\therefore\ B_1C_1\perp\alpha$.

设直线 m 与 B_1C_1 交于点 M,

则 $A_1M\perp B_1C_1$, 即 $m\perp B_1C_1$.

又$\because\ B\perp ASC$, $\pi\perp ASC$, $\therefore\ n\perp ASC$,

因而 $n\perp A_1C_1$ 即 $B_1N\perp A_1C_1$

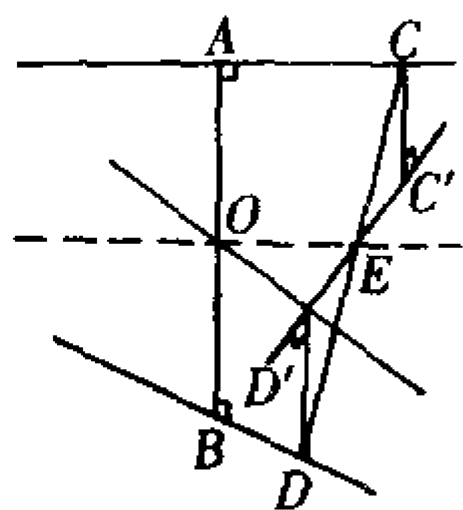
类似地可以证明 $C_1P\perp A_1B_1$.

于是,$\triangle A_1B_1C_1$ 的三条高落在直线 A_1M、B_1N、C_1P 上,因此这些直线交于一点 H.

所以平面 α、β、γ 有一条公共直线 $d=BH$.

16·20 从长为 a 的线段 AB 的两个端点各引一条垂直于 AB 的直线,在其上分别取点 C 和 D,又设 AB 的中点 O 到过 O 并垂直于线段 CD 的平面与 CD 的交点之间的距离为 r. 试证:线段 CD 的长由 a 和 r 决定,并确定点 C 的几何位置.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1962 年)



[证] 设线段 CD 与题中所说的平面相交于点 E,而 C'、D' 是点 C、D 在该平面上的射影.

$\because\ CC'=DD'=\dfrac{a}{2}$,

及 $\angle CEC'\angle DED'$.

$\therefore$ 直角$\triangle CC'E\cong$直角$\triangle DD'E$. 有 $C'E=D'E$.

从而 OE 是直角$\triangle C'OD'$的中线,于是

$C'D'=2OE=2r$,

且 $CD=2\sqrt{C'C^2+C'E^2}=\sqrt{4r^2+a^2}$.

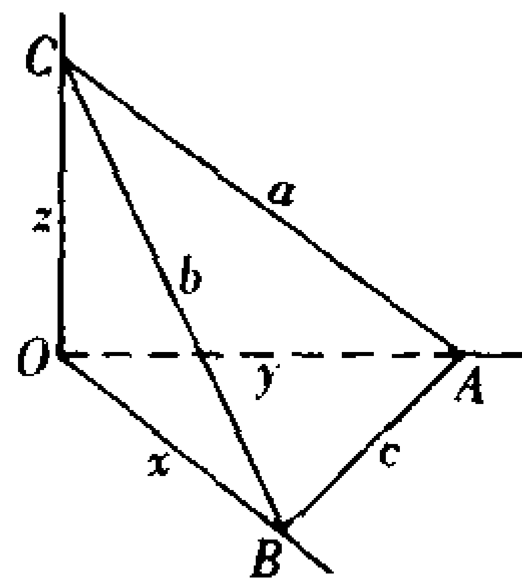
点 C 是以点 A 为中点,长为 $4r$ 的线段上的任意一点.

16·21 我们把连接三角形任一顶点和它的对边(或延长线)上任一点的直线段叫做三角形的截线. 试证 对空间中的任何一个锐角三角形,一定可以找到这样的一个点,使得任一截线对这点所张的角都是直角.

(匈牙利数学奥林匹克,1938 年)

[**证**] 设题设三角形为$\triangle ABC$.如果满足本题条件的点存在,那么它对$\triangle ABC$的每一条边所张的角都是直角,反之,如果空间某一点O对$\triangle ABC$的三边所张的角都是直角,那么线段OA、OB、OC互相垂直,因此OC垂直于平面OAB,从而OC垂直于平面OAB上的任一直线,这样,通过顶点C的任何一条截线对点O的张角都是直角,对顶点A和B同理可得,过A和B的任何一条截线对点O的张角都是直角,于是点O满足条件.

于是,只要作出一个点,它对三角形的三边所张的角都是直角,即连接这个点和三角形的三个顶点所得到的三条线段互相垂直.



由此,问题又可转化为:从空间点O引出三条相互垂直的射线,证明在这三条射线上每条取一个点:A、B、C,使$\triangle ABC$和已知的锐角三角形全等.

设a、b、c是已知三角形的三边的长,x、y、z是OB、OA和OC的长,由勾股定理

$$x^2+y^2=c^2,\ y^2+z^2=a^2,\ z^2+x^2=b^2,$$

则可推出 $2x^2=b^2+c^2-a^2>0$,

及 $2y^2=c^2+a^2-b^2>0$,

且 $2z^2=a^2+b^2-c^2>0$.

于是 $b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2,\ a^2+b^2>c^2$.

因此$\triangle ABC$为锐角三角形.

所以满足本题的条件的点O是存在的.

16·22 是否存在这样的空间五边形,它所有的边都相等,而且任意两个相邻的边的夹角都是直角?

(匈牙利数学奥林匹克,1966年)

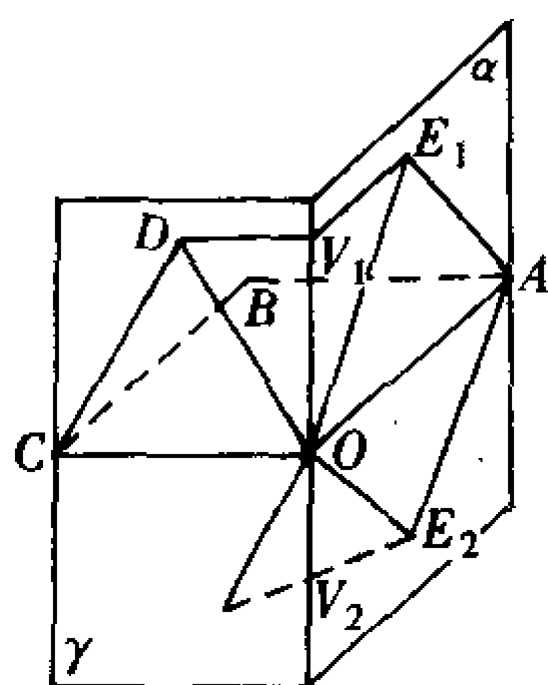
[**解**] 设存在这样的空间五边形$ABCDE$,且边长为1.

我们从单位正方形$ADCB$入手来考察D、E.

因为$\angle BCD=90°$,所以D点在过C且垂直于BC的平面γ上,并且$CD=1$.

由于五边形每一对角线都是直角边为1的等腰直角三角形的斜边,则对角线的长为$\sqrt{2}$,从而$AD=AC$,由此可得$OD=1$.

同理E_1在平面α上,其中α是过A且与AB垂直的平面,而AE_1



$=OE_1=1$(或 $AE_2=OE_2=1$).

过 E_1 作平面 γ 的垂线,垂足为 V_1,则 $DV_1=EV_1=\dfrac{1}{2}$,

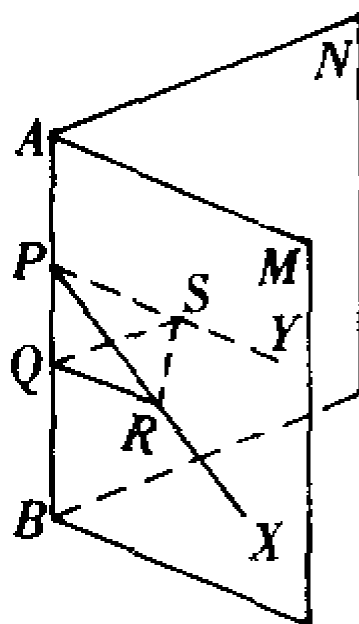
$$\therefore\quad DE_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}<1,$$

$$且\quad DE_2=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}<1.$$

因此满足条件的空间五边形不存在.

16·23 已知:二面角 $M—AB—N$ 是直二面角,P 为棱 AB 上的一点,PX、PY 分别在面 M、N 内,$\angle XPB=\angle YPB=45°$.求:$\angle XPY$ 的大小.

(中国北京市数学竞赛,1964 年)



[**解**] 过棱 AB 上任意一点 Q,分别在 M、N 平面内作 $QR\perp PQ$,$QS\perp PQ$,交 PX、PY 于 R、S;连 RS.

在 $\triangle PQR$、$\triangle PQS$、$\triangle RQS$ 中,

$\angle PQR=\angle PQS=\angle RQS=90°$,

且 $QR=QP=QS$.

$\therefore\quad \triangle PQR\cong\triangle PQS\cong\triangle RQS$.

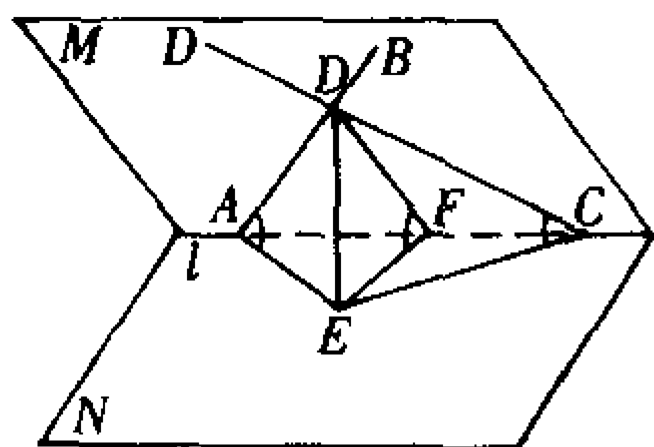
于是 $PR=PS=RS$.

故$\triangle PQR$ 是等边三角形,

$\therefore\quad \angle RPS=60°$, 即 $\angle XPY=60°$.

16·24 在二面角 $M—l—N$ 的一个面 M 上,有两条互相垂直的直线 AB、CD,其交点为 O,A、C 在 l 上,且 AB、CD 与另一面 N 所成的角分别为 α、β.若二面角的大小为锐角 θ,求证:$\sin^2\theta=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$.

(中国福建省福州市数学竞赛,1978 年)



[**证**] 如图,作 $OE\perp$平面 N,垂足为 E,连 AE、CE,又作 $OF\perp$棱 AC,交 AC 于 F.

连结 EF, 则 $EF\perp AC$.

$\therefore\quad \angle BAE=\alpha$, $\angle DCE=\beta$, $\angle OFE=\theta$.

又设 $OE=a$, 则

$AO=\frac{a}{\sin\alpha}$, $CO=\frac{a}{\sin\beta}$, $FO=\frac{a}{\sin\theta}$.

在 Rt△AOC 中,$AO\cdot CO=AC\cdot FO$,

$$\therefore\quad \frac{1}{AO^2}+\frac{1}{CO^2}=\frac{CO^2+AO^2}{AO^2\cdot CO^2}=\frac{AC^2}{AO^2\cdot CO^2}=\frac{1}{FO^2},$$

即 $$\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2},$$

因此 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\theta$.

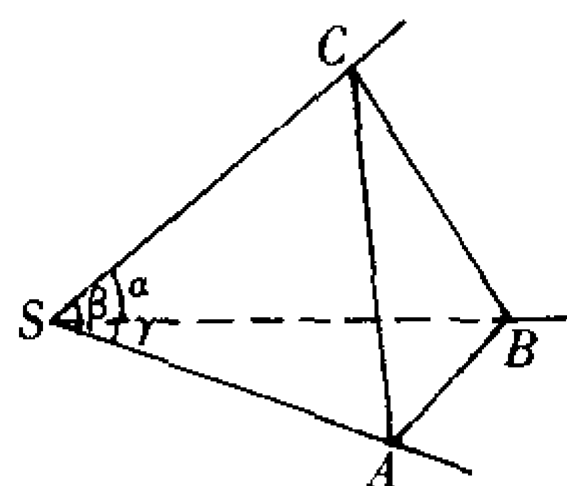
16·25 三面角 $S—ABC$ 的三个面角分别是 α、β、γ,求三个二面角的大小.

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1957 年)

[解] 取 $SA=1$,作 $BA\perp SA$,$CA\perp SA$,则

$$AC=\operatorname{tg}\beta,\quad AB=\operatorname{tg}\gamma,$$

$$SB=\frac{1}{\cos\gamma},\quad SC=\frac{1}{\cos\beta}.$$



且 $$BC^2=SB^2+SC^2-2SB\cdot SC\cos\alpha=\frac{1}{\cos^2\gamma}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma-\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{1}{\cos^2\gamma}+\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}{2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

$$=\frac{2\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}-2}{2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

得 $$\angle A=\arccos\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

同理 $$\angle B=\arccos\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$\angle C=\arccos\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

16·26 $V-ABC$ 为一个三面角,VD 是面角 BVC 的平分线,若

$\angle AVD \gtreqless \frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\angle AVB+\angle AVC}{2} \lesseqgtr \angle AVD$.

（中国上海市数学竞赛，1957年）

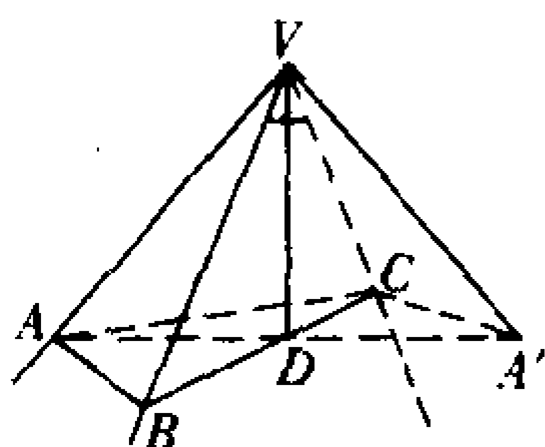


图 1

[证] (1)若 $\angle AVD<\frac{\pi}{2}$.(图 1)

扩展面 AVD. 在这平面内作 VA'，使 $\angle A'VD=\angle DVA$，则 $\angle AVA'<\pi$.

在三面角 $V-ABD$ 及 $V-A'CD$ 中，

面角 AVD = 面角 $A'VD$，

面角 BVD = 面角 CVD；

两面角 $A-VD-B$ = 两面角 $A'-VD-C$，

故　两个三面角 $V-ABD$ 与 $V-A'CD$ 相等.

$\therefore\quad \angle AVB=\angle A'VC$.

在三面角 $V-A'AC$ 内，$\angle AVC+\angle A'VC>\angle AVA'$，

（三面角内任意两个面角之和大于第三个面角）

$\therefore\quad \angle AVC+\angle AVB>2\angle AVD$，

$\therefore\quad \frac{\angle AVB+\angle AVC}{2}>\angle AVD$.

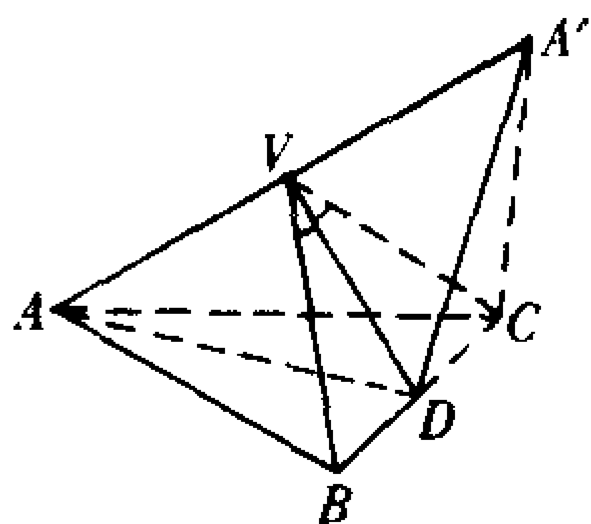


图 2

(2)若 $\angle AVD=\frac{\pi}{2}$.(图 2)

扩展面 AVD. 在这平面内作 VA'，使 $\angle DVA'=\angle AVD$.

则 $\angle AVA'=\pi$，此时 AVA' 成一直线.

仿(1)可证得 两个三面角 $V-ABD$ 与 $V-A'CD$ 相等.

$\therefore\quad \angle AVB=\angle A'VC$.

这里由于 AVA' 是一直线，

$\therefore\quad \angle AVC+\angle CVA'=\pi$，

$\therefore\quad \angle AVC+\angle AVB=\pi$，

$\therefore\quad \frac{\angle AVB+\angle AVC}{2}=\frac{\pi}{2}=\angle AVD$.

(3)若 $\angle AVD>\frac{\pi}{2}$.

扩展面 AVD. 在这平面内作 VA' 使 $\angle A'VD = \angle DVA$, 则 $\angle AVD + \angle DVA' > \pi$. (图 3)

仿(1)可证得两个三面角 $V-ABD$ 与 $V-A'CD$ 相等,

$\therefore \quad \angle AVB = \angle A'VC$.

在三面角 $V-ACA'$ 内,

面角 $AVA' = 2\pi - 2\angle AVD$,

且 $\quad \angle AVC + \angle A'VC + \angle AVA' < 2\pi$,

(三面角中三个面角之和必小于 2π)

$\therefore \quad \angle AVC + \angle AVB + 2\pi - 2\angle AVD < 2\pi$,

即 $\quad \angle AVC + \angle AVB < 2\angle AVD$,

$$\therefore \quad \frac{\angle AVB + \angle AVC}{2} < \angle AVD.$$

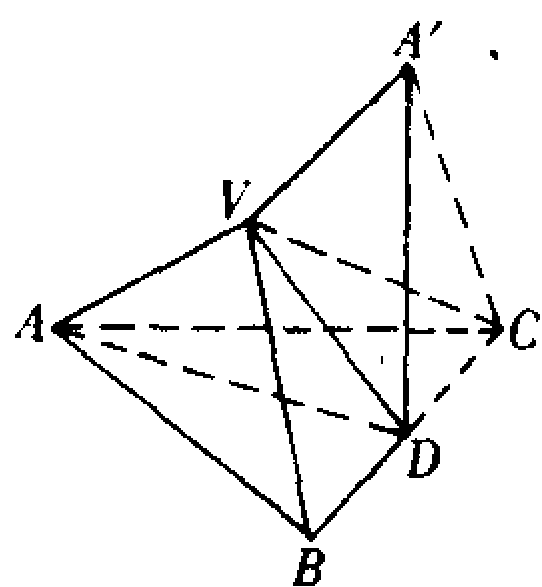


图 3

此外,我们还可考虑证法:

扩展面 AVD. 在这平面内引长 AV 至 A', 则 $\angle AVD + \angle DVA' = \pi$. (图 4)

$$\because \quad \angle AVD > \frac{\pi}{2}, \quad \therefore \quad \angle DVA' < \frac{\pi}{2}.$$

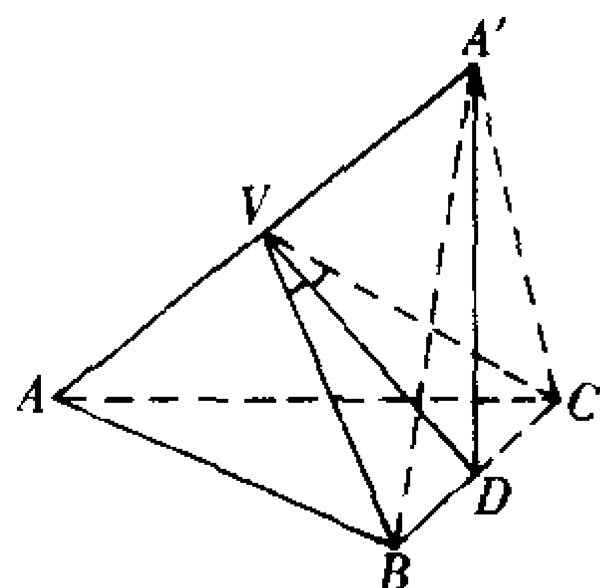


图 4

在三面角 $V-BCA$ 内,由(1)有

$$\angle DVA' < \frac{1}{2}(\angle BVA' + \angle CVA');$$

但 $\quad \angle AVD + \angle DVA' = \pi$, 即 $\quad \angle DVA' = \pi - \angle AVD$.

$\angle BVA' + \angle BVA = \pi$, 即 $\quad \angle BVA' = \pi - \angle BVA$.

$\angle CVA' + \angle CVA = \pi$, 即 $\quad \angle CVA' = \pi - \angle CVA$.

$$故 \quad \pi - \angle AVD < \frac{1}{2}[(\pi - \angle BVA) + (\pi - \angle CVA)],$$

$$\therefore \quad \frac{\angle AVB + \angle AVC}{2} < \angle AVD.$$

16·27　已知:一个凸多面角的所有面角之和等于它的所有二面角之和. 求证:这个多面角为三面角.

注　凸多面角是由一个凸多边形所在平面外的一点到这凸多边形所有顶点引射线所得.

(第 10 届美国数学奥林匹克,1981 年)

[证] 注意到立体几何有这样两个熟知的定理:

(1) 凸多面角的所有面角之和小于 2π.

(2) 凸 n 面角的所有二面角之和大于 $(n-2)\pi$.

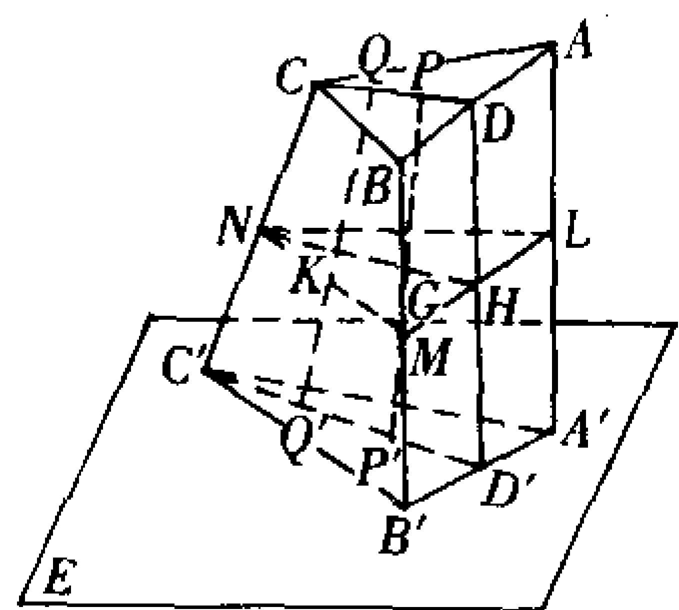
设题设所给的凸 n 面角的所有面角之和为 M,所有二面角之和为 N,则

$(n-2)\pi < N = M < 2\pi$, 有 $n<4$.

所以只有 $n=3$,即满足题设的是三面角.

16·28 已知:平面 E 的同一侧有不在一直线上的三点 A、B、C.并且过 A、B、C 三点的平面与平面 E 不平行.在平面 E 上任取三点 A'、B'、C'.点 L、M、N 分别是线段 AA'、BB'、CC' 的中点,G 是 $\triangle LMN$ 的重心(如果对应于 A'、B'、C' 的三线段的中点 L、M、N 不构成三角形,这种情况不予考虑).求:当 A'、B'、C' 在平面 E 上任意变动时,G 点的轨迹.

(第 3 届国际数学奥林匹克,1961 年)



[解] 作 $\triangle ABC$ 的中线 CD,P、Q 为 DC 的三等分点.

作 $\triangle A'B'C'$ 的中线 $C'D'$,$P'Q'$ 为 $D'C'$ 的三等分点,并且 P'、Q' 与 P、Q 相对应,其中 P 和 P' 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的重心.

在空间四边形 $AA'B'B$ 中,D、L、D',M 顺次为四边的中点,因而四边形 $DLD'M$ 为平行四边形,于是对角线 DD' 和 LM 相互平分于 H 点.

在空间四边形 $DD'Q'Q$ 中,取 QQ' 的中点 K,又因为 H、P、P' 顺次为 DD'、DQ、$D'Q'$ 的中点,于是 HK 与 PP' 相互平分于 G'.

同样,GN 与 QQ' 相互平分于 K'.

但 QQ' 的中点是惟一的,所以 K' 与 K 重合,于是 N、K、G' 三点共线,又已知 H、G'、K 三点共线,而过 K,G' 的直线是惟一的,因此 N、K、G'、H 四点共线.

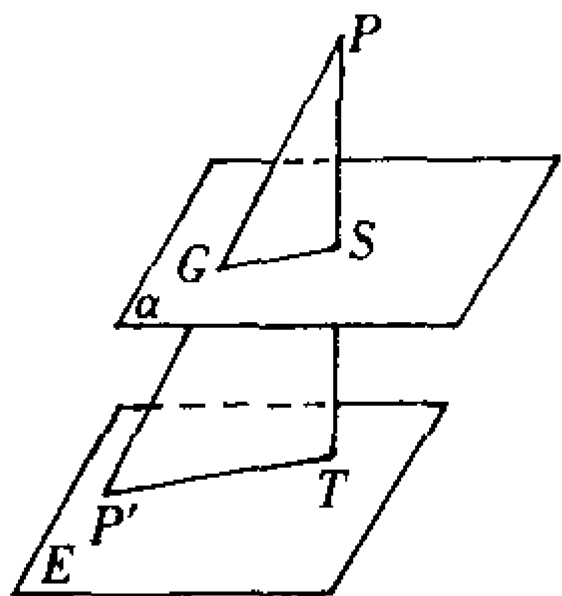
注意到 $NK = KG' = G'H$,则 G' 为 $\triangle LMN$ 的重心,所以 G' 和 G 重合.于是 G 为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的重心连线 PP' 的中点.

过 $\triangle ABC$ 的重心 P 作直线 $PT\perp$ 平面 E 于 T.

设 S 是 PT 的中点,过 S 作平行于平面 E 的平面 α,显然,点 G 必

在平面α上.

下面我们证明这样得到的平面α上的任意一点都满足题设条件.



设G为平面α上任一点,连结PG,并延长与平面E交于P',平面PTG与平面α,平面E的交线顺次为SG与TP',因此$SG \parallel TP'$,而S为PT的中点,所以G是PP'的中点.

再在平面E上任取两点A'、B',连结AA'、BB',并分别取L、M、D'依次为AA'、BB'、$A'B'$的中点,则DD'与LM相互平分于H.

连结$D'P'$,并延长至C',使$D'C' = 3D'P'$,连结CC',取CC'的中点N,那么G必定是$\triangle LMN$的重心.

事实上,取$C'P'$的中点Q',取QQ'的中点K,连结NG与KH,则在空间四边形$CC'P'P$中,NG与QQ'相互平分,所以NG过QQ'的中点K,则N、K、G三点共线,且$NK = KG$.

同理,在空间四边形$QQ'D'D$中,KH与PP'相互平分,所以KH过PP'的中点G,即K、G、H三点共线,且$KG = GH$.

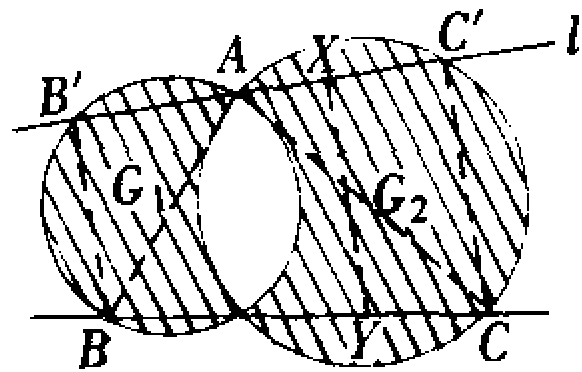
由此,N、K、G、H四点共线.且满足$NK = KG = GH$,即G为$\triangle LMN$的重心.

综上所述,平面α为点G的轨迹.

16·29　在空间已知一直角的一边通过一已知点A,而另一边与已知线段BC至少有一公共点,求:该直角顶点的轨迹.

(第5届国际数学奥林匹克,1963年)

[解]　设直角顶点X的轨迹为M.



我们首先在一个平面内考察.

如图,l是过点A的某一条直线,Y是线段BC上任一点,过Y作直线l的垂线,垂足为X,则点X就是所求轨迹M上的一点.

过B、C作直线l的垂线,垂足为B'、C'.

显然,对于固定的直线l,所有的点X的轨迹构成线段$B'C'$.

由于$\angle AB'B$和$\angle AC'C$是直角,所以当直线l变动时,B'和C'的轨迹分别是以AB、AC为直径的圆G_1和G_2(当A和B或A和C重合

时，则变成一点 A）.

于是点 X 在一个平面上的轨迹是上述的两个圆周 G_1、G_2 及圆 G_1 的内部，圆 G_2 的外部的公共部分，圆 G_2 的内部，圆 G_1 的外部的公共部分，即图中的阴影部分.

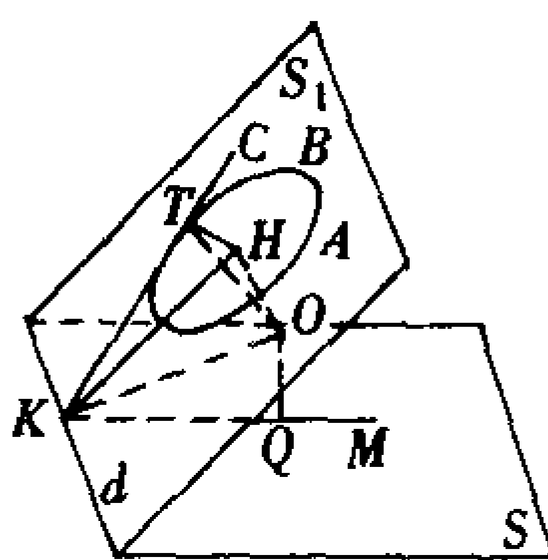
下面把这个结论推广到空间的情形.

事实上，分别过 B、C 对所有过 A 的直线 l 作相应的垂面，那么交点的轨迹分别构成以 AB、AC 为直径的球面 K_1、K_2（当 A 和 B 或 A 和 C 重合时，则变成一点 A）.

于是，所求几何轨迹 M 是以 AB、AC 为直径的球面 K_1、K_2，以及在一个球面的外部，同时又在另一个球面的内部的空间部分.

16·30 在已知平面的一侧有不共线的三个定点，如果有一个球过此三点并且与平面相切，求此切点之位置（本题只限用圆规和直尺）.

（中国北京市数学竞赛，1957 年）



［解］ 作法 设不共线三点 A、B、C 确定的平面 S_1 与平面 S 交于直线 d. 过圆 ABC 的中心 H 作平面 HKM 垂直于 d，K 为垂足，交平面 S 于直线 KM.

既然有球过 A、B、C 且与平面 S 相切，则 K 必在圆 ABC 外或圆周上. 若 K 在这圆周上，它就是所求的切点. 若 K 在圆 ABC 之外，作 KT 切圆 ABC 于 T，在直线 KM 上取 $KQ=KT$，则 Q 为所求的切点.

若 $S_1 /\!/ S$，则过 H 作直线垂直于 S，垂足 Q 就是所求的切点.

证 在平面 HKQ 内，过 H 作 KH 的垂线，过 Q 作 KQ 的垂线，相交于 O.

$\because$ $OQ \perp d$，$OQ \perp KQ$，$\therefore$ $OQ \perp$ 平面 S.

同理 $OH \perp$ 平面 S_1. 故 $OH \perp KT$.

又 KT 为圆 ABC 的切线，T 为切点，那么 $HT \perp KT$，

$\therefore$ $KT \perp$ 平面 OHT，则 $KT \perp OT$，

即 $\triangle OKT$ 是一直角三角形.

由 $KQ=KT$ 易证得 $\triangle OKT \cong \triangle OKQ$，故 $OQ=OT$.

但 H 为圆心，故有 $HA=HB=HC=HT$.

又$\because$ $OH \perp$ 平面 S_1，$\therefore$ $OA=OB=OC=OT$.

$\therefore\quad OA=OB=OC=OQ$,

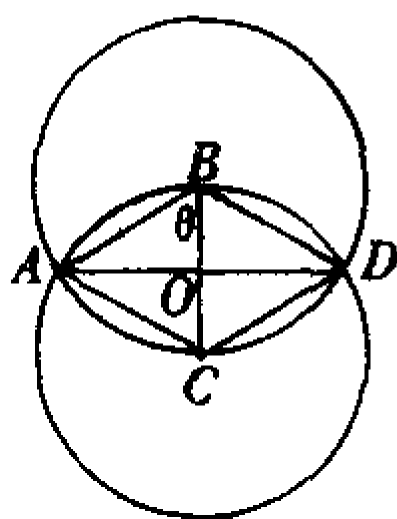
即以 O 为心,OQ 为半径作球,这球一定通过 A、B、C 三点,而且切平面 S 于 Q.

以上是就一般情形而论,至于 K 在圆 ABC 上或 $S_1/\!/S$ 的情形,证明略.

16·31 设 A、B、C、D 为空间四点,过 AB、AC、AD、BC、BD、CD 中至多有一条边长大于 1,试求:六边长之和的极大值.

(第 14 届美国数学奥林匹克,1985 年)

[解] 假设 AD 的边长可能大于 1.



容易看出,若其他五条边长固定,当 A,D 为平面四边形 $ABCD$ 的相对顶点时,AD 取极大值.

固定 B 和 C 的位置,则 A 和 D 必须在以 B 和 C 为圆心的两个单位圆的公共区域,这个区域是中心对称的,因而区域中的最长弦必定经过 BC 的中点 O,这就是说,区域中的最长弦重合于两个单位圆的公共弦.

若 A,D 为公共弦的两个端点,则五边 AD、AB、AC、DB、DC 边长之和取得极大值,这时

$$AB=BD=AC=DC=1.$$

这样问题就转化为:当 AB、BD、AC 和 DC 都为 1 时,求 $AD+BC$ 的极大值.

记 $\angle ABO=\theta$, 当 $0<BC\leqslant1$ 时, 有 $60^\circ\leqslant\theta<90^\circ$.

$\because\quad AD=2\sin\theta,\ BC=2\cos\theta$.

$\therefore\quad AD+BC=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$

$\because\quad 105^\circ\leqslant\theta+45^\circ<135^\circ$,

而 $y=\sin x$ 在$[105^\circ,135^\circ)$时为减函数,于是当 $\theta=60^\circ$时,$AD+BC$ 取得极大值,此时 $BC=1$, $AD=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 六边长之和的极大值为 $5+\sqrt{3}$.

16·32 在空间中有 n 个点,其中任何三个点都是一个内角大于 120°的三角形的顶点,证明 可以把这些点用字母 A_1、A_2、…、A_n 表示,使得$\angle A_iA_jA_k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$中任何一个都大于 120°.

(第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年)

[证] 在 n 个点中两两距离最大的点是 A、B,若 X、Y 是已知点

中另外的两个点,我们证明:

$\angle XAY$ 和 $\angle XBY$ 中每一个都小于 $120°$.

事实上,因为 $\triangle AXB$ 和 $\triangle AYB$ 中,AB 是最长边,所以所对角 $\angle AXB>120°$,$\angle AYB>120°$,于是 $\angle XAB<60°$,并且 $\angle YAB<60°$. 而由三面角的一个面角小于另两个面角之和.

所以 $\angle XAY<\angle XAB+\angle YAB<120°$. (*)

这样一来,我们依到 A 点的距离对这 n 个点编号,$A_1=A,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 这样规定:$A_n=B$,$AA_2<AA_3<AA_4<\cdots<AA_n=AB$. 在题设条件下,$AA_i\neq AA_j(i\neq j)$. 若 $AA_i=AA_j$,则 $\triangle AA_iA_j$ 是等腰三角形. 则 $\angle A_iAA_j>120°$,与(*)式结论矛盾.

所以有 $AA_2<AA_3<AA_4<\cdots<AA_n=AB$ 成立.

对这样重新编号的点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,由于当 $1<i<k\leqslant n$ 时,有 $\angle A_1A_jA_k>120°$,

则只需证明,对 $1<i<j<k<n$ 时,有 $\angle A_iA_jA_k>120°$ 就够了.

因为在点组 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中,点 A_1、A_k 距离最大. 利用(*)式结果,有 $\angle A_iA_kA_j<120°$,我们证明 $\angle A_kA_iA_j<120°$.

事实上,因为 $\angle A_1A_iA_j>120°$ 且 $\angle A_1A_iA_k>120°$ 若 $\angle A_kA_iA_j\geqslant 120°$,将推出,在顶点 A_i 的三面角的三个面角之和大于 $360°$,这不可能.

根据题设,$\triangle A_iA_jA_k$ 中有一个角大于 $120°$,我们证明了 $\angle A_iA_kA_j<120°$,$\angle A_kA_iA_j<120°$,所以必有 $\angle A_iA_jA_k>120°$ 成立.

$\therefore$ 对任意 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$,都有 $\angle A_iA_jA_k>120°$ 成立.

16·33 求证:如果某个图形在空间中恰好有 n 条对称轴,那么 n 是奇数.

(波兰数学奥林匹克,1968 年)

[证] 首先证明下面两条引理.

引理 1 如果直角坐标系的轴 OX 和 OY 是图形 F 的对称轴,那么轴 OZ 也是这图形的对称轴.

引理 1 的证明 设 $A(x,y,z)$ 是图形 F 的一个任意点,则点 A 关于 OX 轴的对称点 B,则 B 点的坐标为 $(x,-y,-z)$,点 B 关于 OY 轴的对称点 C,则 C 点的坐标为 $(-x,-y,z)$,由题设,点 B 和点 C 属于图形 F,由于点 $C(x,y,z)$ 和点 $A(-x,-y,z)$ 关于 OZ 轴对称,所以

OZ 是图形 F 的对称轴.

引理 2　如果直线 s 和 t 是图形 F 的对称轴,那么直线 t 关于直线 s 的对称直线也是图形 F 的对称轴.

引理 2 的证明　设 A_1 是图形 F 的任意点,A_2 是点 A_1 关于直线 S 的对称点,A_3 是点 A_2 关于直线 t 的对称点,而 A_4 是点 A_3 关于直线 S 的对称点.由引理的假设可知,点 A_2、A_3、A_4 都属于图形 F,在关于直线 s 为轴作对称变换时,点 A_2、A_3 及直线 t 分别变为点 A_1、A_4 及直线 u,因为点 A_2 和 A_3 关于直线 t 对称,所以它们的象(点 A_1 和 A_4)也关于直线 t 的象即直线 u 对称,因此,直线 u 是图形 F 的对称轴.

下面证明本题

设两两互异的直线 l_1、l_2、…、l_n 是图形 F 的全部对称轴,设 $n>1$,我们证明 n 是奇数.

我们用下列方式使每条对称轴 $l_i(i\geqslant2)$ 对应于一条对称轴 $l_j(j\geqslant2,j\neq i)$:如果轴 l_i 与轴 l_1 垂直相交于一点 O,那么令图形 F 的与轴 l_1 和 l_i 垂直相交于 O 的对称轴 t_j 对应于轴 l_i.由引理 1,这样的对称轴是存在的.如果轴 l_i 不垂直于轴 l_1,或者不与 l_1 相交,那么令与轴 l_i 关于轴 l_1 对称的轴 s_j 对应于轴 s_i.由引理 2,这样的对称轴是存在的,在这两种情况下,轴 s_j 都不同于轴 s_1 和 s_i,并且轴 s_j 对应于轴 s_i.

由以上,$n-1$ 条直线 l_2、l_3、…、l_n 可以两两配对而无剩余,且每对之间都没有公共元素,因此,$n-1$ 是偶数,从而 n 是奇数.

16·34　空间中是否存在一个无限点集,它在每个平面上都至少有一个点,但都没有无限多个点?

(匈牙利数学奥林匹克,1987 年)

[解]　设点集 $M=\{(t,t^2,t^3),t\in R\}$.

因为关于 t 的三次方程

$$At+Bt^2+Ct^3+D=0$$

至少有一个实数根,至多有三个实数根.

所以在每一个平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

上至少有一个点,至多有三个点.

16·35　设三维空间所有点的集合为 E、A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 是 E

的非空子集，且满足(1) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=E$；(2) $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i,j=1,2,3,4,5,i\neq j)$. 求证：存在一个这样的平面，使得它至少与 $A_i(i=1,2,3,4,5)$中的四个集合相交.

（日本数学奥林匹克，1990年）

[证] 假设结论不成立，则任一平面至少与 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 中的三个集合相交.

$\because$ $A_1\neq\varnothing,A_2\neq\varnothing$，$\therefore$ 可取 $x_1\in A_1$，$x_2\in A_2$.

又$\because$ $A_1\cap A_2=\varnothing$，$\therefore$ $x_1\neq x_2$.

于是点 x_1、x_2 确定一条直线 x_1x_2.

若直线 x_1x_2 与 $A_3\cup A_4\cup A_5$ 相交，不妨设 x_1x_2 与 A_3 相交，设 $x\in x_1x_2\cap A_3$.

再任取一点 $x_1'\in A_4$，则过 x_1' 与直线 x_1x_2 的平面与 A_1、A_2、A_3、A_4 均相交，与假设矛盾.

于是 x_1x_2 上的所有点均在 $A_1\cup A_2$ 中.

再取 $x_3\in A_3$、$x_4\in A_4$、$x_5\in A_5$，同上面证明可知，x_3、x_4、x_5 不共线，从而点 x_3、x_4、x_5 可确定一平面 π.

由假设，平面 π 与 $A_1\cup A_2$ 无公共点，因此 $x_1x_2/\!/$平面 π.

过 x_5 作 x_1x_2 的平行线 l，显然 $l\subset\pi$.

若 $l/\!/x_3x_4$，则 $x_3x_4/\!/x_1x_2$.

于是 x_1、x_2、x_3、x_4 共面，与假设矛盾.

若 $l\not\parallel x_3x_4$，设 l 与 x_3x_4 相交于 y，即 $y=l\cap x_3x_4$.

于是 y、x_5、x_1、x_2 共面.

因为 $y\in A_3\cup A_4$，这又与假设矛盾.

所以假设任一平面至多与 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 中的三个集合相交是错误的，即存在这样一个平面，它至少与 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 中的四个集合相交.

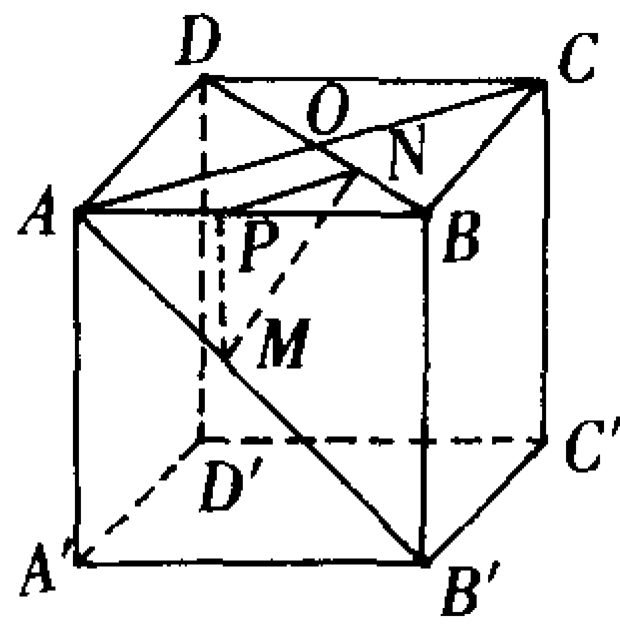
第十七章　多面体

(一)正方体、长方体、棱柱

17·1　在单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AM=\frac{1}{3}AB'$，$BN=\frac{1}{3}BD$，求证：MN 是 AB' 和 BD 的公垂线并求 MN 的长.

（中国福建省数学竞赛，1978 年）

[解 1]　如图，作 $MP\perp AB$ 于 P，则 $MP\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PM /\!/ BB'$，



$BP:BA=B'M:B'A=2:3$，

又　$BP=\frac{2}{3}AB$.

设 AC、BD 交于 O，则 $BN=\frac{1}{3}BD=\frac{2}{3}BO$，

从而　$PN /\!/ AO$.

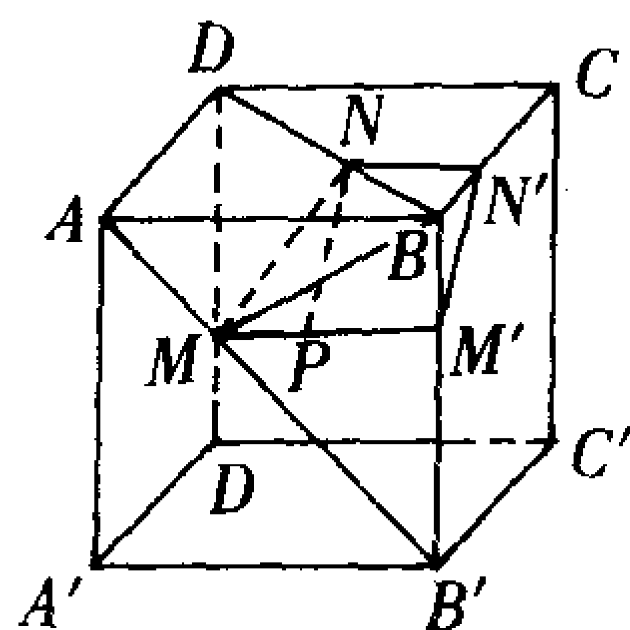
$\because$　$AC\perp BD$，　$\therefore$　$PN\perp BD$.

由三垂线定理知 $MN\perp BD$．同理　$MN\perp AB'$.

$\therefore$　MN 是 AB' 和 BD 的公垂线.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MPN$ 中，$PM=\frac{1}{3}BB'=\frac{1}{3}$，$NP=\frac{2}{3}AO=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore \quad MN=\sqrt{MP^2+NP^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$



[解 2]　作 $MM_1\perp BB'$ 于 M_1，$NN_1\perp BC$ 于 N_1,则

$MM_1\perp$ 平面 $BB'C'C$，$NN_1\perp$ 平面 $BB'C'C$，

$MM_1/\!/AB$，$NN_1/\!/DC$.

$\therefore \quad MM_1=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}$，$NN_1=\frac{1}{3}DC=\frac{1}{3}$.

又　$BN_1=BM_1=\frac{1}{3}$,

$\therefore \quad M_1N_1{}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$

在直角梯形 MM_1N_1N 中作 $NP\perp MM_1$ 于 P,则

$$MN=\sqrt{MP^2+NP^2}=\sqrt{(MM_1-NN_1)^2+M_1N_1^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

在 Rt$\triangle MM_1B$ 和$\triangle MNB$ 中,

$$MB^2=MM_1{}^2+M_1B^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

$$MN^2+NB^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}=MB^2.$$

由勾股定理的逆定理知$\angle MNB$ 是直角,即　$MN\perp BD$.

同理　$MN\perp AB'$.

$\therefore MN$ 是 AB' 和 BD 的公垂线.

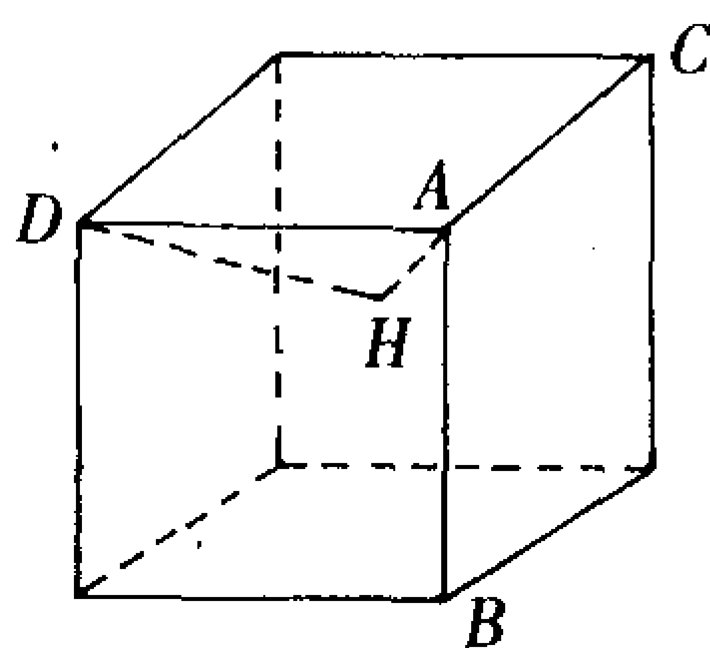
17·2　已知:一平面与一个正方体的 12 条棱的夹角都等于 α,求:$\sin\alpha$.

（中国高中数学联赛,1994 年）

[解]　如图所示,依题意平面 BCD 与正方体 12 条棱的夹角都等于 α,过 A 点作 $AH\perp$ 平面 BCD,连 DH,则 $\alpha=\angle ADH$,设正方体边长为 a,则易求出

$$DH=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}a\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$AH=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$



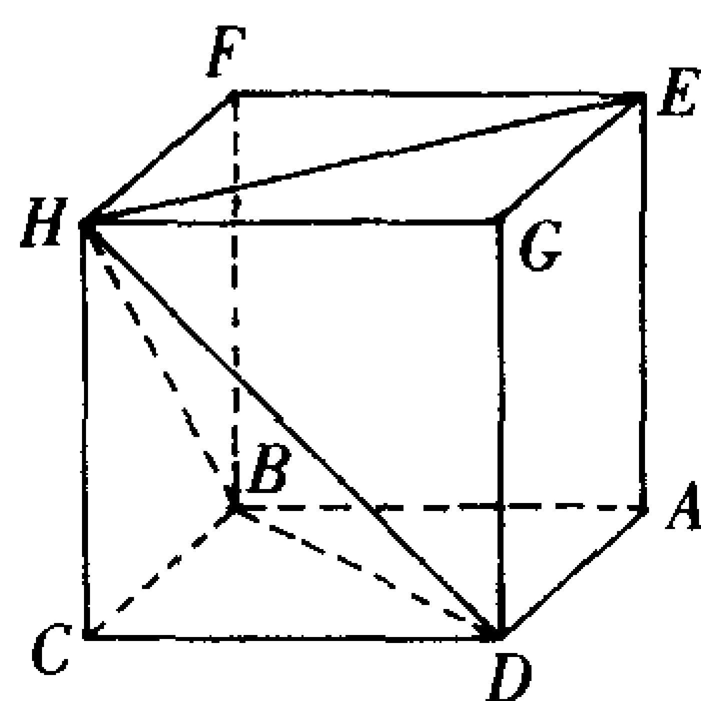
$\therefore\quad \sin\alpha=\sin\angle ADH=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

17·3　正立方体的棱长为 a，两对角线的交角为 θ，求：$\sin\theta$ 的值.

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

［解］　$\because$　正立方体棱长为 a，

$\therefore\quad BD=\sqrt{2}a$，$BD_1=DB_1=\sqrt{3}a$，$OB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.



在 Rt$\triangle B_1DB$ 中，有

$$\sin\angle B_1DB=\frac{B_1B}{B_1D}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

在$\triangle OBD$ 中有，$\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{OB}{\sin\angle B_1DB}$,

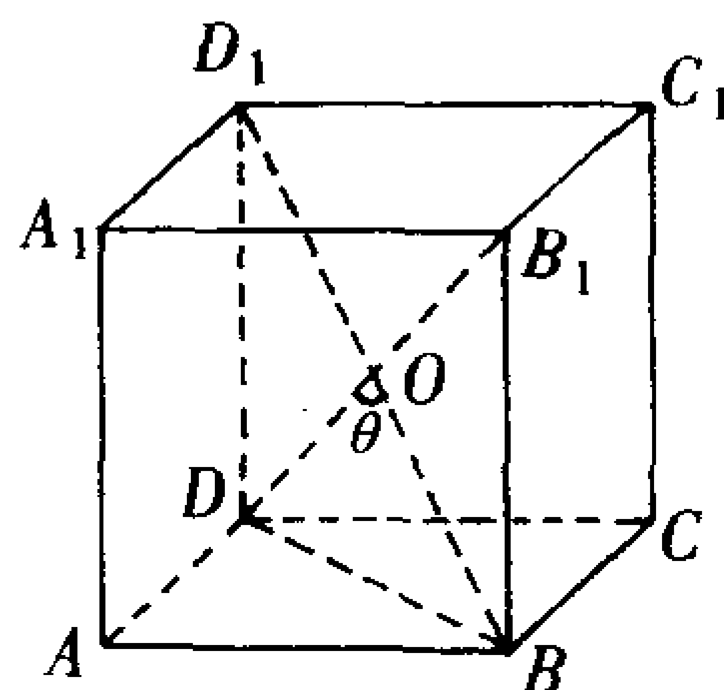
$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{BD\sin\angle B_1DB}{OB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

17·4　设 $ABCD$、$EFHG$ 是一个长方体的相对的两个面，$\angle DHC=45^\circ$，$\angle FHB=60^\circ$，求：$\angle BHD$ 的余弦.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［解］　设 $AB=1$.

由于$\angle DHC=45^\circ$，所以 $CDGH$ 是正方形，$DH=\sqrt{2}$.



$\because\quad \angle FHB=60^\circ$,

且 $FB=HC=CD=AB=1$,

$\therefore\quad HB=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

$\because\quad HC=CD$，$\therefore\quad DB=HB=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

在$\triangle HBD$ 中，由余弦定理

$$\cos\angle BHD=\frac{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\times\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

17·5　一条折线,它的所有顶点在棱长为2的正方体的面上,它的每段长均为3,并且该折线是正方体两个距离最大的顶点,问这样的折线最小由几段线段组成.

（第22届全苏数学奥林匹克,1988年）

[解]　由正方体的对称性,不妨设满足要求的折线是从 A 为始点,A 点所对的顶点 C_1 为终点.以 A 为中心,3为半径的球与正方体的表面交成三段弧 $\overset{\frown}{KL}$、$\overset{\frown}{LN}$、$\overset{\frown}{NK}$ 如图1,点 K、L、N 分别是棱 B_1C_1、C_1D_1、C_1C 的中点.

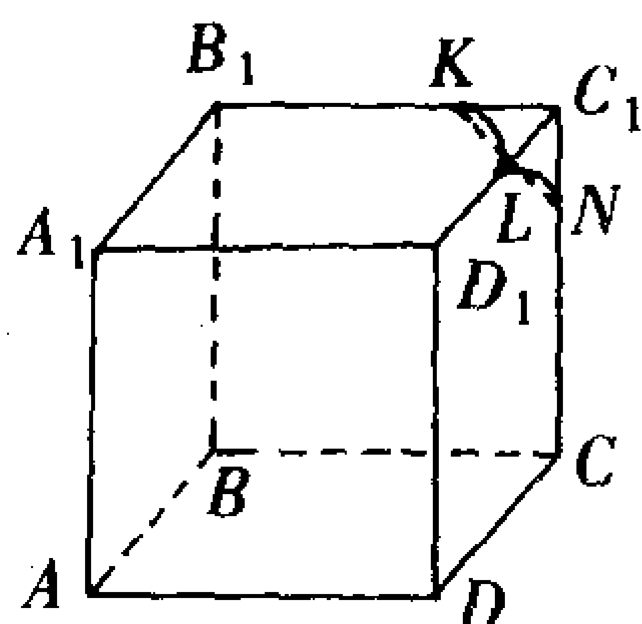


图1

设 M 是 $\overset{\frown}{KL}$ 的内点,考虑以 M 为中心、3为半径的球,点 A 在该球上,而正方体的其余点均在该球内(长方体的对角线是长方体上任两点间的最大距离;过 M 分别引与面 AB_1、AD_1 平行的面,将正方体分成四个长方体,其中 AM 是最长的对角线).

因此,与点 M 相连结、长度为3的线段的另一端在正方体上只有 A 点,所以折线的第一段的另一端只能是 L、K 或 N.

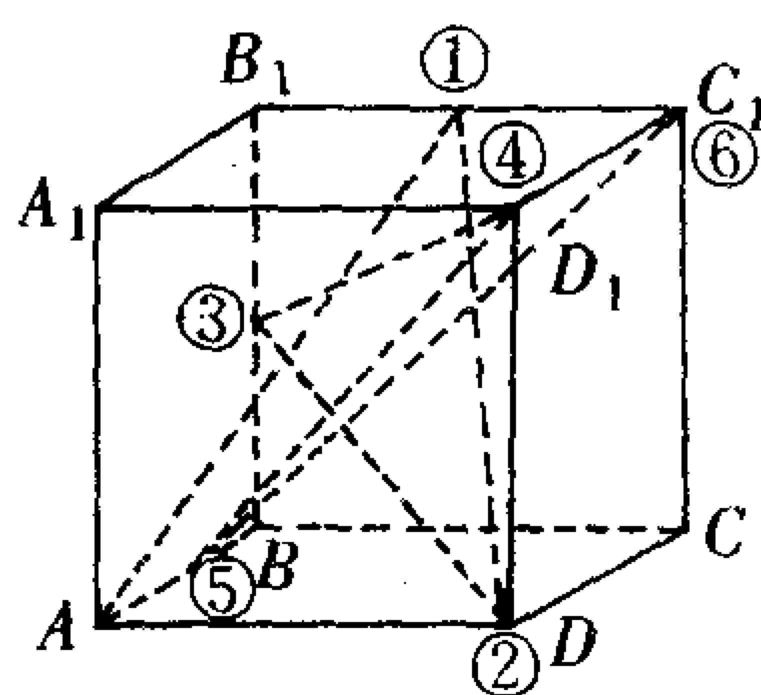


图2

由 K 可引长为3的线段的另一端 D(除点 A 外只有它).

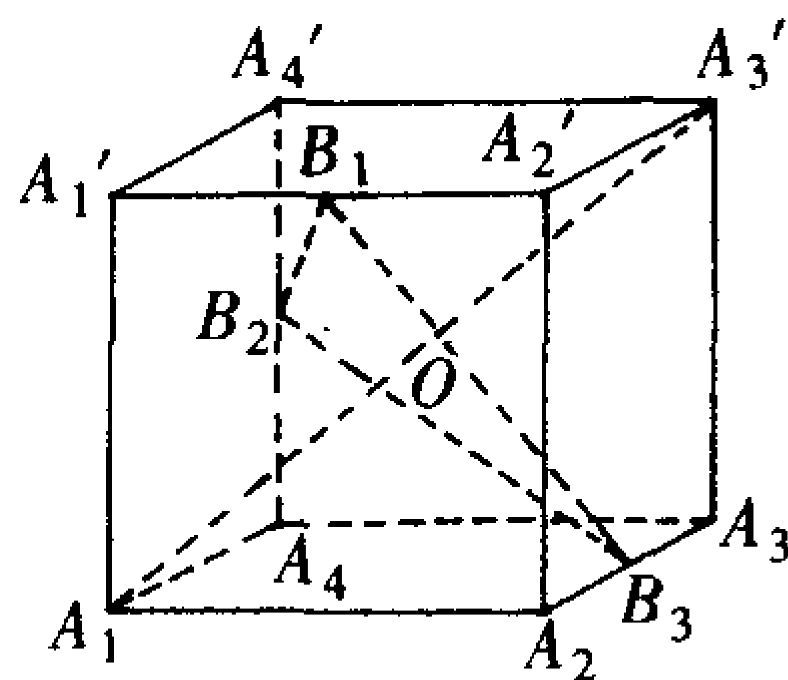
同样地,如果从点 L 和 N 出发的一段只能与 B 和 A_1 相连.这些点都是与 A 点相邻的正方体的顶点.

折线的下一个顶点必是正方体的某条棱的中点,再接下去一个顶点是 C、B_1、D_1 中的一点,再接下一个顶点又是某棱的中点接着折线的第6段线段的另一端点就是与 A 相对的顶点 C_1,如图2所示,便是满足条件的一条折线.所以最少要6段.

17·6　试证：在边长为 a 的正方体内部可以作两个棱长为 a 的正四面体，使得它们没有公共点.

（前民主德国数学奥林匹克，1983 年）

［证］　设已知边长为 a 的立方体为 $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$，其中心为 O.



过 O 作垂直于对角线 $A_1A'_3$ 的平面，它分别过棱 $A'_1A'_4$、$A'_2A'_2$、A_3A_4 的中点 B_1、B_2、B_3.

因为点 B_1、B_2、B_3 到顶点 A_1 与 A'_3 的距离相等，都是 $\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

由于　$B_1O=B_2O=B_3O$，且

$$B_1B_2=B_2B_3=B_3B_1=\sqrt{\frac{3}{2}}a>\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

所以，正棱锥 $A_1B_1B_2B_3$ 及 $A'_3B_1B_2B_3$（它们没有公共内点）各含有一个正四面体，其高为

$$A_1O=A'_3O=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

其底面$\triangle B'_1B'_2B'_3$ 与$\triangle B_1B_2B_3$ 关于中心 O 是位似的，所求的正四面体分别在四面体 $A_1B'_1B'_2B'_3$ 与 $A'_3B'_1B'_2B'_3$ 的内部，它们关于其中心是位似的，其位似系数为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}<1$，而高为

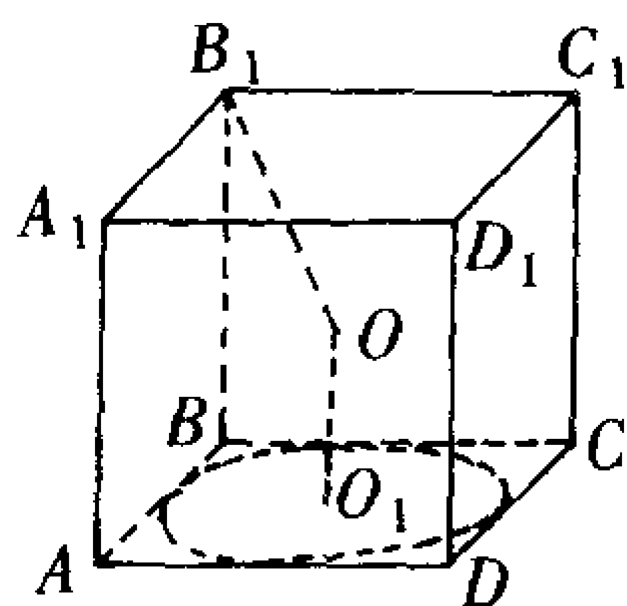
$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

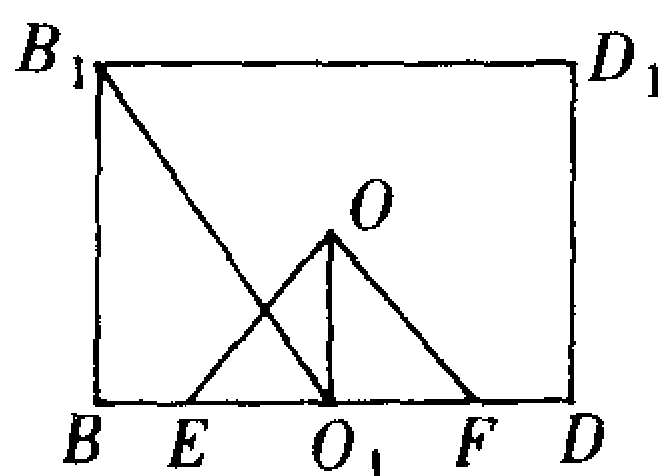
从而棱长为 a.

17·7　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1cm. 求：正方体底面 $ABCD$ 的内切圆周上的点与过顶点 A、C 和 B_1 的圆周上的点之间的最小距离.

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

［解］　我们所考察的两个圆周（下页左上图），分别在以正方体的对称中心 O 为球心的两个同心球——与正方体各棱都相切的球面（半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$cm，简称小球）及正方体的外接球面（半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm，简称大球）





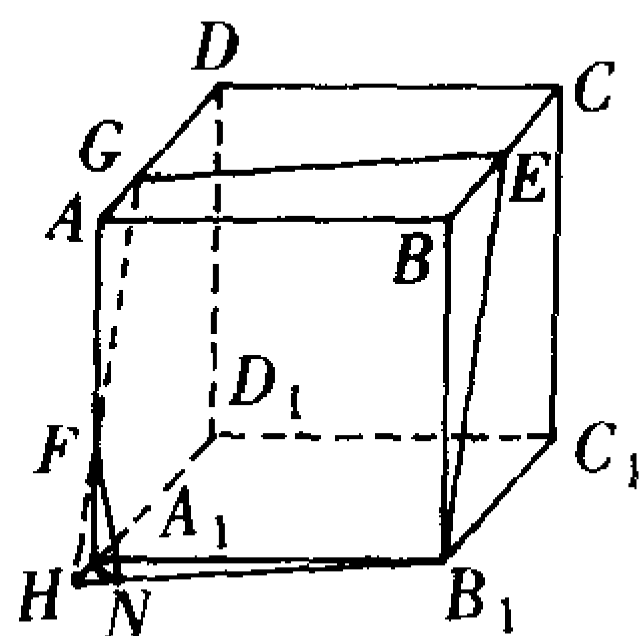
上.这两球面上点之间的最小距离就是它们的半径之差$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$cm.

当两圆周上各有一点恰好在由球心 O 发出的同一射线上,那么该两点间之距离即为最小值

考虑在以 O 为位似心,位似系数为$\sqrt{\frac{3}{2}}$的变换下,小球面变为大球面,而小圆周的象集为大球面的一个圆周.

注意到小圆周与线段 BD 的交点 E 和 F(左下图)在该位似变换下的象在平面 AB_1C 的两侧(因为$\angle O_1OF=45°>\angle BB_1O$,所以射线 OF 不与该平面相交),所以小圆周的象集(圆周)将与大圆周相交,设一交点为 N,而 N 的原象为 M.

那么 M、N 之间的距离就是我们所考虑的两圆周上点之间的最小距离,它等于$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$cm.



17·8 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 BC 的中点,F 在 AA_1 上,且 $A_1F:FA=1:2$,求:平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[解] 不妨设正方体的棱长为 6,由 $A_1F:FA=1:2$, 得出 $A_1F=2$, $FA=4$.

设平面 BEF 与 AD 相交于 G.

$\because$ 平面 ADD_1A_1∥平面 BCC_1B_1, $\therefore$ $FG∥B_1E$,

又有 $AG∥BE$ $AF∥BB'_1$, 从而 $\triangle AFG\backsim\triangle BB_1E$.

由此得出 $AG=\frac{BE\cdot AF}{BB_1}=\frac{3\times4}{6}=2$, 且 $GD=AD-AG=4$.

延长 GF 交 D_1A_1 的延长线于 H,

由 $Rt\triangle FHA_1\backsim Rt\triangle FGA$,

得 $A_1H_1:AG=A_1F:AF$ 故 $A_1H=1$.

连结 HB_1，在 Rt△HB_1A_1 中，$HB_1=\sqrt{A_1H^2+A_1B_1^2}=\sqrt{37}$.

在平面 B_1HA_1 上，过点 A_1 作 $A_1N\perp HB_1$，交 HB_1 于 N，连结 FN，由三垂线定理可知，$FN\perp HB_1$，故$\angle A_1NF$ 为所求二面角的平面角.

∵ 在 Rt△B_1HA_1 中，$\angle B_1A_1H=90°$，$A_1N\perp HB_1$，

∴ $A_1H\cdot A_1B_1=A_1N\cdot HB_1$，即 $A_1N=\dfrac{6}{\sqrt{37}}$，

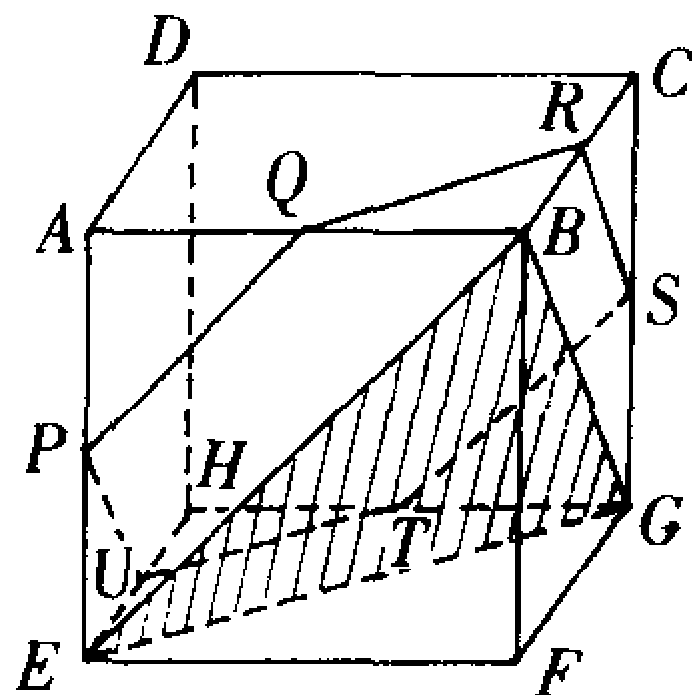
故 $\angle A_1NF=\operatorname{arctg}\dfrac{A_1F}{A_1N}=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

∴ 平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角为 $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

17·9 求作正六面体的一个截面，使得这个截面是正六边形，假设正六边形的截面存在，试研究它和正六面体的相关位置.

（中国福建省福州市数学竞赛，1958 年）

[解] 如图，作平面 BEG，那么△BEG 是正三角形.



过棱 AE 中点 P 作截面平行于平面 BEG，与各棱的交点依次为 P、Q、R、S、T、U.

则 $PQ\parallel EB$，

∴ Q 是棱 AB 的中点.

而 $QR\parallel UT\parallel EG\parallel AC$，

故 R 也是棱 BC 的中点.

同理可证，S、T、U 分别是棱 CG、GH、HE 的中点.

∴ $PQ=QR=RS=ST=TU=UP$.

又∵ $PQ\parallel BE$，$QR\parallel EG$，

∴ $\angle PQR=180°-60°=120°$，

同理 $\angle QRS=\angle RST=\angle STU=\angle TUP=\angle UPQ=120°$，

即 $PQRSTU$ 是正六边形.

若 $PQRSTU$ 是正六边形的截面，则可证 PQ、QR、RS、ST、TU、UP 必分别在正方体的六个面上，截面不过正六面体顶点，正六边形的相邻二顶点不能在正六面体平行的二棱上，相邻三顶点不能在交于一点的三条棱上，且 P、Q、R、S、T、U 分别在从两个对顶点发出的六条

棱上.

由正六边形性质知 $QR /\!/ PS$，$QR=\frac{1}{2}PS$.

$\therefore$ $PS /\!/$平面 $ABCD$，$PS /\!/ AC$，

于是 $PS=AC$，则 $QR \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AC$.

$\therefore$ Q、R 分别为棱 AB、BC 的中点.

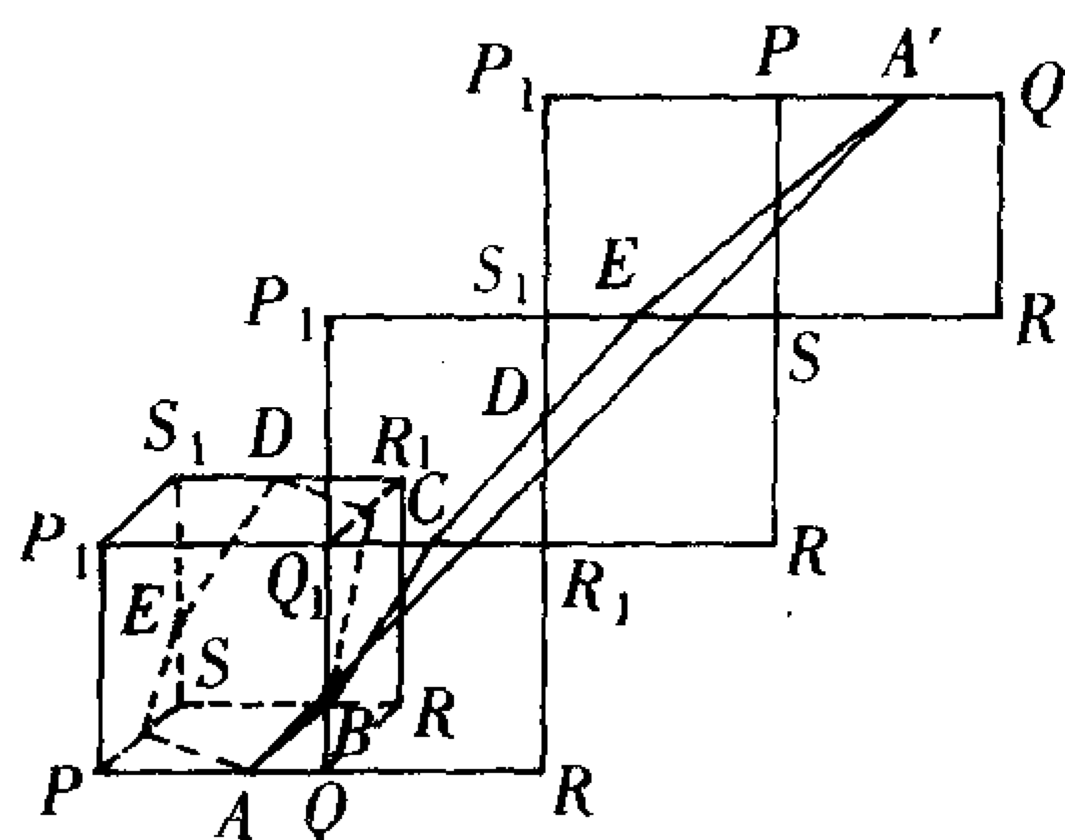
同理其他各点亦为各棱的中点.

这就是说,若正六边形截面如果存在,则它在各棱的顶点是棱的中点.

这样的正六边形截面有四个.

17·10 求证:经过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体的一个侧面的面积.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)



[证] 正方体的截面是中心对称的凸多边形.并且边是偶数,即或是四边形或是六边形.

如果截面是四边形,那么它将与正方体某两个相对的侧面不相交,并且截面在这两个侧面上的射影是整个侧面.因此,截面四边形的面积不小于正方体一个侧面的面积.

如果截面是六边形,那么它与正方体的六个侧面都相交.

考察正方体的展开图,可知截面周长 p 有不等式

$$p \geqslant |AA'|=\sqrt{(3a)^2+(3a)^2}=3\sqrt{2}a.$$

其中 a 是正方体棱长,截平面交正方体内切球的截圆半径为$\frac{a}{2}$.所以对截面积 S,有

$$S>\frac{1}{2}\left(p\cdot\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}>1.06a^2.$$

这时截面六边形的面积也不小于正方体一个侧面的面积.

17·11 试证:长方体的各个面在同一个平面上的正射影的面积之

平方和与这个平面位置无关的充分必要条件是：这个长方体是正方体.

（波兰数学奥林匹克，1965 年）

[证] 设 T 为长方体各面在平面 π 上的正射影的面积之平方和.

如果平面 π 是长方体的一个面所在的平面，那么 T 等于这个面的面积之平方的 2 倍，若这个长方体不是正方体，那么它至少有两个面积不同的面. 因此，当平面 π 是长方体的不同面积的面所在的平面时，T 的值不同.

下面证明：对于棱长为 a 的正方体，对平面 π 的任何位置，总有 $T=2a^4$，从而与平面 π 的位置无关.

因为同一图形在互相平行的平面上的射影是全等的，因此可以假定平面 π 经过正方体的某个顶点 S，并且整个正方体位于平面 π 的同一侧.

设 n 是由 S 引出的垂直于平面 π 的射线.

设 n 与正方体的棱 SA、SB、SC 之间的夹角为 α、β、γ，显然 α、β、γ 皆不大于 $90°$，并且正方体经过 S 的三个面与平面 π 的夹角亦分别等于 α、β、γ.

易证　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

由面积的射影定理可知，正方体经过 S 的三个面的正射影的面积为 $a^2\cos\alpha$、$a^2\cos\beta$、$a^2\cos\gamma$，于是

$$\begin{aligned}T&=2(a^2\cos\alpha)^2+2(a^2\cos\beta)^2+2(a^2\cos\gamma)^2\\&=2a^4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\&=2a^4.\end{aligned}$$

17·12　C 为边长等于 2 的正方体. 用下法构造一个 14 面体：切去 C 的 8 个角，并且新得出的面与 C 的对角线垂直，彼此全等. 如果这 14 面体的 14 个面的面积相等，求每一个面的面积.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

[解] 设平面 EFG 是一个截面，这时有两种情况：

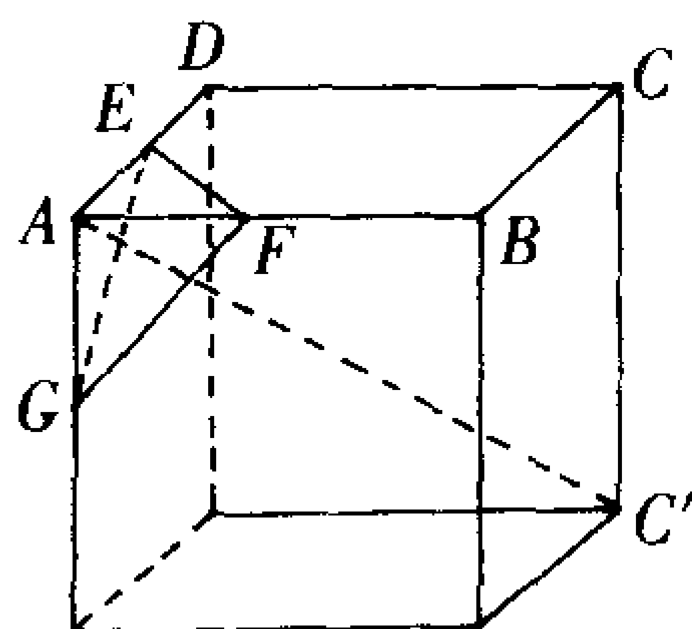
(1) 若 $AF\leqslant 1$. 设　$AF=x$.

$\because$　面 EFG 与对角线 AC' 垂直，$\therefore$　$EF\perp AC'$.

又 AC 是 AC' 在面 ABC 上的射影，所以有　$EF\perp AC$，$AE=AF$.

从而　$EF=\sqrt{2}x$.

同样　$EG=GF=\sqrt{2}x$.



所以 $\triangle EFG$ 的面积为

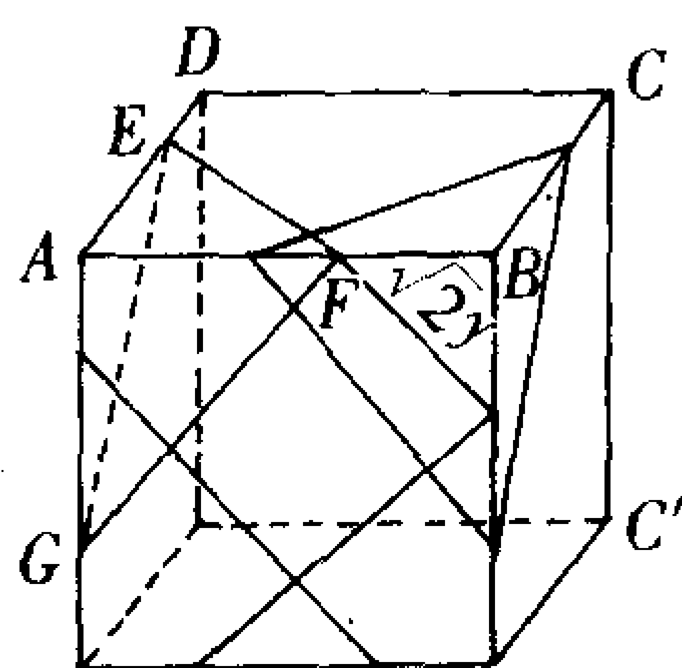
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}x)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

正方形 $ABCD$ 被截去四角后剩余面积为

$$2^2-4\cdot\frac{1}{2}x^2=4-2x^2.$$

但在 $x\leqslant 1$ 时,

$$4-2x^2\geqslant 4-2=2>\frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$



所以正三角形 EFG 的面积与正方形 $ABCD$ 剩下的面积不可能相等.

(2) 若 $AF>1$.

容易知道正方形 $ABCD$ 被截去四角后,剩下中央一个小正方形.

设 $BF=y(y<1)$,则这小正方形的边长为 $\sqrt{2}y$,面积为 $2y^2$.

正三角形 EFG 的边长为 $EF=\sqrt{2}(2-y)$,面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2(2-y)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-y)^2$.

$\triangle EFG$ 被截去 3 个小正三角形,每个的边长为

$$\frac{1}{2}(FG-\sqrt{2}y)=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-y-y)=\sqrt{2}(1-y).$$

面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2(1-y)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-y)^2$.

$\therefore$ $\triangle EFG$ 剩下的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}[(2-y)^2-3(1-y)^2]$.

根据题意应有 $2y^2=\frac{\sqrt{3}}{2}[(2-y)^2-3(1-y)^2]$.

即 $(4+2\sqrt{3})y^2-2\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$.

上式左边在 $y=0$ 时为负,在 $y=1$ 时为正,所以此方程恰有一根在 $(0,1)$ 内.它就是

$$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}.$$

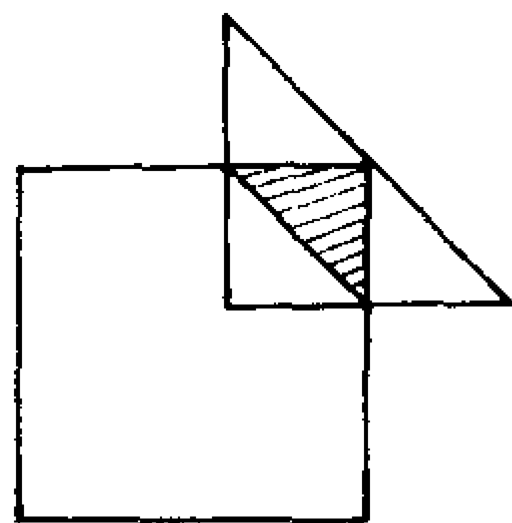
这时 14 面体的各面面积为

$$2y^2=\frac{6+2\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}}{(2+\sqrt{3})^2}.$$

17·13 在以 8 个点(x,y,z)(其中 x,y,z 取 0 或 6)为顶点的正方体中取点 $P(e,\pi,\sqrt{5})$,求:P 关于正方体各面的对称点(共 16 个)为顶点的多面体和原正方体的公共部分的体积.

(日本数学奥林匹克,1991 年)

[解] 如图,正方形内任一点关于两邻边的对称点的连线过该两邻边的顶点.



所以正方体内一点 $P(a,b,c)$关于正方形各面的对称点为顶点的多面体与原正方体的公共部分的体积为

$$V_{公共部分}=V_{正方体}-V'=6^3-V'.$$

其中 V'为图中以阴影部分为底边的 8 个小三棱锥的体积之和.

下面先求 V'.

$$V'=\frac{1}{6}[ab(6-c)+abc+(6-a)b(6-c)+(6-a)bc+a(6-b)(6-c)+a(6-b)c+(6-a)(6-b)(6-c)+(6-a)(6-b)c]$$
$$=6^2.$$

$\therefore\quad V_{公共部分}=6^3-6^2=180.$

17·14 已知:一个正方体 $ABCD-A'B'C'D'$,(1)设 X 为线段 AC 上的任一点,Y 为线段 $B'D'$上的任一点,求线段 XY 的中点的轨迹.(2)求在线段 XY 上,且满足关系 $ZY=2ZX$ 的动点 Z 的轨迹.

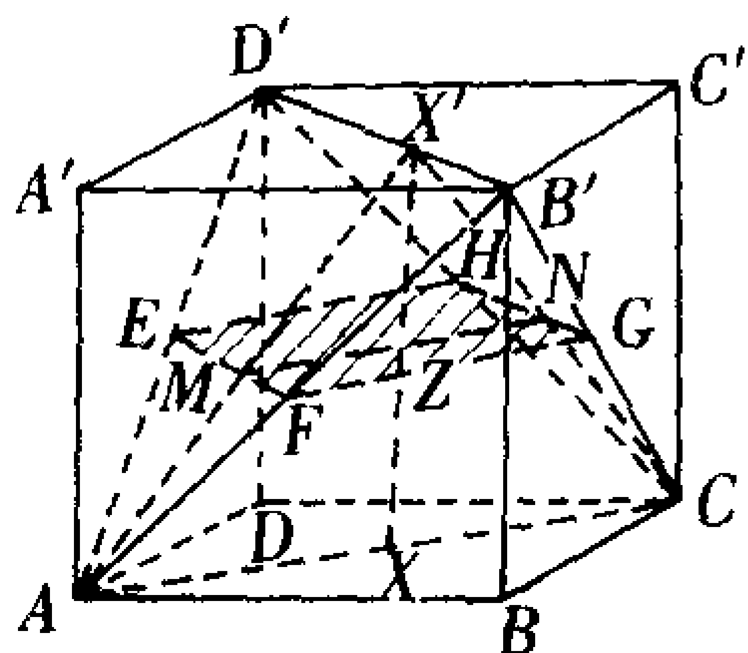
(第 2 届国际数学奥林匹克,1960 年)

[解] (1)先考虑几个特殊情形.

当 X 为 AC 的端点 A 或 C,Y 为 $B'D'$的端点 B'或 D'时,对应的线段 XY 分别是 AD'、AB'、CB'、CD'.

设 AD'、AB'、CB'、CD'的中点依次为 E、F、G、H. 这几个点显然是所求轨迹上的点.

连接 EF、FG、GH、HE.



在$\triangle AB'D'$中，$EF \parallel D'B'$，$EF = \frac{1}{2}D'B'$.

在$\triangle CB'D'$中，$HG \parallel B'D'$，$HG = \frac{1}{2}D'B'$.

$\therefore\ EF \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} HG$.

又因为 AC、$B'D'$所成的角是直角，所以四边形 $EFGH$ 是一个正方形，且边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

设正方体的棱长为 a，则正方形 $EFGH$ 的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

设 X 为AC 上的任一点，Y 是$B'D'$上的任一点，Z 为XY 的中点.

下面证明：Z 点的轨迹是正方形$EFGH$ 的内部或边界.

先证明完备性，即证明满足条件的点 Z 在轨迹上.

在平面 $AB'D'$上，连接 YA，与 EF 交于点M.

在平面 $CB'D'$上，连接 YC，与 HG 交于点N.

在$\triangle AB'D'$中，$\because\ EF \parallel D'B'$，$E$ 是AD'的中点，

$\therefore\ M$ 是YA 的中点.

同理，N 是YC 的中点.

因此，MN 是$\triangle YAC$ 的中位线.

因为 X 是AC 上任一点，所以 XY 的中点Z 必在线段MN 上，

又$\because\ MN \parallel AC$，$MN \parallel FG \parallel EF$，

$\therefore\ MN$ 上各点都在正方形$EFGH$ 的内部，从而 Z 点必在正方形$EFGH$ 的内部，且当 X、Y 中有一点是AC 或$B'D'$的端点时，Z 在正方形$EFGH$ 的边界上.

再证明纯粹性，即证明在轨迹上的点 Z 必定满足条件，也就是证明正方形 $EFGH$ 上的任一点Z 必是线段XY 的中点，其中 X 是AC 上的一点，Y 是$B'D'$上的一点.

设 Z 是正方形$EFGH$ 内的任一点，过 Z 点作$MN \parallel FG$，与 EF、GH 分别相交于M、N 点.

在平面 $AB'D'$上，连结 AM，与 $B'D'$相交于点Y，于是 M 是AY 的

中点.

连结 YC,则 YC 必过 N 点.

于是 MN 在平面 YAC 上,从而点 Z 在平面 YAC 上.

连结 YZ 并延长,必与 AC 相交,设交点为 X.

$\because$ $MN /\!/ FG$, $\therefore$ $MN /\!/ AC$,

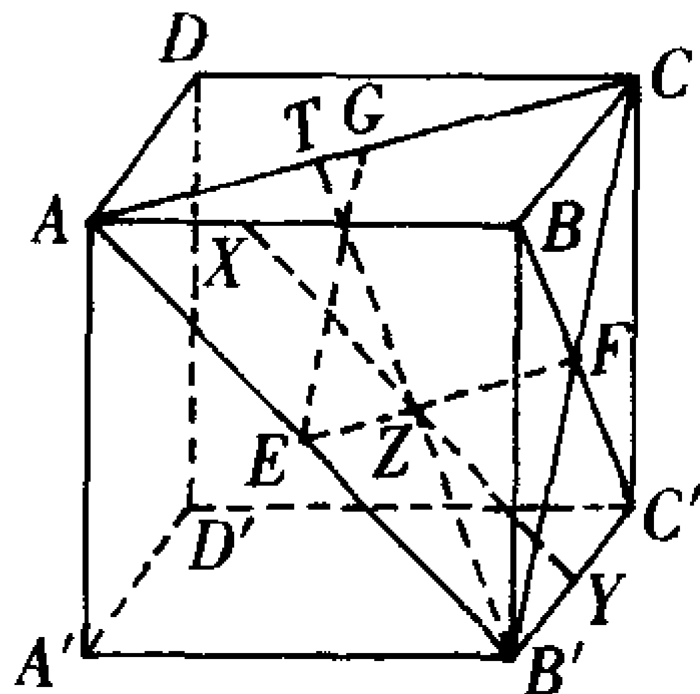
又$\because$ M 是 AY 的中点, $\therefore$ Z 是 XY 的中点.

由以上证明可知,所求的满足条件的点 Z 的轨迹是正方形 $EFGH$ 的内部和边界,这个正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

17·15 已知:一个正方体 $ABCD-A'B'C'D'$,点 X 沿正方形 $ABCD$ 按 $ABCDA$ 的方向作匀速运动,点 Y 沿正方形 $B'C'CB$ 按 $B'C'CBB'$ 的方向以同样的速度作匀速运动,且点 X 与 Y 分别从 A 点与 B' 点同时出发,求:线段 XY 的中点的轨迹,并画出其图形.

(第 4 届国际数学奥林匹克,1962 年)

[解] 如图,设 E、F、G 顺次为正方形 $A'B'BA$、$B'C'CB$ 和 $ABCD$ 的中心.



下面我们证明:菱形 $EFCG$ 的周界即为动线段 XY 的中点 Z 的轨迹.

首先证明,如果点 Z 是动线段 XY 的中点,那么点 Z 必在菱形 $EFCG$ 的周界上.

分两种情况证明.

(1) X、Y 分别在某一个定角的两边上,不失一般性,设 X 从 B 到 C,而 Y 同时从 C' 到 C. 由于 X、Y 的速度相同,所以 XY 必平行于 BC'、XY 的中点 Z 必在 CF 上.

(2) X、Y 分别在两条异面直线上,不失一般性,设 X 从 A 到 B,Y 同时从 B' 到 C'.

由于 X、Y 的速度相同,则 $AX=B'Y$.

若 Z 为 XY 的中点,连接 $B'Z$ 并延长与上底面相交于 T,连 XT,则平面 XY 与平面 AC 的交线是 XT.

$\because$ $B'C' /\!/$ 平面 AC, $\therefore$ $B'C' /\!/ XT$.

于是 $\triangle ZB'Y \cong \triangle ZTX$.

而 $XT=B'Y=AX$, $XT /\!/ BC$,

∴　$\triangle AXT$ 是等腰直角三角形，$\angle TAX=\frac{\pi}{4}$，从而 T 在 AC 上.

可以证明：$FZ /\!/ CT$，$EZ /\!/ CA$，$FE /\!/ CA$.

基于平行线的惟一性，显然 Z 在 EF 上.

综合(1)，(2)可证得，线段 XY 的中点 Z 必定在菱形 $EFCG$ 的周界上.

下面证明，如果点 Z 在菱形 $EFCG$ 的周界上，则点 Z 必定是符合条件的线段的中点.

也分两种情况证明：

(1) Z 在 CF 或 CG 上.

过 Z 作 $XY /\!/ BC'$(或 BD)，而与 BC 及 CC'(或 CD 及 BC)分别相交于 X 及 Y.

由相似性的性质可得　$XZ=YZ$，即 Z 为 XY 的中点，

同时可证　$BX=C'Y$(或 $CX=CY$)，因此 X、Y 适合题设条件.

(2) Z 在 EF 或 EG 上.

不失一般性，设 Z 在 EF 上，连接 $B'Z$ 并延长交平面 AC 于 T，显然 T 在 AC 上，过 T 作 $TX /\!/ CB$ 交 AB 于 X，则 $TX /\!/ C'B'$.

在平面 $B'C'TX$ 上，连接 XZ 并延长交 $B'C'$ 于 Y.

在 $\triangle B'CA$ 中，由于 F 是 $B'C$ 的中点，$EF /\!/ AC$，则 Z 为 $B'T$ 的中点，于是　$\triangle ZTX \cong \triangle ZB'Y$.

从而有　$TX \overset{/\!/}{=} B'Y$，$ZX=ZY$.

又　$TX /\!/ BC$，则　$\angle XTA=\angle TAX=\frac{\pi}{4}$，

∴　$TX=AX$，即　$AX=BY$.

因此 X、Y 适合题设条件.

由(1)，(2)，如果 Z 是菱形 $EFCG$ 的周界上的任一点，则 Z 必定是符合题设条件的动线段 XY 的中点.

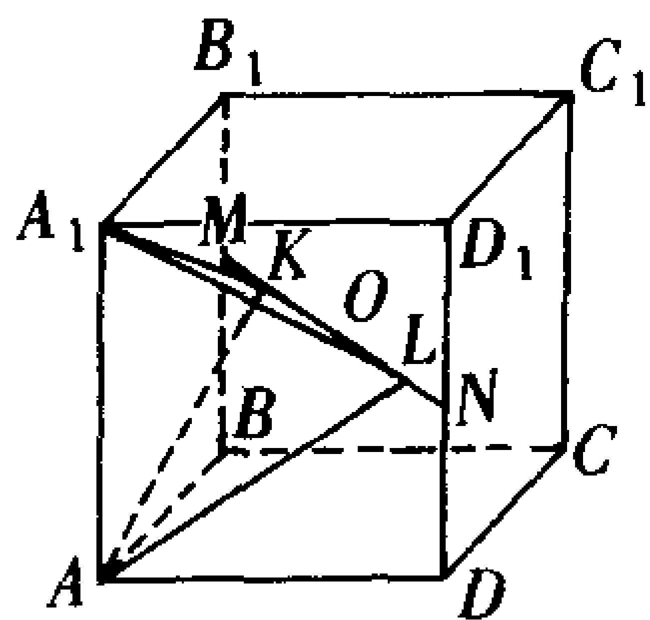
从而可证，所求轨迹为菱形 $EFCG$ 的周界.

17·16　能否在棱长为 1 的正方体形状的盒子里放入 3 个互不重叠的棱长为 1 的正四面体？

（前苏联教委推荐试题，1989 年）

[解]　可以放入，设 M 和 N 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱

BB_1 和 DD_1 的中点. 由于直线 AA_1 与 MN 之间的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 这恰好等于棱长为 1 的正四面体的对棱之间的距离, 于是可在线段 MN 上取点 K 和 L, 使得 $KL=1$ 且 K 和 L 关于 MN 的中点(即正方体的中心) O 对称. 这时, 四面体 AA_1KL 为棱长为 1 的正四面体.



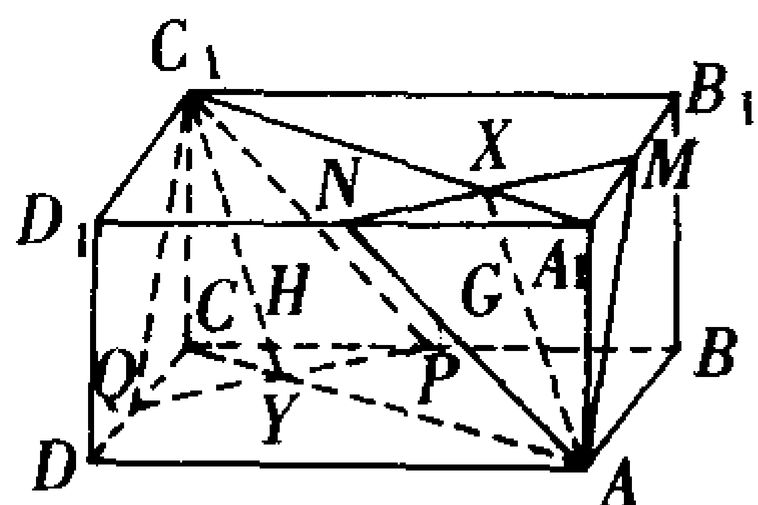
分别用棱 B_1C_1 和 CD 代替 AA_1, 并作相应的处理, 可以得到另两个正四面体.

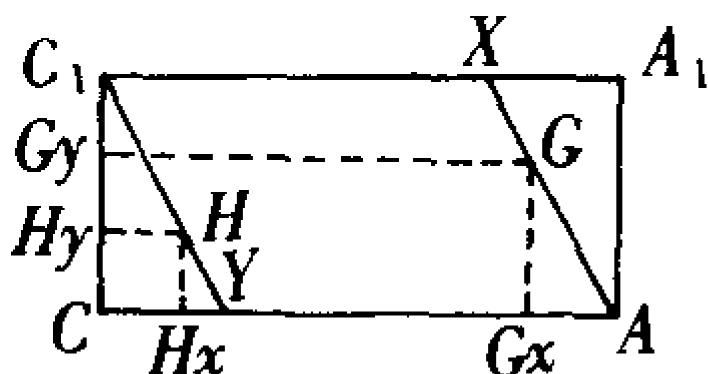
易见, 这三个正四面体没有重迭而仅有一个公共点 O.

17·17 设有一长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$, 其三棱 $A_1A=a$, $A_1B_1=b$, $A_1D_1=c$. 又 M、N、P、Q 分别为 A_1B_1、A_1D_1、BC、CD 的中点, 求: 两三角形 AMN、C_1PQ 的重心间的距离.

(中国上海市数学竞赛, 1958 年)

[解] 设对角面 AC_1 分别交平面 AMN、C_1PQ 于 AX、C_1Y, 则 AX 为 $\triangle AMN$ 的中线, C_1Y 为 $\triangle C_1PQ$ 的中线.





又设 $\triangle AMN$、$\triangle C_1PQ$ 的重心分别为 G、H, 其在 AC、CC_1 上的射影各为 G_x、H_x 及 G_y、H_y, 则

$$G_yH_y=\frac{a}{3},$$

$$G_xH_x=\left(1-2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)\sqrt{b^2+c^2}=\frac{2}{3}\sqrt{b^2+c^2}.$$

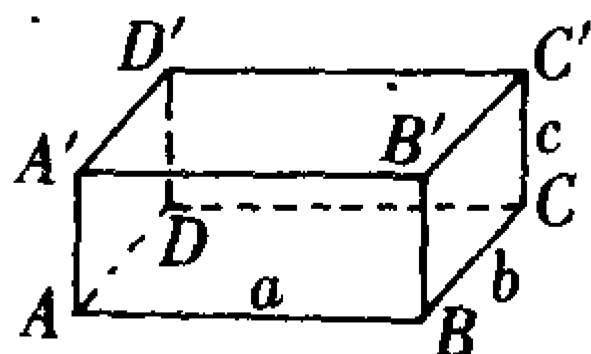
$$\therefore\quad GH=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2+4c^2}.$$

17·18 已给一长方体, 三棱不等. 现在要由一顶点沿表面到对角

顶点,求:最短的路线.

(中国北京市数学竞赛,1957年)



[解] 如图,设长方体的三条棱长为 a、b、c,且 $a>b>c$. 假定由顶点 A 沿表面到对角顶点 C',由图形可知,相对短的路线有以下三条:

(1)从 A 跨过棱 $A'B'$ 到 C'(从 A 跨过 CD 也一样),其路线长为

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2};$$

(2)从 A 跨过棱 BB' 到 C'(从 A 跨过 DD' 也一样),其路线长为

$$\sqrt{c^2+(a+b)^2};$$

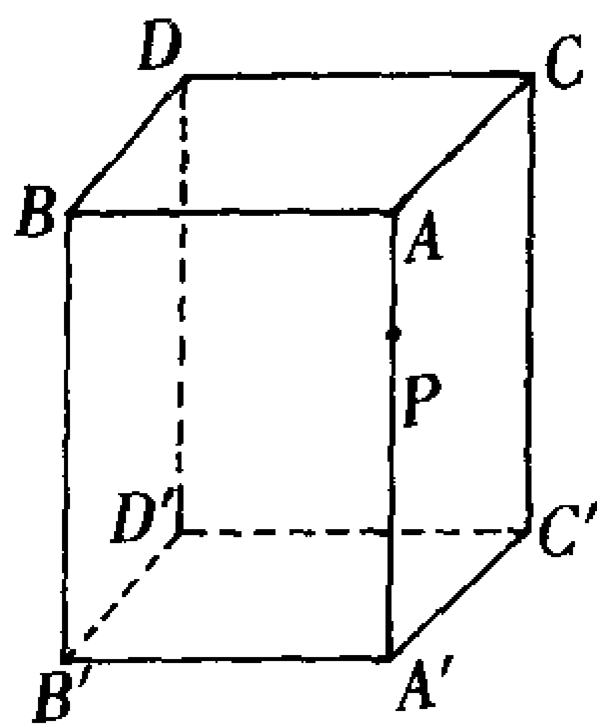
(3)从 A 跨过棱 BC 到 C'(从 A 跨过 $A'D'$ 也一样),其路线长为

$$\sqrt{b^2+(a+c)^2}.$$

$\because\ a>b>c,\ \therefore\ ab>ac>bc.$

故 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}<\sqrt{b^2+(a+c)^2}<\sqrt{c^2+(a+b)^2}.$

$\therefore$ 最短的路线为(1),其长为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$.



17·19 图中长方体 $ABDC-A'B'D'C'$ 是一个六面封闭的水箱,已知 $AA'=7$, $AB=5$, $AC=4$. 因为使用过久,在 AA'、CC'、AB 棱上各有一个小孔. 图里的 P、Q、R 是小孔的位置,已经量得 $AR=3$, $AP=2$, $CQ=1$,问这水箱最多还能盛多少水(水箱不必平放)?

(中国北京市数学竞赛,1957年)

[解] 过 P、Q、R 三点作一平面,该平面交 DC 于 T,交 AC 延长线于 F. 易见 F 点为 PQ、AC、RT 三直线之交点.

设长方体 $ABDC-A'B'D'C'$ 的体积为 V 立方单位,三棱台 $APR-CQT$ 的体积为 V_0 立方单位,所求水箱的容量为 V' 立. 则 $V'=V-V_0$.

$\because\ \triangle CQT\backsim\triangle APR,\ \therefore\ CT=\dfrac{3}{2}.$

又∵ $\triangle FCQ \backsim \triangle FAP$,

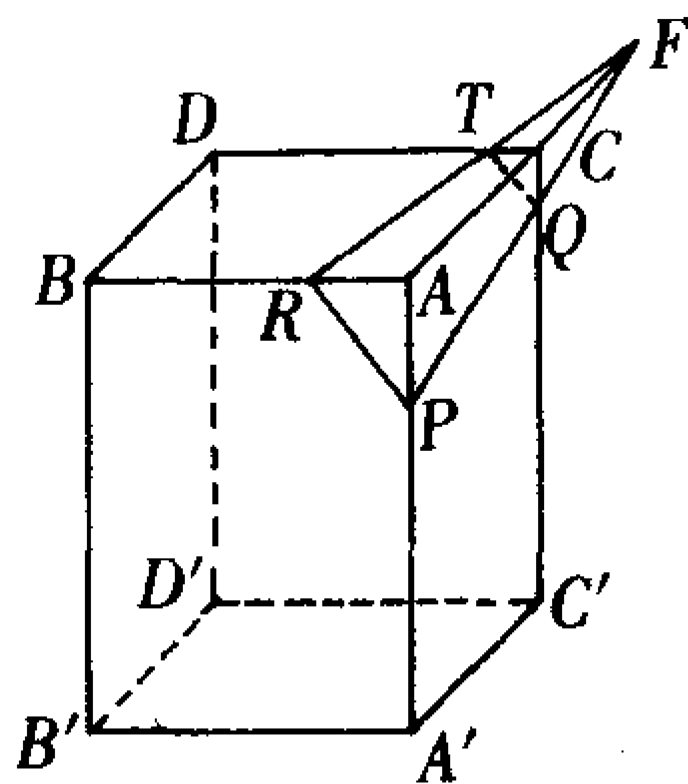
∴ $FC=\frac{1}{2}FA$,

即 $FC=AC=4$, $FA=8$.

∴ $V_0=\left(\frac{1}{3}S_{\triangle APR}\times FA\right)-\left(\frac{1}{3}S_{\triangle CQT}\times FC\right)$

$=\left(\frac{1}{3}\times 3\times 8\right)-\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times 4\right)$

$=7$(立方单位).



而 $V=7\times 4\times 5=140$(立方单位).

故 $V'=V-V_0=140-7=133$(立方单位).

即水箱最多还能盛 133 立方单位的水.

17·20 设 A 是三维实心 $a\times b\times c$ 长方体砖($a,b,c>0$),设 B 是到 A 中某点距离至多为 1 的点的集合(特别地,$B\supset A$),用 a、b、c 的多项式表示 B 的体积.

(第 45 届美国普特南数学竞赛,1984 年)

[解] (1)A 自身肯定满足条件,此时 A 的点到自身的距离为 $0<1$,此时体积为 abc.

(2)$a\times b\times 1$ 的长方体砖内的点到 $a\times b$ 面上的距离至多为 1,类似地有 $a\times c\times 1$,$b\times c\times 1$ 的长方体砖.

这样的砖各有两个,于是体积为 $2(ab+bc+ca)$.

(3)4 个高为 a,半径为 1 的$\frac{1}{4}$圆柱体也符合要求,同样还有 4 个高为 b、半径为 1 的$\frac{1}{4}$圆柱体,4 个高为 c、半径为 1 的$\frac{1}{4}$圆柱体.

于是总体积为$(a+b+c)\pi$.

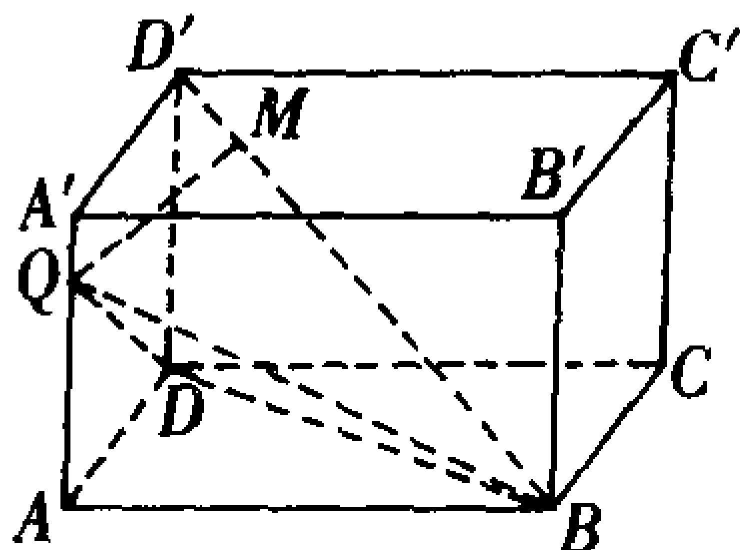
(4)半径为 1 的$\frac{1}{8}$球体(共有 8 个)也符合要求.其总体积为$\frac{4}{3}\pi$.

因此,B 的体积为

$$V=abc+2(ab+bc+ca)+\pi\left(a+b+c+\frac{4}{3}\right).$$

17·21 长方体 P 的对角线到三条与它不相交的棱之间的最短距离分别为 $2\sqrt{5}$、$\frac{30}{\sqrt{13}}$、$\frac{15}{\sqrt{10}}$. 求:P 的体积.

（第 4 届美国数学邀请赛,1986 年）



［解］ 设长方体的从一顶点出发的三棱棱长分别为 a,b,c.

先寻找体对角线到与它不相交的棱的最短距离.

过 AA' 上任一点 Q 作 $QM\perp BD'$, 垂足为 M.

设 $A'Q=x$, 则 $AQ=b-x$. 又设 $QM=d$, 则有

$$\begin{aligned}BM^2&=BQ^2-QM^2\\&=(AB^2+QA^2)-QM^2\\&=c^2+(b-x)^2-d^2.\end{aligned}$$

同样有 $D'M^2=a^2+x^2-d^2$.

于是由 $BD'=D'M+BM$ 得

$$\sqrt{c^2+(b-x)^2-d^2}+\sqrt{a^2+x^2-d^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

即 $(a^2+b^2+c^2)d^2=(a^2+c^2)x^2-2a^2bx+(b^2+c^2)a^2$,

$$\therefore\quad d^2=\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}x^2-\frac{2a^2b}{a^2+b^2+c^2}x+\frac{(b^2+c^2)a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

由二次函数性质得 $d_{\min}^2=\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}$.

同理 另两个最短距离的平方分别为 $\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$, $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

于是,由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{a^2c^2}{a^2+c^2}=(2\sqrt{5})^2=20,\\ \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}=\left(\dfrac{30}{\sqrt{13}}\right)^2=\dfrac{900}{13},\\ \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\left(\dfrac{15}{\sqrt{10}}\right)^2=\dfrac{225}{10}.\end{cases}$$

取各方程各项之倒数得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{20},\\ \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{13}{900},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{10}{225}.\end{cases}$$

可解得　$a^2=\dfrac{900}{36}$，$b^2=\dfrac{900}{4}$，$c^2=\dfrac{900}{9}$.

故　$abc=750$.所以 P 的体积为 750.

17·22　考虑长方体的集合,同一顶点的三条棱 a、b、c 满足 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2}{c^5}$.(1)求证:这个集合中有 100 对长方体的体积相等;(2)对于这 100 对长方体的每一对,求:它们的同一顶点的三条棱长的和的比.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解]　(1)由已知得　$ab=c^5$.

故　长方体的体积为　$abc=c^6$.

取 $c=1$,则长方体的体积为 $c^6=1$,而表面积为

$$2(ab+bc+ca)=2(1+a+b).$$

令 $a+b=s$，又由　$ab=1$，则当　$s\geqslant 2$ 时,

方程　$x^2-sx+1=0$　有实数解 a、b.

对于 s,令 $s'=1990s+1989$,

则方程　$x^2-s'x+1=0$　有实数解 a'、b',并且 $a'b'=ab=1$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad a'+b'+1=s'+1&=1990s+1990=1990(s+1)\\&=1990(a+b+1)\end{aligned}$$

这表明以 a'、b'、1 为三度作成的长方体与以 a、b、1 为三度的长方体，体积相等(均为 1)，表面积之比

$$\frac{2(a'+b'+1)}{2(a+b+1)}=1990.$$

由于 s 的任意性，我们可以得到无数对满足要求的长方体.

(2)显然，每一对长方体，三度的和之比为

$$\frac{a'+b'+1}{a+b+1}=1990.$$

17·23　在空间给出不在同一平面上的四个点，若以这些点作为顶点，能做成多少个不同的平行六面体?

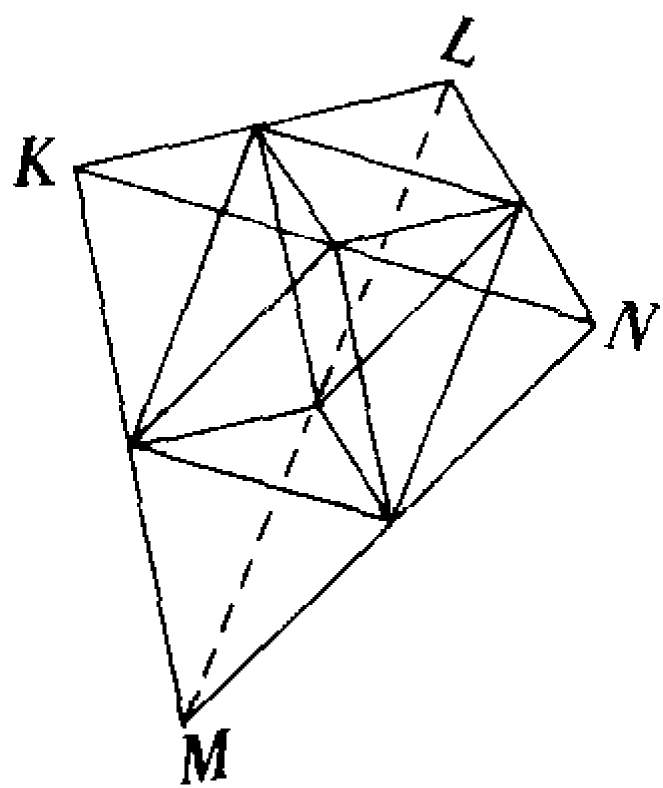
(第 7 届全苏数学奥林匹克，1973 年)

[证]　29 个平行六面体.

可以发现，当指出平行六面体的任意一个顶点和三组中截面(过平行六面体中心且与一组界面平行的平面，叫一个中截面，平行六面体各顶点到中截面等距，对一个平行六面体这样的中截面恰有三个)，平行六面体就被惟一确定了.

对空间给出不共面四点 K、L、M、N，要作为一个平行六面体的顶点，这时，所成平行六面体的三个中截面恰是四面体中与四个顶点等距的三张平面，且这三张平面是共点的.

因此，从 K、L、M、N 不共面四点为顶点的不同平行六面体的集合与同 K、L、M、N 四点距离相等的共点三平面组的集合恰可以建立一一对应关系.



对给定四点 K、L、M、N(不共面)存在有七个平面与这四点距离相等(它们过四面体 $KLMN$ 各棱的中点)由这七个平面中可以产生 $C_7^3=35$ 种不同的三平面组，但我们需要的只是交于一点的三平面组.

在 35 组三平面组中，只有三个平面同平行于四面体 $KLMN$ 的同一条棱的是不共点的，这样的三平面组共有 6 组，因此，所要求的三平面组共有 $35-6=29$ 组.

当给出一组到 K、L、M、N 四点等距的三平面组作为平面六面体

的三个“中截”平面，再由所给第四个顶点惟一作出平行六面体，为此，只需通过这些顶点引平面(界面)平行于中截面就可以了.

17·24 已知：三条直线 a、b、c 中任两条都是异面直线，能否作出这样的平行六面体，使其三条棱恰好落在直线 a、b、c 上？

(波兰数学奥林匹克，1961 年)

[解] 先证明下面的引理：

如果 a 和 b 是两条异面直线，那么存在惟一的一对平行平面，其中一个经过直线 a，另一个经过直线 b.

我们过直线 a 上任意一点 A 作 直线 $b' \parallel b$.

过直线 b 上任意一点 B 作 直线 $a' \parallel a$.

直线 a 和 b' 确定平面 α，直线 a' 和 b 确定平面 β，则 $\alpha \parallel \beta$.

于是 我们证明了确实存在一对平行平面，它们分别经过两条异面直线.

现在证明这对平面的惟一性.

如果平面 α 和 α' 经过直线 a，平面 β 和 β' 经过直线 b，并且 $\alpha \parallel \beta$，$\alpha \parallel \beta'$，那么必有 $\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$.

事实上，如果平面 α 和 α' 不重合，那么它们相交于直线 a，但因 β 和 β' 都经过直线 b 及 $\alpha \parallel \beta$，$\alpha' \parallel \beta'$，则 $a \parallel b$，这与 a 和 b 是异面直线相矛盾.

于是 α 和 α' 重合， 同理 β 和 β' 重合.

引理得证.

如果 a 和 b 是异面直线，并且平行六面体 R 的两条棱分别落在这两条直线上，那么分别经过直线 a、b 的平行平面 α、β 必定与平行六面体 R 的两个面重合.

事实上，平面六面体 R 中，有两个面经过直线 a，两个面经过直线 b，并且经过直线 a、b 的这四个面互异，因为平行六面体有六个面，它们组成三对平行平面，因此，在经过 a、b 的四个面中总可以找到一对平行平面，因而这对平行平面与平面 α、β 相重合.

由此可得，R 的三条两两互为异面直线的棱不可能落在三个平行平面上.

否则，这三个平面与 R 的三个面重合，然而平行六面体没有互相平行的面.

现在我们证明：如果 a、b、c 中任两条都是异面直线，并且它们不落在三个平行平面上，那么存在一个平行六面体，它的三条棱分别落在直线 a、b、c 上.

由引理，存在一对平面(α_1,β_1)满足条件：$a\subset\alpha_1$，$b\subset\beta_1$，$\alpha_1/\!/\beta_1$.

同样，存在一对平面(α_2,γ_1)满足条件：$a\subset\alpha_2$，$c\subset\gamma_1$，$\alpha_2/\!/\gamma_1$.

平面 α_1 和 α_2 必不重合，否则，a、b、c 所在三个平面平行，与假设不符.

最后，存在一对平面(β_2,γ_2)满足条件：$c\subset\gamma_2$，$\beta_2\subset\gamma_2$，并且 $\beta_2\neq\beta_1$，$\gamma_2\neq\gamma_1$.

于是，我们得到三对平行平面(α_1,β_1)，(α_2,γ_1)，(β_2,γ_2)，每对平面都与另两对平面相交，它们共有 12 条交线，其中包括直线 a、b、c.

六个面 α_1、β_1、α_2、γ_1、β_2、γ_2 在空间确定一个平行六面体，它的三条棱是直线 a，b，c 上的三条线段.

具有这种性质的平行六面体是惟一存在的，因为上述各面的作法是由直线 a、b、c 惟一确定的.

17·25　平行六面体有这样的性质：平行任何一定面 F 的所有横截面都有和 F 相同的周长. 试确定是否有其他多面体有这个性质.

（第 12 届加拿大数学奥林匹克，1980 年）

［**解**］　具有题目所述的性质的多面体应有 $2n$ 个面分成 n 对，每一对平面都互相平行且周长相等.

否则，则平行于某一面 F 的截面将可以任意小而以某一顶点为极限，其周长可以趋近于零，而不和平面 F 有相同的周长.

注意到四面体没有平行的面，所以不具有题目所述的性质.

所以，具有所述性质的最简单的多面体是平行六面体.

事实上，从平行六面体出发，可构造出八面体具有题目所述的性质.

不难证明，平行六面体每相对两面的中心（即平行四面体对角线的交点）的连线互相平分于一点，这一点就是平行六面体的中心.

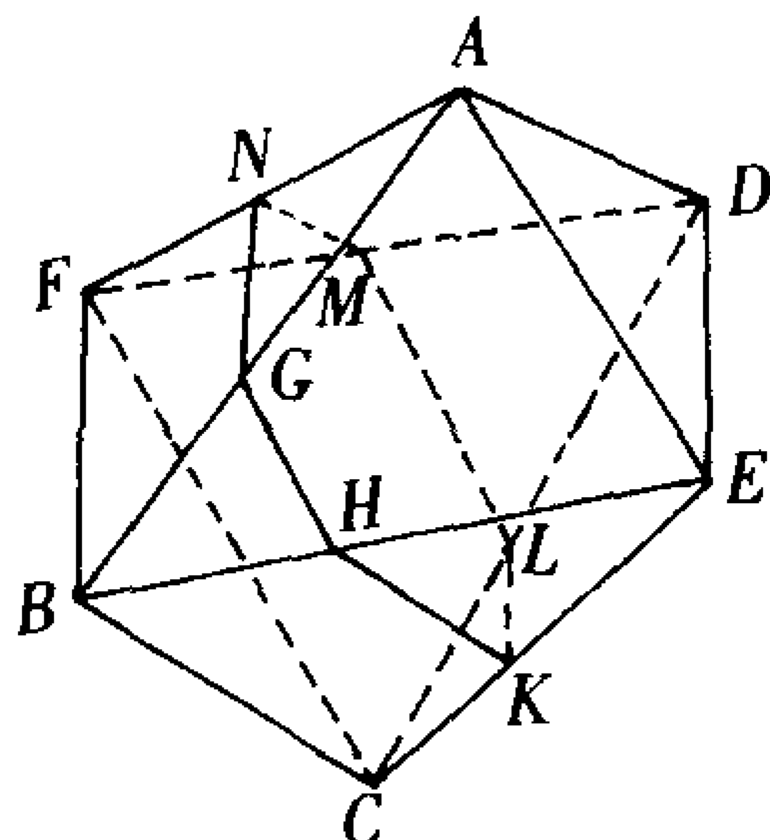
以平行六面体各面的中心（共六个）为顶点的八面体也具有同样的对称中心，从而相对的面互相平行且是全等的三角形.

对平面 ADE 作平行截面 $GHKLMN$（此截面也是平行于 CBF 面）

则有

$NG /\!/ FB$，$GH /\!/ AE$，$HK /\!/ BC$，

$KL /\!/ ED$，$LM /\!/ CF$，$MN /\!/ DA$.



记 $\dfrac{AN}{NF}=\dfrac{a}{b}$. 则

$$\frac{AN}{NF}=\frac{AG}{GB}=\frac{EH}{HB}=\frac{EK}{KC}=\frac{DL}{LC}=\frac{DM}{MF}=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad NG=\frac{a}{a+b}\cdot FB=\frac{a}{a+b}\cdot ED,$$

$$GH=\frac{b}{a+b}\cdot AE.$$

$$HK=\frac{a}{a+b}\cdot BC=\frac{a}{a+b}\cdot DA,\quad KL=\frac{b}{a+b}\cdot ED.$$

$$LM=\frac{a}{a+b}\cdot CF=\frac{a}{a+b}\cdot AE,\quad MN=\frac{b}{a+b}\cdot DA.$$

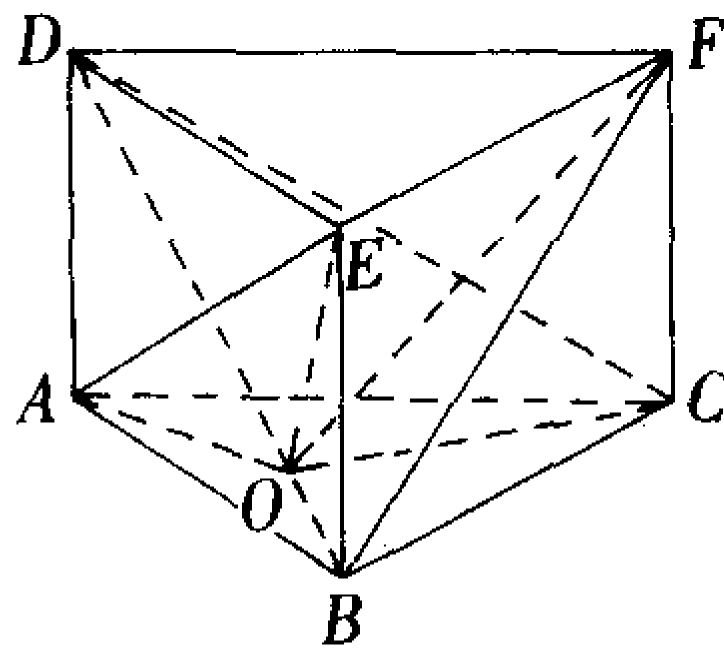
$$\therefore\quad NG+GH+HK+KL+LM+MN=AE+ED+DA.$$

于是,这样得到的八面体具有题目所述的性质.

17·26　线段 AD、BE、CF 是正三棱柱的侧棱,在三棱柱的底面 ABC 上求所有与直线 AE、BF、CD 距离相等的点.

(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)

[解]　按正三棱柱的对称性,底面$\triangle ABC$的中心显然是所求的一点,问题是,此外还有无其他的满足题设条件的点?



设 O 是所求的点,能不能由题设条件推出 $OA=OB=OC$? 依条件 O 到 AE、BF、CD 的距离相等,而且显然有 $AE=BF=CD$,即

$$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle BOF}=S_{\triangle COD}. \qquad (*)$$

令 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，$OD=d$,$OE=e$，$OF=f$.

$AE=BF=CD=g$.

则 $S_{\triangle AOE}=\sqrt{s(s-a)(s-e)(s-g)}$,其中 $s=\dfrac{1}{2}(a+e+g)$

轮换 a、b、c、d、e、f 便得$\triangle BOF$ 和$\triangle COD$ 的面积.

上述公式代入关于面积的等式(*)去根号,展开得

$$2a^2e^2+2a^2g^2+2e^2g^2-a^4-e^4-g^4$$
$$=2b^2f^2+2b^2g^2+2f^2g^2-b^4-f^4-g^4$$
$$=2c^2d^2+2c^2g^2+2d^2g^2-c^4-d^4-g^4,$$

即 $$2(a^2e^2-b^2f^2)+(e^2-f^2)(2g^2-e^2-f^2)$$
$$=(b^2-a^2)(2g^2-a^2-b^2), \quad ①$$

及 $$2(b^2f^2-c^2d^2)+(f^2-d^2)(2g^2-f^2-d^2)$$
$$=(c^2-b^2)(2g^2-b^2-c^2). \quad ②$$

由图中观察知,所有线段中 g 最大,所以①中

$$2g^2-e^2-f^2>0,\ 2g^2-a^2-b^2>0.$$

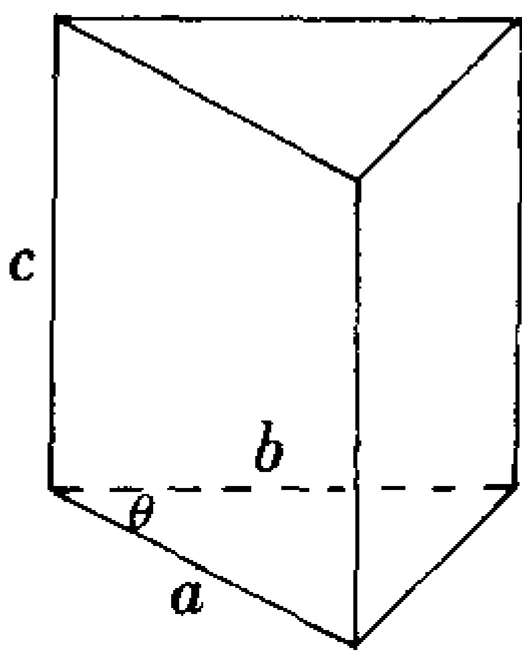
不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则①右边非负,从而左边也非负,所以 $e\geqslant f$,即 $b\geqslant c$,于是必有 $b=c$.

代入②得 $f=d$, 从而 $c=a$.

所以 O 只能是$\triangle ABC$ 的中心.

17·27 有一个底面为三角形的直棱柱,其彼此相邻的三个面(即两个侧面与一个底面)的面积之和为定值. 证明:这些面有相等的面积并且彼此垂直时体积最大.

(第 10 届美国普特南数学竞赛,1950 年)



[解] 设直棱柱底面三角形的两边为 a 与 b,夹角为 θ,直棱柱的高为 c.

又设 L 为彼此相邻的三个面(即两个侧面与一个底面)的面积之和,则

$$L=ac+bc+\frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

设体积为 V,则 $V=\frac{1}{2}abc\sin\theta.$

令 $X=ac$, $Y=bc$, $Z=\frac{1}{2}ab\sin\theta$, 分别为三个面的面积,则

$$V^2=\frac{1}{4}a^2b^2c^2\sin^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}(ac)(bc)\left(\frac{1}{2}ab\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}XYZ\sin\theta\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)^3\sin\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^3.$$

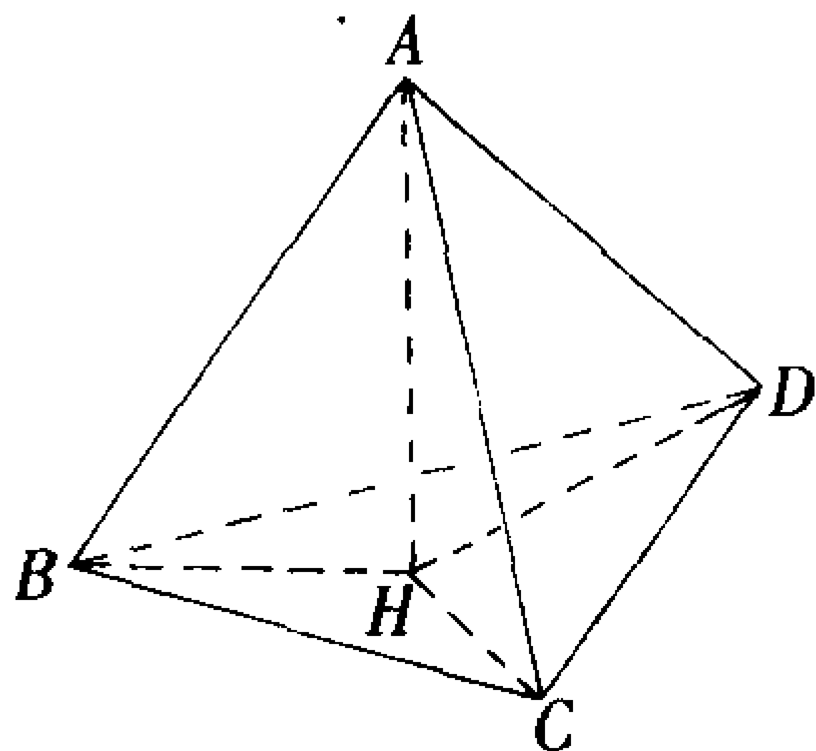
当且仅当 $X=Y=Z$,且 $\sin\theta=1$ 时,等号成立,即这三个面的面积相等且彼此垂直时,V 有最大值,最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

(二)三棱锥(四面体)、四棱锥、n 棱锥

17·28　四面体 $ABCD$ 中,若 $AB\perp CD$,$AC\perp BD$,则 $AD\perp BC$.

(中国天津市数学竞赛,1957 年)

[证]　作 $AH\perp$平面 BCD,垂足为 H.



$\because$　$AB\perp CD$,$\therefore$　$BH\perp CD$.

又$\because$　$AC\perp BD$,$\therefore$　$CH\perp BD$.

故 H 为$\triangle BCD$ 的垂心,

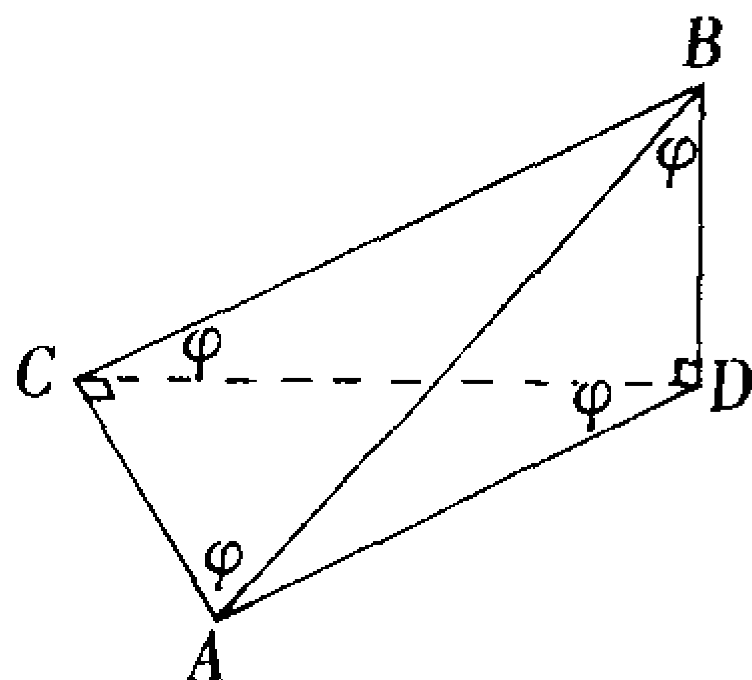
则　$DH\perp BC$,

因此　$AD\perp BC$.

17·29　求证:存在一个四面体 $ABCD$.它的所有的面都是彼此相似的直角三角形,并且以 A、B 为顶点的角都是锐角.试确定四面体的棱中哪条最长,哪条最短?当最大棱长为 1 时,求最小棱长.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1971 年)

[解]　设满足条件的四面体存在,我们证明:AB 是最长的棱,CD 是最短的棱.



由题设条件可知,$\angle ACB$ 与$\angle ADB$ 都是直角,并且$\angle ACD$ 或$\angle ADC$ 之中有一个是直角.不妨设$\angle ACD$ 为直角.

令　$\angle BAC=\varphi$,则　$\angle ABD=\varphi$,

否则,若　$\angle BAD=\varphi$,可得

$$AC=AD=AB\cos\varphi.$$

但　AD 是直角$\triangle ACD$ 的斜边,上式不可能成立.

同理有　$\angle CDA=\varphi$.

$\therefore$　$BD=AC=AB\cos\varphi$，　且　$BC=AD=AB\sin\varphi$，

又　$CD=AD\cos\varphi=AB\sin\varphi\cos\varphi$，

及　$AC=AD\sin\varphi=AB\sin^2\varphi$.

从而有　$AC=AB\cos\varphi=AB\sin\varphi$.

且　$\cos\varphi=\sin^2\varphi=1-\cos\varphi$，解得　$\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

于是　$\varphi>\dfrac{\pi}{4}$，$\angle CAD=\varphi$. 从而 CD 为最短边.

当　$AB=1$ 时，

$$CD=AB\sin\varphi\cos\varphi=\sqrt{\cos\varphi}\cdot\cos\varphi=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

因此，为证明这样的四面体是存在的，只需这样取四面体 $ABCD$，使它的棱为

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad CB=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad CD=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

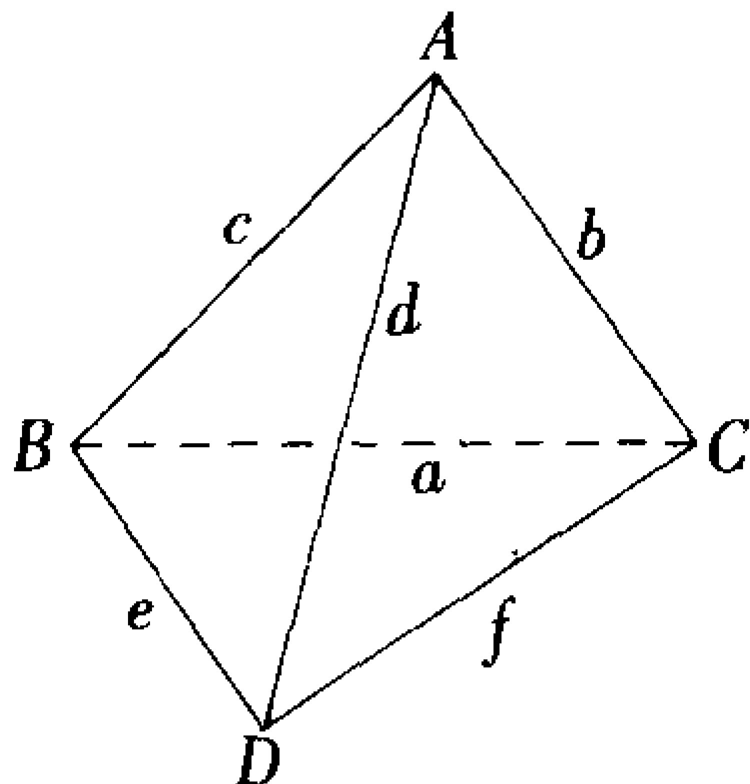
且　平面角为　$\angle BCA=\angle DCA=90^\circ$，　$\angle BCD=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

则　$AB=1$，　$AD=CB$，　$BD=AC$，　$\angle CAB=\angle BCD$.

且　四面体的四个面是相似的.

17·30　求证：任何一个四面体中总有一个顶点，以这个顶点引出的三条棱为边可构成一个三角形.

（第 10 届国际数学奥林匹克，1968 年）



［证］　设四面体为 $ABCD$，它的棱长分别记为

$$BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c,$$
$$AD=d,\quad BD=e,\quad CD=f.$$

不失一般性，设各棱中最长的一条棱是 $AD=d$，　因此必有

$$d+e>f,\quad d+b>c,$$
$$d+f>e,\quad d+c>b.$$

另一方面，在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$，有

$c+e>d,\quad b+f>d,$

$\therefore\quad b+c+e+f>2d.$

则 $b+c>d$ 或 $e+f>d$，至少有一个成立.

于是以 A 为顶点引出的三条棱 b、c、d 或者以 D 为顶点引出的三条棱 e、f、d 为边确实可以构成一个三角形.

17·31 在四面体 $ABCD$ 内部有一点 O，使得直线 AO、BO、CO、DO 与四面体的面 BCD、ACD、ABD、ABC 分别交于 A_1、B_1、C_1、D_1 四点，且 $\dfrac{AO}{A_1O}=\dfrac{BO}{B_1O}=\dfrac{CO}{C_1O}=\dfrac{DO}{D_1O}=k$，求 k 的所有可能的值.

（保加利亚数学奥林匹克，1968 年）

［解］ 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，则有

$$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_1}{OA_1}=\frac{AO}{A_1O}+\frac{OA_1}{OA_1}=k+1.$$

同理有 $\dfrac{V}{V_{OACD}}=\dfrac{V}{V_{OABD}}=\dfrac{V}{V_{OABC}}=k+1.$

由此得到 $k+1=\dfrac{4V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\dfrac{4V}{V}=4.$

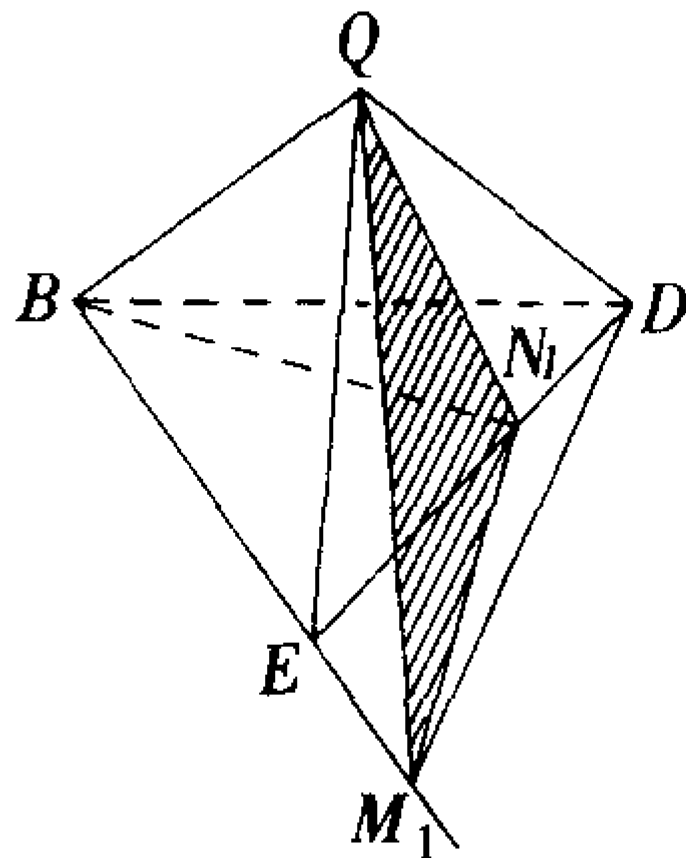
$\therefore\quad k=3.$

17·32 设 $ABCD$ 是正四面体，且 M、N 分别是平面 ABC、ADC 上的不同点. 证明：线段 MN、BN、MD 是一个三角形的三边.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

［证］ 先考虑下面的引理.

引理 设 $\triangle BDE$ 是等腰三角形，且边 $BD=l$，$BE=DE=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,l$，又 M_1、N_1 分别是线段 BE、DE 上的不同点. 则 M_1N_1、BN_1、M_1D 是一个三角形的三边.



引理的证明 我们考察顶点为 E 且以等边 $\triangle BDQ$ 为底的正棱锥侧面上的 $\triangle BDE$.

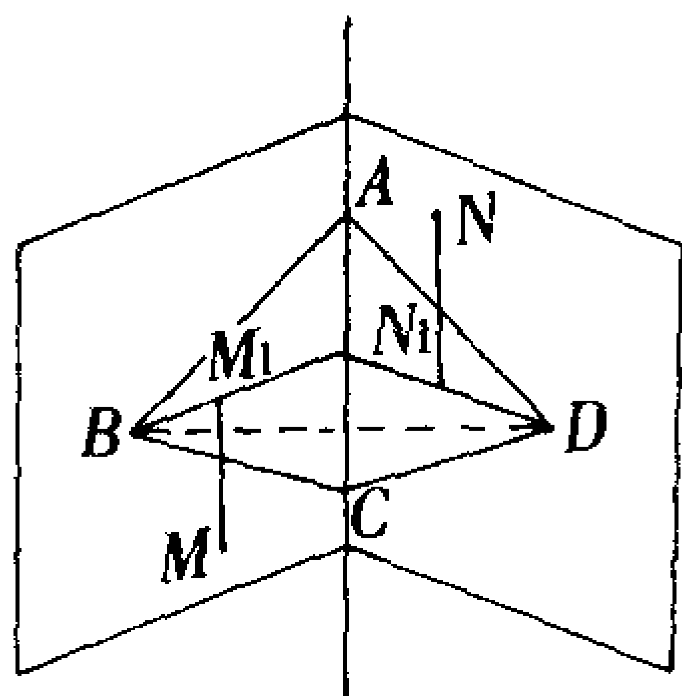
这个多面体关于通过 BE 和 QD 中点的平面 π 对称. 因 $QD\perp\pi$，则 $QM_1=DM_1$. 同理，$QN_1=BN_1$，且 $\triangle QM_1N_1$ 是所求的三角形. 引

理得证.

为证明问题的结论,我们用 E 表示四面体 $ABCD$ 的边 AC 的中点,则

$$BE \perp AD, DE \perp AC.$$

因此,过 B、D、E 的平面 α 与 AC 垂直.平面 ABC,平面 ACD 与平面 α 垂直,因为它们含有 AC.所以,点 M 和 N 到 α 上的射影 M_1 和 N_1 分别是 BE 和 DE 上的点.



如果 $M_1 = N_1$,因为 $BM = DM$,则 $\triangle BMN$ 即为所求的三角形.

假设 $M_1 \neq N_1$,根据引理可以在平面 α 上选择点 P 使得

$$PM_1 = DM_1, \quad PN_1 = BN_1.$$

但 MM_1 和 NN_1 与平面 α 垂直,由此得

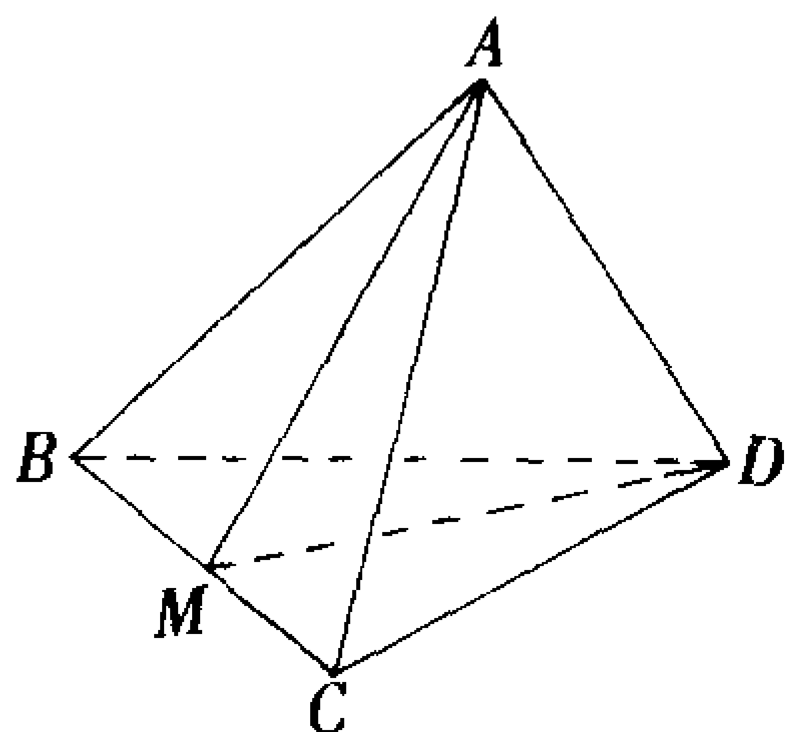
$$PM = \sqrt{PM_1^2 + MM_1^2} = \sqrt{DM_1^2 + MM_1^2} = DM.$$

同理 $PN = BN$.

因此,$\triangle PMN$ 是所求的三角形.

17·33 一个给定的四面体 $ABCD$ 是等腰的,即 $AB = CD$,$AC = BD$,$AD = BC$.试证:这个四面体的各面都是锐角三角形.

(第 1 届美国数学奥林匹克,1972 年)



[证 1] 假定 $\angle BDC$ 不是锐角.设 M 是 BC 的中点.

$\because$ $AB = CD$,$AC = BD$,$BC = BC$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DBC$,故 $AM = DM$.

以 BC 为直径作圆,若 $\angle BDC$ 不是锐角,则 D 一定在此圆内或圆上,因此有

$$2DM \leqslant BC. \quad ①$$

又在 $\triangle AMD$ 中,$\because$ $AM + MD > AD$,

且 $AM = DM$, $AD = BC$,

$\therefore$ $2DM > BC$. ②

①与②矛盾,于是 $\angle BDC$ 为锐角.

同理可证　$\angle BCD$、$\angle DBC$ 为锐角.

于是　$\triangle BDC$ 是锐角三角形.

又∵　$\triangle BCD \cong \triangle ABC \cong \triangle ACD \cong \triangle ABD$.

四面体的各面都是锐角三角形.

[证 2]　利用三面角的性质:三面角的任意两个面角之和大于第三个面角.

设　$\angle BAC=\alpha$,　$\angle ABC=\beta$,　$\angle ACB=\gamma$.

由已知可得

$$\triangle ABC \cong \triangle BCD \cong \triangle ACD \cong \triangle ABD.$$

∴　$\angle BAD=\beta$,　$\angle CAD=\gamma$.

∵　$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$,

又　$\alpha+\beta>\gamma$,　$\alpha+\gamma>\beta$,　$\beta+\gamma>\alpha$,

∴　$2\alpha<180^\circ$,　$2\beta<180^\circ$,　,$2\gamma<180^\circ$,

即　$\alpha<90^\circ$,　$\beta<90^\circ$,　$\gamma<90^\circ$.

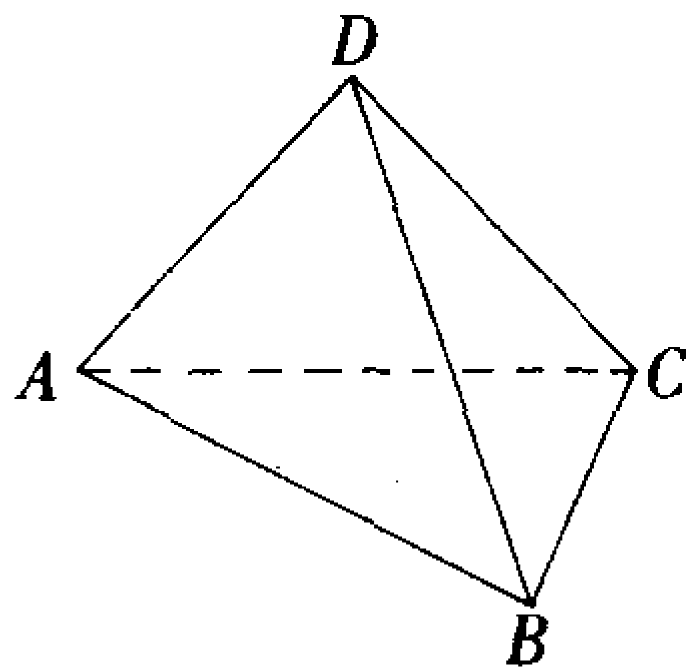
于是$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

所以四面体的各面都是锐角三角形.

17·34　求证:如果四面体 $ABCD$ 的棱满足　$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$,　则它的面中至少有一个是锐角三角形.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1967 年)

[证]　由余弦定理可得



$$\begin{aligned}&2AB\cdot AC\cos\angle BAC\\&=AB^2+AC^2-BC^2\\&=AB^2+AD^2-BD^2\\&=2AB\cdot AD\cos\angle BAD.\end{aligned}$$

于是　$\cos\angle BAD$ 与 $\cos\angle BAC$ 具有相同的符号,即$\angle BAC$ 与$\angle BAD$ 或者同为锐角,或者同为钝角.

同理可证,对四面体的有公共顶点的任意平面角也有同样的结论.

如果四面体 $ABCD$ 的所有平面角都是锐角,则它的每个面都是锐角三角形.

如果其中有一个平面角不是锐角,不妨设它以 A 为顶点,则以 A 为顶点的所有三个平面角:$\angle BAC$、$\angle BAD$、$\angle CAD$ 都不是锐角.

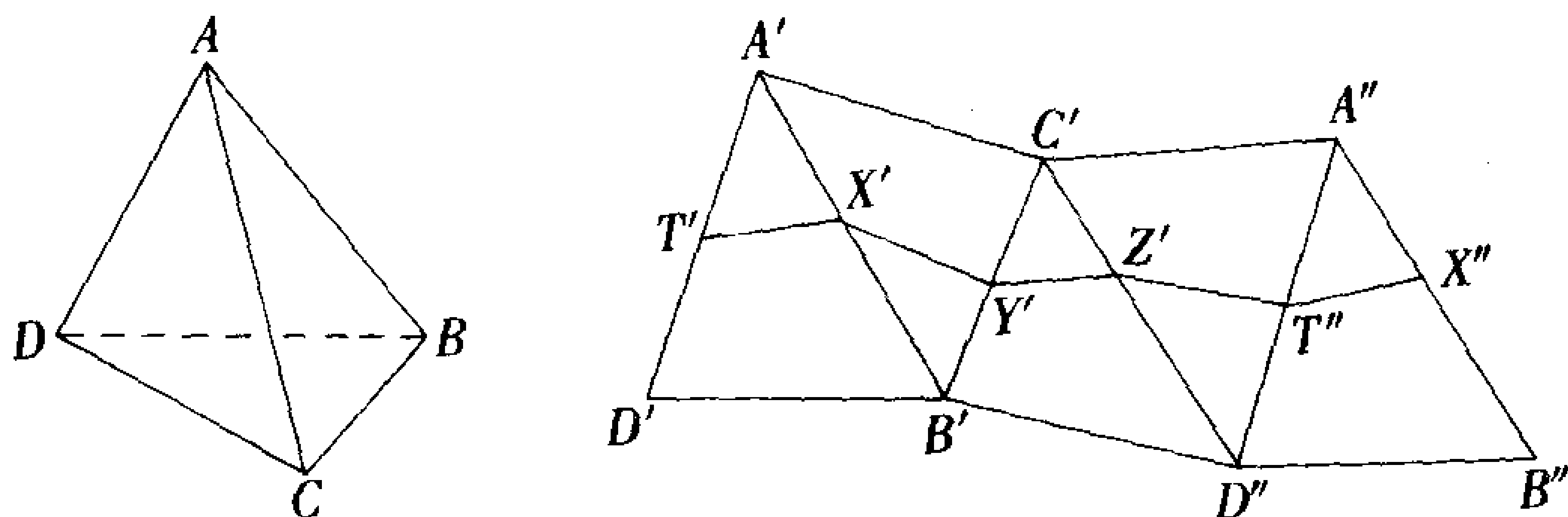
于是$\triangle ABD$、$\triangle ABC$、$\triangle ACD$均为非锐角三角形.

这时,以B、C、D为顶点的所有平面角都是锐角,从而$\triangle BCD$为锐角三角形.

17·35 四面体$ABCD$的所有侧面都是锐角三角形.考察所有的多边形$XYZTX$,其中X、Y、Z,T分别是AB、BC、CD、DA的内点.试证(1)若$\angle DAB+\angle BCD\neq\angle ABC+\angle CDA$,那么不存在周长最小的多边形$XYZTX$.(2)若$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA$,那么存在无限多个周长最小的多边形$XYZTX$,其周长为$2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.这里$\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$.

(第13届国际数学奥林匹克,1971年)

[证] 如图,将四边形$ABCD$展开.



A'、A''是A的对应点,等等.其中 $\triangle A'D'B'\cong\triangle A''D''B''$.

多边形$XYZTX$在展开图中变成折线$T'X'Y'Z'T''$或$X'Y'Z'T''X''$

若折线 $T'X'Y'Z'T''(X'Y'Z'T''X'')$有最小长度,那么

$$X'\in T'Y',\quad Y'\in X'Z',\quad Z'\in Y'T'',\quad T'\in Z'X''. \qquad ①$$

在相反的情况下,我们可以缩短折线 $T'X'Y'Z'T''(X'Y'Z'T''X'')$的长.例如,当 $X'\notin T'Y'$时,点X'可用线段$A'B'$和$T'Y'$的交点来代替(因为各面都是锐角三角形,那么$A'D'B'C'$是凸四边形,所以交点是存在的),此时所得折线的长将小于$T'X'Y'Z'T''$的长.

由①成立,可推知T'、X'、Y'、Z'、T''、X''在一直线上.

再由 $\triangle A'T'X'\cong\triangle A''T''X''$, $\angle A'T'X'=\angle A''T''X''$,又可推得

$$A'D' \parallel A''D''. \quad ②$$

这就是说,条件②是存在最短折线 $T'X'Y'Z'T''$ 的必要条件.

下面我们将进一步证明:条件②同时也是存在无限多个长度为 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ 的最短折线 $T'X'Y'Z'T''$ 的充分条件.

事实上,若条件②成立,再注意到 $A'T'=A''T''$,可得

$$\begin{aligned}
&T'X'+X'Y'+Y'Z'+Z'T''\geqslant T'T''=A'A''\\
&=2A'C'\cdot\cos\angle CA'A''\\
&=2A'C'\cdot\cos\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B'A'C'-\angle C'A''D''-\angle D'A'B')\\
&=2A'C'\ \sin\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB)\\
&=2AC\ \sin\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

而分别与 $A'B'$、$B'C'$、$C'D''$ 交于内点 X'、Y'、Z' 的线段 $T'T''$ 是存在的,这是由于只要 $T'T''$ 交线段 $B'C'$ 于某内点 Y' 时,那么由于 $A'D'B'C'$ 和 $A''C'B'D'$ 都是凸四边形,因而也必将分别交 $A'B'$ 和 $C'D''$ 于内点 X' 和 Z',而 $B'C'$ 上这样的内点 Y' 是存在的,如凸四边形 $A'B'D''C'$ 的对角线交点即是(该交点在 $\square A'D'D''A''$ 的对角线 $A'D''$ 上,故可作出 $T'T''$ 通过它).

当我们沿 $A'D'$ 平行推移这样的线段 $T'T''$,不管推移的距离多么小,都可以得到无限条最短折线,其长度都是 $2AC\ \sin\frac{\alpha}{2}$.

最后我们证明条件②与下面的等式等价:

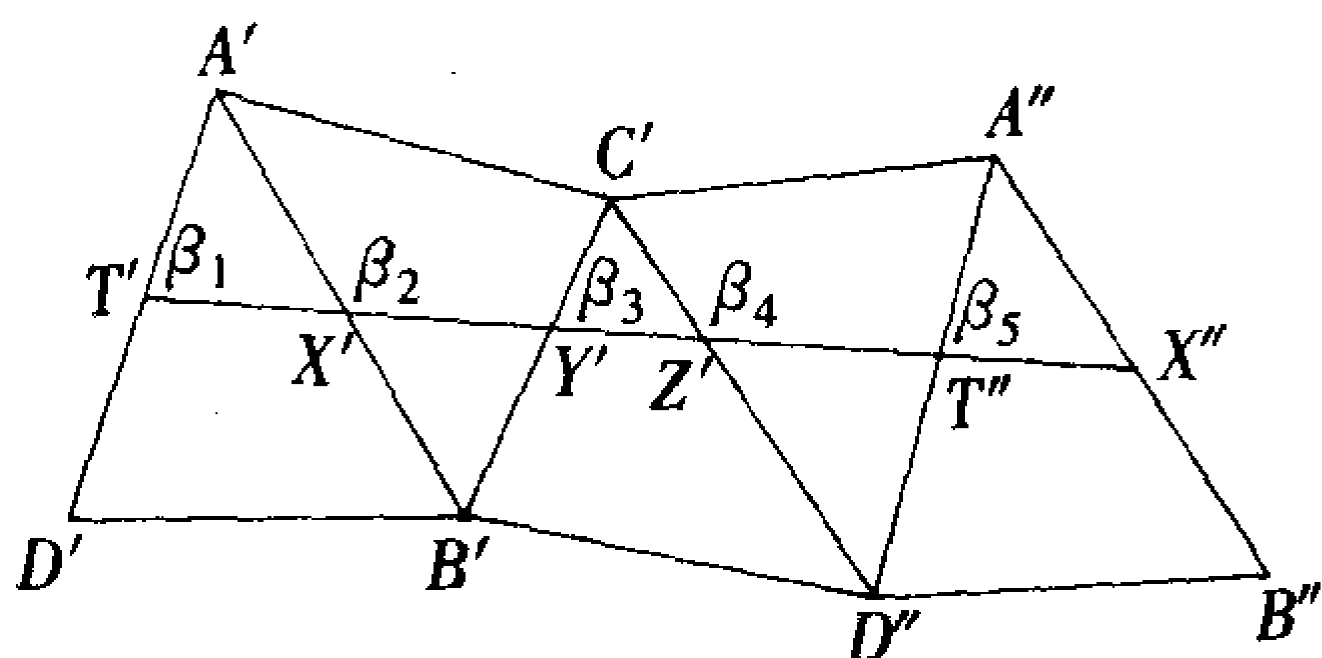
$$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA. \quad ③$$

为此,设 $D'A'$、$B'A'$、$B'C'$、$D''C'$、$D''A''$ 顺时针旋转到 $T'T''$ 方向的角度分别为 β_1、β_2、β_3、β_4、β_5,则

$$\begin{aligned}
&\angle DAB=\beta_2-\beta_1,\\
&\angle ABC=\beta_2-\beta_3,\\
&\angle BCD=\beta_4-\beta_3,\\
&\angle CDA=\beta_4-\beta_5,
\end{aligned}$$

若等式③成立,由上面一系列等式

得 $\beta_1=\beta_5$, $A'D' \parallel A''D''$.

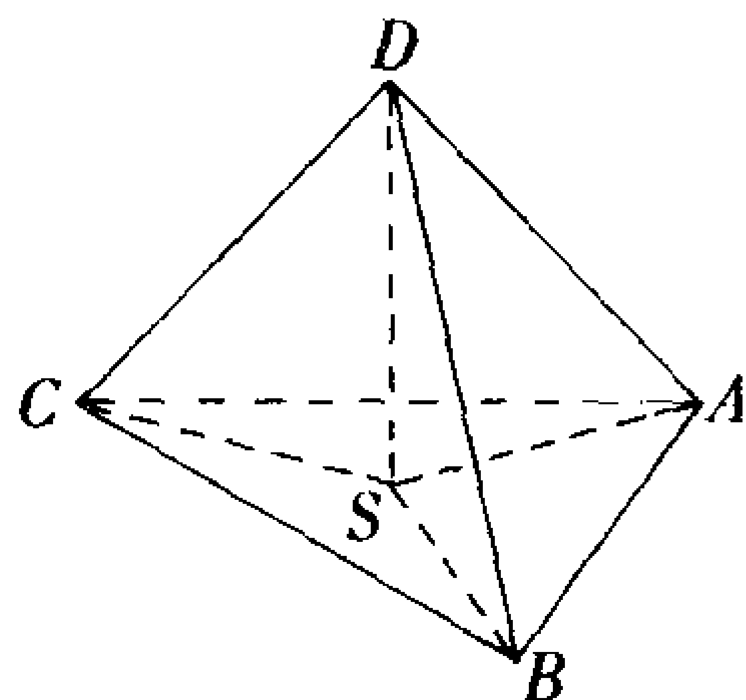


反之，由 $A'D' /\!/ A''D''$ 可得 $\beta_1=\beta_5$，又可推出等式③.

所以等式②与③等价. 从而完全证明了题中的论断.

17·36 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BDC$ 是直角，D 到平面 ABC 的垂线的垂足 S 是$\triangle ABC$ 的垂心，试证：$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$. 并说明等号成立时是一个什么四面体？

（第 12 届国际数学奥林匹克，1970 年）



［证］ 由题意知

$DS\perp$平面 ABC， $DS\perp AC$.

故由三垂线定理可得 $DB\perp AC$.

又因为 $\angle BDC$ 是直角，即 $BD\perp DC$.

故知 $DB\perp$平面 ADC.

从而 $BD\perp AD$， 即 $\angle ADB$ 是直角.

同理可证 $\angle ADC$ 是直角.

再由勾股定理可得

$$AD^2+BD^2=AB^2,\ BD^2+CD^2=BC^2,\ AD^2+CD^2=AC^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & 6(AD^2+BD^2+CD^2)\\ &=3[(AD^2+BD^2)+(BD^2+CD^2)+(CD^2+AD^2)]\\ &=3(AB^2+BC^2+CA^2).\end{aligned} \quad ①$$

又∵ $2AB\cdot BC\leqslant AB^2+BC^2$， $2BC\cdot AC\leqslant BC^2+AC^2$，

且 $2AC\cdot AB\leqslant AC^2+AB^2$.

由此可得

$$\begin{aligned}&(AB+BC+CA)^2\\ &=AB^2+BC^2+CA^2+2AB\cdot BC+2BC\cdot AC+2AC\cdot AB\\ &\leqslant 3(AB^2+BC^2+AC^2).\end{aligned} \quad ②$$

由①、②可得 $(AB+BC+AC)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$. ③

③中等号当且仅当 $AB=BC=AC$ 时成立，这时在四面体 $ABCD$

中，$\triangle ABC$ 是正三角形，并且 $\angle BDC=\angle ADB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$.

这种四面体确实是存在的，因为用以下方法可作出这种四面体：在边长为 a 的正三角形 ABC 的垂心 S 上引平面 ABC 的垂线 DS，使 DS 长 $h=\frac{a}{\sqrt{6}}$，于是

$$AD^2+BD^2=BD^2+CD^2=CD^2+AD^2=2\left(h^2+\frac{a^2}{3}\right)$$

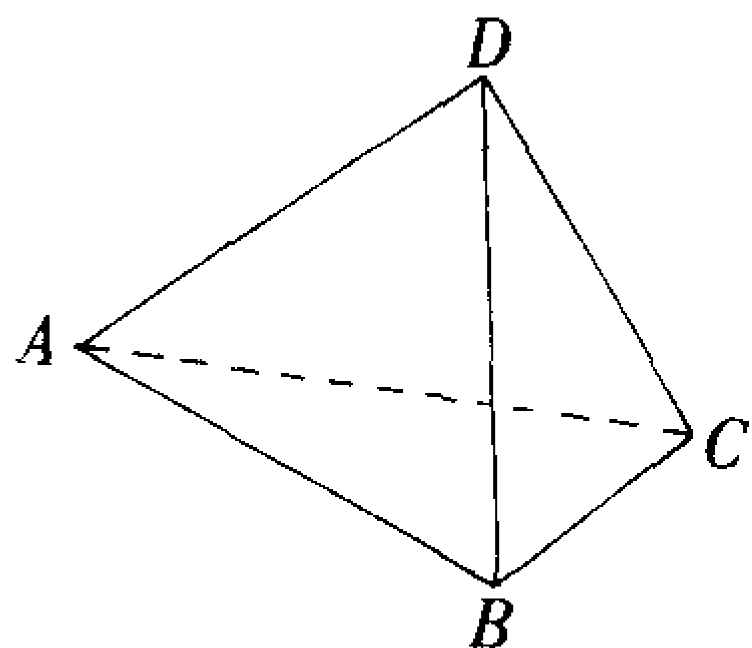
$$=2\left(\frac{a^2}{6}+\frac{a^2}{3}\right)=a^2.$$

$\therefore\quad \angle ADB=\angle BDC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$.

17·37　试证：对任意一个四面体，都可作一个三角形，使得它的边长恰好是四面体某个顶点引出的三条棱长.

（保加利亚数学奥林匹克，1966 年）

［证］　设四面体 $ABCD$，AB 是所有棱长中的最长者，则有



$(AC+AD-AB)+(BC+BD-BA)$
$=(AC+CB-AB)+(AD+DB-AB)>0$.

于是在

$AC+CB-AB$　与　$AD+DB-AB$

中必有一个大于 0，因此有

$AC+CB-AB>0$，或　$AD+DB-AB>0$.

$AC+CB>AB$，　或　$AD+DB>AB$.

因此　AC、CB 和 AB 三条棱，或者 AD、DB 或 AB 三条棱能构成三角形.

17·38　在等边$\triangle ABC$ 内部任取两点 M 和 N. 问是否总能以 6 条线段 AM、BM、CM、AN、BN、CN 为棱组成一个四面体？

（前苏联教委推荐试题，1988 年）

［解］　不一定. 下面给出一个不能组成四面体的例子.

设　$\triangle ABC$ 的边长为 1，在其中心附近取一点 M，使得线段 AM、BM、CM 的长度互不相同且全都界于$\frac{1}{2}$和$\frac{\sqrt{3}}{2}$之间. 令

$$\varepsilon=\min\left\{|AM-BM|,|BM-CM|,|CM-AM|,\frac{1}{10}\right\},$$

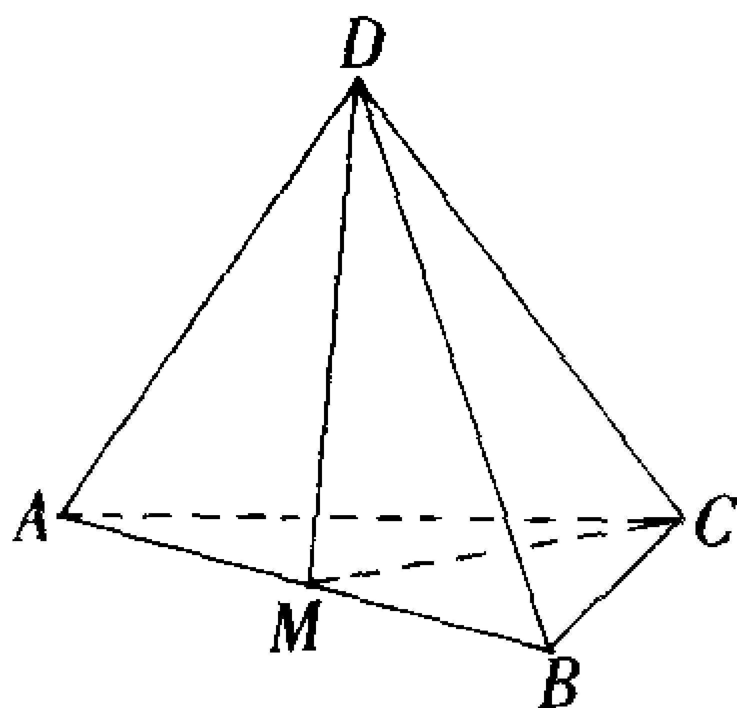
其中的符号 min 表示取最小值.然后在顶点 A 附近取点 N,使得

$$AN<\varepsilon,\quad BN>\frac{\sqrt{3}}{2}+\varepsilon,\quad CN>\frac{\sqrt{3}}{2}+\varepsilon.$$

对于这样选出的点 M 和 N,线段 AN 的长度除了可能大于 BN 和 CN 的长度之差外,小于另 5 条线段中任何其他两条线段的长度之差.然而在四面体中,每条棱都是两个三角形侧面的公共边,它必须大于两个不同组的两条棱长之差,而这是 AN 不可能满足的.从而这 6 条线段不能组成四面体.

17·39　设四面体的 k 条边的长度均为 a,其余 $6-k$ 条的长度均为 1,试对 $k=1,2,3,4,5$ 的情况确定四面体存在的充分必要条件,即确定 a 必须满足的条件.

(第 11 届国际数学奥林匹克,1969 年)



[解]　我们按　$k=1$,　$k=5$,　$k=2$,　$k=4$ 和 $k=3$ 的情形依次进行讨论.

显然,在这里有　$a>0$.

(1)$k=1$ 的情形.

如果存在一个四面体 $ABCD$ 具有题设的性质,不失一般性,可设

$$AB=a,$$
$$AC=BC=AD=BD=CD=1.$$

由三角形任两边之和大于第三边可得

$$a<1+1=2.$$

设 M 是 AB 的中点,连结 DM、CM,则

$$CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

在$\triangle CMD$ 中,$\because$　$CM+MD>CD$,

$$\therefore\quad 2\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,\quad 有\quad a^2>3.$$

于是我们得到了四面体存在的必要条件: $a>\sqrt{3}$.　　①

反之,若满足条件①,则有

$CM+DM>CD$, $CM+CD>DM$, $DM+CD>CM$.

因此,存在一个$\triangle CMD$具有上述给定的边长,从而以A、B、C三点(不共线)所决定的平面之外还存在一点D,使得

$$AD=BD=CD=1.$$

所以 条件 $a<\sqrt{3}$也是四面体$ABCD$存在的充分条件.

(2)$k=5$的情形.

这种情形可以归结为 $k=1$的情形,只需将边长a与1互相对换就行了.

由此,我们得到四面体$ABCD$存在的充分必要条件是 $\frac{1}{a}<\sqrt{3}$,

即 $a>\frac{\sqrt{3}}{3}$. ②

(3)$k=2$的情形.

此时又要分为下列两种情况讨论:

第一种情况:长度为a的两条棱在同一个三角形中.

不妨设 $AC=BC=a$, $AB=AD=BD=CD=1$.

则由三角形不等式得 $a+a>1$, $\therefore$ $a>\frac{1}{2}$,

又设 M为AB的中点,则有 $CD+DM>CM$,

$\therefore$ $1+\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$,

即 $a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$. ③

但另一方面还有 $DM+CM>CD$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1$,

得 $a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ④

由③、④得到必要条件

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \quad ⑤$$

反之,若满足⑤,那么就存在一个$\triangle CMD$,从而也就存在一个四面体$ABCD$,所以条件⑤也是这种情况的充分条件.

第二种情况:长度为a的两条棱不在同一个三角形中.

不妨设 $AB=CD=a$, $AC=BC=AD=BD=1$.

则由三角形不等式得 $a<1+1$， 即 $a<2$.

$\because \quad CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$， $CD=a$，

$\therefore \quad 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>a$， 解得 $a<\sqrt{2}$． ⑥

在此情况下，条件⑥也是充分的．因为这时总可以作出一个具有本题所要求的四面体．

综合⑤与⑥可得：在 $k=2$ 时，四面体 $ABCD$ 存在的充要条件是

$$a<\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \quad ⑦$$

(4)$k=4$ 时的情形．

这种情况也可以归结为 $k=2$ 时的情形，只需将边长 a 与 1 互相对换就行了．

由此，我们得到四面体 $ABCD$ 存在的充分必要条件是

$$\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

即 $$a>\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}. \quad ⑧$$

(5)$k=3$ 时的情形．

此时又要分下列两种情况讨论：

第一种情况：长度为 a 的三条边通过同一顶点．

不妨设 $DA=DB=DC=a$， $AB=AC=BC=1$， 又设 S 是等边三角形 ABC 的中心，则有

$$SD=\sqrt{AD^2-AS^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2},$$

所以只要满足 $a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2>0$，

即 $$a>\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad ⑨$$

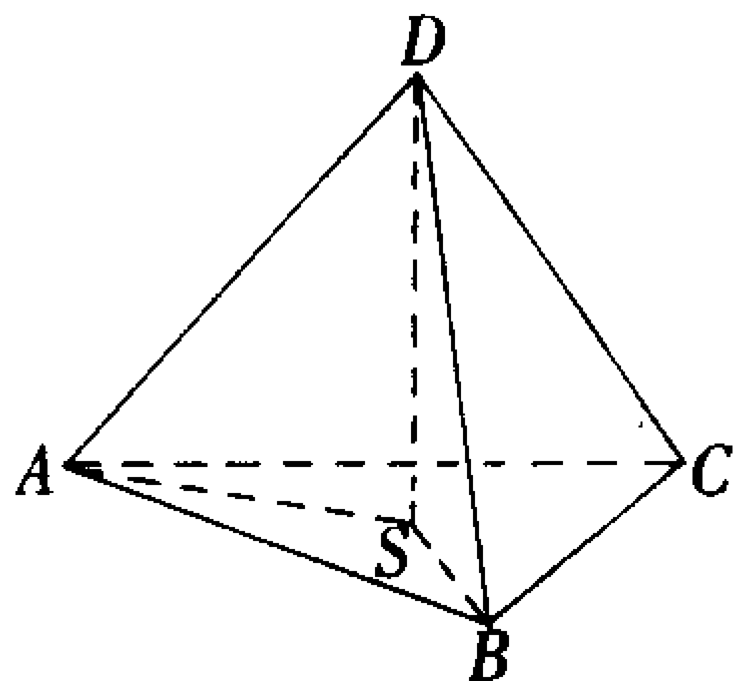
四面体 $ABCD$ 总是存在的．

第二种情况：长度为 a 的三条边在一个三角形中．

不妨设 $AB=BC=CA=a$，$DA=DB=DC=1$，类似第一种情

况可得

$$SD=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}.$$



所以只要满足条件 $1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2>0$,

即 $0<a<\sqrt{3}$. ⑩

四面体 $ABCD$ 总是存在的.

由⑨、⑩,在 $k=3$ 的情况下,对于所有正实数 a,满足题目要求的四面体总是存在的.

综上所述,具有题目所给特征的四面体存在的充分必要条件是:

当 $k=1$ 时, $0<a<\sqrt{3}$;

当 $k=2$ 时, $0<a<\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

当 $k=3$ 时, $a>0$;

当 $k=4$ 时, $a>\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$;

当 $k=5$ 时, $a>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17·40 给出四个不重合的互相平行的平面,试证:存在一个正四面体,它的四个顶点分别在这四个平面上.

(第 14 届国际数学奥林匹克,1972 年)

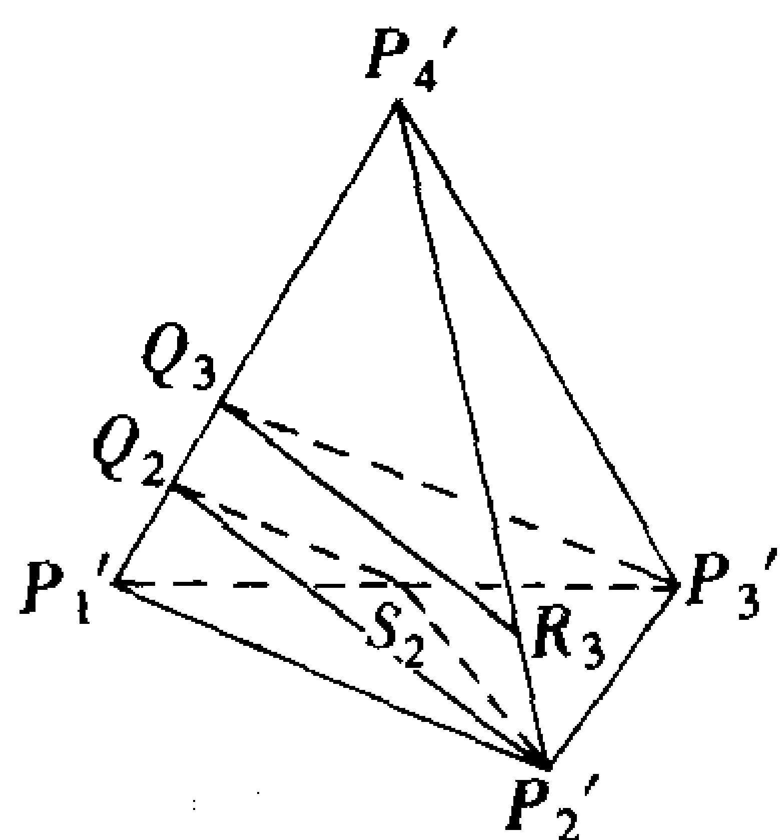
[证] 设已知四个平面依次为 E_1,E_2,E_3,E_4. 记平面 E_i 与平面 E_{i+1}间的距离为 $d_i(i=1,2,3)$.

这样,问题就归结为:在平面 E_i 内求一点 $P_i(i=1,2,3,4)$,使 $P_1P_2P_3P_4$ 是正四面体.

首先取一给定的正四面体 $P'_1P'_2P'_3P'_4$,并且依照定比 $d_1:d_2:d_3$ 分线段 $P'_1P'_4$,依次得分点 Q_2 和 Q_3,依照定比 $d_2:d_3$分线段 $P'_2P'_4$,得分点 R_3,依照定比 $d_1:d_2$分线段 $P'_1P'_3$,得分点 S_2(如图).

$$\therefore\quad \frac{P'_4Q_3}{P'_4Q_2}=\frac{P'_4R_3}{P'_4P'_2},$$

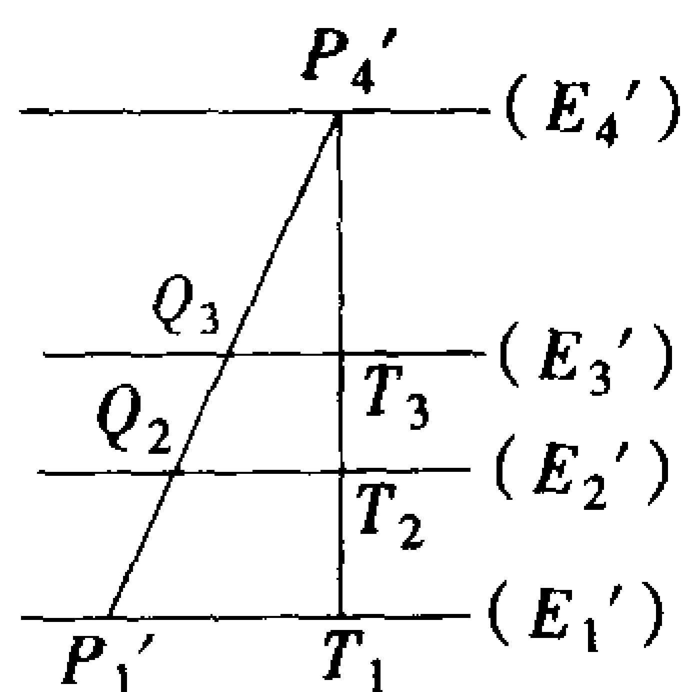
从而可知 $Q_3R_3/\!/Q_2P'_2$.



类似地由 $\frac{P'_1Q_2}{P'_1Q_3}=\frac{P'_1S_2}{P'_1P'_3}$，可知 $Q_2S_2 /\!/ Q_3P'_3$.

设过 Q_2、P'_2、S_2 的平面为 E'_2，过 Q_3、R_3、P'_3 的平面为 E'_3，则 $E'_2 /\!/ E'_3$.

设 E'_1 和 E'_4 分别是过点 P'_1 和 P'_4 且平行于 E'_2 的平面(如图)，过点 P'_4 引平面 E'_i 的垂线交平面 E'_i 于 $T_i(i=1,2,3)$，记平面 E'_i 与 E'_{i+1} 的距离为 $t_i(i=1,2,3)$，于是有



$$t_1:t_2:t_3=P'_1Q_2:Q_2Q_3:Q_3P'_4=d_1:d_2:d_3.$$

由此可知，在空间可作一相似变换，将平面 E'_1、E'_2、E'_3、E'_4 分别变换为 E''_1、E''_2、E''_3、E''_4.使平面 E''_i 与平面 E''_{i+1} 间的距离为 $d_i(i=1,2,3)$，在这相似变换下，正四面体 $P'_1P'_2P'_3P'_4$ 变换为正四面体 $P''_1P''_2P''_3P''_4$，并且点 P''_i 在平面 E''_i 内$(i=1,2,3,4)$.

最后，移动平面 E''_1、E''_2、E''_3、E''_4，使它们分别与 E_1、E_2、E_3、E_4 重合，于是四面体 $P''_1P''_2P''_3P''_4$ 变换为正四面体 $P_1P_2P_3P_4$，并且 P_i 在平面 E_i 内$(i=1,2,3,4)$.这样，$P_1P_2P_3P_4$ 即为所求的四面体.

17·41 试证：空间中一点到棱长为2的正四面体的四个顶点的距离都是整数的必要且充分条件是，该点是这个四面体的一个顶点.

(保加利亚数学奥林匹克，1976年)

[证] 我们只要证明：如果点 M 到棱长为2的正四面体各顶点的距离都是整数，则一定有一个距离是0(其逆命题无疑是正确的).

(1)如果点 M 在四面体的棱所在的直线上.

不妨设 M 在以 H 为中点的棱 AB 的直线上.

记 $MH=x$，$MC=y$，则有 $y>x\geqslant 0$

且 $x^2+(\sqrt{3})^2=y^2$.

$\therefore\ (y-x)(y+x)=3$.

故 $\begin{cases} y-x=1, \\ y+x=3 \end{cases}$.

因而 $x=1$,这表明,点 M 与顶点 A 或 B 重合.

(2)如果点 M 不在四面体的棱所在的直线上.

这时设 M 到四面体各顶点的最短距离,则其他的距离与 x 之差小于 2,也就是说,其距离或者为 x,或者为 $x+1$.

现在考虑如下四种情形:

第一种情形:所有的距离都为 x,此时 M 是这个正四面体的外接球的球心,可以求出其半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$不是整数.所以这种情形不可能.

第二种情形:三个距离为 x,一个距离为 $x+1$.为确定起见,设

$$MA=MB=MC=x,\quad MD=x+1,$$

并设点 O 是$\triangle ABC$ 的中心,此时 M 在射线 DO 上,且

$$x\geqslant AO=\frac{2}{\sqrt{3}}>1.$$

$$DM=x+1>2>2\sqrt{\frac{2}{3}}=DO=DM-MO=x+1-\sqrt{x^2-\frac{4}{3}}.$$

由此得到

$$x+1=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x-\frac{19}{12}}$$

$$>\frac{3}{2}+x-\frac{1}{2}=x+1.$$

矛盾!

第三种情形:三个距离为 $x+1$,一个为 x.与第二种情形类似,可设 $MD=x\geqslant 1,\quad MA=MB=MC=x+1\geqslant 2$.

此时点 M 在直线 OD 上,且 O 不在 M 与 D 之间,否则有

$$x=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}>1+x.$$

因此,点 M 在射线 OD 上,且

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}=OD=OM-MD=\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}-x$$

$$<(x+1)-x=1<2\sqrt{\frac{2}{3}},$$

亦矛盾.

第四种情形：两个距离为 x，两个距离为 $x+1$. 为确定起见，设

$$MA=MB=x\geqslant 1,\quad MC=MD=x+1\geqslant 2.$$

由于 $x\neq 1$， 所以 $x\geqslant 2$.

设点 E 与 F 分别是线段 AB 与 CD 的中点. 此时点 M 在射线 EF 上，且

$$MF=\sqrt{(x+1)^2-1}\geqslant\sqrt{3}>\sqrt{2}=EF,$$

从而有 $\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}=MF-ME=EF=\sqrt{2}$，

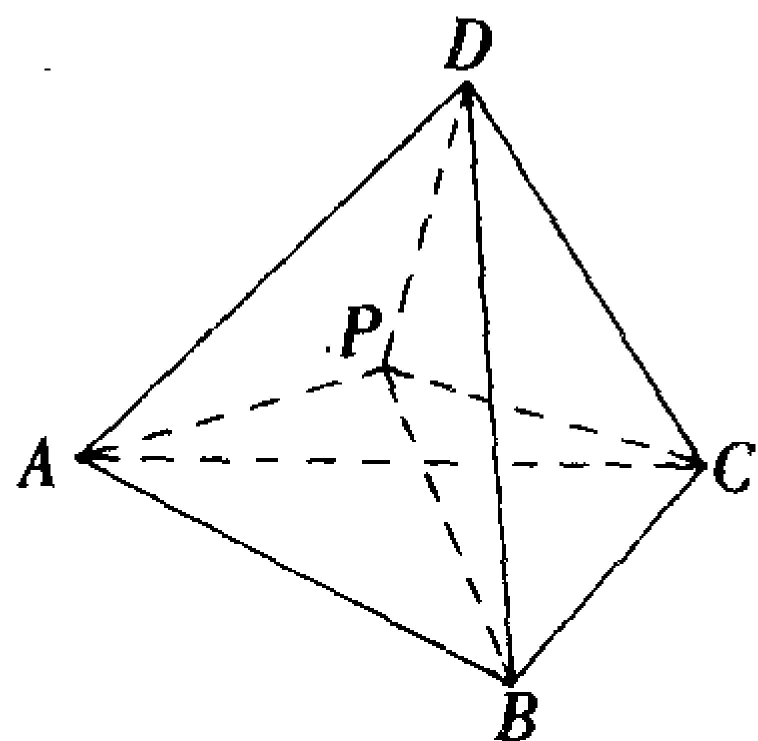
但是，当 x 是大于1的自然数时，

$$\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}<\sqrt{2}.$$ 所以也不可能.

从而结论得证.

17·42 在棱锥 $ABCD$ 内或它的面上给定一个不和顶点 D 重合的点 P. 试证：在线段 PA、PB、PC 中可以找到这样一个线段，它的长度小于线段 DA、DB 或 DC 中某一个线段的长.

（匈牙利数学奥林匹克，1962年）



［证］ (1)如果点 P 属于某一条棱，不妨设 P 点在 DA 上且不与 D 重合，则有 $PA<DA$，本题得证.

(2)如果点 P 不属于棱 DA、DB 和 DC 中的任何一条.

我们只要证明在 $\triangle APD$、$\triangle BPD$、$\triangle CPD$ 中的三个顶点 $\angle APD$、$\angle BPD$、$\angle CPD$ 有一个为钝角或直角就可以了.

事实上，若 $\angle APD$ 为钝角或直角，则必有 $PA<DA$，问题得证.

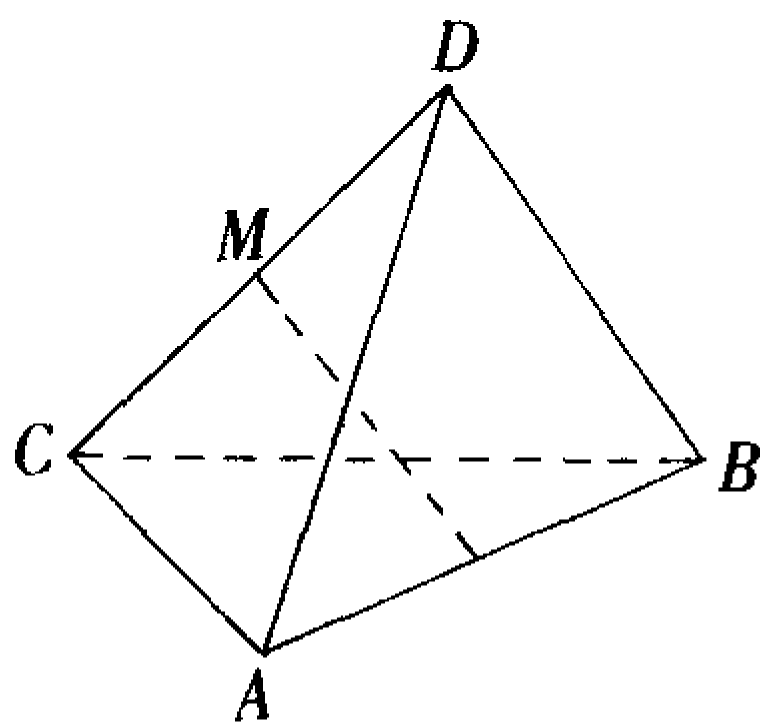
为此，过点 P 作一平面垂直于线段 PD，过点 P 引射线使和线段 PD 所夹的角为锐角. 这些射线在同一个半空间（所作的平面所划分的且包含顶点 D 的半空间）内.

因此，如果所有的 $\triangle APD$、$\triangle BPD$、$\triangle CPD$ 在顶点 P 的顶角都是锐角，那么棱锥 $ABCD$ 所有的顶点分布在同一个半空间内，然而根据作法，点 P 属于半空间的边界，出现了矛盾.

因而 $\triangle APD$、$\triangle BPD$、$\triangle CPD$ 在顶点 P 处的顶角至少有一个不

是锐角.

17·43　如图所示,$ABCD$ 是一个四面体, $AB=41$, $AC=7$, $AD=18$, $BC=36$, $BD=27$, $CD=13$. 设 d 为 AB 与 CD 的中点间的距离,求 d^2 的值.



(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

[**解**]　由三角形的中线长公式

$$m_a{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

其中 a、b、c 为三角形的三边长,m_a 为 a 边上的中线长.

设 DC 的中点为 M, 则

$$AM^2=\frac{2(7^2+18^2)-13^2}{4},\quad BM^2=\frac{2(36^2+27^2)-13^2}{4}.$$

在△MAB 中则有,

$$d^2=\frac{2AM^2+2BM^2-AB^2}{4}$$

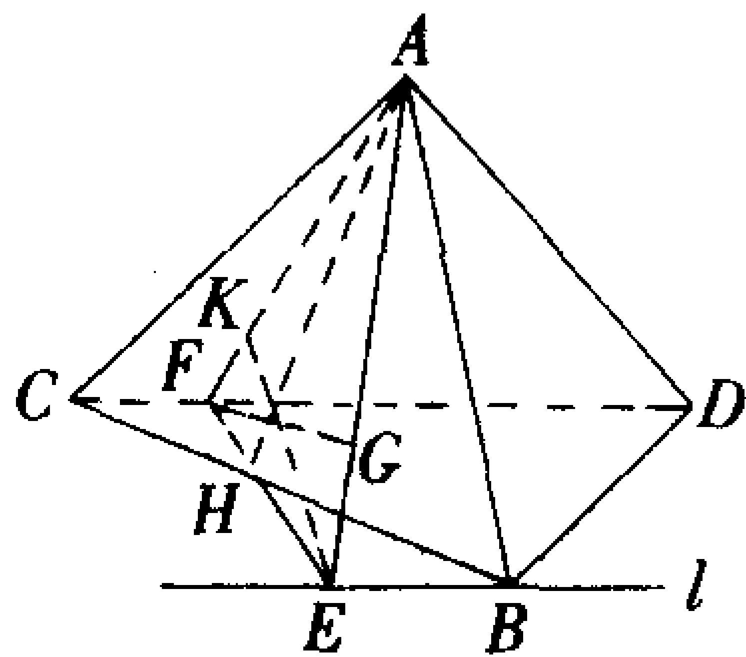
$$=\frac{7^2+18^2+36^2+27^2-13^2-41^2}{4}$$

$$=137,$$

17·44　设 d 是任意四面体相对棱之间距离的最小值,h 是该四面体高的最小值.试证:$2d>h$.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[**证**]　为确定起见,不妨设四面体 $ABCD$ 中过顶点 A 引的高为 h,而棱 AB 和 CD 之间的距离为 d.



过顶点 B 引直线 l 平行于棱 CD,又过顶点 A 作平面垂直于棱 CD. 该平面交 l 于 E,交 CD 于 F(如图).

△AEF 的高 $AH\perp EF$, $AH\perp CD$,

故 AH 为四面体的高.

又因 CD 平行于 l,所以 CD 平行于 l 和 AB 所确定的平面;

$FG\perp AE$,　$FG\perp l$.

所以　$FG \perp l$ 和 AB 所确定的平面.

因此　FG 是 CD 与 AB 之间的距离. 即 AH、FG 分别等于 h 和 d. 易证 $\triangle AEF$ 的高 EK 是四面体的高, $EK \geqslant AK$, 所以　$AF \leqslant EF$, 于是

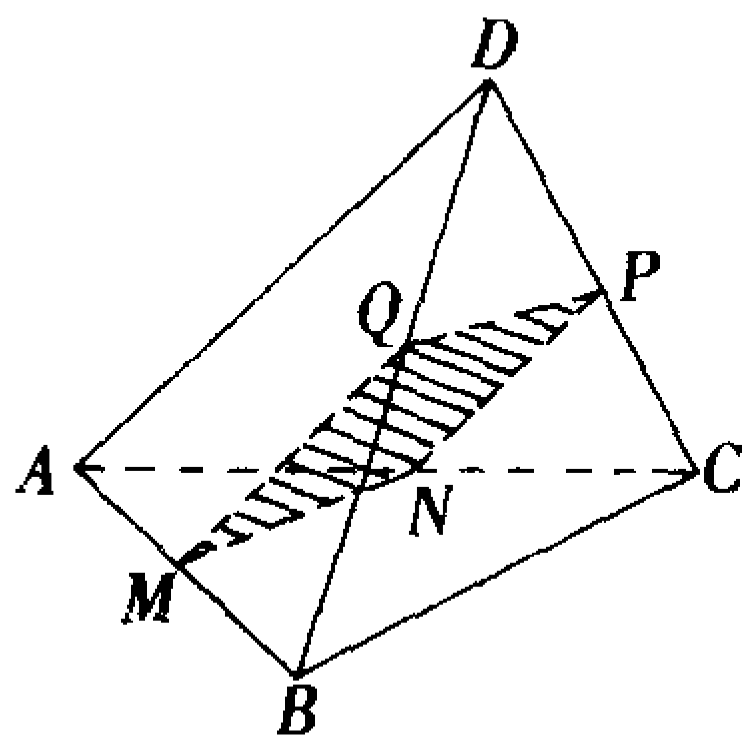
$$\frac{h}{d}=\frac{AH}{FG}=\frac{AE}{EF}<\frac{AF+EF}{EF}=1+\frac{AF}{EF}<2,$$

即　$h<2d$.

17·45　求证:如果四面体被平面所截得的截面形状是平行四边形,那么这个平行四边形的半周长介于四面体的最长棱长和最短棱长之间.

（波兰数学奥林匹克,1960 年）

[证]　首先,如果一个平面与四面体相截,截面形状是平行四边形,那么截面不会经过四面体的任何顶点,否则截面的形状将是三角形或退化为线段或点.



截面的边落在四面体的四个面上,且每条边的端点分别是四面体的两条棱的内点.

记四面体为 $ABCD$, 截面平行四边形为 $MNPQ$, 且顶点 M 落在 AB 上, N 落在 AC 上, P 落在 CD 上, Q 落在 BD 上.

$\because$　$MN /\!/ PQ$, $MN \subset$ 平面 ABC,

$\therefore$　$PQ /\!/$ 平面 ABC.

又$\because$　BC 为平面 ABC 与 DBC 的交线,

$\therefore$　$PQ /\!/ MN /\!/ BC$.

同理还有　$MQ /\!/ AD$, $NP /\!/ AD$.

$\because$　$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$, $\triangle BMQ \backsim \triangle BAD$.

$$\therefore\quad \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB},\ \frac{MQ}{AD}=\frac{MB}{AB}.$$

$$则\quad \frac{MN}{BC}+\frac{MQ}{AD}=\frac{AM+MB}{AB}=1.$$

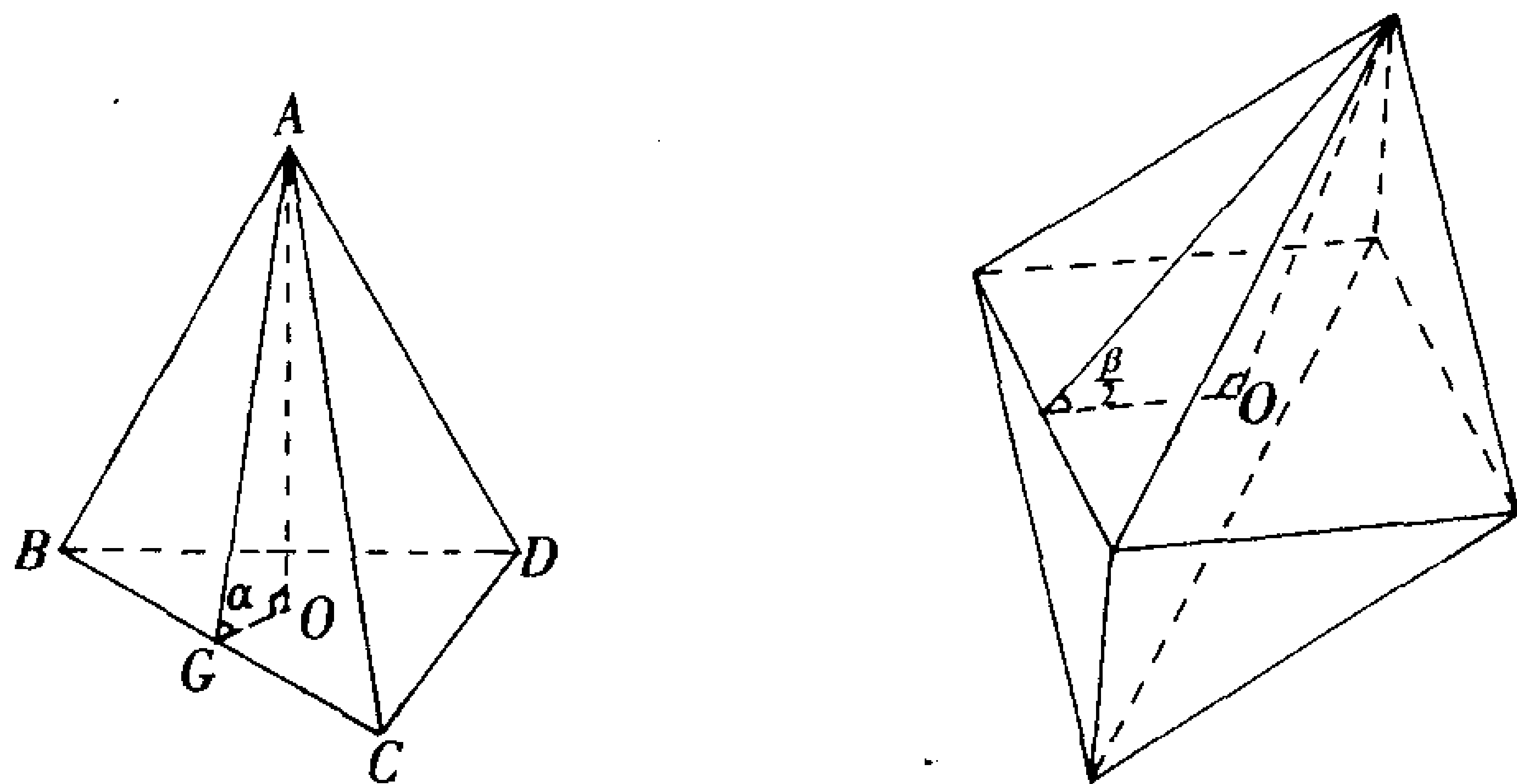
设 a 和 b 分别是四面体 $ABCD$ 的最小棱长和最大棱长,则

$$a \leqslant BC \leqslant b,\ a \leqslant AD \leqslant b.$$

17·46　求正四面体的一个二面角与正八面体的一个二面角的和.

（中国江苏省南京市数学竞赛,1957 年）

[**解**] 设正四面体的一个二面角为 $\alpha(0<\alpha<\pi)$，则 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，



又设正八面体的一个二面角为 $\beta(0<\beta<\pi)$，则

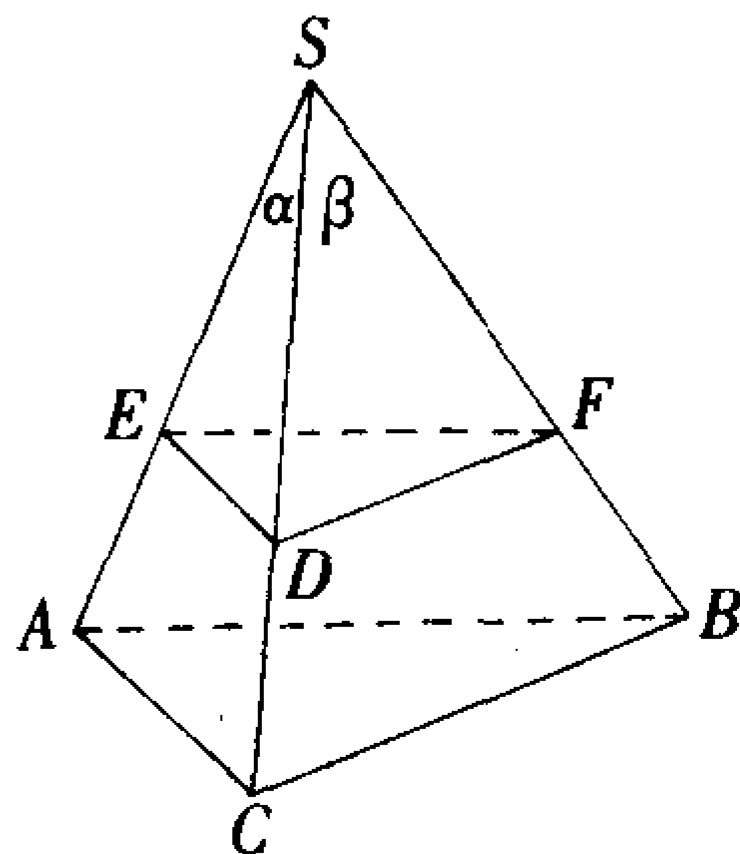
$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$，得 $\cos\beta=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$.

$\because\ \cos\alpha=-\cos\beta$，$\therefore\ \alpha+\beta=\pi$.

17·47 已知：四面体 $S-ABC$ 中，$\angle ASB=\frac{\pi}{2}$，$\angle ASC=\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，$\angle BSC=\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ. 求证：$\theta=\pi-\arccos(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta)$.

（中国高中数学联赛，1982 年）

[**证**] 依题意作图，在棱 SC 上取点 D（不妨设 $SD=1$），过点 D 分别在 ASC 平面和 BSC 平面上作棱 SC 的垂线，交 SA 于 E，交 SB 于 F.



连结 EF，在 Rt△ESD 中，

$ED=\operatorname{tg}\alpha$，$ES=\sec\alpha$，

在 Rt△FSD 中，$FD=\operatorname{tg}\beta$，$FS=\sec\beta$.

于是 在 Rt△EFS 中，有

$EF^2=ES^2+FS^2=\sec^2\alpha+\sec^2\beta$.

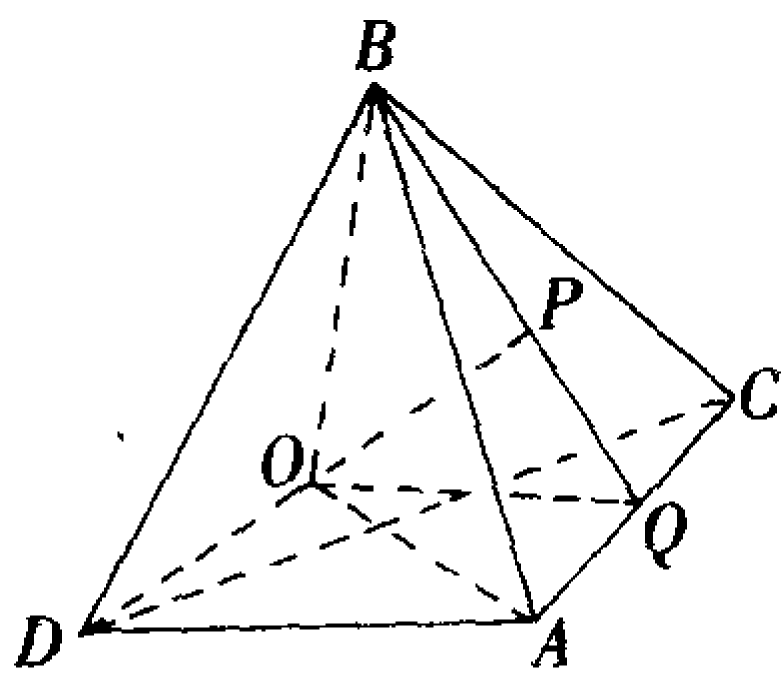
再由作图知，$\angle EDF=\theta$，

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{ED^2+FD^2-EF^2}{2EF\cdot FD}$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta-(\sec^2\alpha+\sec^2\beta)}{2\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$
$$=-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta$$

故 $\theta=\arccos(-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta)=\pi-\arccos(\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta)$.

17·48 求证:对四面体内部的任意一点,从这点观察它的各条棱时,所得视角之和大于 540°.

（前南斯拉夫数学奥林匹克,1973 年）



［证］ 设点 O 在四面体 $ABCD$ 的内部,直线 BD 交平面 ABC 于 P,直线 BP 交棱 AC 于 Q,连 OA、OD、OB、OC、OQ.

在三面角 $O-ABQ$ 中,有 $\angle AOB+\angle AOQ>\angle BOQ$,

同理有 $\angle POQ+\angle QOC>\angle POC$.

$\therefore \quad \angle AOB+\angle AOC$

$=\angle AOB+\angle AOQ+\angle QOC$

$>\angle BOQ+\angle QOC=\angle BOP+\angle POQ+\angle QOC$

$>\angle BOP+\angle POC=180°-\angle BOD+180°-\angle COD$.

$\therefore \quad \angle AOB+\angle AOC+\angle BOD+\angle COD>360°$ ①

同理可得 $\angle AOB+\angle BOC+\angle AOD+\angle COD>360°$, ②

及 $\angle ACO+\angle BOC+\angle AOD+\angle BOD>360°$ ③

①+②+③得

$\angle AOB+\angle AOC+\angle AOD+\angle BOC+\angle BOD+\angle COD>540°$.

17·49 若 P、Q 两点在正四面体 $ABCD$ 的内部,试证:$\angle PAQ<60°$.

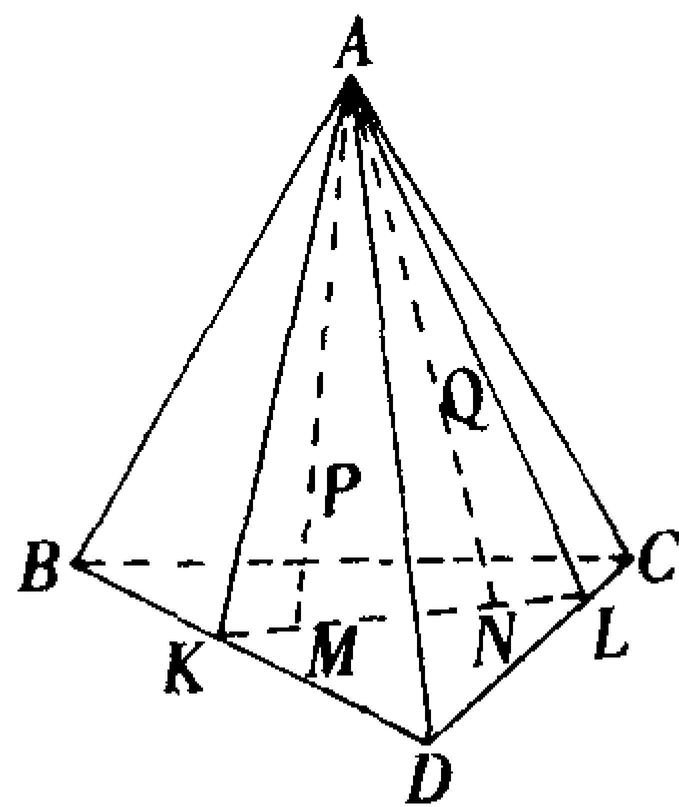
（第 2 届美国数学奥林匹克,1973 年）

［证］ 设 AP、AQ 的延长线交平面 BCD 于点 M、N,则 M 和 N 均在 $\triangle BCD$ 的内部.

设直线 MN 交 BD 于 K,交 AC 于 L.

显然，$\angle PAQ<\angle KAL$.

设正四面体的棱长为 1，$DK=x$，$DL=y$.



由余弦定理得　$AK^2=1+x^2-x$，

$AL^2=1+y^2-y$，$KL^2=x^2+y^2-xy$.

则　$\cos\angle KAL=\dfrac{AK^2+AL^2-KL^2}{2AK\cdot AL}$

$=\dfrac{(1+x^2-x)+(1+y^2-y)-(x^2+y^2-xy)}{2\sqrt{1+x^2-x}\cdot\sqrt{1+y^2-y}}$

$=\dfrac{2-x-y+xy}{2\sqrt{1+x^2-x}\cdot\sqrt{1+y^2-y}}$

记　$a=2-x-y+xy$，$b=\sqrt{1+x^2-x}\cdot\sqrt{1+y^2-y}$. 则

$a^2-b^2=(2-x-y+xy)^2-(1+x^2-x)(1+y^2-y)$

$=3-3x-3y+5xy-x^2y-xy^2$

$=3(1-x-y+xy)+(xy-x^2y)+(xy-xy^2)$

$=3(1-x)(1-y)+xy(1-x)+xy(1-y)$.

由于　$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，则 $a^2-b^2\geqslant 0$.

又由　$a>0$，$b>0$ 得 $a\geqslant b$，

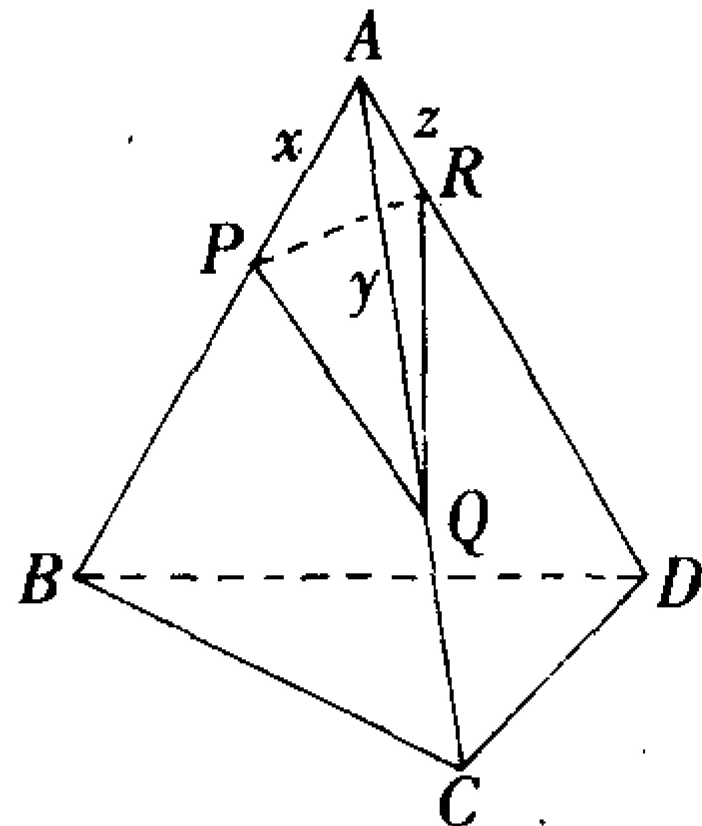
从而　$\cos\angle KAL=\dfrac{a}{2b}\geqslant\dfrac{1}{2}$，　∴　$\angle KAL\leqslant 60°$.

再由　$\angle PAQ<\angle KAL$　得　$\angle PAQ<60°$.

17·50　证明:平面与一个正四面体的相交面,可以是一个钝角三角形,而且任一个这样的钝角三角形中,钝角总小于 120°.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年）

［证］ 设平面截正四面体 $ABCD$ 的棱 AB 于 P，AC 于 Q，AD 于 R.



设 $AP=x$，$AQ=y$，$AR=z$. $\angle QPR=\alpha$，

则由余弦定理

$PQ^2=x^2+y^2-xy$，

$QR^2=y^2+z^2-yz$，

$PR^2=x^2+z^2-xz$.

$$\cos\alpha=\frac{(x^2+y^2-xy)+(x^2+z^2-xz)-(y^2+z^2-yz)}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}\cdot\sqrt{x^2+z^2-xz}}$$

$$=\frac{2x^2-xy+yz-xz}{2\sqrt{(x^2+y^2-xy)(x^2+z^2-xz)}}.$$

当 z 很小，而 $y>2x$ 时，上式右边的分子 x 可以为负，从而 α 可以为钝角，即 $\triangle PQR$ 可以为钝角三角形.

现在设 α 为钝角，则 $2x^2-xy-xz+yz<0$ ①

为证明 $\alpha<120°$，需证明

$$-\sqrt{(x^2+y^2-xy)(x^2+z^2-xz)}<2x^2-xy-xz+yz.\quad ②$$

即需证明

$$(x^2+y^2-xy)(x^2+z^2-xz)>(2x^2-xy-xz+yz)^2.$$

不妨设 $x=1$，上式即为

$$(1+y^2-y)(1+z^2-z)>(2-y-z+yz)^2,$$

$$1+y^2+z^2+y^2z^2-z-y^2z+yz-y-yz^2$$

$$>4+y^2+z^2+y^2z^2-4y-4z+4yz+2yz-2y^2z-2yz^2$$

上式等价于

$$y^2z+yz^2+3y+3z>3+5yz.\quad ③$$

由①及 $x=1$ 得 $2-y-z+yz<0$

则 $y+z>2+yz$. 从而有

$$\begin{aligned}y^2z+yz^2+3y+3z&>y^2z+yz^2+6+3yz\\&>yz(2+yz)+6+3yz\\&>3+5yz.\end{aligned}$$

因而③式成立，于是②式成立.

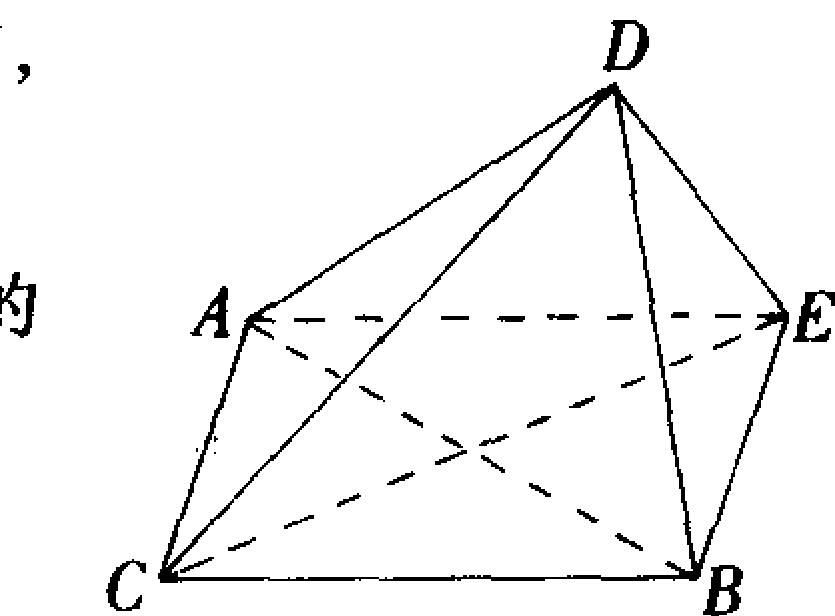
即 $-\frac{1}{2}<\cos\alpha<0$，知钝角 α 小于 $120°$.

17·51 四面体 $ABCD$ 中；$AC\perp BC$，$AD\perp BD$. 求证：直线 AC 和 BD 所成的角的余弦小于 $\frac{CD}{AB}$.

（第 14 届全苏数学奥林匹克，1980 年）

［证］ 我们将直角 $\triangle ACB$ 补成矩形 $ACBE$（如图）. 连 DE. 这时，直线 AC 和 BD 所成的角的余弦等于 $\cos\angle DBE$.

而 $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{CD}{CE}$. 又因为 $\angle ACB=90°$, $\angle ADB=90°$, $\angle AEB=90°$,



它们的顶点 C、D、E 在以 AB 为直径的球面上.

所以 $\angle CDE=90°$, $\dfrac{CD}{CE}=\cos\angle DCE$.

因此只需证明:

$\cos\angle DBE<\cos\angle DCE$

即可.

因为$\angle DCE$ 是锐角,为此只需证 $\sin\angle DBE>\sin\angle DCE$.

由正弦定理有 $\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{2R}$, $\sin\angle DBE=\dfrac{DE}{2r}$.

其中 R、r 分别是$\triangle DCE$ 与$\triangle DBE$ 的外接圆半径.

但这些圆是三角形所在平面截我们考察的球的截面,第一个是大圆,而第二个不是大圆.所以 $R>r$.则

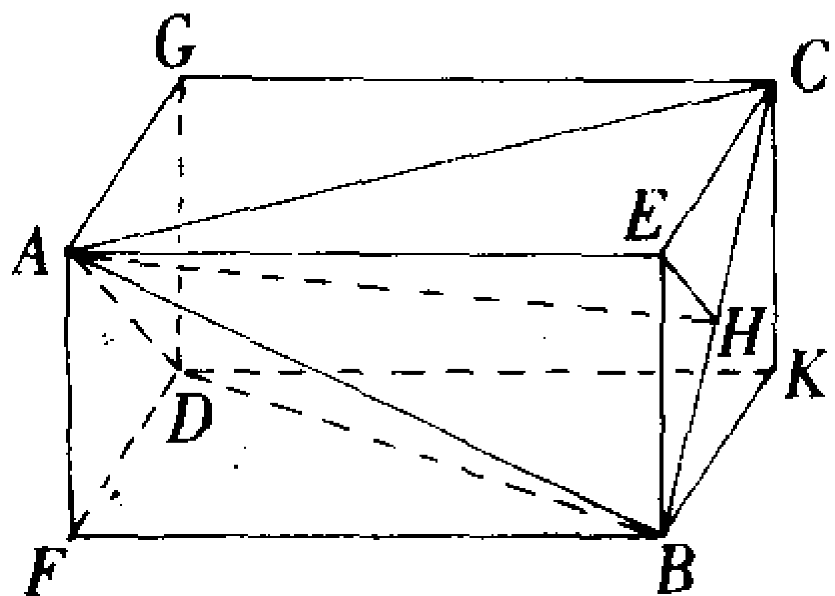
$\sin\angle DCE<\sin\angle DBE$, 故 $\cos\angle DCE>\cos\angle DBE$.

$\therefore\ \cos\angle DBE<\dfrac{CD}{AB}$.

17·52 一个四面体的四个面都是全等三角形,若 α 是此四面体一组对棱间的夹角.试证:$\cos\alpha=\left|\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}\right|$.其中 B、C 是这组对棱之一所在面中另两棱与该棱的夹角.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991 年)

[证] 由于这个四面体的四个面是全等三角形,易知这个四面体的对棱分别相等.



过每条棱分别作平面与对棱平行,这样就得到了一个平行六面体,每个界面的对角线分别等于四面体的对棱,而它们是相等的.所以平行六面体的每个面都是矩形,从而这个平行六面体是长方体.

在长方体 $AECG-FBKD$ 中,设 $AE=a$, $AF=b$, $AG=c$, $\angle ABC=B$, $\angle ACB=C$.则

$$\cos\alpha = \cos(180^\circ - 2\angle BCE) = -\cos 2\angle BCE$$
$$= 1 - 2\cos^2\angle BCE = 1 - \frac{2c^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}.$$

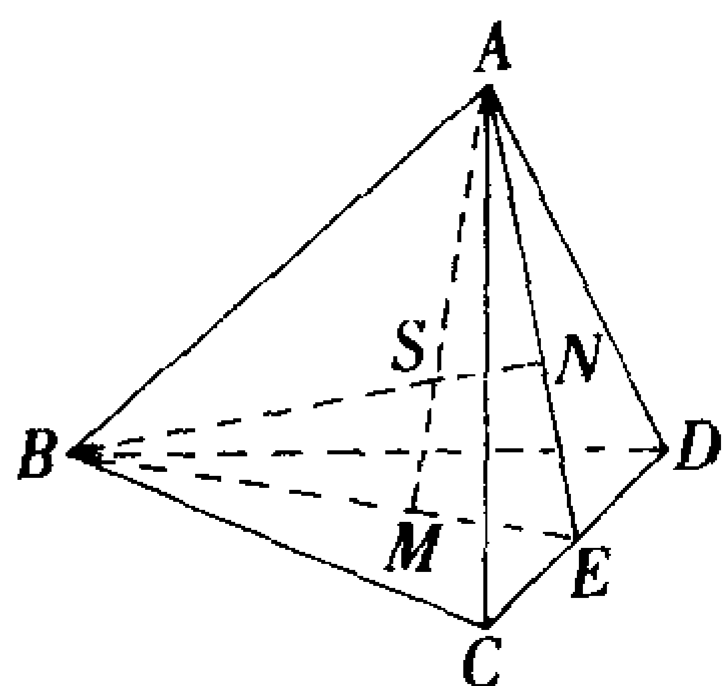
作 $AH \perp BC$,连 EH,则 $EH \perp BC$.

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{\sin B\cos C - \sin C\cos B}{\sin B\cos C + \sin C\cos B} = \frac{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C} = \frac{CH - BC}{BC}$$
$$= \frac{CH\cdot BC - BH\cdot BC}{BC^2} = \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2}$$

$$\cos\alpha = \left|\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}\right|.$$

17·53 由四面体的任一顶点向对面所作的垂线长称为四面体的高,求证:如果四面体的两条高相交,那么它的另两条高也相交.

(波兰数学奥林匹克,1949 年)

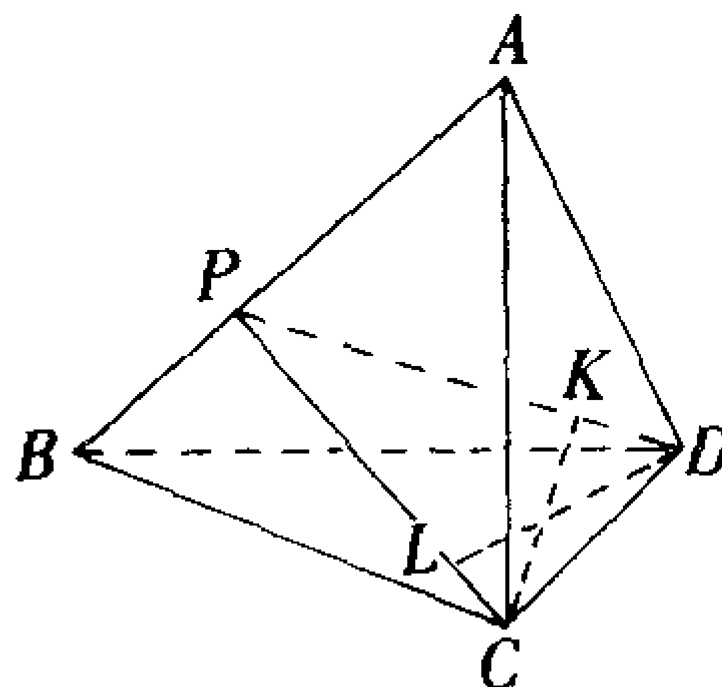


[证] 设 AM 和 BN 是四面体 $ABCD$ 的高,它们交于点 S.

因为 AM 垂直于平面 BCD, 所以 $CD \perp AM$,又因为 BN 垂直于平面 ACD, 所以 $CD \perp BN$.

于是 $CD \perp$ 平面 ABE. $CD \perp AB$.

过 CD 作平面 CDP 垂直于 AB,且与 AB 交于 P.



在$\triangle CDP$ 中,作 $CK \perp DP$ 于 K, $DL \perp CP$ 于 L.

因为 $CK \perp PD$, $AB \perp$ 平面 PCD,从而 $CK \perp AB$,

则 $CK \perp$ 平面 ABD,即 CK 为四面体的高.

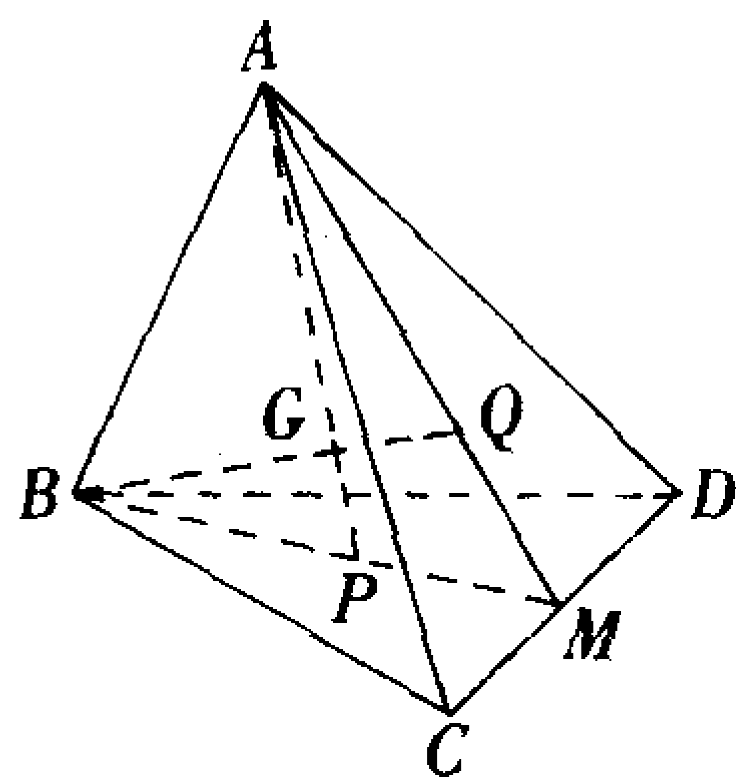
同理,DL 为四面体的高.

又因为 CK 和 DL 同时也是$\triangle CPD$ 的高,所以它们必定相交.

17·54 将一个四面体的每个顶点与它所对底面三角形的重心相连接,得到四条线段,证明:这四条线段相交于一点.

(中国河北省高中数学竞赛,1994 年)

[证]　设 CD 的中点为 M.



连 AM、BM，其中 P、Q 为依次分 BM 与 AM 成 2∶1 的点，从而，P 及 Q 分别为△BCD 及△ACD 的重心.

显然，AP、BQ 相交于一点 G.

$\because\quad S_{\triangle APM}=S_{\triangle BQM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}$,

$\therefore\quad S_{\triangle BPG}=S_{\triangle AQG}$.

又 $\because\quad S_{\triangle PGM}=\frac{1}{2}S_{\triangle BPG}$,

$S_{\triangle QGM}=\frac{1}{2}S_{\triangle AQG}$,

$\therefore\quad S_{\triangle PGM}=\frac{1}{3}S_{\triangle AGM}$,

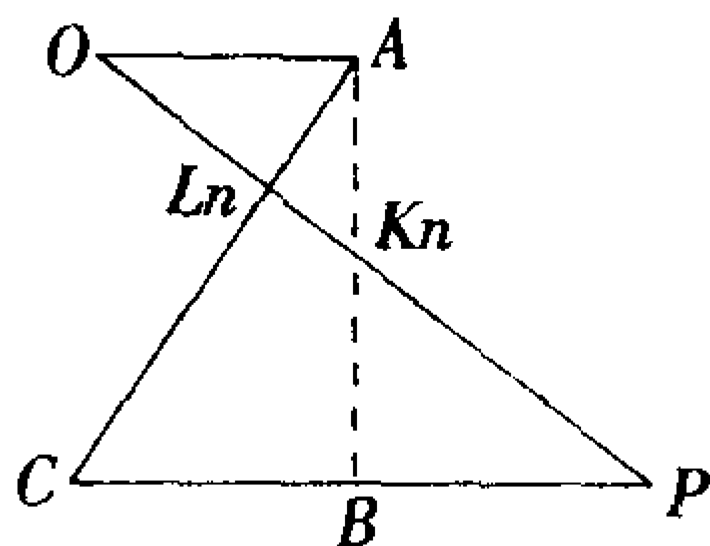
从而　$\frac{AG}{GP}=\frac{S_{\triangle AGM}}{S_{\triangle PGM}}=\frac{3}{1}$. 于是 G 分 AP 为 3∶1.

同理可证，其他两条由顶点向该点所对三角形重心相连线段均过 G 点，于是这四条连线相交于一点.

17·55　在四面体 $ABCD$ 的棱 AB、AC、AD 上，对每个自然数 n，分别取点 K_n、L_n、M_n，使得 $AB=nAK_n$，$AC=(n+1)AL_n$，$AD=(n+2)AM_n$. 证明：所有的平面 $K_nL_nM_n$ 共线.

（保加利亚数学奥林匹克，1966 年）

[证]　(1)首先证明，所有直线 K_nL_n 都过某个固定点 O，而点 O 在过顶点 A 且平行于直线 BC 的直线上.



事实上，如果直线 K_nL_n 与直线 BC 交于 P，则由△K_nBP∽△K_nAO，

$\therefore\quad \frac{PB}{OA}=\frac{BK_n}{AK_n}=n-1$,

由　△L_nCP∽△L_nAO　$\therefore\quad \frac{PC}{OA}=\frac{CL_n}{AL_n}=n$.

因而　$OA=nOA-(n-1)OA=PC-PB=BC$.

从而 O 为定点，K_nL_n 过定点 O.

(2)同理可证,所有直线 L_nM_n 都过某定点 Q,且点 Q 在过顶点 A 且平行于 CD 的直线上.

因此,对所有自然数 n,平面 $K_nL_nM_n$ 都过直线 OQ.

17·56 已知:三棱锥 $P-ABC$ 的各侧面与底面所成的二面角都是 θ.过底面 $\triangle ABC$ 的内心 O,作 $EF\parallel BC$ 交 AB、AC 于 E、F.求证:$S_{\triangle EPF}=(S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PCF})\sin\theta$.

(中国福建省福州市数学竞赛,1963 年)

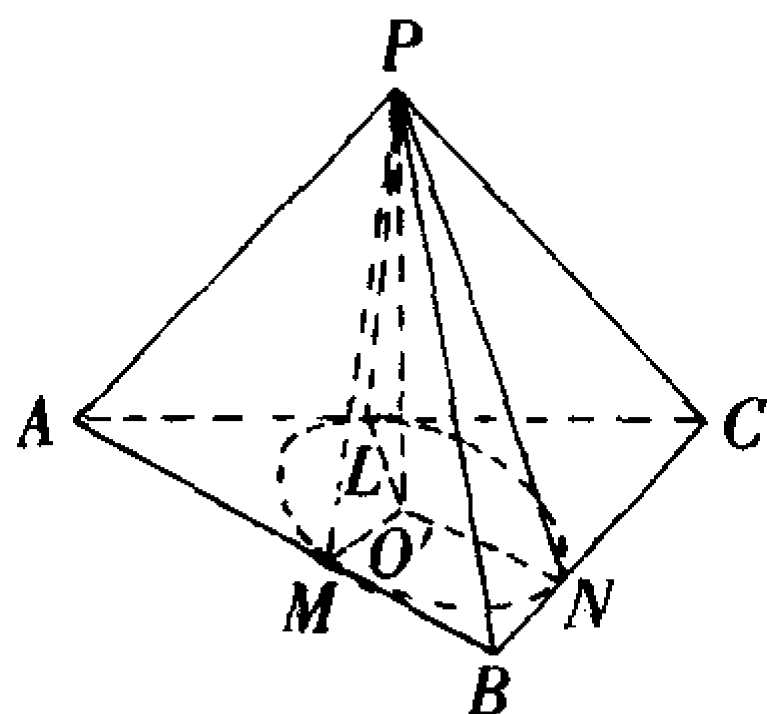
[证] 作 $PO'\perp$ 底面 ABC,过垂足 O' 作 $O'M\perp AB$, $O'N\perp BC$, $O'L\perp AC$.

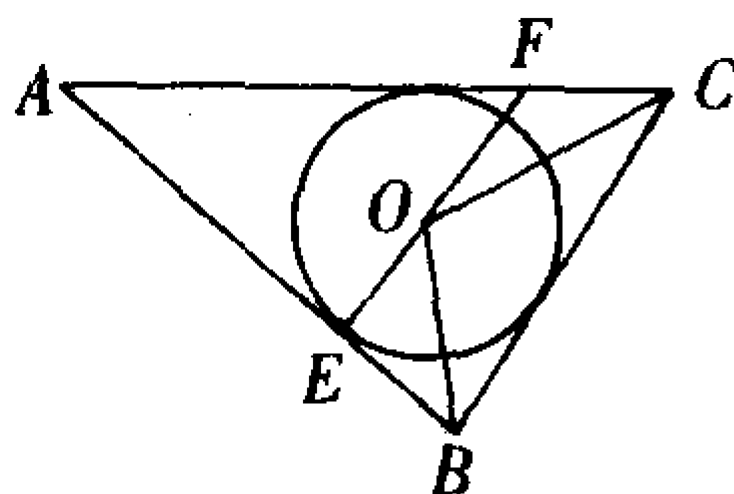
连结 PM、PN、PL.则

$PM\perp AB$, $PN\perp BC$, $PL\perp AC$.

$\because$ $\angle PMO'=\angle PNO'=\angle PLO'=\theta$,

$\therefore$ $O'M=O'N=O'L$, $PM=PN=PL$.





故 O' 即为内切圆心 O,M、N、L 分别是内切圆与 AB、BC、CA 三边的切点.

$\because$ $EF\parallel BC$,且 BO 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore$ $EO=EB$,

同理 $FO=FC$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle EPF}&=\frac{1}{2}EF\cdot PO\\&=\frac{1}{2}(EO+FO)PM\sin\theta\\&=\left(\frac{1}{2}EB\cdot PM+\frac{1}{2}FC\cdot PL\right)\sin\theta\\&=(S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PCF})\sin\theta.\end{aligned}$$

17·57　四面体 $ABCD$ 三个侧面 ABD、ACD、BCD 上，由顶点 D 引出的中线与其对应的边所成的角相等，求证：每一个侧面的面积小于另外两个侧面面积之和.

（波兰数学奥林匹克，1997 年）

［证］　先证一个引理：

引理　设点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，则 $PA\cdot BC+PC\cdot AB\geqslant PB\cdot AC$.

关于引理的证明，仍用 P、A、B、C 表示 $\triangle ABC$ 所在复平面上相应顶点对应的复数，则

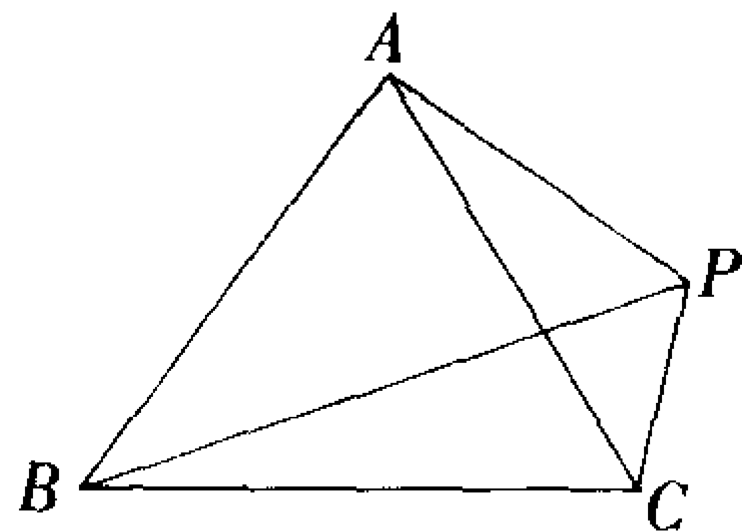


图 1

$$(P-A)(B-C)+(P-C)(A-B)$$
$$=(P-B)(A-C).$$

从而　$|(P-B)(A-C)|$

$$\leqslant|(P-A)(B-C)|+|(P-C)(A-B)|,$$

即　$PB\cdot AC\leqslant PA\cdot BC+PC\cdot AB$.

注意：这里所证的引理是托勒密定理的推广.

回到原题，如图 2，设由顶点 D 引出的中线分别为 DE、DF、DG，并设 DE 与 AC 所成的角为 α，则有

$$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot AC\cdot\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}\cdot DG\cdot AB\cdot\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot BC\cdot\sin\alpha.$$

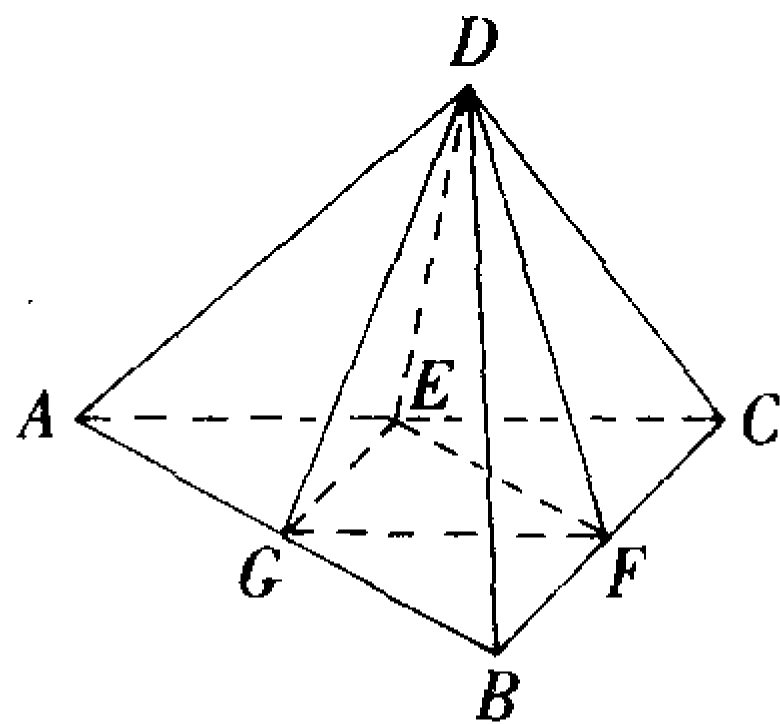


图 2

在连接 EF、EG、FG 后，利用中位线定理，比较原题的结论和上述式子，可将命题转为证明：任给一个四面体，求证任意一组对棱的乘积小于另外两组对棱乘积之和.

事实上，如图 3 所示，我们证明

$AB\cdot CD<BC\cdot AD+AC\cdot BD$.

为此，将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折到 $\triangle BCD$ 所在平面，使 $AD=DP$，$AC=CP$.

连接 BP，交 CD 于 O，连 AO，

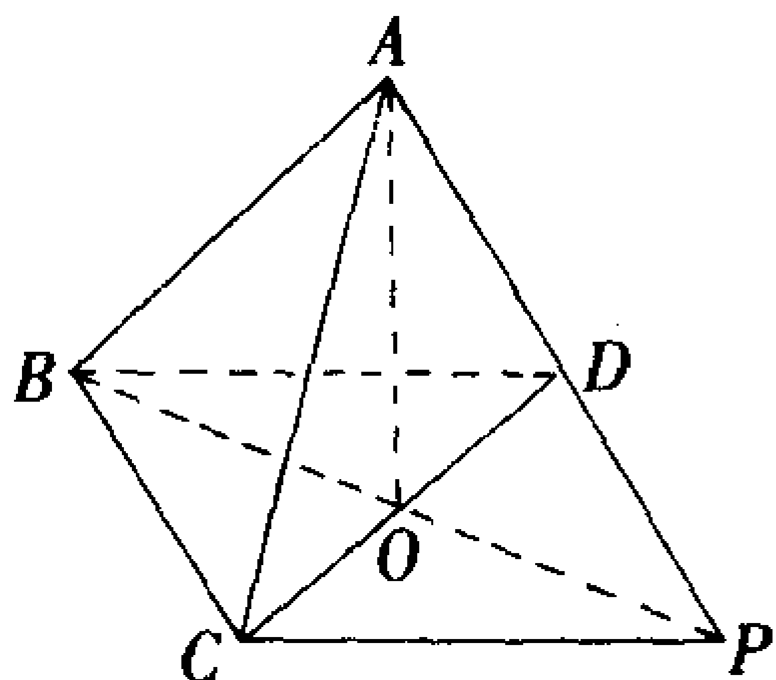


图 3

则由于 $\triangle ACD \cong \triangle PCD$，可知

$AO=OP$,

所以 $BP=BO+OA>AB$.

由引理的结论，$PB\cdot CD\leqslant DP\cdot BC+CP\cdot BD$.

所以 $AB\cdot CD<PB\cdot CD\leqslant DP\cdot BC+CP\cdot BD=BC\cdot AD+AC\cdot BD$.

注 经上述翻折后，并不能保证四边形 $BDPC$ 为凸四边形，不宜直接用托勒密定理.

对称地，我们可以证明另外二个不等式

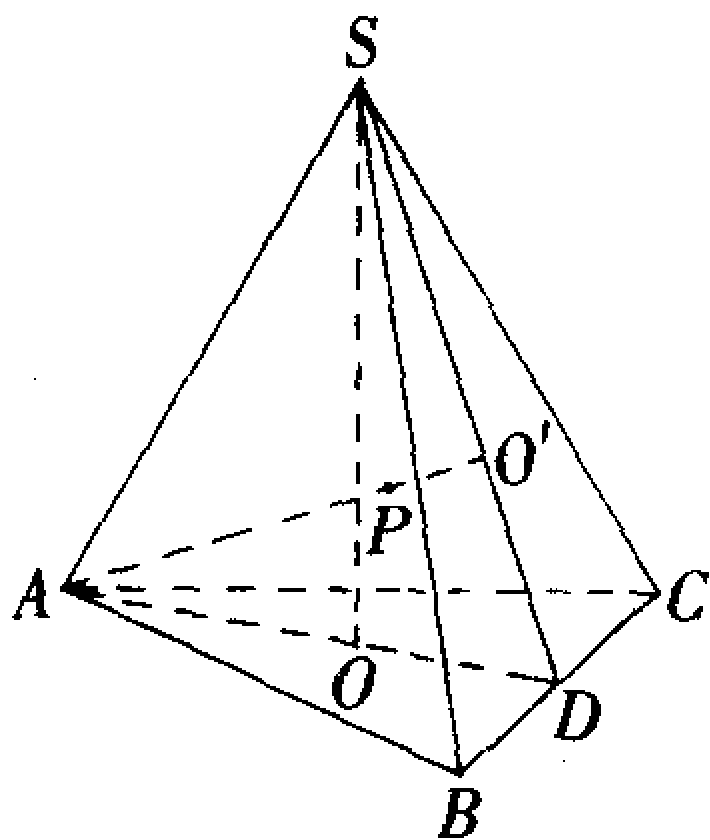
$$AD\cdot BC<AB\cdot CD+AC\cdot BD \quad 和 \quad AC\cdot BD<AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

这样，我们完成了问题的证明.

17·58 已知：正三棱锥 $S-ABC$ 的高 $SO=3$，底面边长为 6，过 A 点向它所对的侧面 SBC 作垂线，垂足为 O'，在 AO' 上取一点 P，使 $\frac{AP}{PQ'}=8$. 求经过 P 点且平行于底面的截面的面积.

（中国高中数学联赛，1989 年）

［解］ 如图，因 $S-ABC$ 是正三棱锥，所以 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，连结 AO 并延长交 BC 于 D，因为 D 是 BC 的中点，$BC\perp$ 平面 SAD，而 $AO'\perp BC$，所以 AO' 在平面 SAD 上，从而 O' 必在 DS 上，于是



$$AD=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3},\ OD=\frac{1}{3}AD=\sqrt{3},$$

$$SD=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}.$$

而 $\frac{O'D}{AD}=\frac{OD}{SD}$，故

$$O'D=\frac{OD}{SD}\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\cdot 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

设过 P 点平行于底面的截面与 SD 的交点为 O''，则

$$\frac{O''D}{O'D}=\frac{AP}{O'A}=\frac{8}{9}.$$

$$\therefore\quad O''D=\frac{8}{9}O'D=\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3},$$

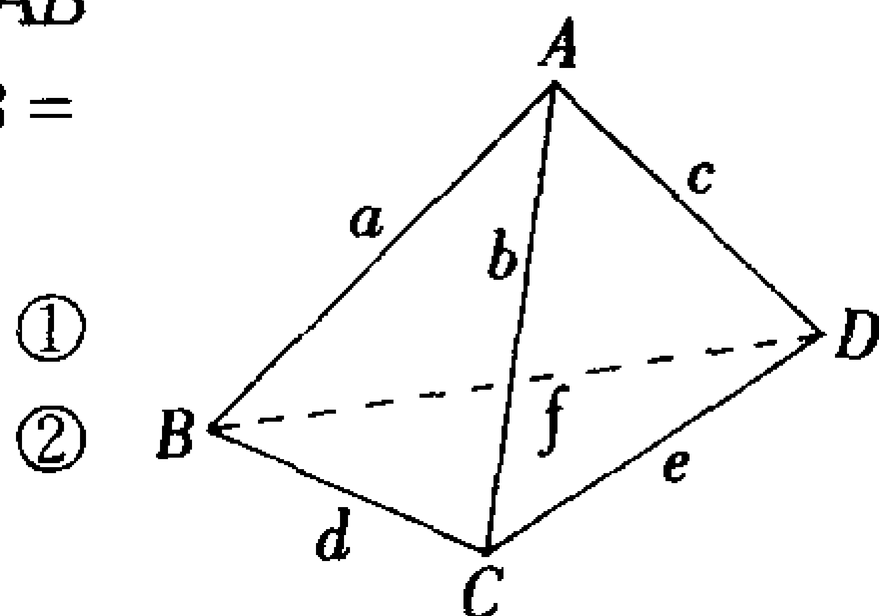
则 $\frac{SO''^2}{SD^2}=\frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}{(\sqrt{12})^2}=\frac{1}{9}$.

因此所求截面的面积为 $\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

17·59　证明:(1)四面体的各面周长相等时,这些面一定全等.(2)四面体的各面面积相等时,这些面一定全等.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[证]　(1)设四面体 $ABCD$ 的各棱长 $AB=a, AC=b, AD=c, BC=d, CD=e, DB=f$. 由题设有



$a+d+b=c+e+b$,　①

$a+c+f=d+e+f$,　②

由①,②可得 $c=d$.

同理　$a=e$.

又　$b=b$.　∴　$\triangle ABC\cong\triangle CDA$.

同理可证每两个三角形都全等.

(2)考虑四面体的内切球,该球在面 ABC、ABD、BCA、BCD 的切点依次为 I_1、I_2、I_3、I_4.

由于 AI_1、AI_2、AI_3 都是点 A 到球的切线长,所以由切线长定理得

$AI_1=AI_2=AI_3=a'$,

同理　$BI_1=BI_2=BI_4=b'$,

且　$CI_1=CI_3=CI_4=c'$,

及　$DI_2=DI_3=DI_4=d'$,

于是有　$\triangle ABI_1\cong\triangle ABI_2$　等等.

又记　$\angle AI_1B=\angle AI_2B=\alpha$, $\angle AI_1C=\angle AI_3C=\beta$,

$\angle BI_1C=\angle BI_4C=\gamma$, $\angle CI_4D=\angle CI_3D=\alpha'$,

$\angle BI_2D=\angle BI_4D=\beta'$, $\angle AI_2D=\angle AI_3D=\gamma'$,

由于在 I_i 的三个角的和是周角,所以有

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta'+\gamma'=\beta+\alpha'+\gamma'=\alpha'+\beta'+\gamma$.

从而有 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$.

设 α、α' 角及其对边所成三角形的面积为 x、x'；β、β' 角及其对边所成三角形的面积为 y、y'；γ、γ' 角及其对边所成三角形的面积为 z、z'.

由于各面面积相等，则有

$x+y+z=x+y'+z'=y+x'+z'=x'+y'+z$,

$\therefore\quad x=x',\ y=y',\ z=z'$.

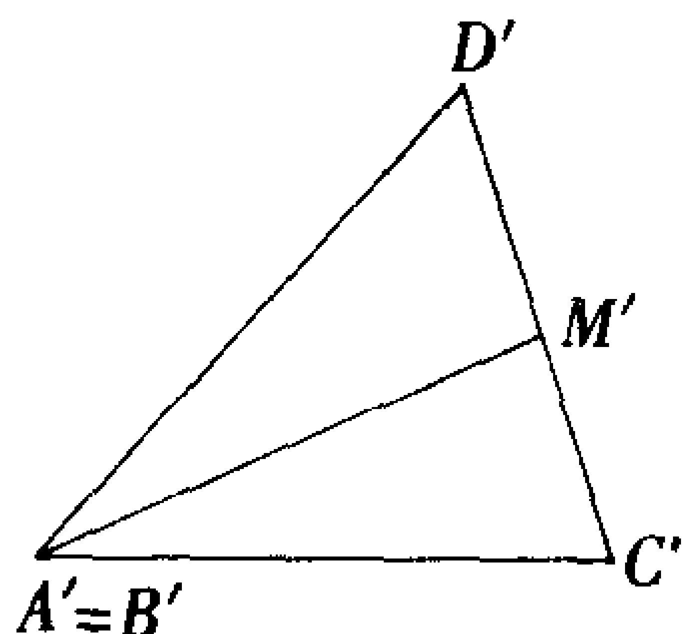
故　$a'b'=c'd',\ a'c'=b'd',\ b'c'=a'd'$

从而得　$a'=b'=c'=d'$.

故　$AB=CD,\ BC=AD,\ AC=BD$，进而可证明各面都全等.

17·60　求证：在四面体中，它的任一个二面角的平分面分对棱所得两线段之比，等于组成这个二面角的两个面（三角形）的面积之比.

（波兰数学奥林匹克，1957 年）



［证］　我们研究四面体 $ABCD$ 在与棱 AB 垂直的某个平面 π 上的正射影 $A'B'C'D'$.

点 A、B 的射影 A'、B' 互相重合，因而四面体 $ABCD$ 的射影是三角形 $A'C'D'$，并且 $\angle C'A'D'$ 等于以 AB 为棱的二面角的平面角.

设 M 是以 AB 为棱的二面角的平分面与棱 CD 的交点，M' 是 M 的射影.

因为 $\angle C'A'M'$ 和 $\angle M'A'D'$ 分别等于两个相等的二面角的平面角，所以 $A'M'$ 是 $\angle C'A'D'$ 的平分线.

由三角形内角平分线定理得

$$\frac{C'M'}{M'D'}=\frac{A'C'}{A'D'} \qquad ①$$

因为射影不改变同一直线上两线段之比，所以有

$$\frac{CM}{MD}=\frac{C'M'}{M'D'}. \qquad ②$$

由于线段 $A'C'$ 和 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的射影，因此，线段 $A'C'$ 和 $A'D'$ 可以看作是具有公共边 AB 的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的高的射影，但这些高平行于四面体 $ABCD$ 的射影所在的平面 π，因此它们等于自己的射影.

因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 有公共边 AB，所以它们的面积之比等于相应的高的比，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{A'C'}{A'D'}.\qquad ③$$

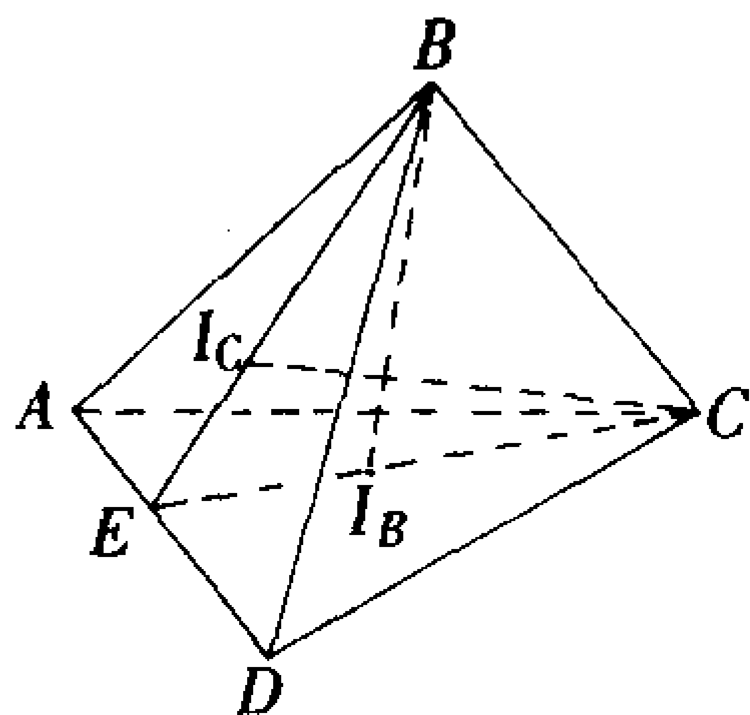
由①、②、③得 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{CM}{MD}$.

这就是要证的结果.

17·61 求证:连接四面体的顶点与相应的面的内切圆圆心的四条直线交于一点的必要且充分条件是,该四面体三组对棱的乘积相等.

(波兰数学奥林匹克,1979 年)

[证] 设$\triangle ABD$的内心为I_C,$\triangle ACD$的内心为I_B,



为使 CI_C 与 BI_B 这两条直线相交,其充分必要条件是:CI_C 与 BI_B 在同一个平面上.

这又等价于$\angle ABD$和$\angle ACD$的平分线与棱AD交于同一点E.

而此条件当且仅当 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$,即

$AB\cdot CD=AC\cdot BD$ 时成立.

因此,若 AI_A、BI_B、CI_C、DI_D 交于一点,则

$$AB\cdot CD=AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

反之,如果

$$AB\cdot CD=AC\cdot BD=AD\cdot BC,$$

则四条直线 AI_A、BI_B、CI_C、DI_D 中任意两条都相交,且任意三条不共面,因此所有直线交于同一点.

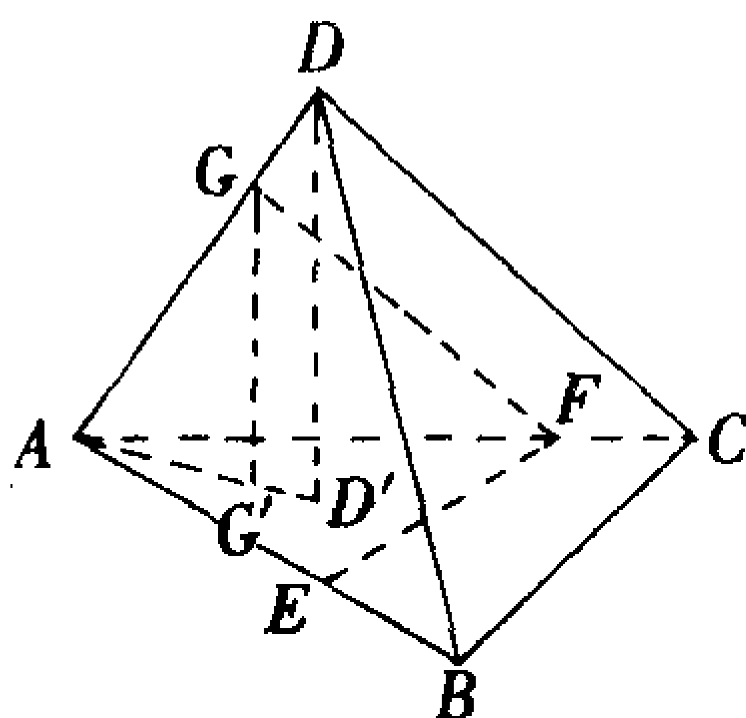
17·62 已知:四面体 $ABCD$,设 E、F 分别是AB及AC边上的一点,使$\triangle AEF$的面积$>\dfrac{1}{2}\triangle ABC$的面积,在$AD$上求一点$G$,使四面体$AEFG$的体积等于四面体$ABCD$体积的一半.

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

[解] 若G是所求的点,作DD'与GG'垂直于平面ABC,垂足分别为D'、G',则D'与G'必与A共线.

$\because\ DD'/\!/GG'$,

$\therefore\ \triangle AGG'\backsim\triangle ADD'$.

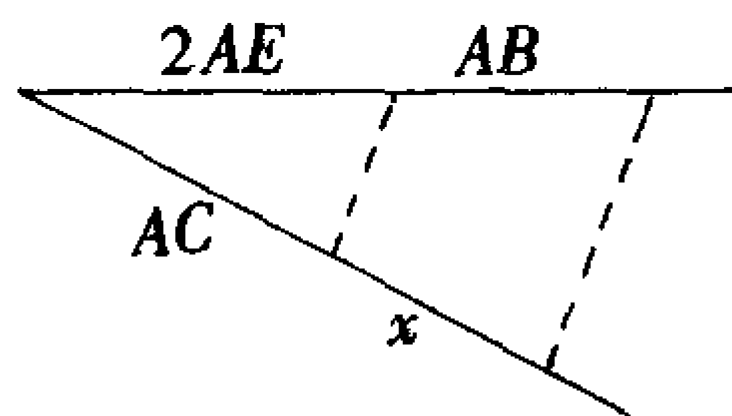


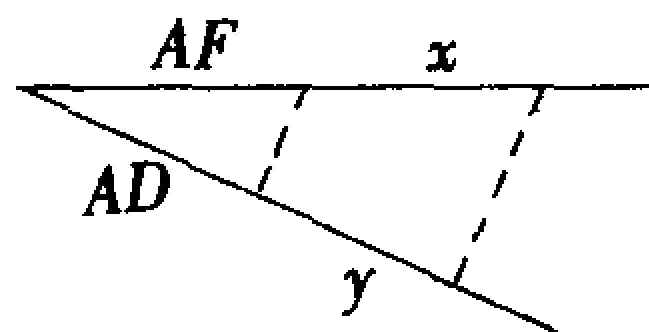
则 $\dfrac{GG'}{DD'}=\dfrac{AG}{AD}$.

又 $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}$ （∵ $\angle A$ 是公共角），

∴ $\dfrac{V_{四面体AEFG}}{V_{四面体ABCD}}=\dfrac{S_{\triangle AEF}\cdot GG'}{S_{\triangle ABC}\cdot DD'}$,

而 $\dfrac{S_{\triangle AEF}\cdot GG'}{S_{\triangle ABC}\cdot DD'}=\dfrac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}\cdot\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{AE\cdot AF\cdot AG}{AB\cdot AC\cdot AD}=\dfrac{1}{2}$.





∴ $AG=\dfrac{AB\cdot AC\cdot AD}{2\cdot AE\cdot AF}$. 则 $S_{\triangle AEF}>\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

∴ $AE\cdot AF>\dfrac{1}{2}AB\cdot AC$,

∴ $AG<AD$.

由于右端的各线段都是定长，故 AG 可以作出.

作 $x=\dfrac{AB\cdot AC}{2\cdot AE}$ 作 $y=\dfrac{x\cdot AD}{AF}$.

在 AD 上截取 $AG=y$，则 G 是所求的点.

17·63 自四面体 $ABCD$ 的顶点 C、D 到对面引垂线，若垂足为该面的内心，棱 $AB=BD$，试证：该四面体为正四面体.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

［证］ 由于 C 在 $\triangle ABD$ 上的射影为 $\triangle ABD$ 的内心，所以

$\angle CAB=\angle CAD$, $\angle CBA=\angle CBD$,

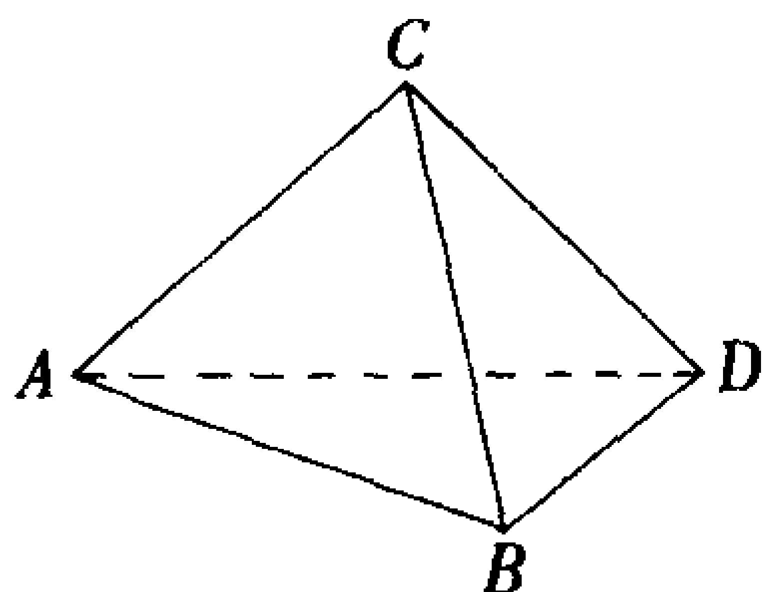
$\angle CDA=\angle CDB$.

同理 $\angle DAB=\angle DAC$, $\angle DBA=\angle DBC$, $\angle DCA=\angle DCB$.

∴ $\triangle CBD\cong\triangle CAD$.

有 $CA=CB$，$DA=DB$.

又已知 $AB=BD$,所以$\triangle ABD$ 为正三角形.



$\therefore\quad \angle ABD=\angle ADB=\angle BAD=60^\circ$,

即 $\angle ABD=\angle DBC=60^\circ$,

且 $\angle ADB=\angle ADC=\angle CDB=60^\circ$,

及 $\angle BAD=\angle DAC=\angle CAB=60^\circ$.

于是 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 都是正三角形.

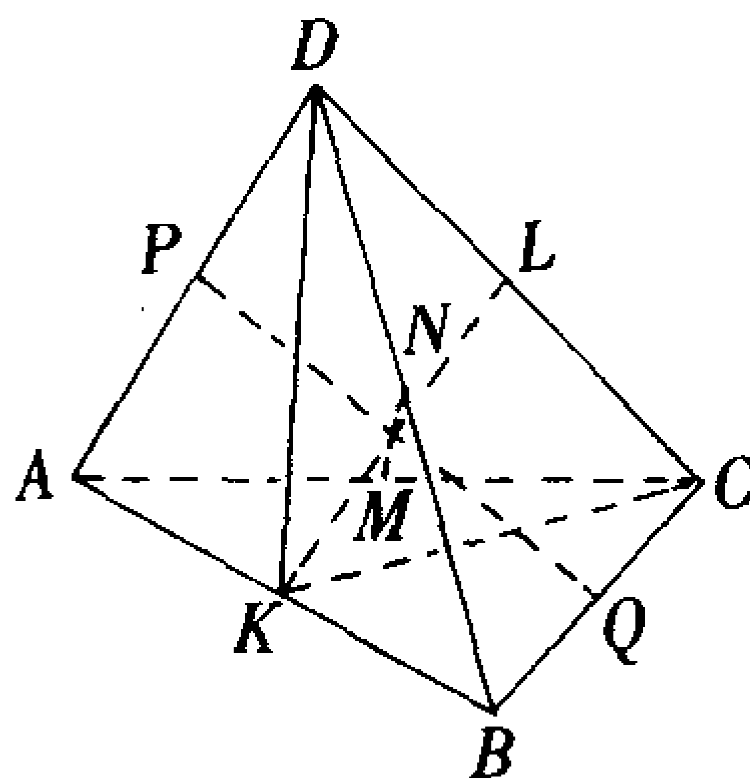
由此可得四面体 $ABCD$ 是正四面体.

17·64 求证:如果四面体 $ABCD$ 的对棱分别相等(亦即 $AB=CD, AC=BD, AD=BC$),那么通过每组对棱中点的直线互相垂直,并且是四面体的对称轴.

(波兰数学奥林匹克,1953 年)

[证 1] $\because\quad AD=BC$，$BD=AC$,

$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle ABC$.



$\because$ DK 和 CK 是$\triangle ABD$ 和$\triangle ABC$ 的对应中线,

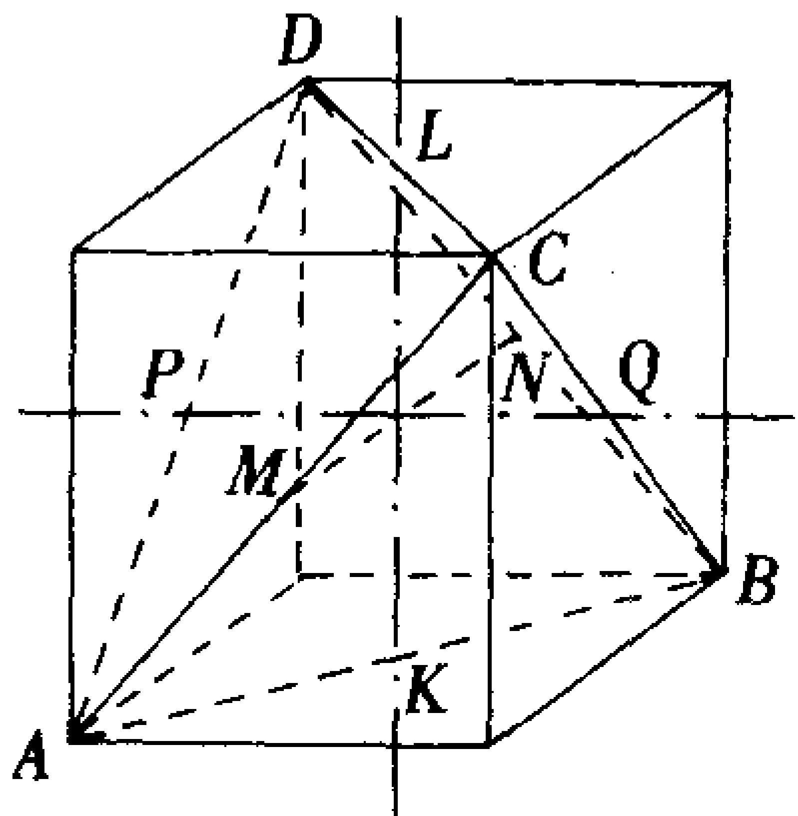
$\therefore\quad DK=CK$.

又 L 是等腰三角形 KDC 底边 CD 的中点,则 $KL\perp DC$.

同理可证 $KL\perp AB$.

因为顶点 B 与顶点A 关于直线KL 对称,顶点 C 与顶点D 关于直线 KL 对称,所以直线 KL 是四面体$ABCD$ 的对称轴.

线段 BC 与线段AD 对称,所以线段 BC 的中点 Q 与线段 AD 的中点 P 对称. 于是 KL 与 PQ 垂直相交. 从而本题得证.



[证 2] 对四面体 $ABCD$ 作一个外接平行六面体,这个平行六面体各组对面有一对对角线与四面体的一组对棱重合.

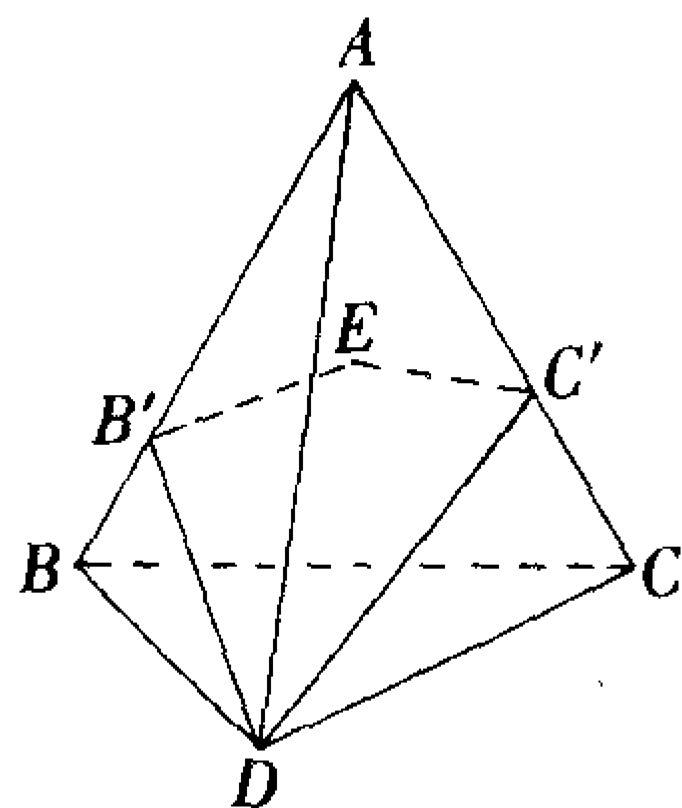
如果四面体对棱相等,那么外接平行六面体各面上的对角线分别相等. 因而这些面都是矩形,这个外接平行六面体是一个长方

体.

由于长方体有三条互相垂直并且分别通过各组对面中心的对称轴,而这三条对称轴通过内接四面体的对棱中点并与相应的棱垂直,所以它们也是内接四面体的对称轴.

17·65 (1)证明:如果给定的四面体的六个二面角相等,那么这个四面体一定是正四面体.(2)如果五个二面角相等,这个四面体一定是正四面体吗?

(第7届美国数学奥林匹克,1978年)



[解] (1)设此四面体为 $ABCD$. 在四面体 $ABCD$ 中,

作 $DB'\perp AB$ 于 B', $DC'\perp AC$ 于 C',

在 BAC 面内,过 B'、C' 作 AB、AC 的垂线相交于点 E.

因为二面角 $C-AB-D$ 和 $B-AC-D$ 相等,则其平面角相等,即 $\angle DB'E=\angle DC'E$.

$\because$ $AB\perp$ 平面 $B'DE$, $AC\perp$ 平面 $C'DE$,

$\therefore$ 平面 $BAC\perp$ 平面 $B'DE$,

且 平面 $BAC\perp$ 平面 $C'DE$. $\therefore$ $DE\perp$ 平面 ABC.

在 $\mathrm{Rt}\triangle B'DE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle C'DE$ 中,

$\because$ $\angle DB'E=\angle DC'E$, $DE=DE$

$\therefore$ $\triangle B'DE\cong\triangle C'DE$, 有 $B'D=C'D$.

又 $\angle AB'D=\angle AC'D=90^\circ$,

$\therefore$ $\triangle AB'D\cong\triangle AC'D$, 有 $\angle BAD=\angle CAD$.

同理,在每个顶点 A、B、C、D 的三个面角分别相等.

记顶点 A 的三个面角为 α,顶点 B 的三个面角为 β,顶点 C 的三个面角为 γ,顶点 D 的三个面角为 δ.

由 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=\alpha+\beta+\delta$ 得 $\gamma=\delta$.

同理 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

从而各面都是正三角形.

所以 $ABCD$ 为正四面体.

(2)如果有五个二面角相等,不一定是正四面体.

例如可以构造这样一个四面体 $ABCD$,使

$\angle ABC=\angle CBD=\angle DBA=40^\circ$,

$\angle ACB=\angle BCD=\angle DCA=40^\circ$,

$\angle BAD=\angle CAD=70^\circ$, $\angle BAC=100^\circ$,

$\angle CDA=\angle BDA=70^\circ$, $\angle BDC=100^\circ$.

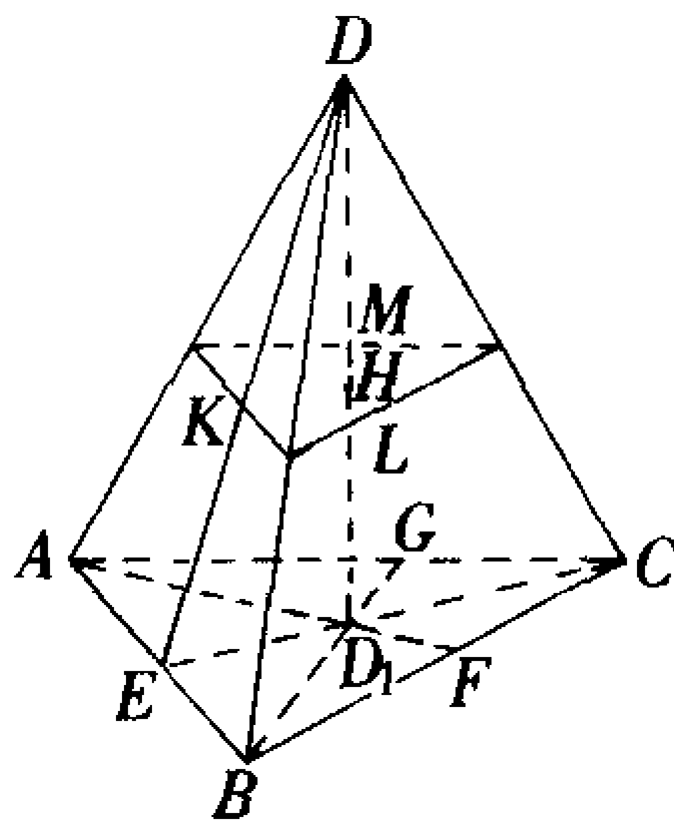
这样的四面体显然存在.

可以证明,除二面角 $B-AD-C$ 外,其他五个二面角都相等,但不是正四面体.

17·66 四面体 $ABCD$ 的高 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 相交于四面体 $A_1B_1CD_1$ 的内切球的球心 H. 试证:四面体 $ABCD$ 是正四边体.

(第 20 届全俄数学奥林匹克,1994 年)

[证] 令 $E=$平面 $CHD\cap AB$, $F=$平面 $AHD\cap BC$, $G=$平面 $BHD\cap CA$.



由于 $CC_1\perp AB$, $DD_1\perp AB$,

则 $AB\perp$平面 CED.

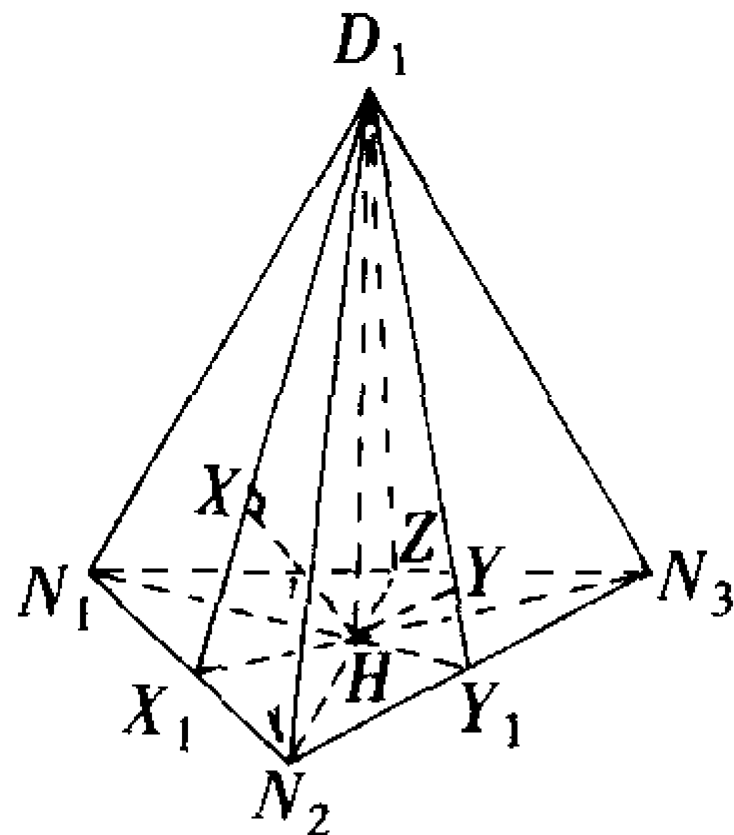
于是 DE 和 CE 分别是$\triangle ABD$ 和$\triangle ABC$ 的高,同理 AF、BG 均为$\triangle ABC$ 的高,由此可知 A_1、B_1、C_1、D_1 分别是四面体 $ABCD$ 各面的垂心.

由此结论及题意可知,四面体 $ABCD$ 的各面都是锐角三角形,而锐角三角形的垂心恰是垂足三角形的内心.

过点 H 作平面 α // 平面 ABC,令

$K=\alpha\cap DE$, $L=\alpha\cap DF$, $M=\alpha\cap DG$, $N_1=\alpha\cap D_1C_1$, $N_2=\alpha\cap D_1A_1$, $N_3=\alpha\cap D_1B_1$.

由于 α // 平面 ABC,则 H 是$\triangle KLM$ 的内心.



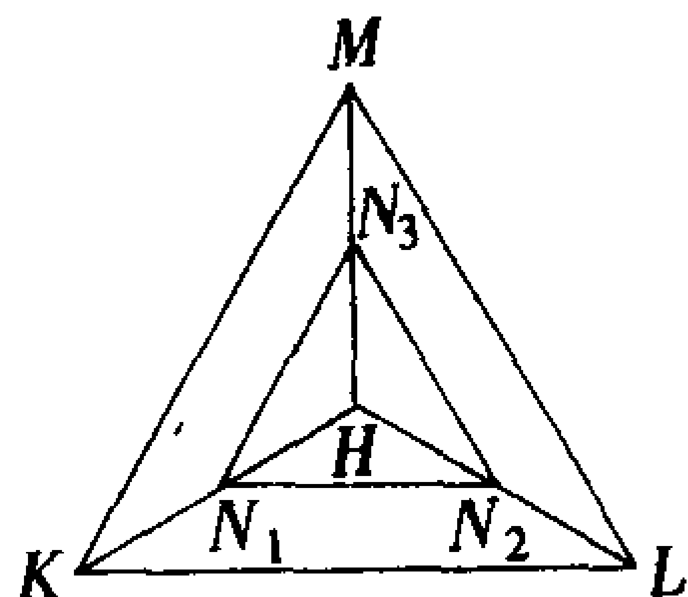
我们证明:H 也是$\triangle N_1N_2N_3$ 的内心.

由于 $HX=HY=HZ$(均为内切球半径),则直角$\triangle D_1HX$、$\triangle D_1HY$、$\triangle D_1HZ$ 相互全等.

于是又可推出$\triangle D_1HX_1$、$\triangle D_1HY_1$、$\triangle D_1HZ_1$ 相互全等,因而 $HX_1=HY_1=HZ_1$,即 H 也是$\triangle N_1N_2N_3$ 的内心.

设 $\angle MKL=\theta$，$\angle KLM=\varphi$，$\angle LKM=\psi$，则

$\angle MHL=180^\circ-\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}=90^\circ+\frac{\theta}{2}$.



同理，如果$\angle N_3N_1N_2=\theta_1$，

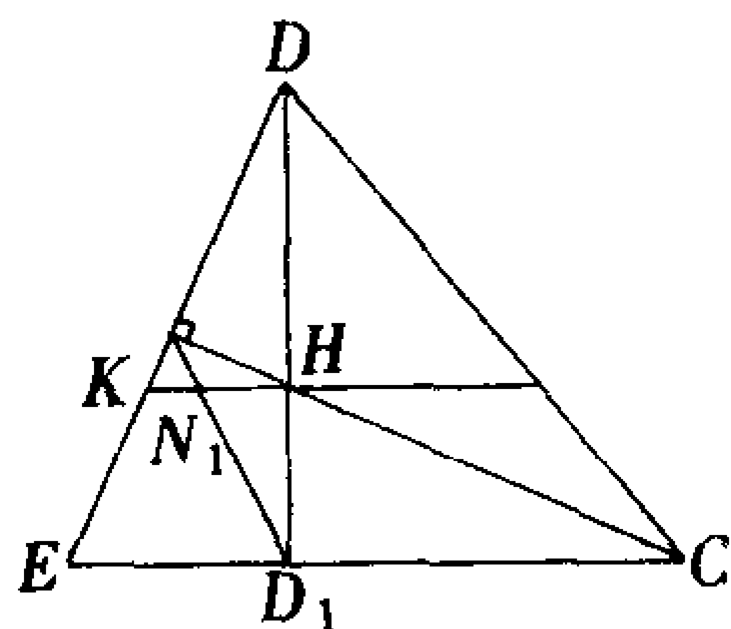
则 $\angle N_3HN_2=90^\circ+\frac{\theta_1}{2}=\angle MHL$.

于是 $\theta_1=\theta$.

于是 $N_1N_2/\!/KL$.

同理 $N_2N_3/\!/LM$，$N_3N_1/\!/KM$.

从而 $\frac{KN_1}{N_1H}=\frac{L_2N}{N_2H}=\frac{MN_3}{N_3H}$,



又有 $\frac{KN_1}{N_1H}=\frac{ED_1}{D_1C},\frac{LN_2}{N_2H}=\frac{FD_1}{D_1A}$,

及 $\frac{MN_3}{N_3H}=\frac{GD_1}{D_1B}$.

这表明 $\frac{ED_1}{D_1C}=\frac{FD_1}{D_1A}=\frac{GD_1}{D_1B}$. ①

又由相交弦定理

$ED_1\cdot D_1C=FD_1\cdot D_1A=GD_1\cdot D_1B$ ②

由①,②可得 $ED_1=FD_1=GD_1$,

而$D_1C=D_1A=D_1B$.这说明$\triangle ABC$的内心与外心垂直,所以$\triangle ABC$是正三角形.

同理可证 $\triangle BCD$、$\triangle DCA$、$\triangle ABD$均为正三角形.

因此 四面体$ABCD$是正四面体.

17·67 已知:四面体的内切球切四面于其重心处,试证:这个四面体是正四面体.

(第9届美国数学奥林匹克,1980年)

[证] 如图,设K_1、K_2分别为$\triangle VAB$和$\triangle VBC$的重心.

则K_1和K_2也是内切球切于平面VAB和平面VBC的切点.

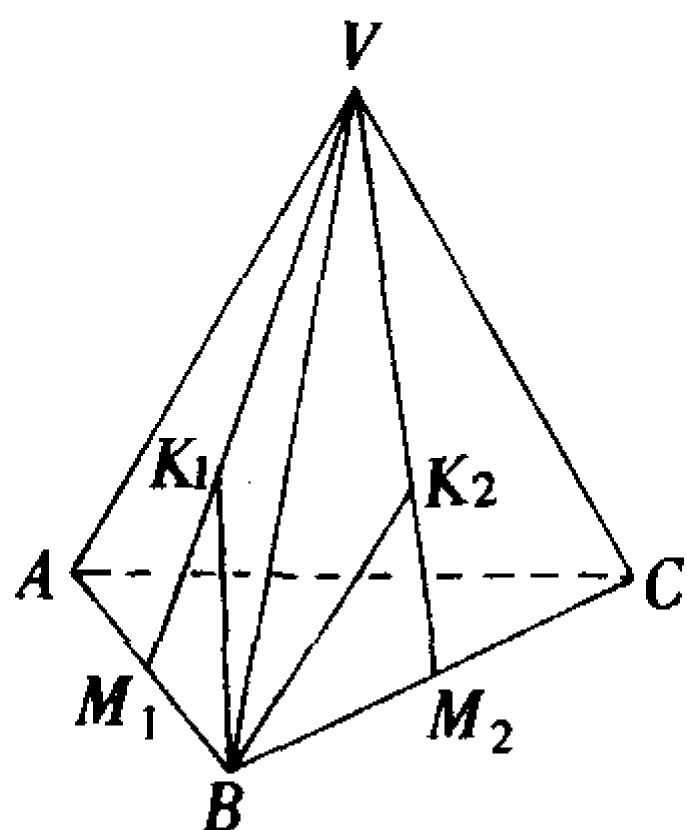
设AB的中点为M_1,BC的中点为M_2,连 $V(K_1)M$、$V(K_2)M$、BK_1、BK_2.

因为由球外一点向球引切线的切线长都相等,所以 $VK_1=VK_2$,

$BK_1=BK_2$.

$\because\quad VB=VB$,

$\therefore\quad \triangle VBK_1\cong\triangle VBK_2$. 有 $\angle BVK_1=\angle BVK_2$.



又由 K_1、K_2 是垂心,所以 $VM_1=\dfrac{3}{2}VK_1=\dfrac{3}{2}VK_2=VM_2$,

$\therefore\quad \triangle BVM_1\cong\triangle BVM_2$, 有 $BM_1=BM_2$,

于是 $AB=BC$.

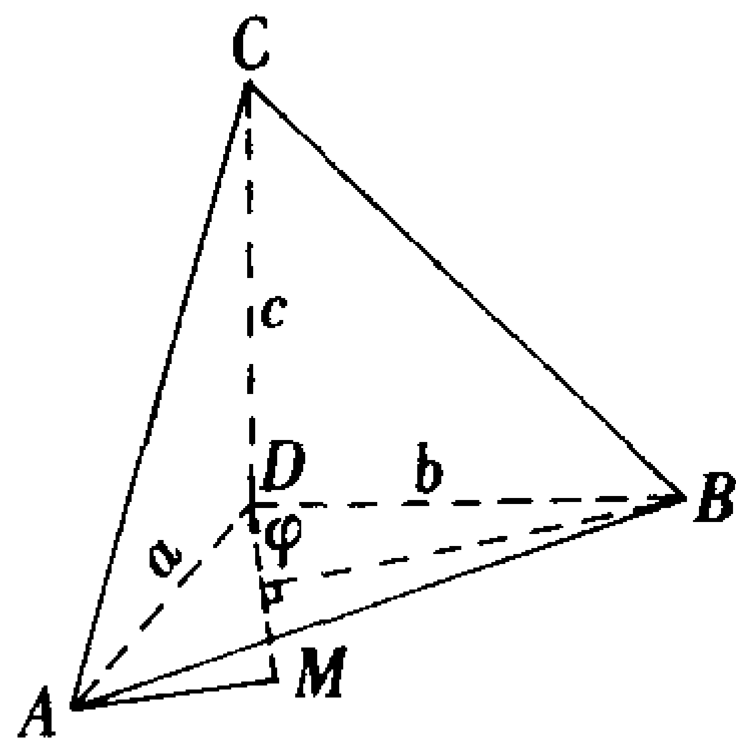
同理可证 $AC=AB$. 即$\triangle ABC$为等边三角形.

同法可证各面都是等边三角形. 因此 $VABC$ 是正四面体.

17·68 在四面体 $ABCD$ 中,棱 AD、BD 和 CD 互相垂直,它们的长分别为 a、b、c. 证明:对$\triangle ABC$ 的一条边上的任意一点 M,从顶点 A、B、C 到直线 DM 的距离之和 S 满足 $S\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$,并确定等式何时成立.

(前民主德国数学奥林匹克,1983 年)

[证] 为确定起见,设点 M 在$\triangle ABC$ 的边 AB 上,且设$\angle MDB=\varphi$.则



$$S=c+a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+b\sin\varphi$$
$$=c+a\cos\varphi+b\sin\varphi.$$

记 $d=a\cos\varphi+b\sin\varphi$,

$$\alpha=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

则 $d=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi-\alpha)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

其中当且仅当 $\varphi=\alpha$, 即

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{AD}{AB}=\cos\angle DAB$$

亦即 $DM\perp AB$ 时,等式成立.

再由柯西不等式可得 $S=c+d\leqslant\sqrt{2(c^2+d^2)}$

其中当且仅当 $\frac{c}{1}=\frac{d}{1}$，即 $c=d$ 时等式成立.

于是可得 $S\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$，当且仅当 DM 是 AB 边上的高且 $CD=AB$ 时等式成立.

17·69 四面体 $ABCD$ 的面 ABC 和 BCD 成 $30°$ 角，$\triangle ABC$ 的面积是 120，$\triangle BCD$ 的面积是 80，且 $BC=10$，求：这个四面体的体积.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

[解] 作 $AO\perp$ 平面 BCD，垂足为 O.

过 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，连 OE. 则 $OE\perp BC$，

于是 $\angle AEO$ 为面 ABC 与面 BCD 所成二角面的平面角.

$\therefore\ \angle AEO=30°$.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE$，

及 $S_{\triangle ABC}=120$，$BC=10$ 得 $AE=24$.

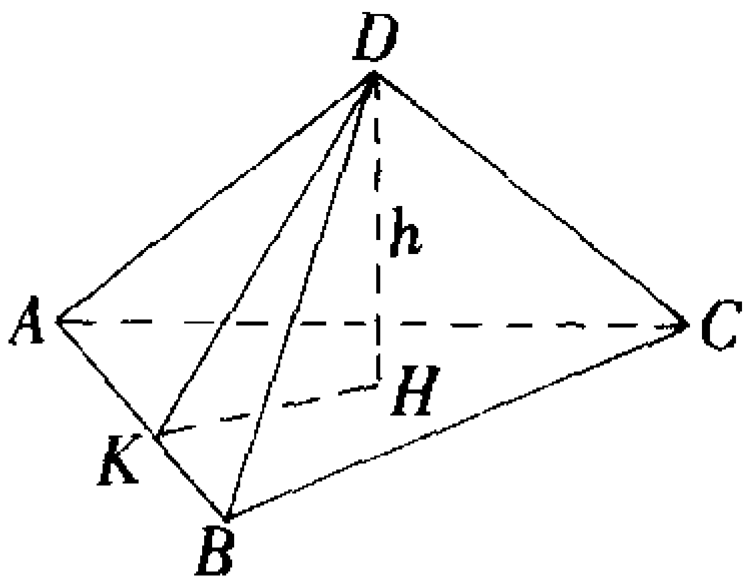
且 $AO=AE\cdot\sin\angle AEO=24\cdot\sin30°=12$.

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\times80\times12=320.$$

所以 这个四面体的体积为 320.

17·70 四面体 $ABCD$ 中，AB 棱长为 3cm，$\triangle ABC$ 的面积为 15cm^2，$\triangle ABD$ 的面积为 12cm^2，这两个面的夹角是 $30°$，求：四面体的体积（以 cm^3 为单位）.

（第 2 届美国数学邀请赛，1984 年）



[解] 设 V 是四面体 $ABCD$ 的体积.

由 D 向底面 ABC 作垂线，垂足为 H，设 $DH=h$.

在平面 ADB 内，过 D 作 $DK\perp AB$ 于 K，连 HK.

由三垂线定理的逆定理可得

$$HK\perp AB.$$

于是$\angle DKH$是平面DAB和平面CAB所成二面角的平面角，于是$\angle DKH=30^\circ$.

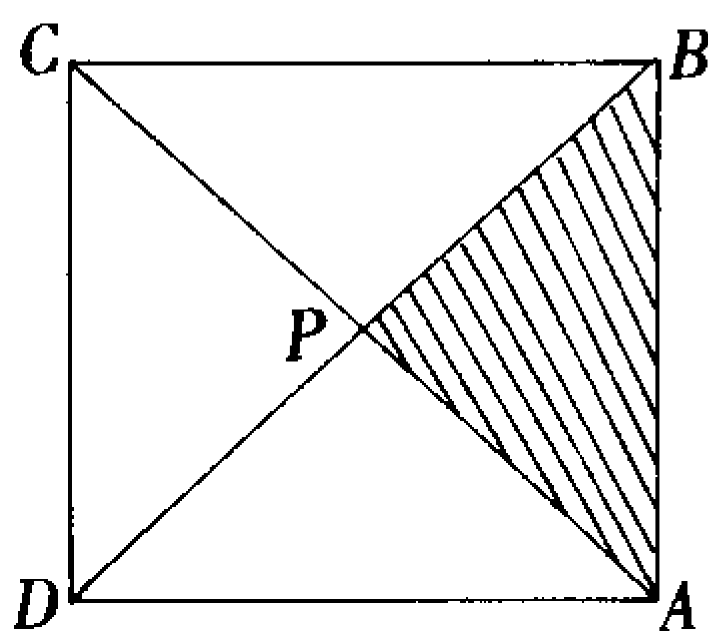
$\therefore\quad S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DK$,

$\therefore\quad DK=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{AB}=8(\text{cm})$.

从而　$h=DK\cdot\sin30^\circ=4(\text{cm})$.

$\therefore\quad V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times15\times4=20(\text{cm}^3)$.

17·71　$ABCD$是矩形，$AB=12\sqrt{3}$，$BC=13\sqrt{3}$，对角线AC、BD相交于P，如果把ABP去掉，边AP、BP重合，构成一个棱锥，它的每个面都是等腰三角形. 求：它的体积.



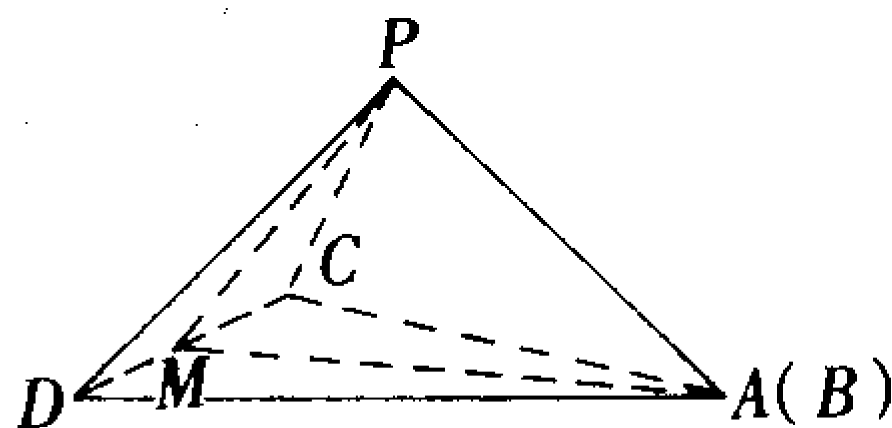
（第8届美国数学邀请赛，1990年）

[解1]　如图，设DC的中点M，连PM、AM.

$\because\quad PD=PC,\ AD=AC$

$\therefore\quad PM\perp DC,\ AM\angle DC$,

故　$DC\perp$平面PMA.



设棱锥的体积为V，则

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle PMA}\cdot MD+\frac{1}{3}S_{\triangle PMA}\cdot MC$$

$$=\frac{1}{3}S_{\triangle PMA}\cdot CD=4\sqrt{3}\cdot S_{\triangle PMA}.$$

下面计算$S_{\triangle PMA}$. 注意到

$$PA=\frac{1}{2}\sqrt{(13\sqrt{3})^2+(12\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{313\times3},$$

$$PM=\frac{1}{2}AD=\frac{13}{2}\sqrt{3},$$

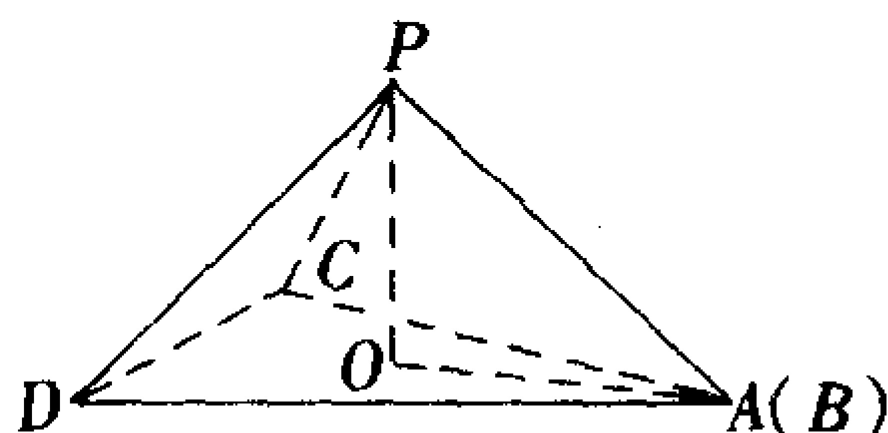
$$AM=\sqrt{(13\sqrt{3})^2-(6\sqrt{3})^2}=\sqrt{133\times3}.$$

又 $\cos\angle PAM=\dfrac{\frac{1}{4}\times 313\times 3+133\times 3-\frac{1}{4}\times 169\times 3}{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{313\times 3}\cdot\sqrt{133\times 3}}=\dfrac{169}{\sqrt{313\times 133}}$,

$$\sin\angle PAM=\sqrt{1-\frac{169^2}{313\times 133}}=\frac{66\sqrt{3}}{\sqrt{313\times 133}},$$

$$\begin{aligned}S_{\triangle PAM}&=\frac{1}{2}PA\cdot AM\cdot\sin\angle PAM\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{313\times 3}\cdot\sqrt{133\times 3}\cdot\frac{66\sqrt{3}}{\sqrt{313\times 133}}\\&=\frac{99}{2}\sqrt{3},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad V=\frac{99}{2}\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=594.$$



［解 2］ 由解 1，$PA=\frac{1}{2}\sqrt{313\times 3}$，$CD$ 上的高为 $\sqrt{133\times 3}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle ACD}&=\frac{1}{2}\times 12\sqrt{3}\times\sqrt{133\times 3}\\&=18\sqrt{133}.\end{aligned}$$

因为三棱锥 $P-ACD$ 的侧棱 $PA=PC=PD$，过 P 作 $PO\perp$ 底面 ACD，垂足为 O，则 O 是 $\triangle ACD$ 的外心.

设 $\triangle ACD$ 的外接圆半径 $AO=R$，则

$$R=\frac{AD\cdot AC\cdot CD}{4S_{\triangle ACD}}=\frac{13^2\times 3\times 12\sqrt{3}}{4\times 18\sqrt{133}}=\frac{169\sqrt{3}}{2\sqrt{133}}.$$

$$PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\times 313\times 3-\frac{169^2\times 3}{4\times 133}}=\frac{99}{\sqrt{133}}.$$

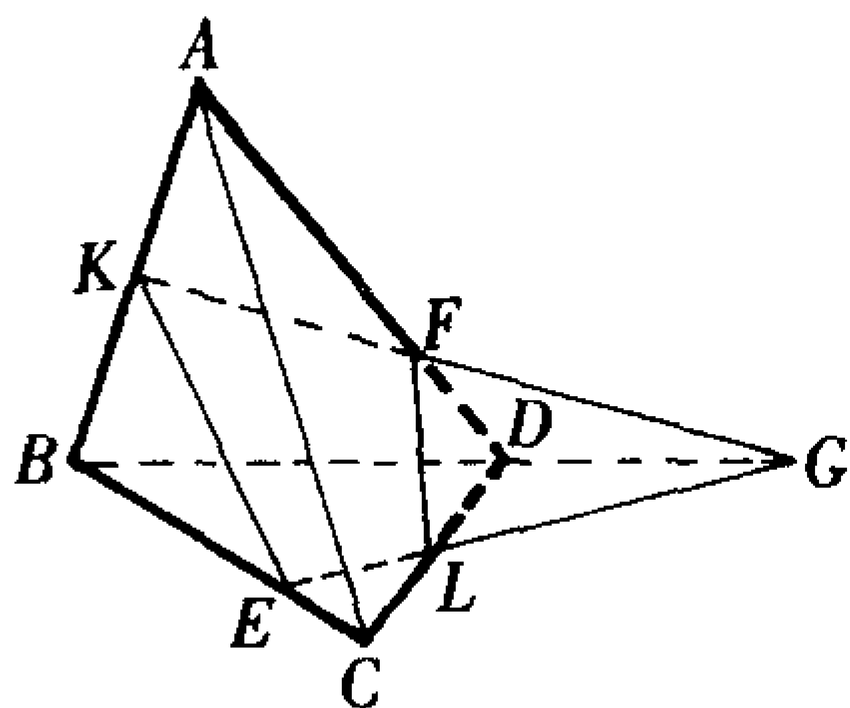
于是，所求棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle AOD}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{133}\cdot\frac{169\sqrt{3}}{2\sqrt{133}}=594.$$

17·72 在四面体 $ABCD$ 中，棱 AB、CD 的中点为 K、L，证明：任一过 KL 的平面将这四面体分为体积相等的两部分.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］ 设平面 KEL 是过 K、L 的任一平面，且该平面交 BC 于 E，交 AD 于 F，交 BD 的延长线于 G.



由于 L 是 CD 的中点，所以 C、D 到平面 KEL 的距离相等，于是

$$V_{C\text{-}KELF}=V_{D\text{-}KELF}. \quad ①$$

设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，则

$$V_{C\text{-}AKF}=\frac{AK\cdot AF}{AB\cdot AD}V=\frac{1}{2}\cdot\frac{AF}{AD}V. \quad ②$$

同理 $$V_{D\text{-}BKE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{BC}V. \quad ③$$

由梅涅劳斯定理有

$$\frac{DG}{GB}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{BK}{KA}=1,$$

且 $$\frac{DG}{GB}\cdot\frac{CL}{LD}\cdot\frac{BE}{EC}=1.$$

又 $$\frac{BK}{KA}=\frac{CL}{LD}=1, \quad \therefore \quad \frac{AF}{FD}=\frac{BE}{EC},$$

故 $$\frac{AF}{AD}=\frac{BE}{BC}. \quad ④$$

由②、③、④得 $$V_{C\text{-}AKF}=V_{D\text{-}BKE}. \quad ⑤$$

将①和⑤相加即得出平面 KEL 平分四面体 $ABCD$ 的体积.

17·73 在正四面体中，过每条棱及其对棱的中点作六个平面，试确定这些平面将四面体分成几个部分？并且当四面体体积为 1 时，求每个部分的体积.

（前民主德国数学奥林匹克，1974 年）

［解］ 由于所作的任意一个平面都包含连接四面体对棱中点的线段之一，所以所有这些平面都通过这些线段的交点，而这个交点是在四面体内部的. 因此，所作的六个平面将整个空间分解成具有公共顶点的多面角.

这表明，这些小四面体的任何一个必定有一个面是属于原四面体的一个面的.

另一方面，原四面体的两个面决不可能成为同一个小四面体的两个面．这是因为它的两个面一定被通过它们的公共棱的平面互相分离．

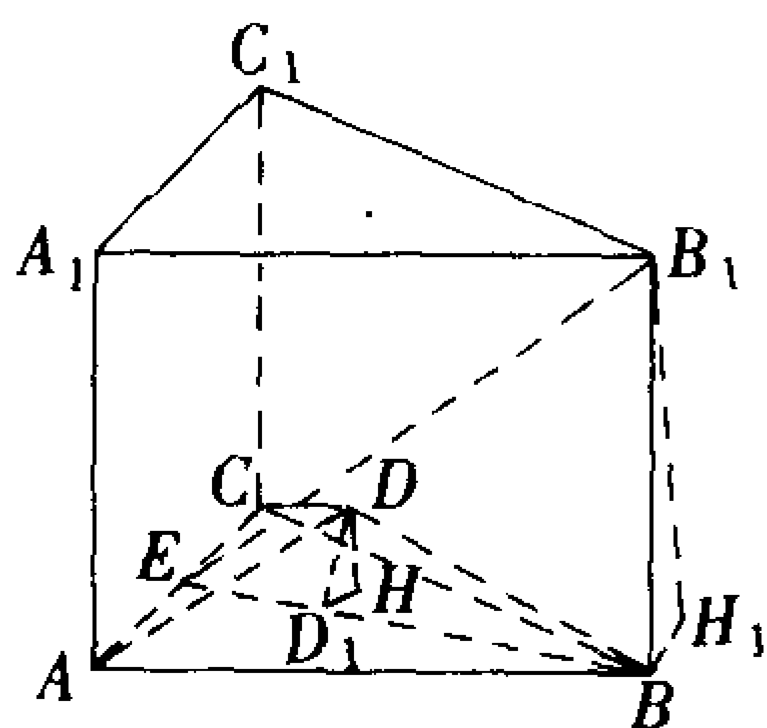
因此，小四面体的个数就等于原四面体表面被分成的块数．

由于原四面体每个面被分成6块（被它的中线所分），整个块数就是$6\times4=24$块．

考虑到关于六个平面中任何一个的对称性，可以得知，所有的小四面体彼此相等，因而每一个的体积都等于$\frac{1}{24}$．

17·74　已知：一个四面体$ABCD$，连结顶点D与底面ABC的重心D_1，过$\triangle ABC$的各顶点作DD_1的平行线，分别与对面相交于A_1、B_1、C_1点．试证：四面体$ABCD$体积的三倍等于四面体$A_1B_1C_1D_1$的体积．如果D_1点是$\triangle ABC$内任一点，结论是否成立．

（第6届国际数学奥林匹克，1964年）



［证］　连BD_1并延长交AC于E，则点E是AC的中点，且满足$\frac{BE}{D_1E}=\frac{3}{1}$．

过E、D_1、D三点作一平面，因为点B在ED_1上，所以B在平面DD_1E上，又因为$BB_1/\!/DD_1$，所以BB_1也在平面DD_1E上．

在平面ED_1D上，直线BB_1与直线ED必定相交，其交点即为BB_1与平面ADC的交点B_1．于是E、D、B_1三点在一条直线上．

在$\triangle EBB_1$中，由$BB_1/\!/DD_1$可得　$\frac{BB_1}{DD_1}=\frac{BE}{D_1E}=\frac{3}{1}$．

即$BB_1=3DD_1$．

同理可得　$AA_1=3DD_1$，$CC_1=3DD_1$．

$\therefore$　$AA_1=BB_1=CC_1=3DD_1$．

因为　$AA_1/\!/BB_1/\!/CC_1/\!/DD_1$，

所以　四边形A_1ABB_1、A_1ACC_1、B_1BCC_1都是平行四边形．

于是平面$A_1B_1C_1/\!/$平面ABC，并且有

$$A_1B_1=AB,\ B_1C_1=BC,C_1A_1=CA.$$

$\therefore$　$\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle ABC$．　①

过 D 作 $DH\perp$ 平面 ABC，垂足为 H，过 B_1 作 $BH_1\perp$ 平面 ABC，垂足为 H_1，则

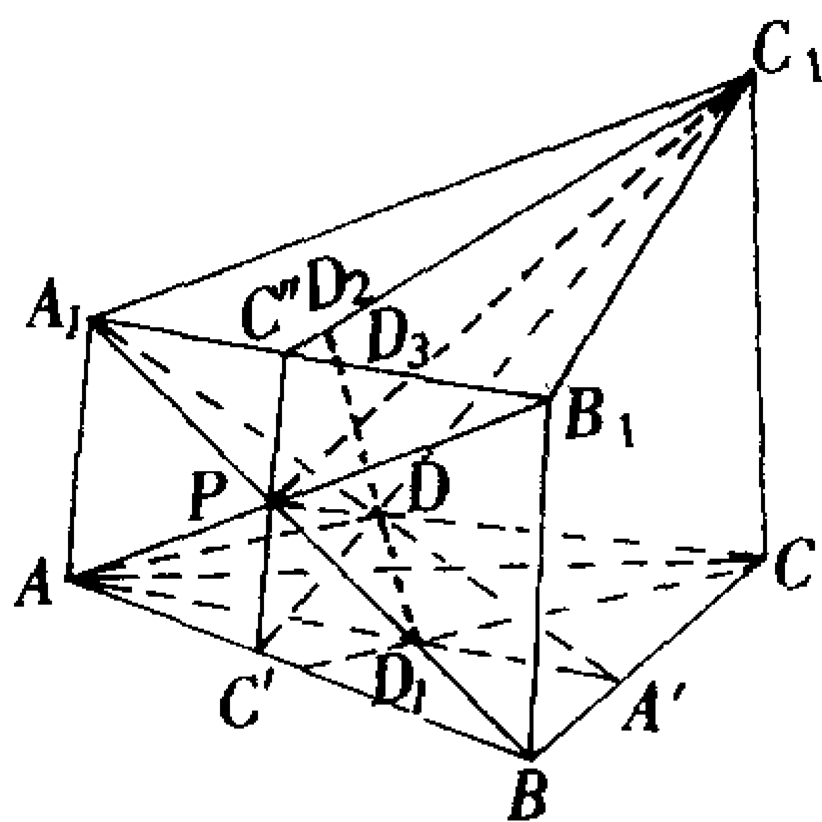
$$\angle BH_1B=\angle D_1HD=90^\circ,\ \angle BB_1H=\angle D_1DH,$$

$$\therefore\quad \triangle BH_1B\backsim\triangle D_1HD,\ 有\quad \frac{B_1H_1}{DH}=\frac{BB_1}{DD_1}=\frac{3}{1}.$$

得 $B_1H_1=3DH.$ ②

由①、②可得 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}.$

下面我们证明：当 D_1 是 $\triangle ABC$ 内任意一点时，上述结论仍然成立.



在平面 ABC 上，连结 AD_1 并延长交 BC 于 A'，连结 CD_1 并延长交 AB 于 C'.

过 A'、D_1、D 作一平面，因为 A 在 $A'D$ 上，且 $AA_1\parallel D_1D$，所以 AA_1 在平面 $A'D_1D$ 上，直线 AA_1 与 $A'D$ 必定相交，其交点也就是直线 AA_1 与平面 BCD 的交点 A_1，于是 A'、D、A_1 三点在一条直线上.

过 C、D_1、D 三点作一平面，因为点 C' 在 CD_1 上，又在 AB 上，所以平面 CD_1D 与平面 ABA_1 必交于过 C' 点的一条直线 $C'P$，设直线 CD 与 $C'P$ 相交于 P，由 $D_1D\parallel A_1A$ 可得 $D_1D\parallel$ 平面 ABA_1，从而有 $C'P\parallel D_1D$.

因为 $BB_1\parallel AA_1\parallel D_1D$，所以 BB_1 在平面 ABA_1 上，直线 BB_1 与 AP 必相交，由于 AP 在平面 ACD 上，所以直线 BB_1 与 AP 的交点也就是 BB_1 与平面 ACD 的交点 B_1，即 A、P、B_1 三点在一条直线上.

同理可证：C'、D、C_1 三点在一条直线上；A_1、P、B_1 三点在一条直线上.

因为 $AA_1\parallel BB_1$，它们都在平面 ABA_1 上，$C'P$ 与 A_1B_1 相交，设交点为 C''.

四边形 A_1ABB_1 是梯形，P 点是对角线 A_1B 和 AB_1 的交点，且 $C'C''\parallel AA_1\parallel BB_1\parallel DD_1$，所以有 $C'P=C''P$.

因为 $C'C''\parallel D_1D\parallel C_1C$，它们都在平面 CD_1D 上，设 $C''C_1$ 与直线 D_1D 相交于点 D_2，PC_1 与 D_1D 相交于点 D_3.

在梯形 $C''C'CC_1$ 中，$D_1D_2 /\!/ C'C'' /\!/ C_1C$，且 $C'P=PC''$. 又 D、D_3 分别是 PC、PC_1 与 D_1D_2 的交点，点 D 还是梯形 $PC'CC_1$ 的对角线的交点，所以有

$$D_1D=D_3D=D_3D_2.$$

$$\therefore\quad D_1D_2=3D_1D.$$

从而可得 $\quad V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}$.

又因为 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ D_1D_2$，所以四面体 $A_1B_1D_1D_2$ 与四面体 ABD_1D_2 有相等的底面积. $S_{\triangle A_1D_1D_2}=S_{\triangle AD_2D_1}$. 又有相等的高（都等于直线 BB_1 和平面 $AD_1D_2A_1$ 间的距离），因此，它们的体积相等，即

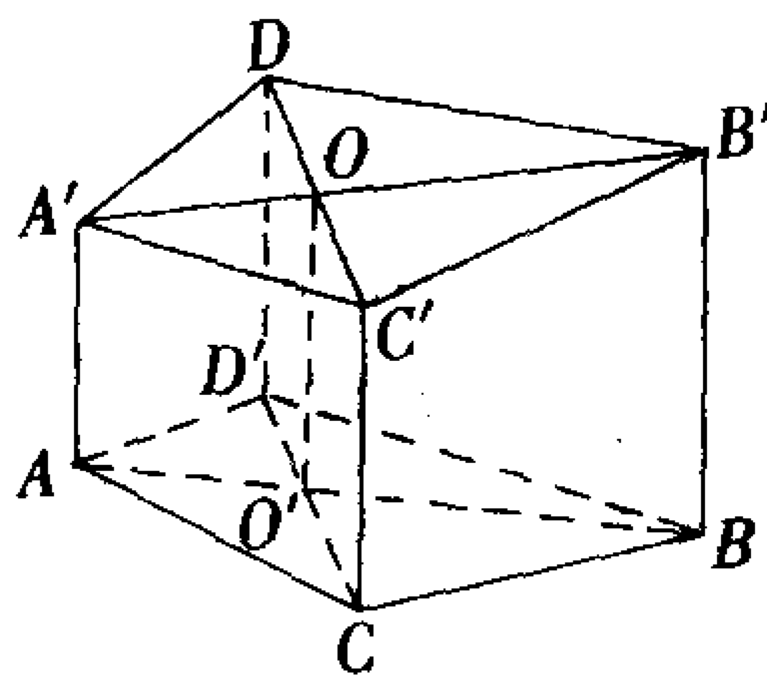
$$V_{A_1B_1D_1D_2}=V_{ABD_1D_2}.$$

同理 $\quad V_{B_1C_1D_1D_2}=V_{BCD_1D_2}.\quad V_{C_1A_1D_1D_2}=V_{CAD_1D_2}.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad V_{A_1B_1C_1D_1}&=V_{A_1B_1D_1D_2}+V_{B_1C_1D_1D_2}+V_{C_1A_1D_1D_2}\\&=V_{ABD_1D_2}+V_{BCD_1D_2}+V_{CAD_1D_2}\\&=V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}.\end{aligned}$$

17·75　设四面体 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的位置是这样的：直线 AA'、BB'、CC'、DD' 相互平行，而 ABC 和 $A'B'C'$ 没有公共点，且顶点 D 和 D' 分别在平面 $A'B'C'$ 和 ABC 上. 求证：这两个四面体体积相等.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1976 年）



［证］　对 $\triangle A'B'C'$ 所在平面上的任意一点 D，$\triangle A'B'C'$ 总有一条边和连接点 D 及与之相对的顶点的直线相交.

为确定起见，设 O 是 $A'B'$ 与直线 $C'D$ 的交点.

过 O 且平行于直线 DD' 的直线交平面 ABC 于点 O'（如图），则由直线 AA'、BB'、CC'、DD'、OO' 的平行性可得，线段 AB 与直线 CD' 交于点 O'.

设直线 OO' 与平面 ABC 之间的交角为 φ，则

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DD'\cdot\sin\varphi$$

$$=\frac{DD'}{OO'}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OO'\cdot\sin\varphi$$

$$=\frac{DD'}{OO'}\cdot V_{ABCO}.$$

同理有 $V_{A'B'C'D'}=\frac{DD'}{OO'}\cdot V_{A'B'C'O'}.$

设 a 是直线 AA' 与 BB' 之间的距离,则

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot OO'\cdot\sin\angle OO'B=\frac{1}{2}a\cdot OO',$$

同理有 $S_{\triangle A'B'O'}=\frac{1}{2}a\cdot OO'.$

设 b 是平面 ABB' 与直线 CC' 的距离,则

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABO}\cdot b=\frac{1}{3}S_{\triangle A'B'O'}\cdot b=V_{A'B'C'D'}.$$

由此可得 $V_{ABCD}=\frac{DD'}{OO'}\cdot V_{ABCO}=\frac{DD'}{OO'}\cdot V_{A'B'C'O'}=V_{A'B'C'D'}.$

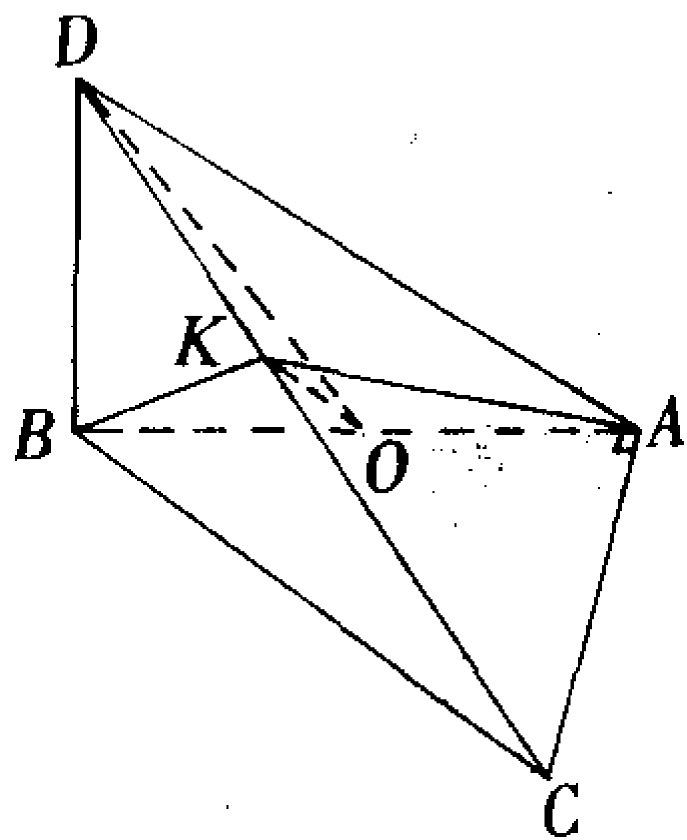
17·76 在四面体 $ABCD$ 中,$AC\neq BD$,$AB\perp AC$,DB 垂直于平面 ABC.若 O 是 AB 的中点,K 是 CD 上一点,且使得 $OK\perp CD$.试证:当且仅当 $2AC\cdot BD=AB^2$ 时,成立 $\frac{V_{OKAC}}{V_{OKBD}}=\frac{AC}{BD}$.其中 V_{OKAC} 表示四面体 V_{OKAC} 的体积,V_{OKBD} 表示四面体 $OKBD$ 的体积.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[证] $\because$ $AO=OB$,

$\therefore$ $V_{OKAC}=\frac{1}{2}V_{ABKC}$,

且 $V_{OKBD}=\frac{1}{3}V_{ABKD}.$



注意到四面体 $ABKC$ 和 $ABKD$ 有公共面 ABK.则

$$\frac{V_{OKAC}}{V_{OKBD}}=\frac{V_{ABKC}}{V_{ABKD}}=\frac{KC}{KD},$$

由勾股定理有

$$KD^2-KC^2=(OD^2-OK^2)-(OC^2-OK^2)=OD^2-OC^2$$

$$=(BD^2+OB^2)-(AC^2+OA^2)$$

$= BD^2 - AC^2$

即 $(KD = KC)(KD + KC) = (BD + AC)(BD - AC)$ ①

同样有 $CD^2 = BD^2 + BC^2 = BD^2 + AB^2 + AC^2$.

(1)若 $2AC \cdot BD = AB^2$,则

$$CD^2 = BD^2 + 2AC \cdot BD + AC^2 = (BD + AC)^2.$$

$\therefore \quad KD + KC = CD = BD + AC,$ ②

于是由①式有 $KD - KC = BD - AC$. ③

由②、③得 $KD = BD$, $KC = AC$. $\therefore \quad \dfrac{V_{OKAC}}{V_{OKBD}} = \dfrac{KC}{KD} = \dfrac{AC}{BD}$.

(2)若 $\dfrac{V_{OKAC}}{V_{OKBD}} = \dfrac{AC}{BD}$, 且 $\dfrac{V_{OKAC}}{V_{OKBD}} = \dfrac{KC}{KD}$ 有 $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{AC}{BD}$.

$\therefore \quad BD^2 - AC^2 = KD^2 - KC^2 = \left(\dfrac{KC}{AC}\right)^2 (BD^2 - AC^2)$.

$\because \quad BD \neq AC$, 则 $BD^2 - AC^2 \neq 0$, $\dfrac{KC}{AC} = 1$, 即 $KC = AC$.

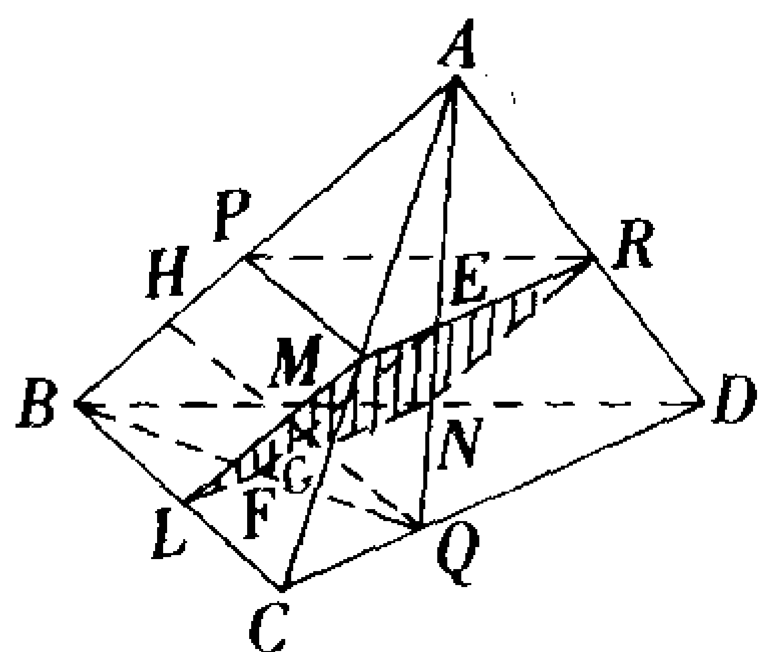
同理有 $KD = BD$.

$\therefore \quad CD = KC + KD = AC + BD,$

故 $AB^2 = CD^2 - AC^2 - BD^2 = 2AC \cdot BD$.

17·77 四面体 $ABCD$ 的棱 AB、CD 的长分别为 a、b,直线 AB、CD 之间的距离等于 d,它们之间的夹角为 ω. 这个四面体被平行于 AB、CD 两棱的平面 Ω 分成两部分,已知:AB 到平面 Ω 的距离与 CD 到平面 Ω 的距离之比等于 k,求:四面体被分成这两部分的体积之比.

(第 7 届国际数学奥林匹克,1965 年)



[**解**] 如图,由于 $AB \parallel$ 平面 Ω,所以有 $AB \parallel ML \parallel RN$,

同理有 $CD \parallel MR \parallel LN$.

因此,平面 Ω 截四面体的截面为 $MLNR$.

设 HQ 为异面直线 AB 与 CD 的公垂线,它与平面 Ω 交于点 G,则 $\dfrac{HG}{GQ} = k$.

过 MR 作平面 $MRP \parallel$ 平面 BCD,其截四面体 $ABCD$ 的截面为 $\triangle MRP$.

由平行线截比例线段定理得

$$\frac{AP}{AB}=\frac{PM}{BC}=\frac{BL}{BC}=\frac{BF}{BQ}=\frac{k}{1+k},$$

且 $\frac{AP}{PB}=k.$

又∵ 平面 MRP // 平面 BCD，

$$\therefore \quad \frac{V_{APMR}}{V_{BCD}}=\frac{PM^3}{BC^3}=\frac{k^3}{(1+k)^3}.$$

故 $$V_{APMR}=\frac{k^3}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

又因为四面体 $APMR$ 与三棱柱 $PMR-BLN$ 有相同的底面 $\triangle PMR$.

设侧棱 AP、PB 对于底面的倾角为 α，则四面体 $APMR$ 的高为 $PB\sin\alpha$，三棱柱 $PMR-BLN$ 的高为 $AP\sin\alpha$，因此

$$\frac{V_{PMR}-BLN}{V_{APMR}}=\frac{PB\sin\alpha}{\frac{1}{3}AP\sin\alpha}=\frac{3PB}{AP}=\frac{3}{k}.$$

$$\therefore \quad V_{三棱柱PMR-BLN}=\frac{3}{k}V_{APMR}=\frac{3}{k}\cdot\frac{k^3}{(1+k)^3}V_{ABCD}$$

$$=\frac{3k^2}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

于是平面 Ω 截四面体 $ABCD$ 所得的两个多面体 $MLNRAB$ 和 $MLNRCD$ 的体积分别为

$$V_1=V_{三棱柱}+V_{APMR}=\frac{k^3+3k^2}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

$$V_2=V_{ABCD}-V_1=\frac{3k+1}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{k(3k^2+3)}{3k+1}.$$

17·78 在六条棱长分别为 2、3、3、4、5、5 的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论.

（中国高中数学联赛，1983 年）

［解］ 最大的体积是$\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

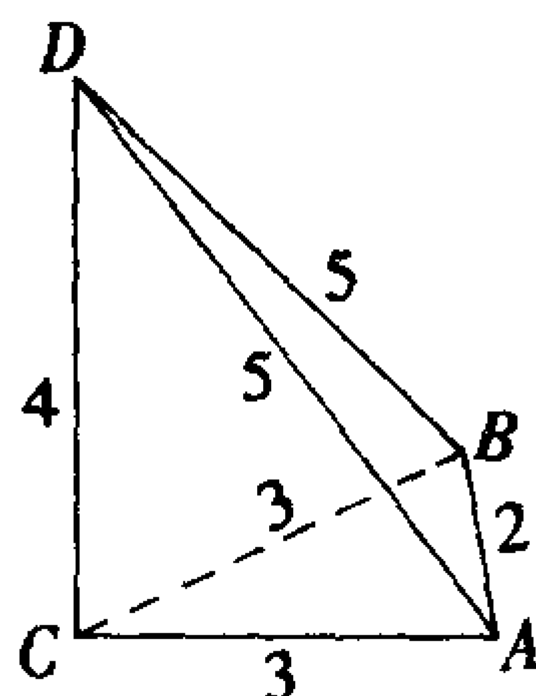
根据三角形两边之差小于第三边这一性质，按题设的数据，所有一边是 2 的三角形，其余两边只可能是：

① 3,3；② 5,5；③ 4,5；④ 3,4.

从而，题设四面体中，以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情形：

(1)①与②；(2)①与③；(3)②与④.

下面就这三种情形分别讨论之：



(1)如右图，$AC=BC=3$，$AD=BD=5$，因 $3^2+4^2=5^2$，

故 $CD\perp AC$，$CD\perp BC$，从而 CD 垂直于平面 ABC.

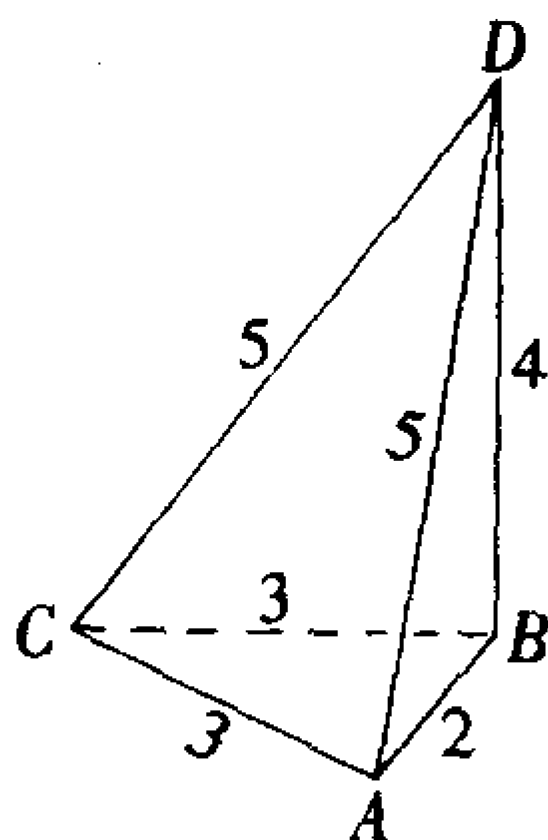
由对称性，这样的四面体只有一个.

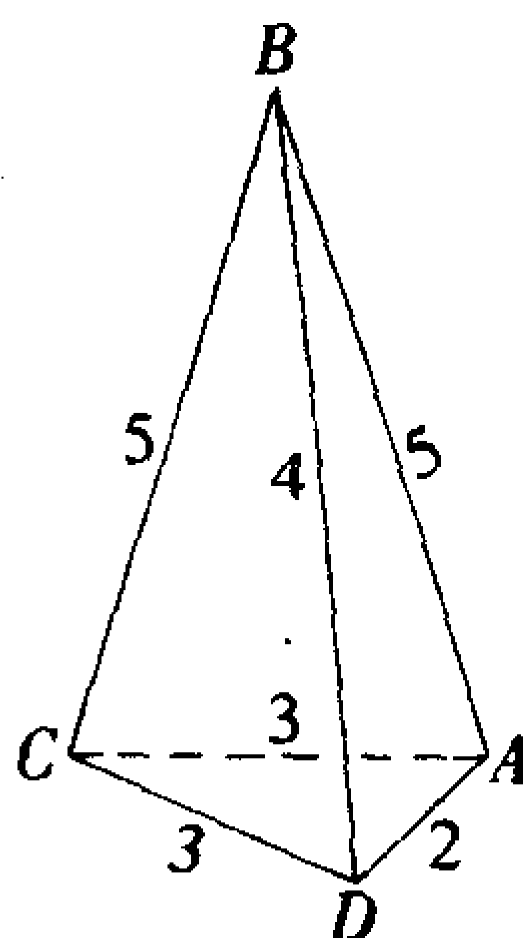
其体积为 $V_1=\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle ABC}$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3^2-1}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

(2)这样的四面体有两个，如下图，易知它们的体积相等，记为 V_2.

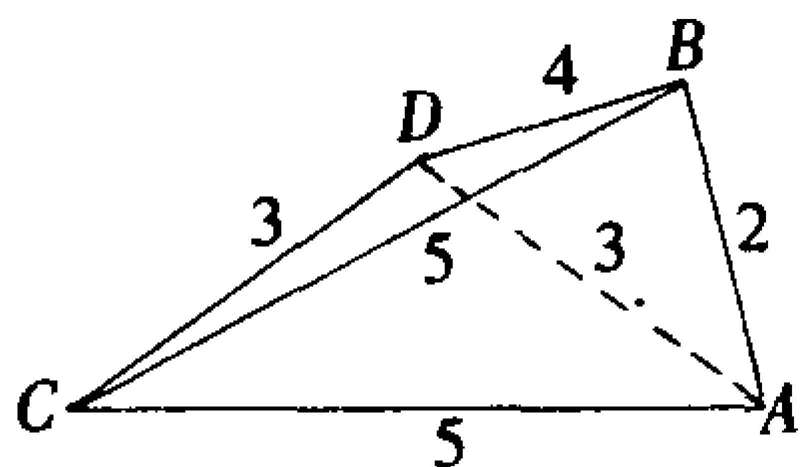
因 $2^2+4^2<5^2$，故$\angle ABD$ 为钝角，即棱 BD 与平面 ABC 斜交，设 D 至底面 ABC 的高为 h_2，则 $h_2<BD=4$.

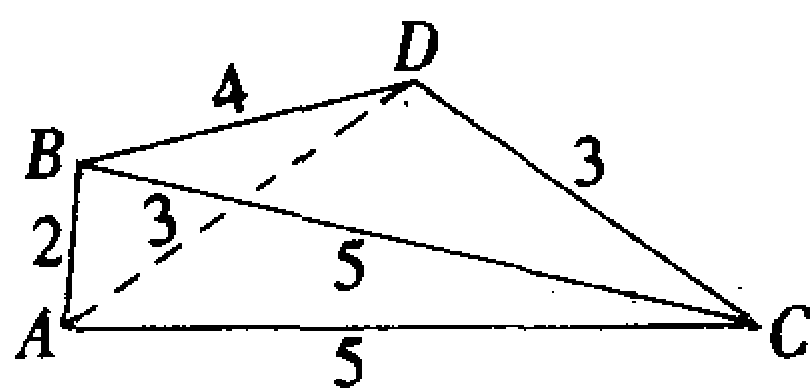




故 $V_2=\frac{1}{3}h_2\cdot S_{\triangle ABC}<\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}=V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

(3)这样的四面体也有两个，如下图，它们的体积也相等，记为 V_3.





因$2^2+5^2>5^2$,故$\angle BAC$为锐角,即棱AB与平面ACD斜交,设B至底面ACD的高为h_3,则$h_3<AB=2$.

$$\text{故}\quad V_3=\frac{1}{3}h_3\cdot S_{\triangle ACD}<\frac{2}{3}S_{\triangle ACD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5}{6}\sqrt{11}.$$

$$\because\quad V_3^2<\frac{275}{36},\ V_1^2<\frac{128}{9}.\quad\therefore\quad V_3<V_1.$$

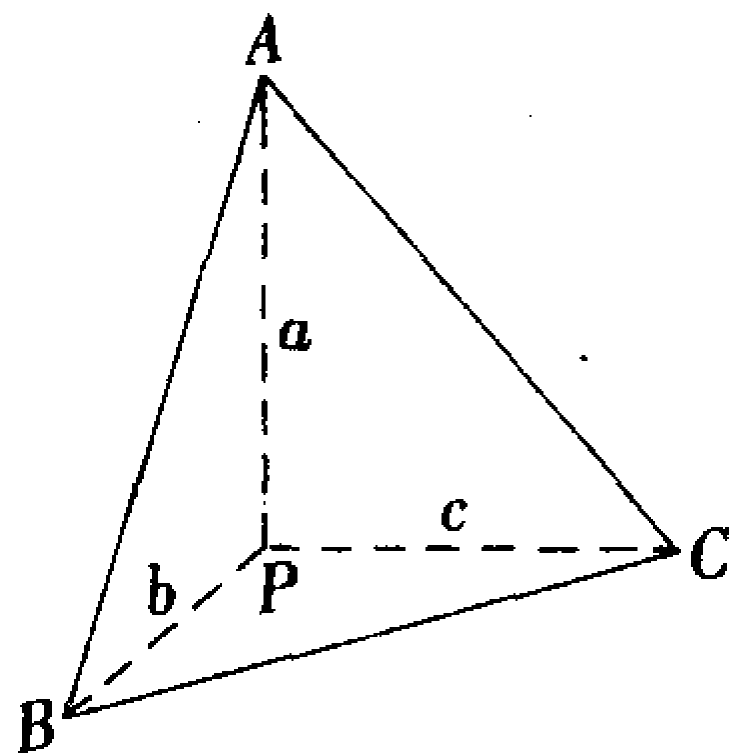
所以，最大的体积为 $V_1=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

17·79　设一个三直角的四面体$PABC$(就是$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$)的六条棱长度的和是$S$,试求(并加以证明)它的最大体积.

(第5届美国数学奥林匹克,1976年)

[解]　设三条互相垂直的棱的棱长为

$$PA=a,\ PB=b,\ PC=c.$$



由题设有

$$S=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$
$$\geqslant a+b+c+\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2bc}\cdot\sqrt{2ca}}$$
$$=3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}$$
$$=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}.$$

当且仅当$a=b=c$时,上面不等式的等号成立.

由于 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=\frac{1}{6}abc$.

$\therefore\quad S\geqslant 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$, 则 $S^3\geqslant 27(1+\sqrt{2})^3\cdot 6V$.

故 $V\leqslant\frac{S^3}{162(1+\sqrt{2})^3}=\frac{(5\sqrt{2}-7)}{162}S^3$.

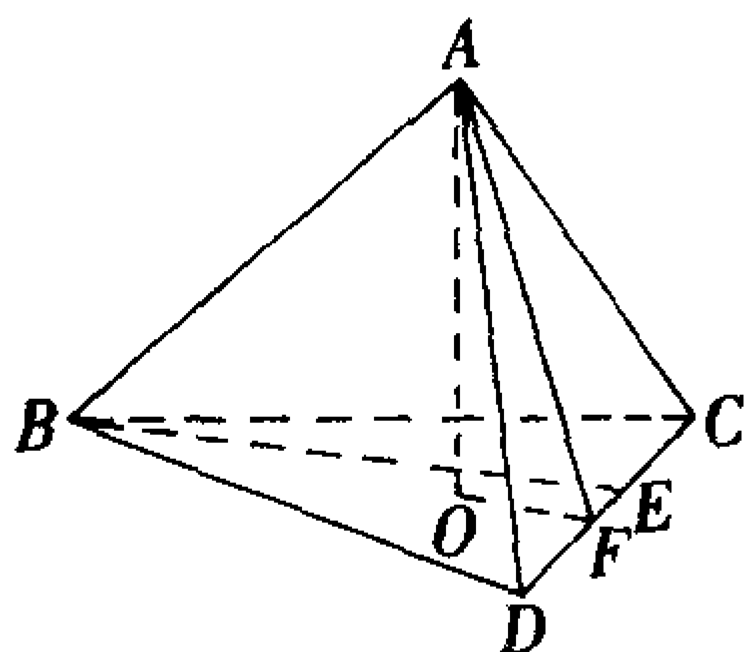
当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

所以 四面体的体积最大值为$\frac{(5\sqrt{2}-7)}{162}S^3$.

17·80 一个四面体,如果有一条且仅有一条棱长大于1,证明:这个四面体的体积不大于$\frac{1}{8}$.

(第9届国际数学奥林匹克,1967年)

[证] 设 AB 是四面体 $ABCD$ 的最大棱,这时$\triangle ACD$ 与$\triangle BCD$ 的各边都不大于1.设 $CD=a\leqslant 1$.



作 $AF\perp CD$ 于 F, $BE\perp CD$ 于 E.

则 CF、DF 中必有一条不小于$\frac{a}{2}$.

不妨设 $CF\geqslant\frac{a}{2}$.于是

$$AF=\sqrt{AC^2-CF^2}\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

同理 DE、CE 中必有一条不小于$\frac{a}{2}$,不妨设 $DE\geqslant\frac{a}{2}$.于是

$$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

过 A 作四面体 $ABCD$ 的高 AO,连 OF,则$\triangle AOF$ 为直角三角形.

显然有 $AO<AF\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$.

这样,四面体 $ABCD$ 的体积 V 有

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot BE\cdot AO$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{24}a(4-a^2)=\frac{1}{24}a(2+a)(2-a).$$

由于 $a\leqslant 1$，则 $a^2\leqslant a$，于是 $a(2+a)\leqslant 3a$.

$$\therefore\quad V\leqslant\frac{1}{24}a(2+a)(2-a)\leqslant\frac{1}{24}\cdot 3a(2-a)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{a+2-a}{2}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

17·81 设 P 是体积为 1 的正四面体 T 内一点. 过 P 点作四个平面分别平行于 T 的四个面,它们把 T 分为 14 个小块. 设 $f(p)$ 是这样一些小块的体积和:这些小块既不是四面体也不是平行六面体(即小块与 T 的某条棱有公共部分,但不包含 T 的顶点)当 P 在 T 内变化时,求 $f(p)$ 的精确的上、下界.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解] 设 P 到四个面的距离为 d_1、d_2、d_3、d_4, h 为正四面体的高,则 $d_1+d_2+d_3+d_4=h$.

记 $x_i=\frac{d_i}{h}, i=1,2,3,4$，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$.

在这 14 个小块中,有 4 个四面体(其体积分别为 x_1^3、x_2^3、x_3^3、x_4^3),有 4 个平行六面体(其体积分别为 $6x_2x_3x_4$、$6x_3x_4x_1$、$6x_4x_1x_2$、$6x_1x_2x_3$). 剩下部分的体积之和为 $f(p)$,则

$$f(p)=1-\sum_{i=1}^{4}x_i^3-6\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k.$$

记 $x_1+x_2=t$，$x_1x_2=u$，$x_3x_4=v$.

适当选择下标使 $t\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^3=(t^3-3tu)+[(1-t)^3-3(1-t)v],$$

且 $\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k=(1-t)u+tv$,

$$\therefore\quad 1-f(p)=1-3t+3t^2+3(2-3t)u+3(3t-1)v.$$

若 $\frac{1}{3}<t\leqslant\frac{2}{3}$，则 $2-3t\geqslant 0$，$3t-1>0$. 从而

$$1-f(p)\geqslant 1-3t+3t^2\geqslant\frac{1}{4}.$$

其中等号在 $t=\frac{1}{2}, u=v=0$, 即 p 是棱的中点时,取得.

若 $0<t\leqslant\frac{1}{3}$, 则 $2-3t>0$, $3t-1\leqslant 0$, $v\leqslant\frac{(1-t)^2}{4}$.

$$\therefore\quad 1-f(p)\geqslant 1-3t+3t^2+\frac{3}{4}(3t-1)(1-t)^2$$

$$=\frac{3}{4}(3t^2-3t+1)t+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}.$$

其中等号在 $t=0$, $u=0$, $v=\frac{(1-t)^2}{4}$,即 P 是棱的中点时取得.

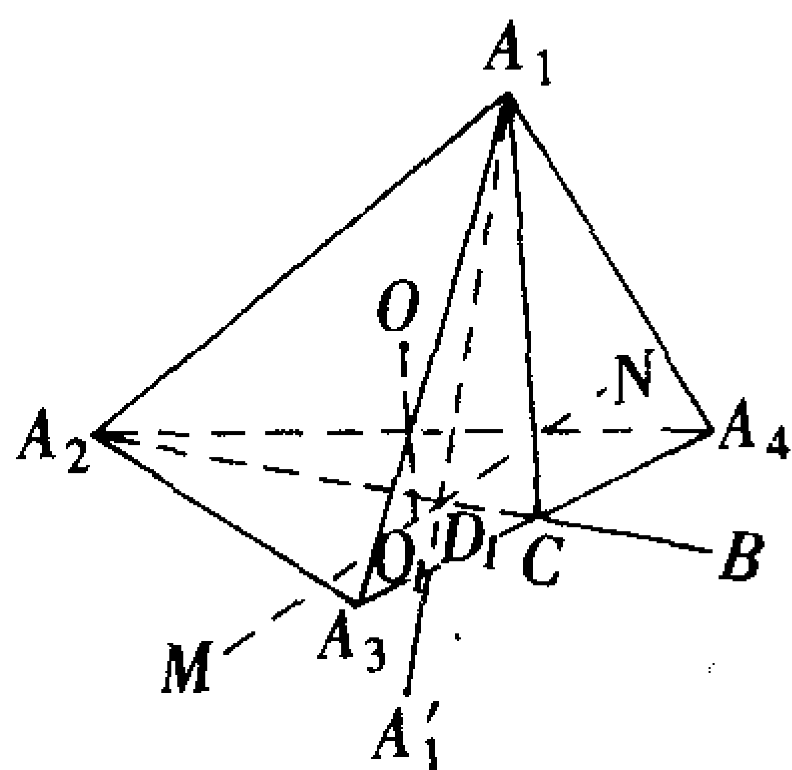
显然,若 P 接近于某个顶点时,$f(p)$接近于 0. 当 P 为某个顶点时,$f(p)=0$,因而

$$0\leqslant f(p)\leqslant\frac{3}{4}.$$

$\frac{3}{4}$和 0 即为 $f(p)$的精确的上、下界.

17·82　四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心为 G,外接球与 GA_1、GA_2、GA_3、GA_4 分别相交于 A'_1、A'_2、A'_3、A'_4. 证明:(1) $GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4\leqslant GA'_1\cdot GA'_2\cdot GA'_3\cdot GA'_4$. (2) $\frac{1}{GA'_1}+\frac{1}{GA'_2}+\frac{1}{GA'_3}+\frac{1}{GA'_4}\leqslant\frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}+\frac{1}{GA_4}$.

(第 36 届国际数学奥林匹克预选题,1995 年)



[证 1]　首先注意四面体的重心 G 在"中线"A_1D_1 上,并将 A_1D_1 分为$\frac{A_1G}{GD_1}=3$(其中 D_1 是$\triangle A_2A_3A_4$ 的重心).

设 $A_1A_2=a$, $A_1A_3=b$, $A_1A_4=c$, $A_2A_3=d$, $A_3A_4=e$, $A_1A_2=f$.

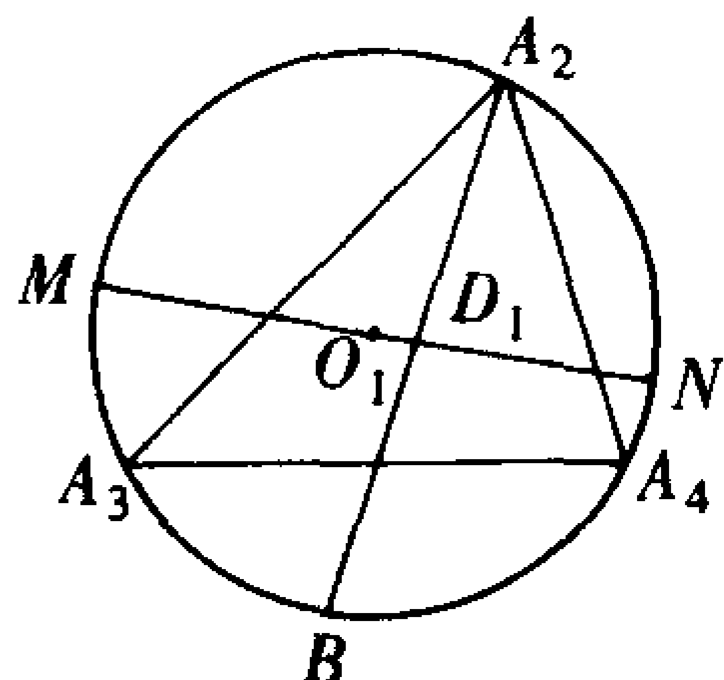
先导出中线公式.

设 A_3A_4 的中点为 C,在$\triangle A_1A_2C$ 中,由 Stewart 定理得

$$A_1A_2^2\cdot D_1C+A_1C^2\cdot A_2D_1=A_1D_1^2\cdot A_2C+A_2C\cdot A_2D_1\cdot D_1C$$

即 $\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}e^2\right)$

$=A_2D_1^2+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}d^2+\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{4}e^2\right)$,



从而中线的平方

$m_1^2=A_1D_1^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{9}(d^2+e^2+f^2)$,

设 A_2D_1 交球于 B，$\triangle A_2A_3A_4$ 的外心为 O_1，外接圆半径为 R_1，O_1D_1 交外接圆于 M,N，又设球心为 O，球半径为 R，则

$$\begin{aligned}D_1A_1\cdot D_1A'_1&=A_2D_1\cdot D_1B=MD_1\cdot D_1N\\&=R_1^2-O_1D_1^2\\&=R^2-OD_1^2.\end{aligned}$$

对四面体 $OA_2A_3A_4$ 应用中线公式

$OD_1^2=R^2-\frac{1}{9}(d^2+e^2+f^2)$,

$D_1A_1\cdot D_1A'_1=\frac{1}{9}(d^2+e^2+f^2)$.

故
$$\begin{aligned}GA'_1&=GD_1+D_1A'_1=\frac{1}{4}m_1+\frac{1}{9}\cdot\frac{(d^2+e^2+f^2)}{m_2}\\&=\frac{1}{36m_1}[4(d^2+e^2+f^2)+9m_1^2]\\&=\frac{1}{12m_1}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\\&=\frac{3}{16m_1}(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)\\&\geqslant\frac{3}{4m_1}\sqrt{m_1m_2m_3m_4}.\end{aligned}$$

$\therefore$
$$\begin{aligned}&GA'_1\cdot GA'_2\cdot GA'_3\cdot GA'_4\\&\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^4m_1m_2m_3m_4\\&=GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4\end{aligned}$$

即(1)成立.

又 $\sum GA'_1=\frac{3}{16}\sum m_1^2\cdot\sum\frac{1}{m_1}\geqslant\frac{3}{64}(\sum m_1)^2\sum\frac{1}{m_1}\geqslant\frac{3}{4}\sum$

$m_1=\sum GA_1$

$\because\quad GA'_1\cdot GA_1=GA'_2\cdot GA_2=GA'_3\cdot GA_3=GA'_4\cdot GA_4$,

$$\therefore\quad \sum\frac{1}{GA}=\frac{1}{GA\cdot GA'}\sum GA'\geqslant\frac{1}{GA\cdot GA'}\sum GA$$
$$=\sum\frac{1}{GA'}.$$

故(2)成立.

[**证 2**]　下面的求和范围均为从 $i=1$ 到 $i=4$.

设 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球的球心 O,半径为 R.

由圆幂定理,有　$GA'_i\cdot GA_i=R^2-OG^2,1\leqslant i\leqslant 4$.

于是所要证明的不等式等价于

$$(R^2-OG^2)^2\geqslant GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4,\qquad ①$$

及　$$(R^2-OG^2)\sum\frac{1}{GA_i}\geqslant\Sigma GA_i,\qquad ②$$

为证明①、②我们证明

$$4(R^2-OG^2)=GaA_i^2\qquad ③$$

用 $\boldsymbol{P}$ 表示点 O 到点 P 的向量,有

$$\sum(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}_i)^2=\sum\boldsymbol{A}_i^2-\sum\boldsymbol{G}^2+2\boldsymbol{G}\sum(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}_i),\qquad ④$$

因为④式的最后一组为 O(由于 G 是重心,对空间任一点 O,皆有 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\sum\overrightarrow{OA_i}$),从而④和③等价.

利用算术-几何平均不等式,由③可得①,

利用柯西不等式　$4\sum GA_i^2\geqslant(\sum GA_i)^2$

及　$\sum GA_i\sum\frac{1}{GA_i}\geqslant 16$

得　$$\frac{1}{4}\sum GA_i^2\sum\frac{1}{GA_i}\geqslant\frac{1}{16}(\sum GA_i)^2\sum\frac{1}{GA_i}$$
$$\geqslant\sum A_i.$$

17·83　求证:对任意四面体的高 h_1、h_2、h_3、h_4,各对棱间的距离 d_1、d_2、d_3,有 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{d_k^2}$.

(波兰数学奥林匹克,1978 年)

[证] 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,用 h_i 表示由顶点 A_i 所引出的高,S_i 为顶点 A_i 所对的那个面的面积;d_1、d_2、d_3 和 θ_1、θ_2、θ_3 分别是 A_2A_3、A_3A_1、A_2A_1 与它们对棱之间的距离和夹角;θ_1、θ_2、θ_3 表示以 A_2A_3、A_3A_1、A_2A_1 与它们的对棱为两条对角线且交角 θ_1、θ_2、θ_3 的三个平行四边形的面积;φ_1、φ_2、φ_3 表示关于棱 A_2A_3、A_1A_3、A_2A_1 的三面角,则四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}h_is_i=\frac{1}{6}A_2A_3\cdot A_1A_4\cdot d_1\cdot\sin\theta_1=\frac{1}{3}d_kQ_k. \qquad ①$$

其中 $i=1,2,3,4,\ k=1,2,3,$

由面积射影定理有

$$S_4=S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3 \qquad ②$$

作一个与棱 A_2A_3 垂直的平面,并且设 a、b、c 分别是棱 A_1A_2、A_2A_4、A_1A_4 在该平面上射影的长.由余弦定理,有

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi_1=c^2.$$

在上式两边同乘以 $\left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2$,有

$$S_4^2+S_1^2-2S_4S_1\cos\varphi_1=Q_1^2 \qquad ③$$

同理 $S_4^2+S_2^2-2S_4S_2\cos\varphi_2=Q_2^2,$ ④

且 $S_4^2+S_3^2-2S_4S_3\cos\varphi_3=Q_3^2.$ ⑤

③+④+⑤,再代入②得

$$\begin{aligned}&Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\\&=3S_4^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_4(S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3)\\&=S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2.\end{aligned}$$

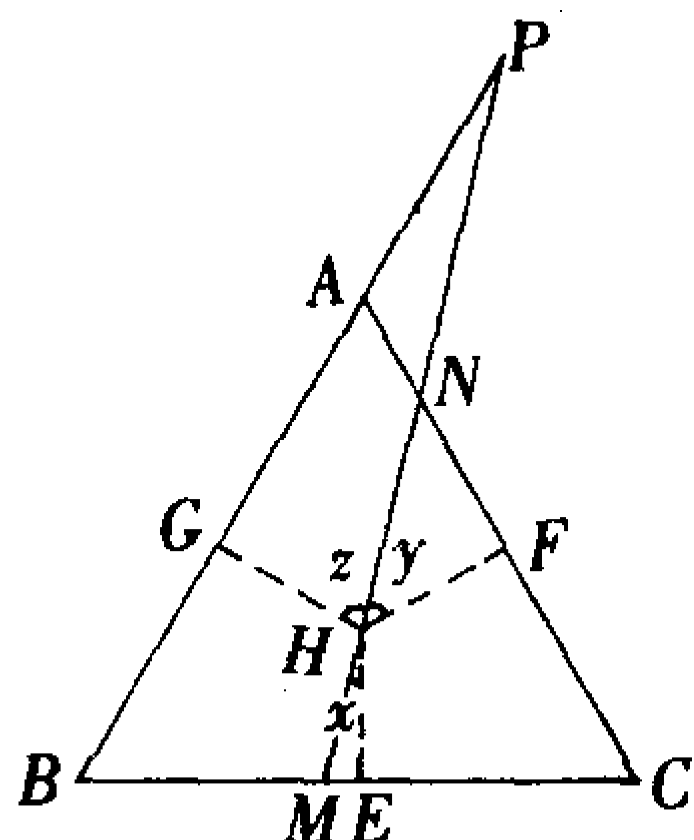
再由①式得

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{d_k^2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{9V^2}=\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{9V^2}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}.$$

17·84 过正四面体的高作一平面,与四面体的三个侧面交于三条直线,这三条直线与四面体底面的夹角为 α、β、γ.求证:$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma=12$.

(波兰数学奥林匹克,1959 年)

[证] 设 H 是正四面体 $ABCD$ 的由顶点 D 所作高的垂足,则 H 是$\triangle ABC$ 的中心.



又设 M、N、P 是通过直线 HD 的平面分别与直线 BC、CA、AB 的交点.

因为 α、β、γ 分别是线段 MD、ND、PD 与它们在平面 ABC 上的射影 MH、NH、PH 间的夹角，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{HD}{MH},\ \operatorname{tg}\beta=\frac{HD}{NH},\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{HD}{PH}. \qquad ①$$

设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，则

$$HD=\sqrt{\frac{2}{3}}a. \qquad ②$$

由①、②可得

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{2}{3}a^2\left(\frac{1}{MH^2}+\frac{1}{NH^2}+\frac{1}{PH^2}\right). \qquad ③$$

过 H 作 $HE\perp BC$ 于 E，$HF\perp AC$ 于 F，$HG\perp AB$ 于 G.

则 $HE=HF=HG=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

设 $\angle MHE=x$，$\angle FHN=y$，$\angle PHG=z$.

$\therefore$ $HM=\frac{\sqrt{3}a}{6\cos x}$，$HN=\frac{\sqrt{3}a}{6\cos y}$，$HP=\frac{\sqrt{3}a}{6\cos z}$.

又$\because$ $x+y=60^\circ$，$y+z=120^\circ$，

$$\therefore \quad \frac{1}{HM^2}+\frac{1}{HN^2}+\frac{1}{HP^2}$$

$$=\frac{12}{a^2}[\cos^2x+\cos^2(60^\circ-x)+\cos^2(60^\circ+x)]$$

$$=\frac{12}{a^2}\cdot\frac{1+\cos2x+1+\cos(120^\circ-2x)+1+\cos(120^\circ+2x)}{2}$$

$$=\frac{12}{a^2}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos2x+\cos120^\circ\cdot\cos2x\right]$$

$$=\frac{12}{a^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{18}{a^2}.$$

将此结果代入③式得

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{18}{a^2}=12.$$

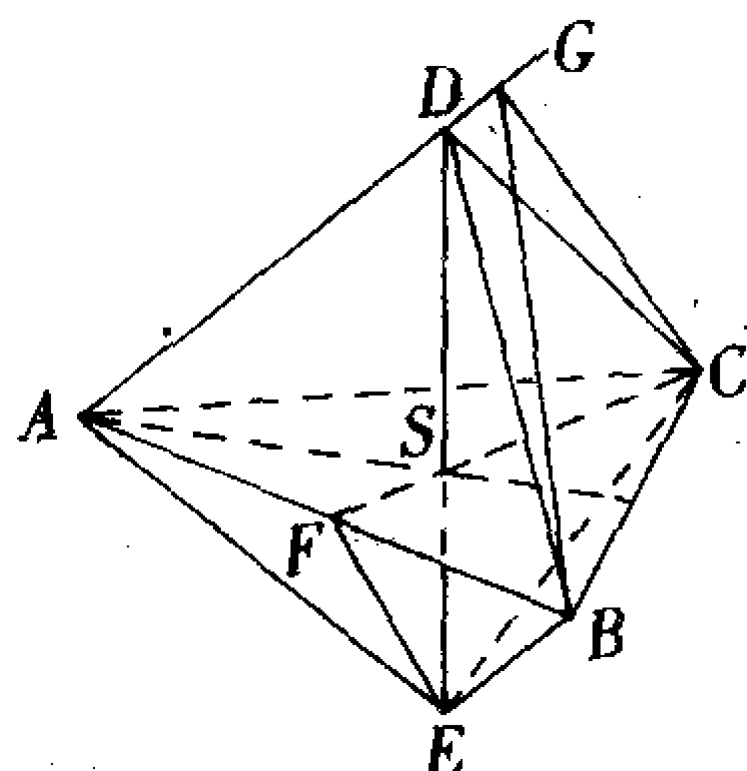
17·85　把两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，在所得到的六面

体中，所有的二面角都相等，而顶点可以分成两类：在第一类顶点中，每一个顶点发出三条棱，而在第二类顶点中，每一个顶点发出四条棱. 试求连接两个第一类顶点的线段长与连接两个第二类顶点的线段长的比.

（匈牙利数学奥林匹克，1964 年）

[解] 设 $ABCD$ 和 $ABCE$ 是两个全等的正三棱锥，它们的公共底面是$\triangle ABC$.

连接 DE，则 $DE\perp$平面 ABC，且垂足为$\triangle ABC$ 的中心 S.



于是所得的六面体既关于平面 ABC 对称，也关于平面 ADE 对称.

由对称性，由顶点 D、E 作棱 AB 的垂线相等，由顶点 B、C 作棱 AD 的垂线相等. 因此，D 和 E 所作棱 AB 的垂线的垂足重合（设为 F），同样，设 B 和 C 向棱 AD 所作垂线的垂足为 G.

于是，$\angle DFE$ 是二面角 $D-AB-E$ 的平面角，$\angle BGC$ 是二面角 $B-AD-C$ 的平面角. 由题设$\angle DFE=\angle BGC$，

$\therefore\quad \triangle DFE\backsim\triangle BGC$. 得 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{DF}{BG}$.

$\because\quad S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DF=\dfrac{1}{2}AD\cdot BG$,

$\therefore\quad \dfrac{DF}{BG}=\dfrac{AD}{AB}$, 即 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$,

又 $BC=AB$, 得 $DE=AD$.

于是$\triangle ADE$ 为等边三角形，又$\triangle ABC$ 是等边三角形，从而$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，即有

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AS}{AH}=\frac{2}{3}.$$

于是所求的线段比即 DE 与 BC 的比为 2:3.

17·86 在平面上给定一锐角$\triangle ABC$. 我们研究所有以给定的三角形为底面. 而侧面为锐角三角形的棱锥. 从棱锥的顶点作三角形 ABC 所在平面的垂线，求：这些垂线垂足的轨迹.

（匈牙利数学奥林匹克，1957 年）

[解] 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，过点 P 作一直线与该平面垂直，并且在这条垂线上取一点 D，使 $\triangle DAB$、$\triangle DBC$、$\triangle DCA$ 都是锐角三角形，我们研究 D 应具备什么条件.

我们先来研究 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle CAD$ 中和 $\triangle ABC$ 有公共边 AB、BC、CA 的角，如 $\angle BAD$.

过顶点 A 作一平面垂直于边 AB，当且仅当顶点 D 与顶点 B 位于这平面的同一侧时，$\angle BAD$ 是锐角

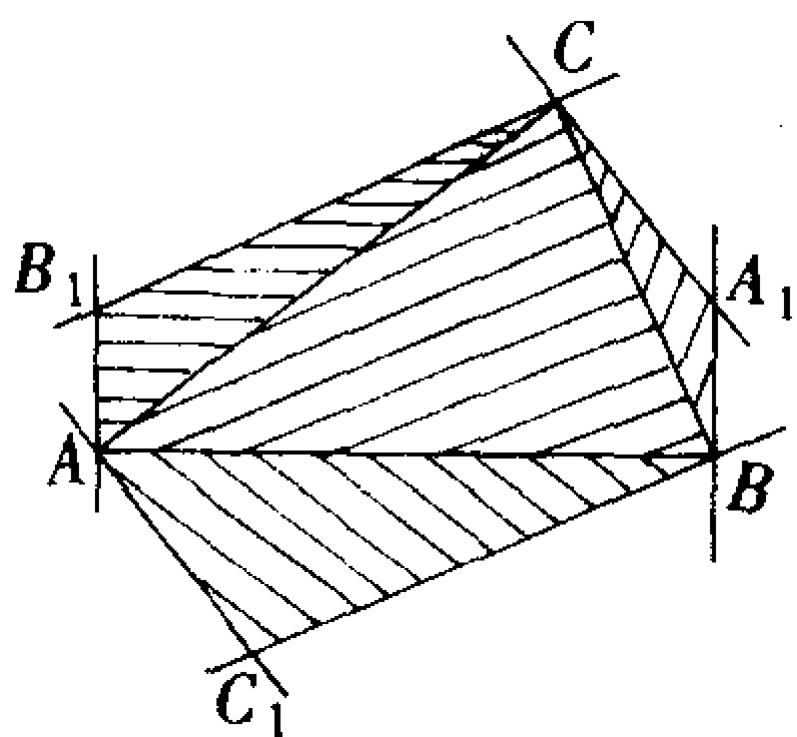
对于过点 P 而垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面的直线来说，这个条件或者对这个垂线上所有的点都满足，或者对它上面的任何一点都不满足. 因为垂直于 $\triangle ABC$ 的平面的直线和垂直于边 AB 的平面是平行的，因此，和 $\triangle ABC$ 的边相连的所有六个角是否为锐角只和点 P 的选取有关，如果这个条件对点 P 是满足的，也就是说，如果每一个角

$$\angle BAP,\ \angle ABP,\ \angle CBP,\ \angle BCP,\ \angle CAP,\ \angle ACP$$

都是锐角. 那么对于通过点 P 而垂直于 $\triangle ABC$ 所在平面的直线上的任何点 D，这个条件将被满足.

其次，我们研究 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle CAD$ 在顶点 D 处的角.

显然，如果平面上的点在以给定的线段为弦，所含的角为锐角的弓形弧上的话，那么这个点对给定线段所张的角为锐角. 因此，对于 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle CAD$ 在顶点 D 处的角来说，仅当顶点 D 到 $\triangle ABC$ 的每一边的中点的距离大于这个边的边长的一半的时候，这些角才是锐角，在通过点 P 且垂直于 $\triangle ABC$ 的平面的直线上，只要使点 D 到 $\triangle ABC$ 的平面的距离大于 $\triangle ABC$ 的最大边长的一半就能满足条件.



于是，我们只要作出 $\angle BAP$、$\angle ABP$、$\angle CBP$、$\angle BCP$、$\angle CAP$、$\angle ACP$ 都是锐角的点 P 的轨迹，便求出了满足本题要求的点的轨迹.

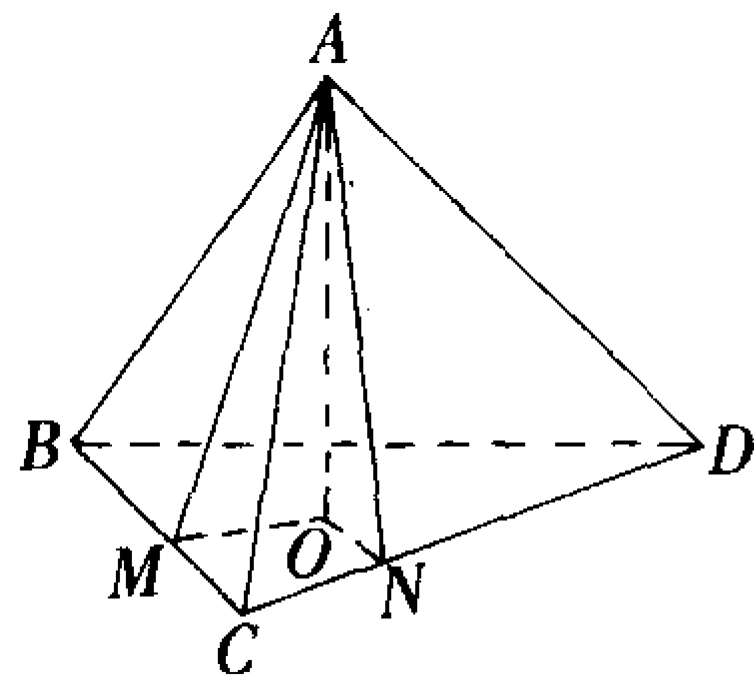
由以上，所求的点的轨迹为下面的图形：过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 分别作 AB、BC、CA 的垂线，这些垂线围成的六边形的内部即为所求的轨迹.

17·87 平面上给出了六条线段 s_1、s_2、s_3、s_4、s_5、s_6，它们分别与四面体 $ABCD$ 的各个棱 AB、AC、AD、BC、BD、CD 相等. 试用圆规和直

尺做出与四面体经过 A 的高相等的线段.

（第 12 届美国数学奥林匹克,1983 年）

分析 在四面体 $ABCD$ 中,作 $AO\perp$ 平面 BCD,垂足为 O,则 AO 为所要求的线段.



作 $OM\perp BC$ 于 M, $ON\perp CD$ 于 N,连 AM、AN.则 $AM\perp BC$、$AN\perp CD$.

由于$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的三边均为已知,则$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 可以作出,于是 CM、CN 可作出,由于$\triangle BCD$ 可以作出,则由 M、N 可作出,O 点也可作出.

因为 OC、AC 为已知,$\triangle AOC$ 为直角三角形,则 AO 可以作出.

[作法] (1)作$\triangle A_1B_1C_1$,使 $A_1B_1=s_1$, $A_1C_1=s_2$, $B_1C_1=s_4$;

(2)作$\triangle A_2C_2D_2$,使 $A_2C_2=s_2$, $A_2D_2=s_3$, $C_2D_2=s_6$;

(3)作 $A_1M_1\perp B_1C_1$ 于 M_1,作 $A_2N_2\perp C_2D_2$ 于 N_2;

(4)作$\triangle B_3C_3D_3$,使 $B_3C_3=s_4$,$B_3D_3=s_5$,$C_3D_3=s_6$;

(5)在直线 B_3C_3 上截 $C_3M_3=C_1M_1$,在直线 C_3D_3 上截 $C_3N_3=C_2N_2$,使 B_3、M_3、C_3 的顺序和 B_1、M_1、C_1 的顺序相同,C_3、N_3、D_3 的顺序与 C_2、N_2、D_2 的顺序相同;

(6)过 M_3 作 B_3C_3 的垂线,过 N_3 作 C_3D_3 的垂线,两条垂线相交于 O_3;

(7)作$\triangle ACO$,使$\angle AOC=90°$,$OC=O_3C_3$,$AC=s_2$,则 AO 即为所求.

图与证明略.

讨论 考虑四组线段

s_1,s_2,s_4; s_1,s_3,s_5;

s_2,s_3,s_6; s_4,s_5,s_6.

当其中任一组的任一线段大于或等于同组中其他二线段之和时,本题无解,否则本题有一解.

17·88 $ABCDE$ 是以正方形 $BCDE$ 为底的棱锥,点 F、G、H 分别在 AB、AC、AD 上,且使 $AF=AG=AH$.(1)证明:EF 和 DG 必相交于一点 K,且 BG 和 EH 必相交于一点 L.(2)若 EG 和平面 AKL 相交于 M,证明:$AKML$ 是正方形.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1992 年）

［证］ (1)若 I 是 AE 上的点使得 $AI=AG$，则 $FGHI$ 是相似于 $BCDE$ 的正方形，位似中心是 A 点.

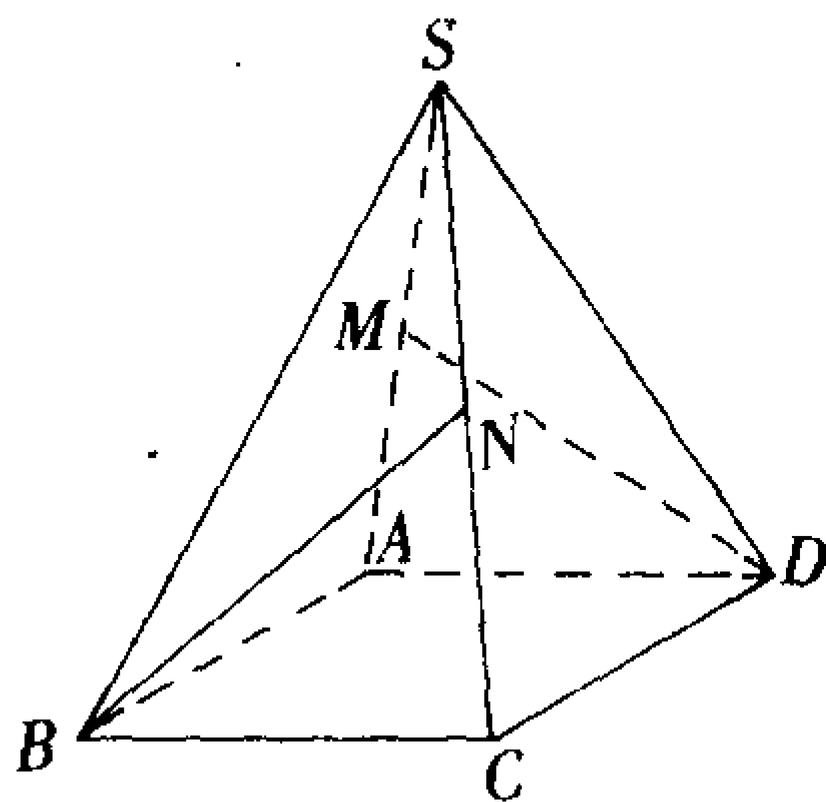
因此 $DEFG$ 是梯形，它的平行边是 $DE/\!/FG$，且 $DE>FG$，从而 DG 和 EF 相交于 K 点.

同理，BG 和 EH 相交于 L 点.

(2)注意到 $FG/\!/DE/\!/BC$，则

$$\frac{KF}{KE}=\frac{FG}{DE}=\frac{FG}{BC}=\frac{AG}{AC}=\frac{AI}{AE},$$

因此 $AK/\!/FI$，且 $\dfrac{AK}{FI}=\dfrac{AE}{IE}$.



同理 $AL/\!/HI$，且 $\dfrac{AL}{HI}=\dfrac{AE}{AI}$.

从而 $\triangle FHI$ 与 $\triangle KLA$ 位似，位似中心是 E 点. 而 $FGHI$ 与 $AKML$ 相似.

因为 $FGHI$ 是正方形，所以 $AKML$ 是正方形.

17·89 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面正方形 $ABCD$ 的边长为 a，侧棱 $SA=SB=SC=SD=2a$，M 为棱 SA 的中点，N 为棱 SC 的中点. 求：异面直线 DM 与 BN 所夹角的余弦值.

（中国北京市数学竞赛，1998 年）

［解］ 延长 BN 到 P，使 $BN=NP$；延长 DM 到 Q 使 $DM=MQ$. 则 $BCPS$、$ADSQ$ 都是平行四边形.

$\therefore\quad SP \underline{/\!/} BC \underline{/\!/} AD \underline{/\!/} QS$.

$\therefore\quad Q$、S、P 三点共线，因而 $PQ=2BC=2AD$.

$\because\quad AB=BC=CD=DA=a$，$SA=SB=SC=SD=2a$，

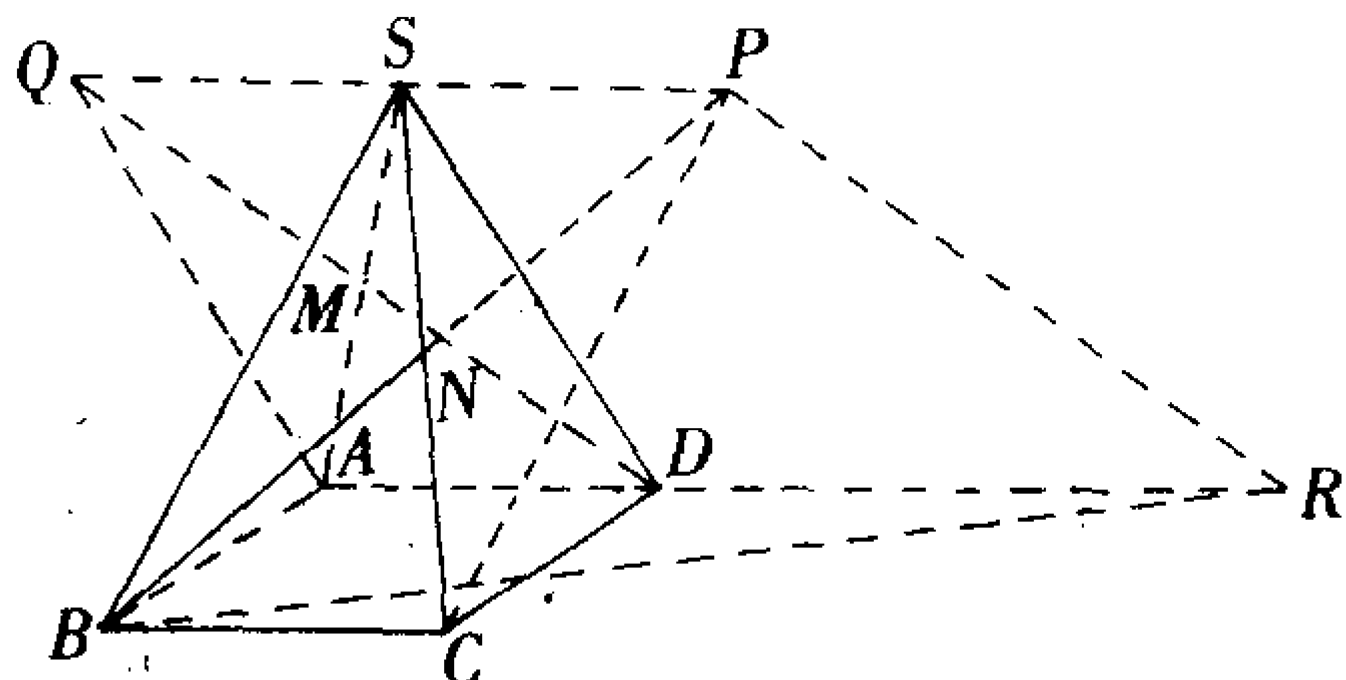
$\therefore\quad PQ=2a$.

过 P 作 QD 的平行线交 AD 的延长线于 R，则 $QPRD$ 为平行四边形. 有

$PR=QD$，且 $DR=PQ=2a$.

$\therefore\quad AR=3a$.

又 $\angle BPR$ 为异面直线 BN、DM 所夹的角.



在□$BCPS$ 中，由

$SC^2+BP^2=2BC^2+2BS^2$,

即 $4a^2+BP^2=2a^2+8a^2$，得 $BP=\sqrt{6}a$.

连 BR，在 Rt$\triangle ABR$ 中，

$$BR^2=AB^2+AR^2=a^2+(3a)^2=10a^2,$$

又 $PR=QD=BP=\sqrt{6}a$，在$\triangle BPR$ 中

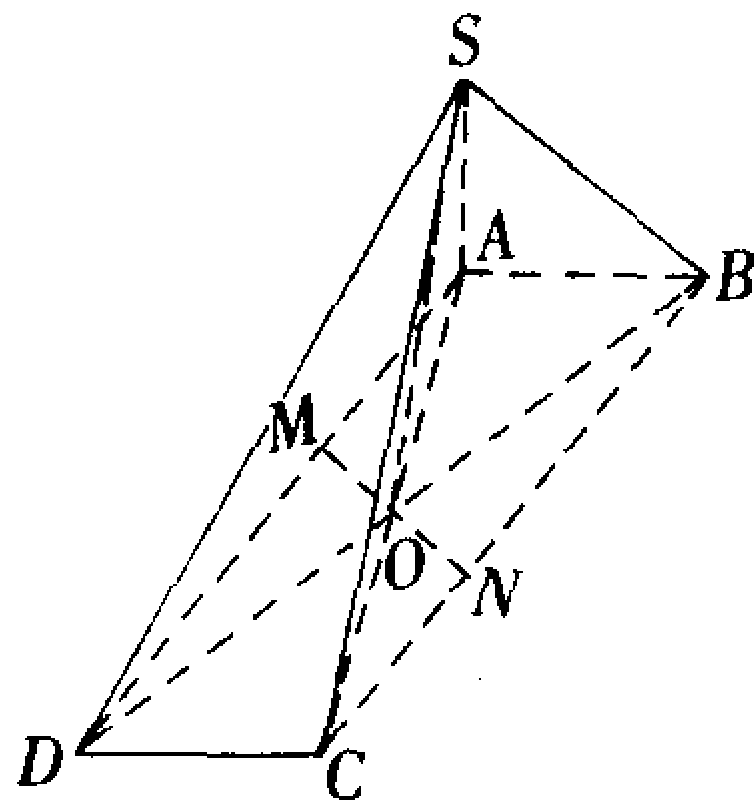
$$\cos\angle BPR=\frac{BP^2+PR^2-BR^2}{2BP\cdot PR}=\frac{6a^2+6a^2-10a^2}{2\cdot\sqrt{6}a\cdot\sqrt{6}a}=\frac{1}{6}.$$

17·90 棱锥 $S-ABCD$ 的底面是中心为 O 的矩形 $ABCD$，$AB=4$，$AD=12$，$SA=3$，$SB=5$，$SO=7$，过顶点 S，底面中心 O 和棱 BC 上的一点 N 作棱锥的截面. 问 BN 为何值时，所得截面$\triangle SMN$ 的面积取得最小值？这个截面$\triangle SMN$ 的面积的最小值是多少？

（中国北京市高中数学竞赛，1996 年）

[**解**] 由 $SA=3$，$AB=4$，$SB=5$，

得 $SA\perp AB$，



由 $AB=4$，$BC=7$，得 $AO=2\sqrt{10}$，

由 $SO=7$，$SA=3$，$AO=2\sqrt{10}$ 得 $SA\perp AO$，

$\therefore$ $SA\perp$底面 $ABCD$.

又 $DA\perp$平面 SAB，$CB\perp$平面 SAB.

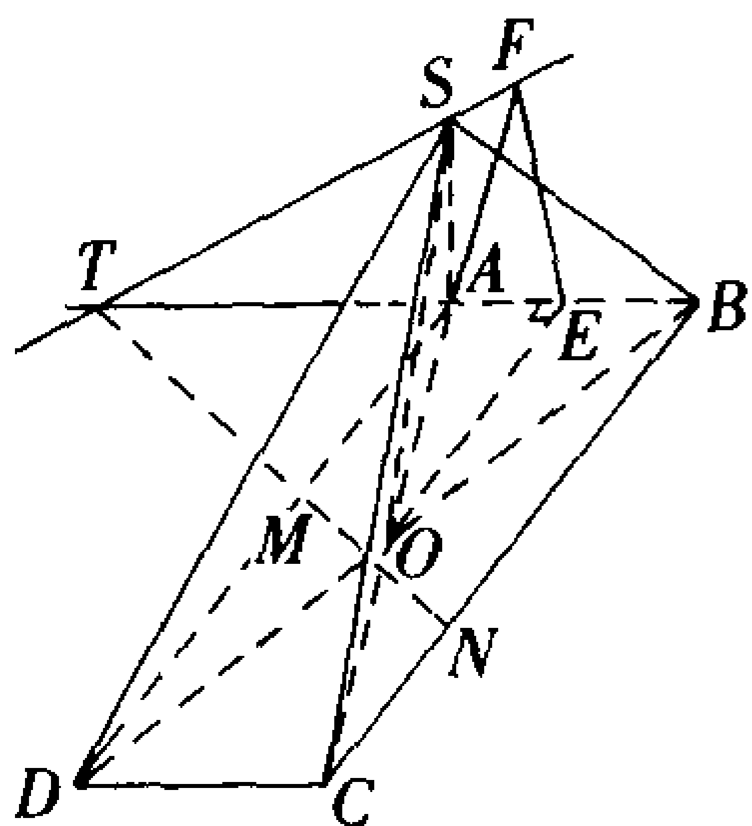
$\therefore$ $\triangle SMN$ 在平面 SAB 上的射影是$\triangle SAB$.

$\therefore$ $S_{\triangle SAB}=S_{\triangle SMN}\cdot\cos\alpha$.

其中 α 是平面 SAB 与平面 SMN 的二面角.

由于 $S_{\triangle SAB}$为定值，所以只要使 $\cos\alpha$ 最大，即可以使 $S_{\triangle SMN}$最小.

设直线 NM 交直线 AB 于 T，则 ST 为平面 SMN 与平面 SAB 的交线.



过 O 作 $OE\perp AB$ 于 E，则 $OE\perp$ 平面 SAB，

作 $EF\perp ST$ 于 F，连 AF，则 $\angle AFE$ 即为平面 SAB 与 SMN 的二面角，$\angle AFE=\alpha$.

又由于 $OS>OF$，OE 为定值，则当 $OS\perp ST$ 时，α 最小，从而 $\cos\alpha$ 最大，我们计算这时的 $\cos\alpha$ 的值.

设 $BN=x$，则 $AM=12-x$.

又 $AE=2$，则 $SE=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

由 $SE^2=AE\cdot ET$，设 $AT=y$，得 $13=2(2+y)$，有 $y=\dfrac{9}{2}$.

故 $TB=\dfrac{9}{2}+4=\dfrac{17}{2}$.

再由 $\triangle TAM\backsim\triangle TBN$ 得 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{TA}{TB}$，

则 $\dfrac{12-x}{x}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{17}{2}}$，$x=\dfrac{102}{13}$，即 $BN=\dfrac{102}{13}$.

又 $\cos\alpha=\dfrac{SE}{OS}=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$，$S_{\triangle SAB}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$，

于是由 $S_{\triangle SAB}=S_{\triangle SMN}\cdot\cos\alpha$ 得 $S_{\triangle SMN}=\dfrac{42\sqrt{13}}{13}$.

即 $BN=\dfrac{102}{13}$ 时，截面 $\triangle SMN$ 面积最小，最小值为 $\dfrac{42\sqrt{13}}{13}$.

17·91 棱锥 $S-ABCDE$ 的底面是正五边形 $ABCDE$，棱锥的高 SM 的垂足 M 位于五边形 $ABCDE$ 的内部. 今知四面体 $SMAB$、$SMBC$、$SMCD$ 的外接球的半径相等，能否断言 $S-ABCDE$ 是正棱锥？

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

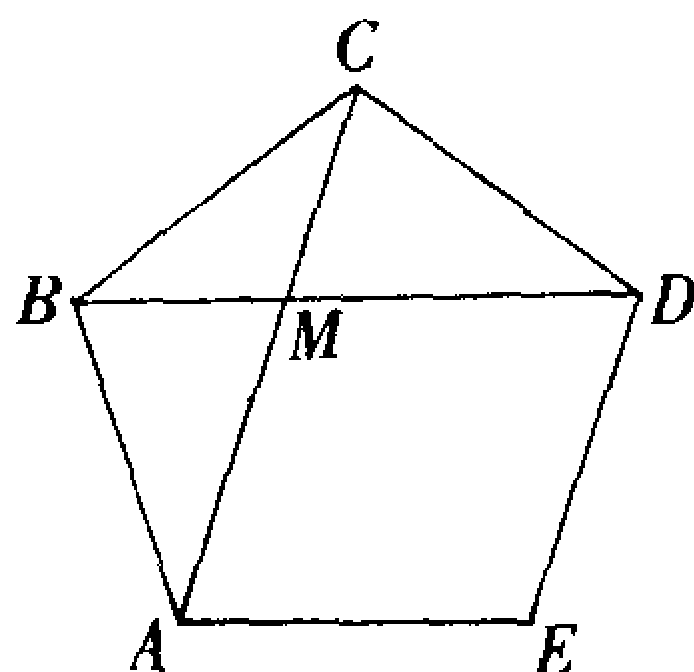
[解] $S-ABCDE$ 是正棱锥的断言不一定成立.

我们可以举一个反例.

设 M 是正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AC 和 BD 的交点.

四面体 $SMAB$、$SMBC$、$SMCD$ 的外接球的球心应位于线段 SM 的

中位面上.所以这些球心到棱锥底面 $ABCDE$ 的距离相等,这些球心在底面的射影分别是 $\triangle MAB$、$\triangle MBC$ 和 $\triangle MCD$ 的外接圆圆心.



用正弦定理不难证明:这三个三角形的外接圆半径相等,所以上述外接球的半径也相等.

因此,过 AC 和 BD 的交点 M 作底面 $ABCDE$ 的垂线,在该垂线上选一点 S,则五棱锥 $S-ABCDE$ 符合题目条件,但不是正棱锥.

17·92 求证:如果在一个侧棱相等的棱锥中,任意相邻的侧面构成的二面角相等,并且底面是边数为奇数的多边形,则这个多边形是正多边形.

(匈牙利数学奥林匹克,1979 年)

[证] 设该棱锥为 $S-A_1A_2\cdots A_n$.

由 $SA_1=SA_2=\cdots=SA_n$ 可知,S 在底面上的射影 O 是多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆圆心.

由于对每个 $k=1,2,\cdots,n$,棱锥 SOA_kA_{k+1}关于棱 SO 的二面角的平分平面是对称的,其中 $A_{n+1}=A_1$,所以它们关于棱 SA_k 与 SA_{k+1}的二面角等于同一数值 φ_k,这是因为

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi_2+\varphi_3=\cdots=\varphi_{n-1}+\varphi_n=\varphi_n+\varphi_1,$$

及 n 是奇数,所以

$$\varphi_1=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=\varphi_2=\cdots=\varphi_{n-1}.$$

由此可得,所有的棱锥 SOA_kA_{k+1} 都是全等的,并且所有的角 $\angle A_kOA_{k+1}$也是相等的,因而多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正多边形.

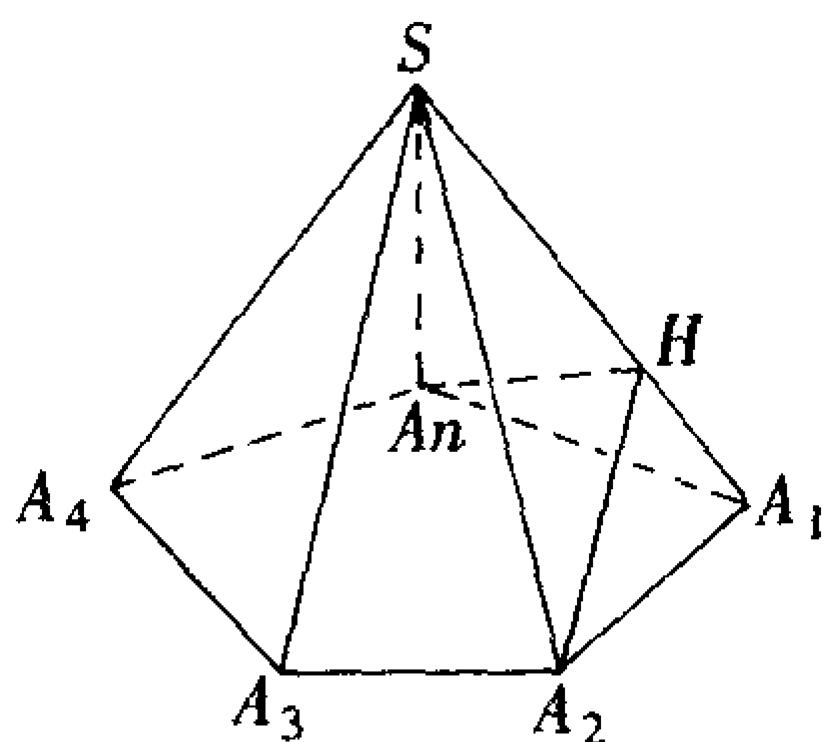
17·93 在正 n 棱锥中,相邻两侧面所成的二面角的取值范围是什么?

(中国高中数学竞赛,1994 年)

[解] 如图,设正 n 棱锥为 $S-A_1A_2\cdots A_n$ 不妨设底面正 n 边形固定,顶点 S 运动,相邻两侧面所成二面角的平面角为$\angle A_2HA_n$,

当 S 向下运动逼近极端位置(即到底面正 n 边形的中心)时,$\angle A_2HA_n$ 趋于平角;

当 S 向上运动,趋向无穷远处,则正 n 棱锥趋近于正 n 棱柱,$\angle A_2HA_n$ 趋于



$$\angle A_2A_1A_n=\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

故 $\frac{n-2}{n}\pi<\angle A_2HA_n<\pi$.

故取值范围为$\left(\frac{n-2}{n}\pi,\pi\right)$.

17·94 分别用 S 和 V 表示一个正 n 棱锥的表面积与体积.(1)对给定的 n 与S,求:V 的最大值.(2)当 $n=4,S=144,V=64$ 时,求:底面正 n 边形的边长与正 n 棱锥的高.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1958 年)

[解] 记 Q 为正 n 棱锥的底面积,h 为它的高,x 为底面与侧面所成二面角的余弦,a 为底边的长,r 为底面内切圆的半径,则有

$$a=2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},\quad Q=nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

$$h=r\operatorname{tg}(\arccos x)=r\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{x}.\ S=Q+\frac{Q}{x}.$$

$$\therefore\quad Q=\frac{xS}{x+1},$$

且 $r=\sqrt{\frac{Q}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}=\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}}$,

故 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{xS'}{x+1}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}f(x)\qquad(*)$$

其中 $f(x)=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}$.

由于 S 与 n 是给定的常数,则为求 V 的最大值,只需求 $f(x)$的最大值.

为此,设 $u=f(x)$, 则 $u^2=\frac{x-x^2}{1+2x+x^2}$

即 $(u^2+1)x^2+(2u^2-1)x+u^2=0$,

因为 x 是实数,则有

$\Delta=(2u^2-1)^2-4u^2(u^2+1)\geqslant 0$, 即 $u^2\geqslant\frac{1}{8}$,

由 $u>0$ 可得 $u\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当且仅当 $x=\frac{1}{3}$ 时, $u=f(x)$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

于是所求体积最大值为 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}$

将 $n=4, S=144, V=64$ 代入(*)式得

$$64=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{144^3}}{\sqrt{4\operatorname{tg}45^\circ}}\cdot\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}$$

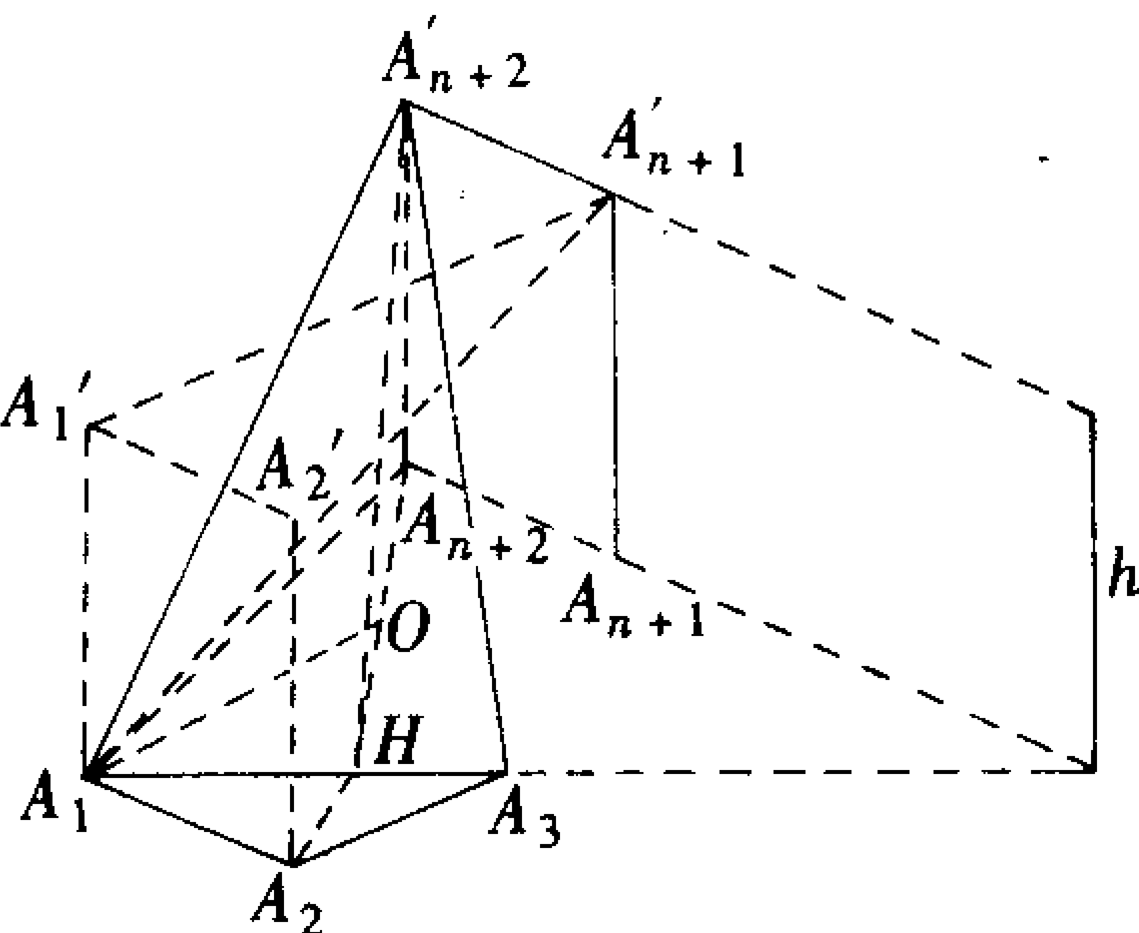
则 $\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}=\frac{2}{9}$, 得 $x_1=\frac{1}{17}$, $x_2=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ $Q_1=8$, $Q_2=64$, 且 $r_1=\sqrt{2}$, $r_2=4$.

故 $\begin{cases}a_1=2\sqrt{2},\\h_1=24\end{cases}$ 及 $\begin{cases}a_2=8,\\h_2=3.\end{cases}$

17·95 求证:对任意大于 1 的自然数 n,在所有其底面外接圆半径为 R 的正 $2n$ 棱柱 $A_1A_2\cdots A_{2n}A'_1A'_2\cdots A'_{2n}$ 中,只有当 $A_1A'_1=2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$ 时,对角线 $A_1A'_{n+1}$ 与平面 $A_1A_3A'_{n+2}$ 所成的角最大.

(保加利亚数学奥林匹克,1982 年)



[证] 设 h 是棱柱的高. 在四面体 $A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$ 中,

$\because$ $A'_{n+1}A'_{n+2}\,/\!/\,A'_1A'_2\,/\!/\,A_1A_2$,

$\therefore$ 对棱 A_1A_3 与 $A'_{n+1}A'_{n+2}$ 之间的角为

$$\angle A_3A_1A_2=\frac{1}{2}\angle A_3OA_2$$
$$=\frac{180^\circ}{2n}.$$

其中 O 是多边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的中心.

棱 A_1A_3 与 $A'_{n+1}A'_{n+2}$ 之间的距离为 h,而它们的长为

$$A_1A_3=2R\sin\frac{180^\circ}{n},\quad A'_{n+1}A'_{n+2}=2R\sin\frac{180^\circ}{2n}.$$

∴ 四面体 $A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$ 的体积为

$$\frac{1}{6}A_1A_3\cdot A'_{n+1}A'_{n+2}\cdot h\sin\frac{180^\circ}{2n}$$
$$=\frac{2}{3}R^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin^2\frac{180^\circ}{2n}.$$

另一方面,如果 φ 是直线 $A_1A'_{n+1}$ 与平面 $A_1A_3A'_{n+2}$ 之间的夹角,则同样有体积

$$\frac{1}{3}S_{A_1A_3A'_{n+2}}\cdot A_1A'_{n+1}\sin\varphi$$

其中 $A_1A'_{n+1}=\sqrt{(A_1A'_1)^2+(A'_1A'_{n+1})^2}=\sqrt{h^2+4R^2}$,

且 $S_{A_1A_3A'_{n+2}}=\frac{1}{2}A_1A_3\cdot A'_{n+2}H$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2+\left(2R\cos^2\frac{180^\circ}{2n}\right)^2}$$

这里 $A'_{n+2}H$ 是 $\triangle A_1A_3A'_{n+2}$ 的高. 于是得到

$$\frac{2}{3}R^2h\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}$$
$$=\frac{1}{3}R\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\sqrt{h^2+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}\sqrt{h^2+4R^2}\sin\varphi.$$

则 $$\sin\varphi=2R\sin^2\frac{180^\circ}{2n}\left(h^2+\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}+4R^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

于是,当不等式

$$h^2+\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}\geqslant 2\sqrt{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}$$

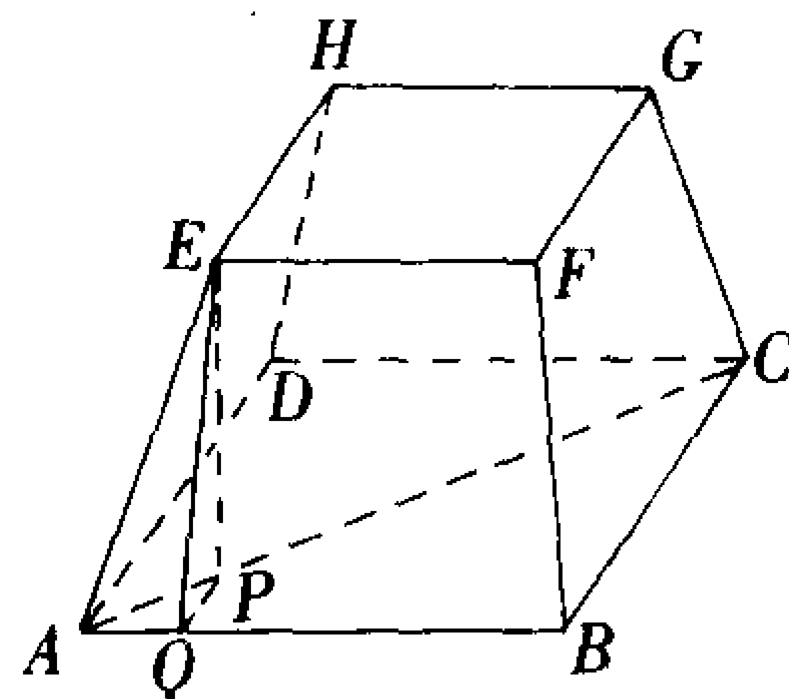
取等号，即 $h^2=\dfrac{16R^4\cos^4\dfrac{180^\circ}{2n}}{h^2}$，亦即 $h=2R\cos\dfrac{180^\circ}{2n}$ 时，$\sin\varphi$ 取得最大值.

(三)棱台、多面体

17·96　设正四棱台的下底面的外接圆半径小于侧面的外接圆半径.试证:沿棱台表面连接棱台的空间对角线的两个端点的路径中,最短的路径只通过棱台的侧面而不经过底面.

（匈牙利数学奥林匹克,1965年）

[证]　设正四棱台的下底为 $ABCD$,上底为 $EFGH$.



我们考察从 A 沿表面到 G 的最短路径.

显然,最短的路径通过棱台的两个相邻的面,有三种可能:

通过一个侧面和一个上底面;通过一个侧面和一个下底面;

通过两个相邻侧面.

棱台侧面 $ABFE$ 是一等腰梯形,其下底 AB 的两个底角大于 45°(上底 EF 的两个底角小于 135°).

事实上,过 E 作 EP 垂直于底面 $ABCD$,垂足 P 在对角线 AC 上,$PQ\perp AB$ 于 Q.

由 $EQ>PQ=AQ$ 可知,$\angle EAQ$ 对直角三角形的大直角边,所以 $\angle EAQ>45^\circ$.

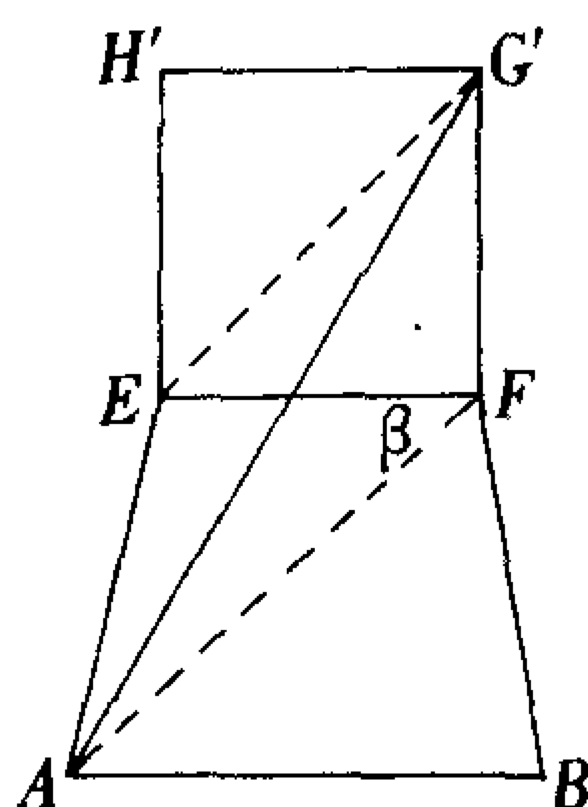
另外由棱台侧面的外接圆半径大于下底面的外接圆的半径,由此可得 $\angle AFB=\alpha<45^\circ$.

下面考察三种相邻侧面的展开图:

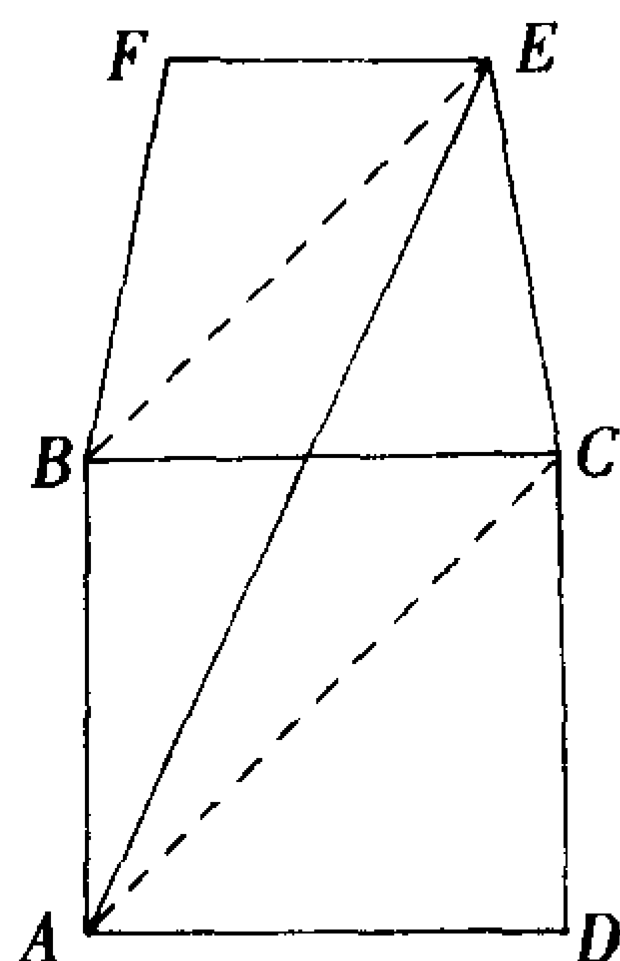
我们的目的是比较 AG'、$A'G$ 和 AG'' 的大小.

显然对图(a)和图(b),由勾股定理易证 $A'G>AG'$.

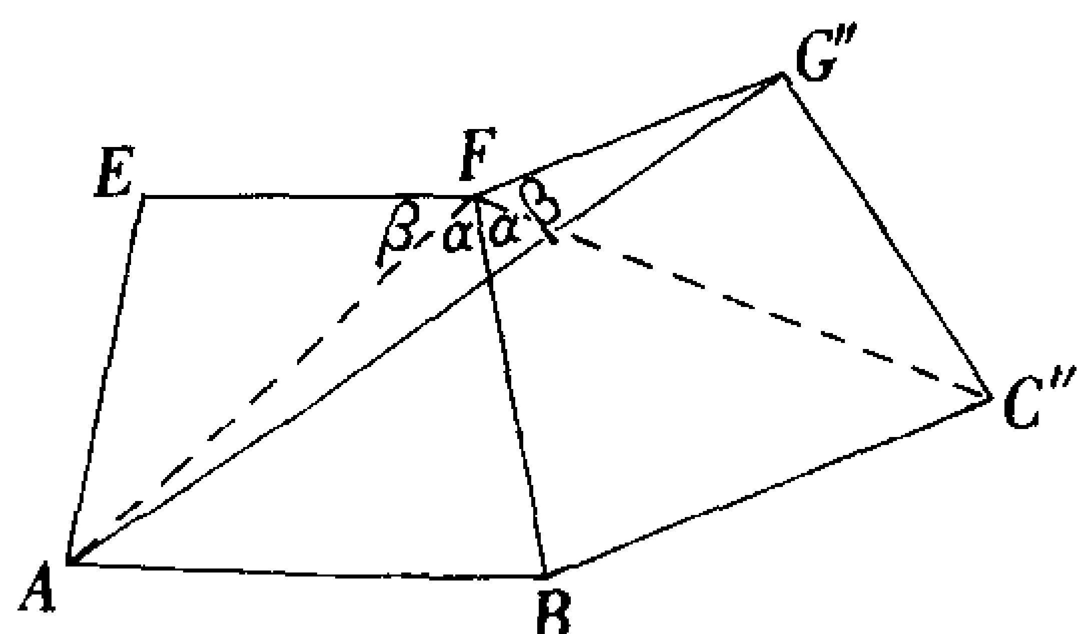
下面证明 $AG'>AG''$.



(a)



(b)



(b)

在 $\triangle AFG'$ 和 $\triangle AFG''$ 中，由 $AF=AF$，$FG'=FG''$，为此只需证明$\angle AFG'>\angle AFG''$即可.

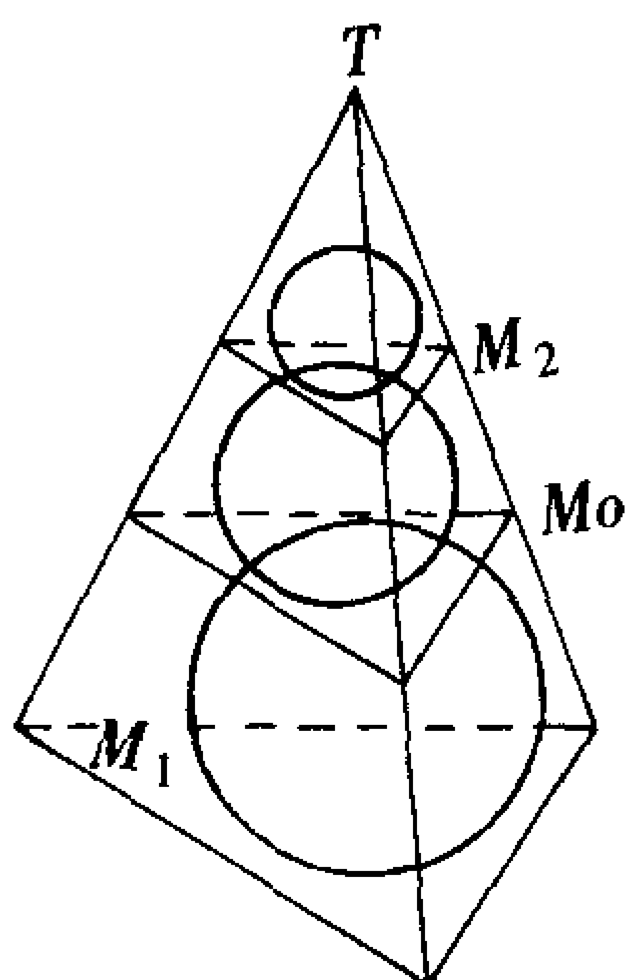
由前面已证 $\alpha<45°$，则 $90°+\beta>2\alpha+\beta$，

即 $\angle AFG'>\angle AFG''$. 于是可得 $AG'>AG''$.

由以上，最短路径只通过棱台的相邻侧面.

17·97 设棱台的底面面积为 S_1 与 S_2，侧面积为 S，证明：如果某个平行于底面的平面将棱台分为两个棱台，使得每个棱台都可内切一个球面，则 $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_l})^2$.

（保加利亚数学奥林匹克，1977 年）



［证］ 设原棱台中较大底面 M_1 的面积为 S_1，较小底面 M_2 的面积为 S_2，由原棱台截出的两个棱台的公共底面 M_0 的面积为 S_0.

延长棱台的侧棱使它们交于点 T，并用 P_1、P_2 和 P_0 分别表示以 T 为顶点，M_1、M_2 和 M_0 为底面的棱锥.

底面 M_1 和 M_0 关于点 T 的位似关系可以转化为棱锥 P_1 与 P_0 的内切球面之间的位似关

系.同样,底面 M_0 与 M_2 的位似关系也可转化为棱锥 P_0 与 P_2 的内切球面之间的位似关系.

因此,在棱锥 P_1、P_2、P_0 的内切球面半径 R_1、R_2、R_0 之间与侧面积 Q_1、Q_2、Q_0 之间分别有如下的比例关系

$$\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_2}{R_0},\quad \frac{Q_2}{Q_1}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

棱锥 P_2 的体积等于 $\frac{1}{3}R_2(Q_2+S_2)$.

由于半径为 R_0 的球面在棱锥 P_2 外面与它相切,所以它又等于

$$\frac{1}{3}R_0(Q_2-S_2).$$

因此 $R_2(Q_2+S_2)=R_0(Q_2-S_2)$.

从而有 $\dfrac{Q_2-S_2}{Q_2+S_2}=\dfrac{R_2}{R_0}=\dfrac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}=\dfrac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}}=\dfrac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}}$.

即 $(Q_2-S_2)\sqrt[4]{S_1}=(Q_2+S_2)\sqrt[4]{S_2}$.

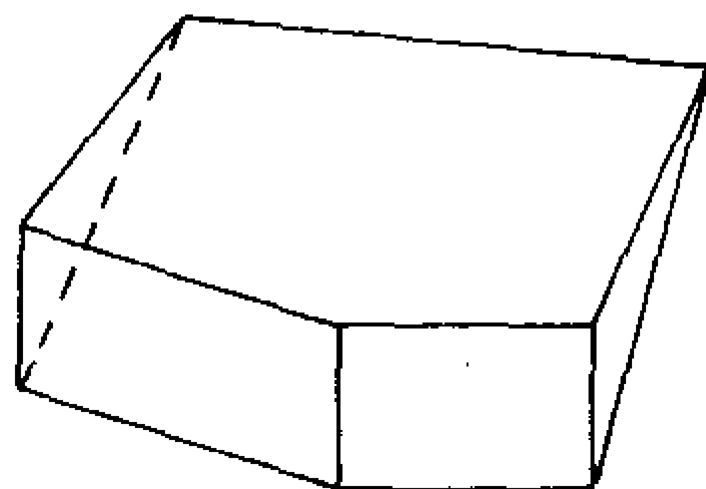
于是得到 $\dfrac{Q_2}{S_2}=\dfrac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}$,

$$\therefore\quad S=Q_1-Q_2=\frac{Q_2}{S_2}(S_1-S_2)=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}(S_1-S_2)$$
$$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2})^2.$$

17·98 试找出一个多面体,它的任何三个侧面的多边形的边数都不全相同.

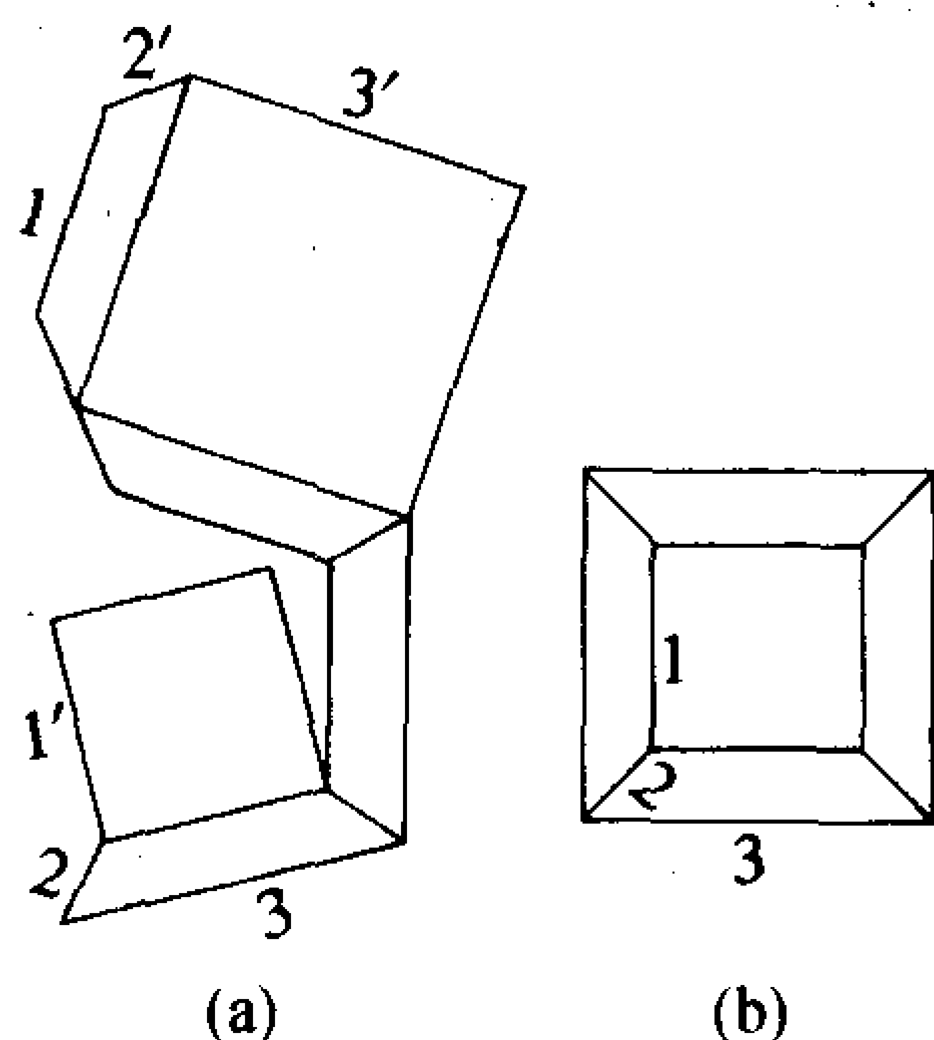
(第 57 届莫斯科数学竞赛,1994 年)

[解] 这样的多面体的例子如图所示,它共有六个侧面,其中两个侧面为三角形,两个侧面为四边形,两个侧面为五边形.



17·99 右下图是一个立体的展开图,那就是说,适当拼合起来,就成一个立体.问:(1)那些线段在拼合时分别与线段 1、2、3 相重合?请在它们上面用同样数码注出.(2)这是什么图形?为什么?

(中国上海市数学竞赛,1956 年)



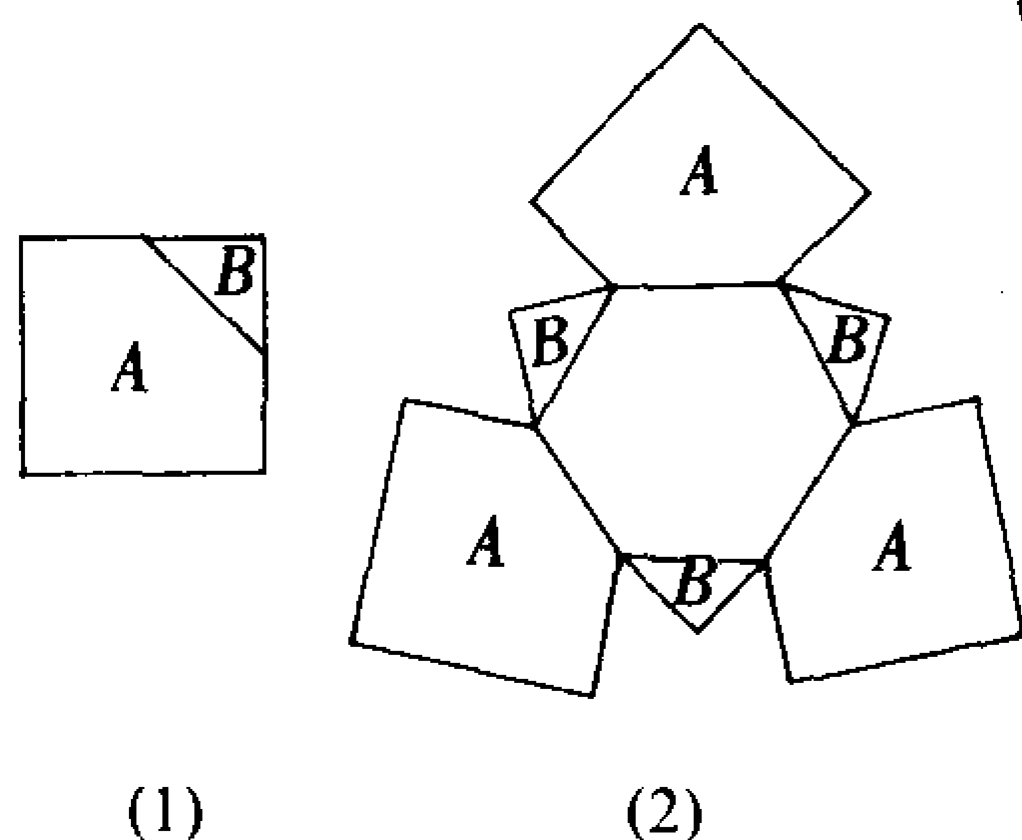
(a) (b)

[解] (1)拼合时1′与1重合,2′与2重合,3′与3重合.

(2)这是一个正四棱台.因这个多面体共有六个面,且上、下底都是正方形,而四个侧面均为等腰梯形,同时它们相互全等.

17·100 三个12cm×12cm的正方形都被连接两边邻边的中点的直线分成A、B两片,如(1)图所示,把这六边粘在一个正六边形的外面,如(2)图所示,然后折成多面体,求这个多面体的体积(单位cm^3).

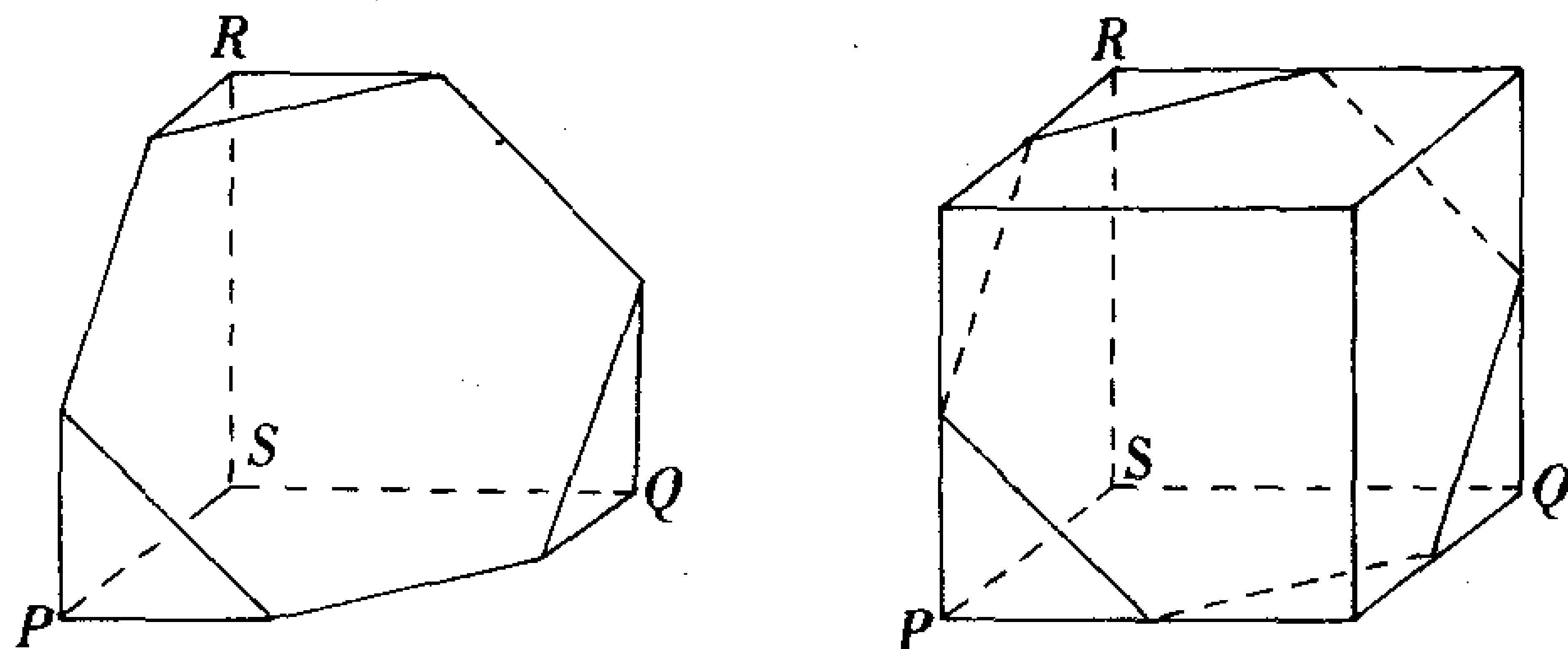
(第3届美国数学邀请赛,1985年)



(1) (2)

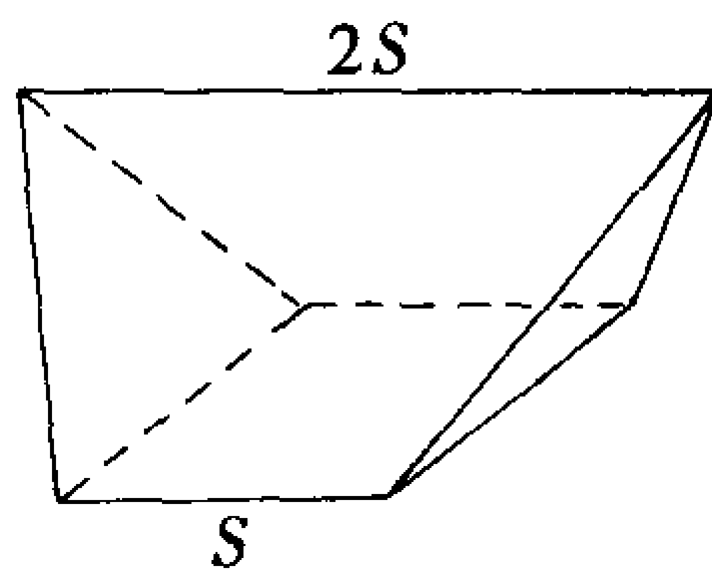
[解] 折成多面体如左图,图中标有P、Q、R、S的顶点处,三个面角都是90°,由此可认出,此多面体是正方体的一部分,如左图,可将多面体补成一个边长为12cm的正方体,过有关六个棱的中点作截面分成两个如左图的多面体.

多面体的体积为 $V=\frac{12^3}{2}=\frac{1728}{2}=864(cm^3)$.



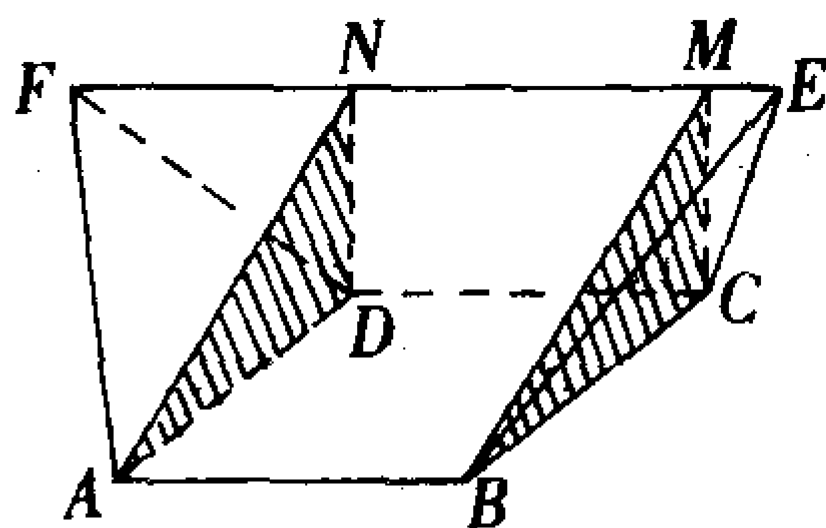
17·101 图中的多面体的底面是边长为S的正方形.上面的棱平

行于底面,其长为 $2S$,其余的棱长都是 S.已知 $S=6\sqrt{2}$,求:这个多面体的体积.



(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

[解] 如图,过 BC 作平面 BCM 垂直于平面 $CDFE$,与平面 $ABEF$ 交于 BM,与 $CDFE$ 交于 CM,过 CD 作平面 ADN 垂直于平面 $CDFE$,与平面 $ABEF$ 交于 AN,与 $CDFE$ 交于 DN.



于是 $BM\perp EF$, $AN\perp EF$.

由于 $BE=AF=AB=S$,

$EF=2S$,

则由 $ABEF$ 为等腰梯形得

$$ME=\frac{1}{2}S,\ BM=\frac{\sqrt{3}}{2}S,\ CM=\frac{\sqrt{3}}{2}S.$$

于是在$\triangle BCM$ 中,BC 边的高为

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}S\right)^2-\left(\frac{1}{2}S\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}S.$$

又$\triangle BCM$ 的面积为 $\frac{1}{4}\sqrt{2}S^2$.

$$\therefore\quad V_{E-BCM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{2}S^2\cdot\frac{1}{2}S=\frac{\sqrt{2}S^3}{24}.$$

同理 $V_{F-ADN}=\dfrac{\sqrt{2}S^3}{24}$.

棱柱 $BCM-ADN$ 的体积为 $V_{BCM-ADN}=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}S^2\cdot S=\dfrac{\sqrt{2}S^3}{4}$.

从而所求的体积为

$$V=\frac{\sqrt{2}S^3}{24}+\frac{\sqrt{2}S^3}{24}+\frac{\sqrt{2}S^3}{4}=\frac{\sqrt{2}S^3}{3}=288.$$

17·102 已知:多面体 W 具有下列诸性质:(1)它有对称中心.(2)经过对称中心及任一棱的平面与 W 相截,所得截面是平行四边形.求证:W 是平行六面体.

(波兰数学奥林匹克,1972 年)

[证] 设多面体 W 的顶点 A_0 同时属于它的棱 A_0A_1、A_0A_2、A_0A_3.

因为多面体 W 有对称中心，所以与顶点 A_0 对称的顶点 A'_0 也同时属于三条棱 $A'_0A'_1$、$A'_0A'_2$、$A'_0A'_3$，这里 $A'_i(i=1,2,3)$ 是 A_i 的对称点.

设 π_i 是经过多面体 W 的对称中心及棱 A_0A_i 的平面 $(i=1,2,3)$. 显然，平面 π_i 也含有棱 $A'_0A'_i$，而且由已知条件知 π_i 截 W 的形状是四边形，这就是四边形 $A_0A_iA'_0A'_i$.

设 $S_{jk}(j\neq k,j,k\in\{1,2,3\})$ 是多面体 W 通过顶点 A_0、A_j、A_k 的面，S'_{jk} 是它的对称面，如果数 j 和 k 不等于 i，并且属于集 $\{1,2,3\}$，那么平面 π_i 与面 S_{jk} 相交，因为 $A_0\in S_{jk}$，$A'_0\notin S_{jk}$，并且 $A_i\notin S_{jk}$，所以 $A'_i\in S_{jk}$. 类似地可以证明 $A_i\in S'_{jk}$.

如果数 i、j、k 两两不等并且属于集 $\{1,2,3\}$，则 $A_i, A'_j\in S'_{ik}$，$A_i, A'_j\in S_{ik}$. 由于 $i\neq j$ 时，$A_iA'_j$ 是多面体的棱，四边形 $A_0A_iA'_jA_k$ 和 $A'_0A'_iA_jA'_k$ 都是多面体 W 的面，因此多面体 W 有 6 个四边形形状的面，因为多面体 W 有对称中心，所以这些面两两平行，所以多面体是平行六面体.

17·103 试问：是否存在多面体及体外一点，使得由该点不能看见该多面体的任何一个顶点？

（第 58 届莫斯科数学奥林匹克，1996 年）

[解] 取六个长方体，它们各有两条棱长度为 1，且第三条棱足够长.

使长方体诸棱皆平行于坐标轴，且第一、二两长方体长棱平行于 OX 轴，第三、四两长方体长棱平行于 OY 轴，第五、六长方体长棱平行于 OZ 轴.

此外，上述每对长方体中的一个均可由另一个沿一条短棱的方向平移稍大于 1 的距离后得到(第一对沿 OY 轴方向，第二对沿 OZ 轴方向，第三对沿 OX 轴方向)，且让第二对一上一下地将第一对夹在中间；第三对一左一右地将第二对夹在中间，第一对一前一后地将第三对夹在中间.

这时得到一个十字架，其对称中心在它之外，因长方体长棱足够

长，以至由该对称中心看不到各长方体两端，该中心位于不能看见的区域中．

我们再通过“架桥”办法，将这些多面体连成一个大多面体．

17·104　试证：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边．

（中国北京市数学竞赛，1957年）

［证］　若多面体有 n 个面（n 为奇数），每个面的边数分别为 S_1、S_2、S_3、…、S_n（S_i 为奇数，$i=1,2,3,\cdots,n$），多面体的总边数为 S．

∵　每条边都是两个面公有的，

∴　$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=2S$．

上式左边是奇数个奇数的和，因此为奇数；而右边为偶数，这是矛盾的．

所以，在空间中不可能有奇数个面，而每个面又都有奇数条边的多面体存在．

17·105　欧拉公式是指：一个凸多面体，如果有 V 个顶点，E 条棱，F 个面，那么 $V-E+F=2$．一个特定的凸多面体有32个面，每个面或是三角形，或是五边形，在它的 V 个顶点的每个交点处都有 T 个三角形面和 P 个五边形面交汇着．求：$100P+10T+V$ 的值．

（第11届美国数学邀请赛，1993年）

［解］　由于 $F=32$，则由欧拉公式得　$V-E+30=0$．

因为每个顶点有 $P+T$ 条棱，所以这个凸多面体共有 $\frac{V(P+T)}{2}$ 条棱．

即　$E=\frac{V(P+T)}{2}$．

因为每个顶点有 T 个三角形，所以 V 个顶点共有 TV 个三角形，而每个三角形有三个顶点，所以这些三角形被重复地计算了三次，因而这个凸多面体共有 $\frac{TV}{3}$ 个三角形．

同理，这个凸多面体有 $\frac{PV}{5}$ 个五边形．

所以，凸多面体的面数 $F=\frac{TV}{3}+\frac{PV}{5}=32$．

故　$V(5T+3P)=480.$

由上可得方程组

$$\begin{cases} V(5T+3P)=480, \\ V-\dfrac{V(P+T)}{2}+30=0. \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} V(ST+3P)=480, \\ (T+P-2)V=60. \end{cases}$$

于是　$V|60$，即　$V=1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60.$

一一验证，只有　$V=30$，$T=2$，$P=2$　才能满足上述方程组.于是

$$100P+10T+V=200+20+30=250.$$

17·106　试证：任意多面体的面至少有一个是三角形或四边形或五边形.

（中国福建省福州市数学竞赛，1964 年）

[证]　若用 F、V、E 分别表示多面体的面、顶点和棱的数目，则由欧拉公式得

$$F+V=E+2.$$

∵　多面体每个顶点上都至少有三条棱而每条棱都连着两个顶点，

∴　$3V\leqslant 2E$，　即　$V\leqslant \frac{2}{3}E.$

若任意多面体的面的边数都不少于 6，那么因为每条棱属于两个面，

∴　$6F\leqslant 2E$，　即　$F\leqslant \frac{1}{3}E.$

于是　$F+V\leqslant \frac{1}{3}E+\frac{2}{3}E=E.$

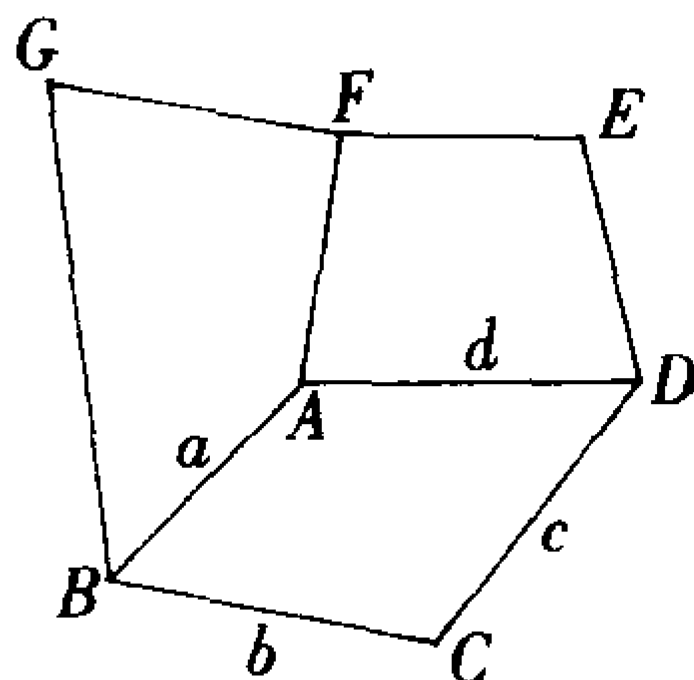
这和欧拉公式矛盾，因此原命题成立.

17·107　设 M 为一个八面体的棱长的集.这个八面体的面为全等的四边形.证明：M 至多有三个元素.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[证]　这八面体共有棱$\frac{4\times 8}{2}=16$ 条.

由欧拉公式，有顶点 $16-8+2=10$ 个.



设 v_i 为引出 i 条棱的顶点数，则

$$v_3+v_4+\cdots=10,$$

$$3v_3+4v_4+\cdots=2\times16=32.$$

从中消去 v_3 得 $\quad v_4+2v_5+3v_6+\cdots=2.$

于是 $\quad v_4\leqslant2,\ v_5\leqslant1,\ v_j=0(j\geqslant6).$

从而有 $\quad v_3=10-v_4-v_5>0.$

如果 M 中有四个不同的元素 a、b、c、d.

设在顶点 A 处有三条棱相会，$ABCD$、$ADEF$、$AFGB$ 为对应的面.

又设 $\quad AB=a,BC=b,CD=c,AD=d.$

由于四边形 $ABCD$ 与 $AFGB$ 全等，则 $AF=b$ 或 d.

由于四边形 $ABCD$ 与 $ADEF$ 全等，则 $AF=a$ 或 c.

从而导致矛盾.所以 M 中至多有三个元素.

17·108　一个多面体有 12 个面，并且(1)所有面都是等腰三角形；(2)所有棱的长为 x 或 y；(3)每个顶点处有三条棱或六条棱相会；(4)所有的二面角都相等.求 $\dfrac{x}{y}$ 的值.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[解]　由题设，多面体有 12 个面，并由(1)可得，棱数为 $\dfrac{12\times3}{2}=18$ 条.

由欧拉公式，顶点共有 $18+2-12=8$(个).

设引出三条棱的顶点有 v_3 个，引出六条棱的顶点有 v_6 个，则

$$\begin{cases}\dfrac{3v_3+6v_6}{2}=18,\\ v_3+v_6=8.\end{cases}$$

解得 $\quad v_3=4,\ v_6=4.$

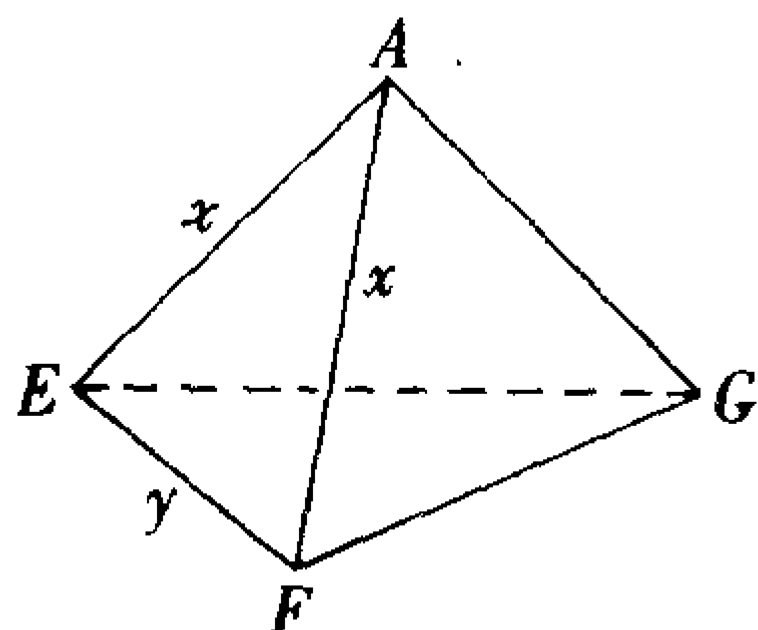
设在 A 点有三条棱 AE、AF、AG.

由于二面角 $F-AE-G$，$E-AG-F$，$G-AF-E$ 相等，所以在顶点 A 处的三个面角相等，设为 α.

又设 $AE=AF=x$.我们证明 $AG=x$.

如果 $\quad AG\neq x$，则 $\quad AG=y$，这时 $\quad \alpha=60°$，

从而 $\quad EF=y\neq x$，$EG=y\neq x$(否则，若 $EG=x$，则有 $\triangle EAG\cong$



$\triangle AEF, \angle AEF = \angle EAG = \alpha, EF = AF, y = x$). 并且 $FG = y \neq x$，于是有

$$y = 2x \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\quad x = 2y \cdot \sin\frac{\pi - 2\alpha}{2}.$$

记 $\lambda = \dfrac{y}{x}$，则 $\lambda = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$，

且 $\dfrac{1}{\lambda} = 2\cos\alpha = 2\left(1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

解得 $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

故 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，知 $\alpha = 36^\circ$.

这时有 $\angle AGE = \angle AGF = 108^\circ$，$\angle EGF = 60^\circ$.

记二面角 $E - FG - A$ 为β,由球面三角公式

$$\cos 108^\circ = \cos 108^\circ \cos 60^\circ + \sin 108^\circ \sin 60^\circ \cos\beta.$$

从而 $\cos\beta < 0$，则 β 是钝角.

然而,二面角 $E - FG - A$ 是锐角,导致矛盾.

因此 $AG = x$.

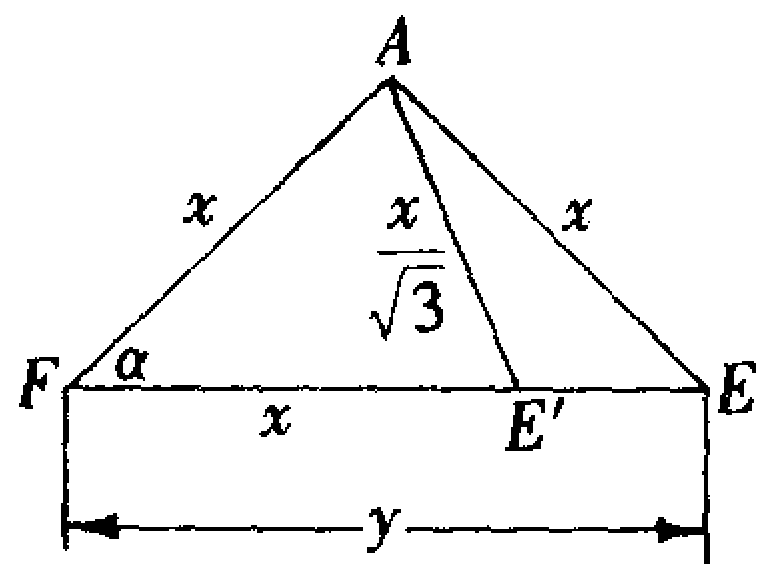
于是 $AE = AF = AG = x$，$EF = FG = GE$.

由于 A 点只引出三条棱,所以 E、F、G 都与其他顶点相连,它们各引出六条棱.设 H 是引出六条棱的第四个顶点. B、C、D 是引出三条棱的顶点,那么 B、C、D 引出的棱都等于 x.

四面体 $EFGH$ 是正四面体,棱长为 y, A、B、C、D 为在面 EFG、EFH、FGH、GEH 上的正棱锥的顶点.

设 F 在平面ABC 的射影为O,易知平面 FOC 平分二面角$G - FC - H$，FOG 平分二面角$C - FG - A$,…,

$\therefore$ 二面角 $G - FC - H =$ 二面角 $C - FG - A = \cdots$.



从而 $\angle CFO = \angle GFO = \cdots$.

设平面 ABC 分别交EF、HF、GF 于 E'、H'、G'.则 $OC = OG' = OA = OE' = OB = OH'$,六边形 $AE'BH'CG'$为正六边形.

由于 $\angle GFE = 60^\circ$，所以 $G'E' = FG'$

$=FA=x$，从而 $AE'=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

在等腰△AEF 中，$AE=AF=FE'=x$，

又 $AE'=\frac{x}{\sqrt{3}}$，$FE=y$.

∴ $y=2x\cos x=2x\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

故 $\frac{x}{\sqrt{3}}=2x\sin\frac{\alpha}{2}$. 得 $\lambda=\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$.

17·109 试证：除四面体外，不存在任何一个凸多面体，它的每一个顶点和所有其余的顶点之间都有棱相连.

（匈牙利数学奥林匹克，1948年）

[证] 如果多面体的 n 个顶点两两彼此用棱相连，那么多面体总共有 C_n^2 条棱.

因为每一条棱属于两个面的边界，而每一个面至少有三条棱，所以多面体的面数不大于$\frac{2C_n^2}{3}$.

由凸多面体的欧拉公式，有 $n+\frac{2C_n^2}{3}\geqslant C_n^2+2$.

即 $6n+2n(n-1)\geqslant 3n(n-1)+12$，

或 $n^2-7n+12\leqslant 0$，得 $3\leqslant n\leqslant 4$.

由于 n 是整数，所以只能有 $n=3,4$.

因为多面体至少有 4 个顶点，所以 $n\neq 3$. 即只有 $n=4$.

因此，每一个顶点和所有其余的顶点都有棱相连接的凸多面体只有四面体.

17·110 试求：对于哪些 n，存在有 n 条棱的多面体？

（波兰数学奥林匹克，1968年）

[解] 当且仅当 $n\geqslant 6$，且 $n\neq 7$ 时，存在有 n 条棱的多面体.

(1) 底面是 m 边形（$m\geqslant 3$）的棱锥，其棱数为 $n=2m(2m\geqslant 6)$，因此对于大于或等于 6 的偶数 n，存在有 n 条棱的多面体.

(2) 从棱数为 $n=2(m-1)(m\geqslant 4)$ 的棱锥出发，可以构造出棱数为 $n=2m+1(m\geqslant 4)$ 的多面体.

设 M、N、P 是由这个棱锥底面多边形顶点 S 发出的三条棱的中点，过这三点作一平面. 去掉平面 MNP 所切出的立体 $SMNP$，那么这

个棱锥剩下的部分就是一个多面体,这个多面体的棱数比原来棱锥多三条棱,即其棱数为

$$(2m-2)+3=2m+1. \quad (m\geqslant 4).$$

(3) 7 条棱的多面体不存在.

如果多面体的某个面不是三角形,则这个面的边数大于或等于 4,这时这个多面体的棱数大于或等于 8,这是因为,对于这个非三角形的面的各个顶点,除了该多边形的两条边之外,至少还有多面体的一条棱通过它,并且经过这些顶点的各条棱都是不同的.

如果多面体的所有面都是三角形,并设面数 E,棱数为 F,则 $F=\frac{3E}{2}$.因此 F 是 3 的倍数,从而 $F\neq 7$.

(A)棱数小于 6 的多面体不存在.

由于每个多面体至少有 4 个顶点,经过每个顶点的棱不少于 3 条,因而多面体的棱数大于或等于$\frac{4\times 3}{2}=6$.

由以上,当且仅当 $n\geqslant 6$ 且 $n\neq 7$ 时存在有 n 条棱的多面体.

17·111 试证:任意底面是正 n 边形($n\geqslant 5$)的 n 棱锥,不存在正 $n+1$ 边形的截面.

(第 22 届全俄数学奥林匹克,1996 年)

[证] 假设正 $n+1$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{n+1}$是棱锥 $S-A_1A_2\cdots A_n$ 的截面,棱锥的底面 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形.我们来讨论三种情况:$n=5$, $n=2k-1(k>3)$, $n=2k(k>2)$.

因为 n 棱锥有 $n+1$ 个面,所以,截面与棱锥的每一个面都各有一条交线.因此,不失一般性,可以认为点 B_1、B_2、…、B_{n+1}在棱锥的各棱上的位置如图 1 和图 2 所示(适合于给定的所有情况).

(1) $n=5$ 时.

因为在正六边形 $B_1B_2\cdots B_6$ 中直线 B_2B_3、B_5B_6 和 B_1B_4 平行,平面 A_2SA_3 和平面 A_1SA_5 经过 B_2B_3 和 B_5B_6,故它们的交线 ST($T=A_1A_5\cap A_2A_3$)平行于这些直线,即 $ST/\!/B_1B_4$.

经过直线 ST 和 B_1B_4 引平面,这个平面与棱锥底面交于直线 B_1A_4.而直线 B_1A_4 又经过直线 ST 与底面的交点 T.这样,直线 A_1A_5、A_1B_1 和 A_2A_3 交于一点.

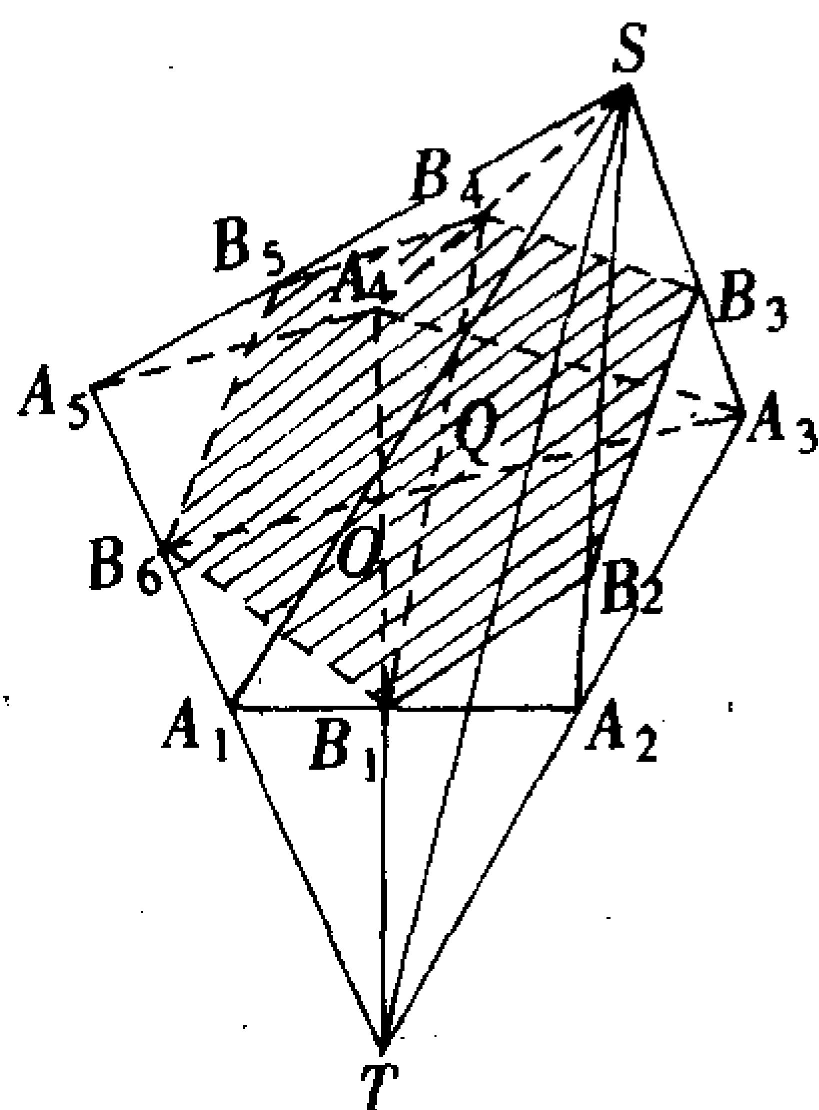


图1

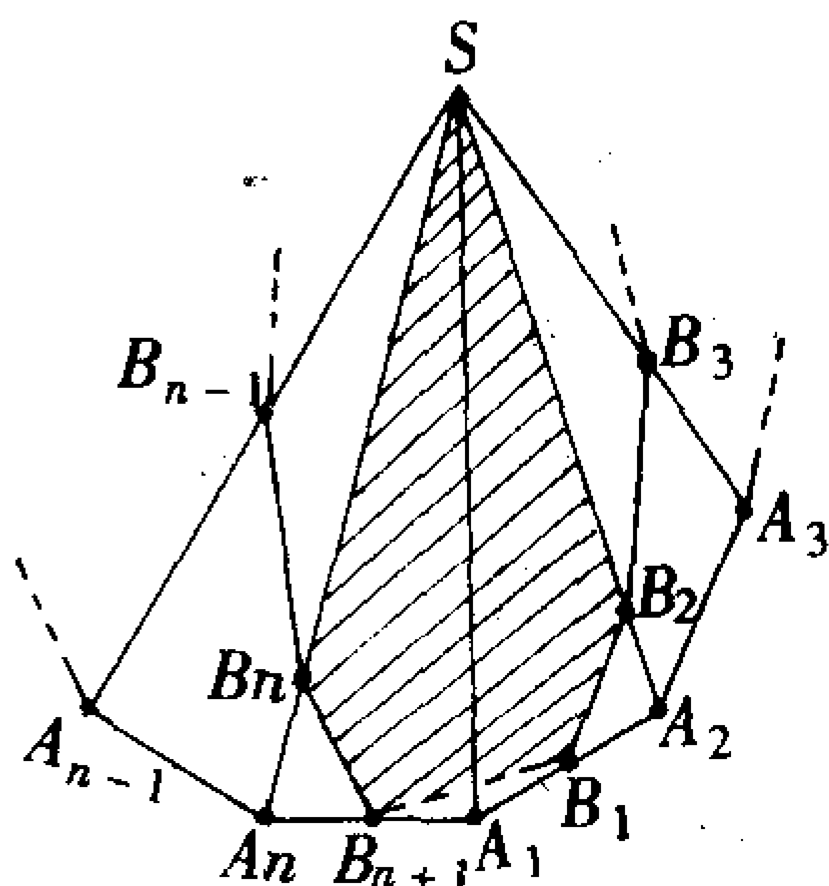


图2

同理,直线 A_1A_2、A_3B_6 和 A_4A_5 也交于一点.

由此推出,A_4B_1 和 A_3B_6 是正五边形 $A_1A_2\cdots A_5$ 的对称轴.这样,它们的交点 O 是该五边形的中心.

现在我们可以得出,如果 Q 是正六边形 $B_1B_2\cdots B_6$ 的中心,则平面 SA_3B_6、SA_1B_1、SB_2B_5 交于直线 SQ.于是直线 A_3B_6、A_1B_1 和 A_2A_5 应交于一点——直线 SQ 和底面的交点.

这说明,正五边形 $A_1A_2\cdots A_5$ 的对角线 A_2A_5 经过它的中心 O,而这是不可能的.

(2)$n=2k-1(k>3)$时.

与(1)同理可证,因为在正 $2k$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{2k}$ 中,直线 B_1B_2、B_{k+1}、B_{k+2}和 B_kB_{k+2}平行,则直线 A_1A_2、$A_{k+1}A_{k+2}$和 A_kA_{k+3}应交于一点,而这是不可能的,因为在正$(2k-1)$边形 $A_1A_2\cdots A_{2k-1}$中有 $A_{k+1}A_{k+2}/\!/A_kA_{k+3}$,而直线 A_1A_2 和 $A_{k+1}A_{k+2}$不平行.

(3)$n=2k(k>2)$时.

与上述情况类似,可以证明直线 A_1A_2、$A_{k+1}A_{k+2}$和 A_kA_{k+3}平行.于是,直线 B_1B_2、$B_{k+1}B_{k+2}$和 B_kB_{k+3}应交于一点,而这是不可能的.因为 $B_{k+1}B_{k+2}/\!/B_kB_{k+3}$,而直线 B_1B_2 与 $B_{k+1}B_{k+2}$不平行.

注 (1)当 $n=3,4$ 时,问题的结论不成立.例如,正三棱锥可以有正方形截面,侧面均为正三角形的正四棱锥可以得到正五边形截面.

(2)如果利用中心投影及其性质(共点线的中心投影共点,平行线的中心投影平行),上述解答可更为简便,只需将棱锥的截面由棱锥顶点向底面作中心投影即可.

17·112 以相距为 H 的两个平行平面 M、M' 为界的立体,被平行于 M 且距 M 为 $h(0\leqslant h\leqslant H)$ 的平面所截,截面的面积等于 ah^2+bh+c,其中 a、b、c 是常数,求证:这个立体的体积是 $V=\frac{H}{6}(S+S_0+4S_m)$,这里 S、S_0 和 S_m 分别是上、下底和中截面(即距 M、M' 等远的截面)的面积.

(中国福建省数学竞赛,1978年)

[证] 将立体的高 n 等分,过各分点作平行于 M 的截面,每两个相邻截面之间的立体部分可近似地看作柱体,各部分体积依次为 V_1、V_2、V_3、…、V_n,则

$$V=V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n.$$

其中, $V_1\approx\frac{H}{n}S_0=\frac{H}{n}c$,

$$V_2\approx\frac{H}{n}S_1=\frac{H}{n}\left[a\left(\frac{H}{n}\right)^2+b\left(\frac{H}{n}\right)+c\right],$$

$$V_3\approx\frac{H}{n}S_2=\frac{H}{n}\left[a\left(\frac{2H}{n}\right)^2+b\cdot\left(\frac{2H}{n}\right)+c\right],$$

……………………………

$$V_n\approx\frac{H}{n}S_{n-1}=\frac{H}{n}\left[a\left(\frac{n-1}{n}H\right)^2+b\left(\frac{n-1}{n}H\right)^2+c\right].$$

$$\therefore\quad V\approx\frac{H}{n}\left\{a\left[\left(\frac{H}{n}\right)^2+\left(\frac{2H}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}H\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.b\left(\frac{H}{n}+\frac{2H}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}H\right)+nc\right\}$$

$$=\frac{H}{n}\left\{\frac{aH^2}{n^2}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+\frac{bH}{n}\right.$$

$$\left.[1+2+\cdots+(n-1)]+nc\right\}$$

$$=\frac{H}{n}\left\{\frac{aH^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{bH}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+nc\right\},$$

故 $$V=\lim_{n\to\infty}\frac{H}{n}\left(\frac{aH^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{bH}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+nc\right)$$

$$=\frac{H}{6}(2aH^2+3bH+6c)$$
$$=\frac{H}{6}\left\{(aH^2+bH+c)+c+4\left[a\left(\frac{H}{2}\right)^2+b\left(\frac{H}{2}\right)+c\right]\right\}$$
$$=\frac{H}{6}(S+S_0+4S_m).$$

17·113　给定一个棱数为偶数的多面体,证明:可在其所有的棱上配置箭头(每条棱只能在一端按一个箭头)使得多面体的每个顶点均含有偶数个箭头.

(第22届全苏数学奥林匹克,1969年)

[证]　考虑对该多面体的棱任意配置箭头,那么含有奇数个箭头的顶点(不妨称"奇顶点")数目将是偶数.

选择一对"奇顶点"A_i 和 j(如果这样的顶点存在的话),一定可以找到一条沿着多面体的棱从 A_i 到 A_j 的通路.改换这条道路上所有棱的箭头之方向,这样做的结果将改变 A_i、A_j 的"奇性"而其余的"奇的顶点"依旧.

"奇顶点"个数减少"2"只要每一次沿着连接两个"奇顶点"的任意路线上改变箭头的方向就可以了.

最后不可能遗留下一个奇顶点,最后经调整"奇顶点"全消失.

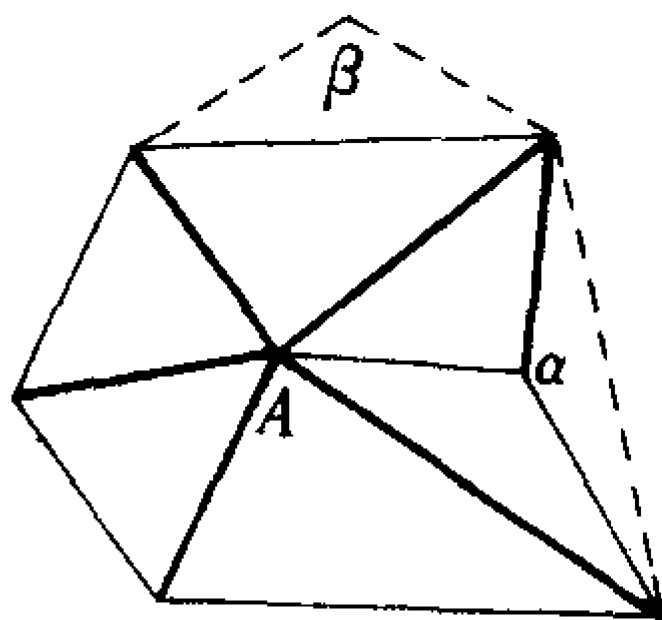
呈现多面体每个顶点都含有偶数个箭头的局面.

17·114　凸多面体的各侧面都是三角形.证明:可将它的每条棱适当地涂上红色或蓝色,使得从多面体的任一顶点可只沿着红色的棱运动到另一顶点;同时也可只沿蓝色的棱运动到另一顶点.

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

[证]　任取凸多边体的一个顶点连同它所在的所有侧面,针对多面体的这部分的各条棱涂上颜色,使得各顶点中的任一点到它一顶点都可只沿红色的棱或只沿蓝色的棱运动便可到达.上图便是涂色的一个方案.其中粗线代表红色,细实线表蓝色.

接着,沿与已涂色部分有公共棱的一个侧面添加涂色部分,深色方式是:若添加的侧面中已有两棱涂色,那么第三条棱可任涂红色或蓝色(如 α 面),如果已涂的只有一条棱,那么其余两条棱就分别涂上不同的颜色(如侧面 β)不论哪种情况,添加后的部分仍满足题设要求.同以上方式可将所有棱涂色且满足题设的要求.

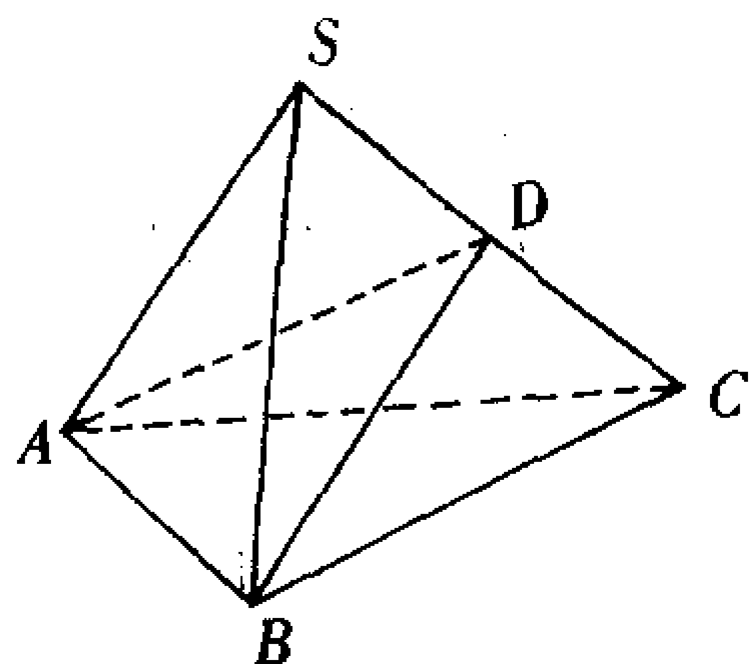


第十八章　旋转体

(一)四面体与球

18·1　在三棱锥 $S-ABC$ 中,底面$\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形,$SA=3$,$SB=4$,$SC=5$.求:三棱锥 $S-ABC$ 的内切球的半径 r.

(中国黑龙江省哈尔滨市高中数学竞赛,1988 年)



[解]　作 $AD\perp$平面 SBC,D 是垂足.

$\because$　$AS=AB=AC=3$,

$\therefore$　$DS=DB=DC$.

$\triangle SBC$ 显然是直角三角形,

$\therefore$　D 是斜边 SC 的中点.

$$AO=\sqrt{SA^2-SD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2},$$

$$S_{\triangle SAC}=\frac{1}{2}SC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{5\sqrt{11}}{4},$$

$$S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=2\sqrt{5},$$

$$S_{\triangle}ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6.$

$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle SBC}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}.$

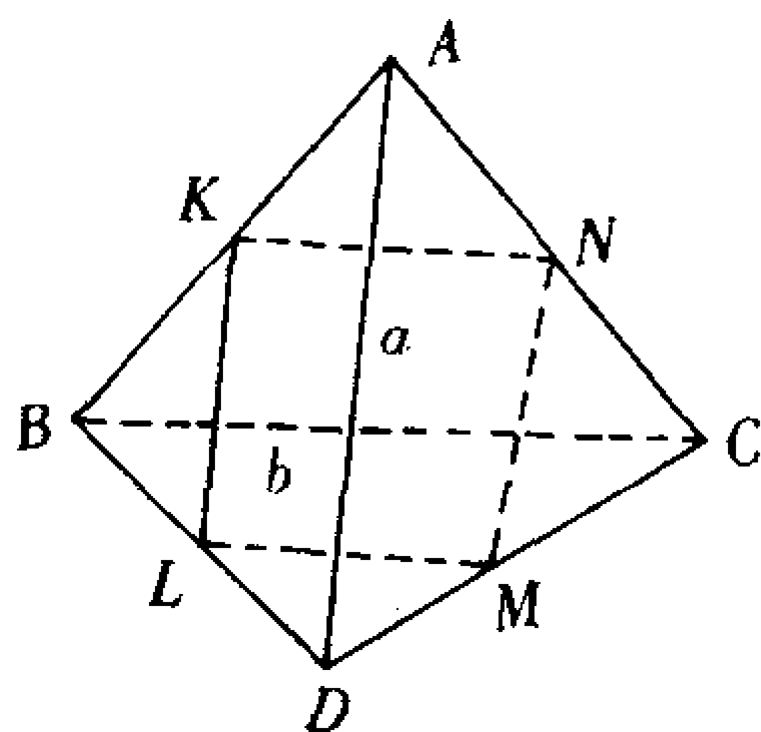
$\because\quad r(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle SAB}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle SBC})=3V_{S-ABC},$

$\therefore\quad r=\dfrac{3\sqrt{11}}{\frac{5\sqrt{11}}{4}+2\sqrt{5}+\frac{9\sqrt{3}}{4}+6}=\dfrac{12\sqrt{11}}{5\sqrt{11}+8\sqrt{5}+9\sqrt{3}+24}.$

18·2　求证:对于任意四面体,不等式 $r<\frac{ab}{2(a+b)}$ 成立,其中 a、b 是四面体两条对棱之长,r 是内切球的半径.

（第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年）

[证]　如图,过四面体内切球的中心作平行于棱 AD(长度为 a)和 BC(长为 b)的平面.它与四面体相交成平行四边形 $KLMN$.设 $KL=m$,$LM=n$.



$\because\quad KL/\!/AD,\ LM/\!/BC.$

$\therefore\quad \frac{m}{a}=\frac{BL}{BD},\ \frac{n}{b}=\frac{DL}{BD}.$

于是　$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1.$

由此得,m、n 中至少有一个不超过 $\frac{ab}{a+b}$.

但内切球的大圆整个地落在平行四边形 $KLMN$ 的内部.所以其半径 r 不可能大于平行四边形任一边的一半,即 $r\leqslant\frac{ab}{2(a+b)}$.

事实上,上式等号不能取到.

若 $r=\frac{ab}{2(a+b)}$,则　$m=n=\frac{ab}{a+b}$,

这时平行四边形 $KLMN$ 为正方形.

因为球的切面垂直于过切点的半径,于是四面体的四个侧面都平行于一条与平面 $KLMN$ 垂直的直线,这是不可能的!

18·3　直接量得木质四面体三双相对的棱分别相等,各长 13cm、14cm、15cm.求这四面体的体积.如果要把它削成一个最大的球,那么

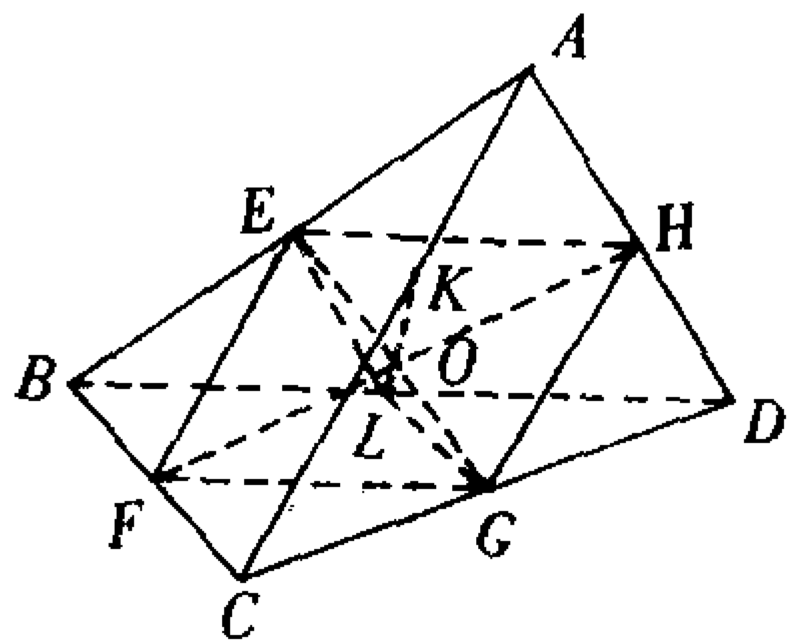
球的半径多大?

(中国福建省福州市数学竞赛,1963 年)

[解] 如图,设 E、F、G、H、K、L 为四面体各棱的中点,则

$$EF=GH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=EH=FG,$$

且 $EF/\!/AC/\!/HG$.



$\therefore$ $EFGH$ 为菱形,对角线 EG、FH 垂直平分于O 点.同理,三对棱的中点连线都互相垂直平分于 O 点,因而构成四个全等的三棱锥 $O-EFK$, $O-FGL$, $O-GHK$, $O-HEL$,这些三棱锥的高就是四面体内切球(最大的球)的半径 r.

由菱形对角线互相垂直平分,可得

$$OG^2+OF^2=GF^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2,$$

且 $OG^2+OL^2=GL^2=\left(\frac{14}{2}\right)^2,$

又 $OL^2+OF^2=LF^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2,$

解得 $OG=\frac{\sqrt{70}}{2}$, $OF=\frac{3\sqrt{11}}{2}$, $OL=\frac{3\sqrt{14}}{2}$.

于是,三棱锥 $O-FGL$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{11}}{2}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\frac{\sqrt{70}}{2}=\frac{21\sqrt{55}}{8}.$$

而底面$\triangle FGL$ 的面积为 21.

$$\therefore\quad \frac{1}{3}r\cdot 21=\frac{21\sqrt{55}}{8},\quad r=\frac{3\sqrt{55}}{8}(\text{cm}).$$

三棱锥 $O-BCD$ 的体积为三棱锥$O-FGL$ 的四倍($\because\triangle BCD$ 的边长为$\triangle FGL$ 对应边长的 2 倍),而四面体的体积为三棱锥 $O-BCD$ 体积的四倍,因此,四面体的体积

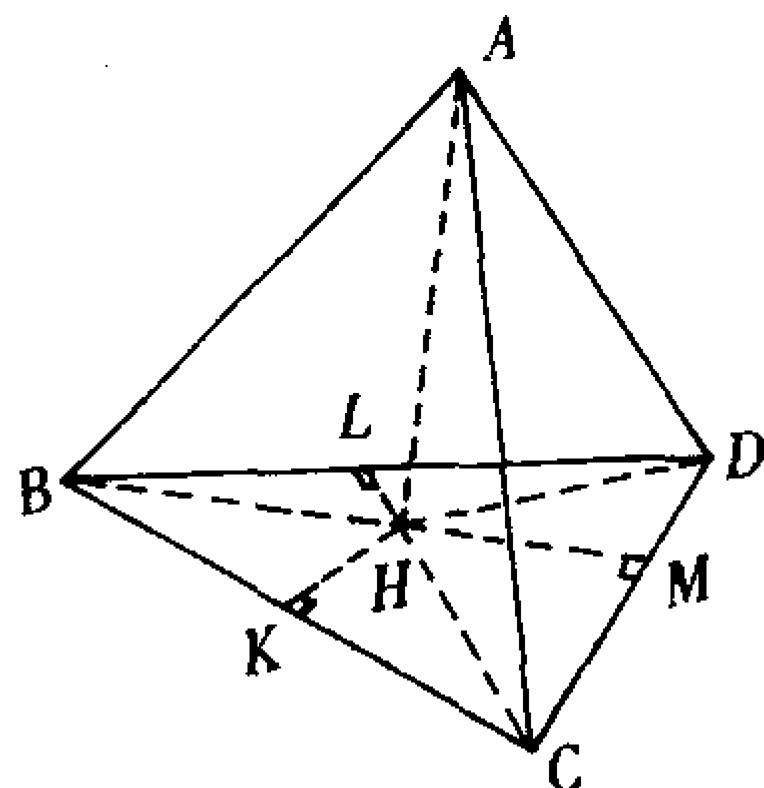
$$V=4\times4\times\frac{21\sqrt{55}}{8}=42\sqrt{55}(\text{cm}^3).$$

18·4 以四面体 $ABCD$ 的棱 AB、AC、AD 为直径各作一个球,求

证:这些球覆盖了整个四面体.

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证] 由 A 点作平面 BCD 的垂线 AH. H 是垂足,自 H 作 $HK\perp BC$ 于 K,作 $HL\perp BD$ 于 L 作 $HM\perp CD$ 于 M.



以 AB 为直径的球与平面 ABH 交得大圆,由于 $\angle AHB=90°$, H 在该球的这个大圆上,因此 H 在该球上.

又以 AB 为直径的球交平面 BCD 得一小圆,易知四边形 $BKHL$ 在这个小圆内,因此,在该球内,所以棱锥 $A-BKHL$ 在以 AB 为直径的球的内部.

同理可证,棱锥 $A-CMLK$ 在以 AC 为直径的球的内部,棱锥 $A-DLHM$ 在以 AD 为直径的球的内部.

18·5 在凸多面体 M 的每个顶点上有三条棱汇合,已知它的每一个面都是有外接圆的多边形.试证:这个多面体有外接球面.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证] 多面体的棱 AB 的两个相邻面的外接圆惟一地确定一个球面 α,这两个外接圆在这个球面上,因此这两个面的所有顶点都在这个球面上.

如果 BC 和 BD 是以 B 为端点的另外两条棱,那么含有 B、C、D 的圆周(即含有这些点的面的外接圆周)也属于 σ.

所以棱 BC 的邻面的一切顶点都在 σ 上.

类似地考察以 C 为端点的棱的邻面,因为对于任何一个顶点都可以作一条从棱 AB 始且结束于这个顶点的棱的链条.

所以我们可以达到多面体的任何顶点.由此,多面体的任何顶点都在球面 σ 上.

18·6 求证:正四面体的外接球球心到它的各顶点的距离之和,小于其他任一点到该正四面体各顶点的距离之和.

(第 8 届国际数学奥林匹克,1966 年)

[证] 我们首先证明下面的结论:

若 P 为正四面体 $A'B'C'D'$ 内的任意一点,则 P 到这个四面体的四

个面的距离之和等于这个正四面体的高 h 的长，若 P 为正四面体 $A'B'C'D'$ 外部的任意一点，则 P 到这个四面体的四个面的距离之和大于这个正四面体的高 h 的长.

设 P 到正四面体各面的距离分别为 h_1、h_2、h_3、h_4，由于正四面体各面的面积相等，所以各面面积均设为 S.

若 P 在正四面体 $A'B'C'D'$ 的内部，则

$V_{PA'B'C'} + V_{PB'C'D'} + V_{PC'D'A'} + V_{PD'A'B'} = V_{A'B'C'D'}$.

则 $\frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \frac{1}{3}Sh_3 + \frac{1}{3}Sh_4 = \frac{1}{3}Sh$,

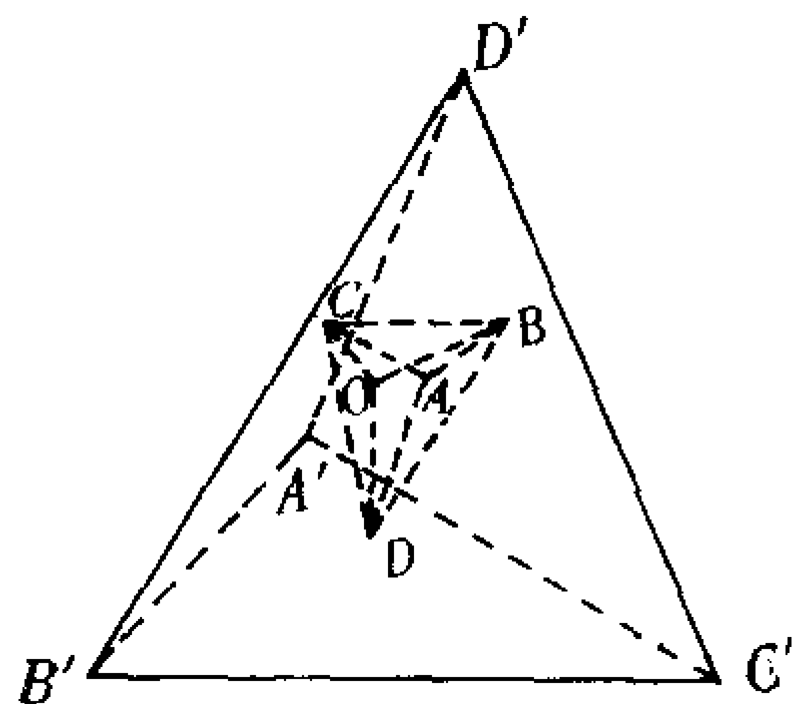
$\therefore \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$.

若 P 在正四面体 $A'B'C'D'$ 的外部，则

$V_{PA'B'C'} + V_{PB'C'D'} + V_{PC'D'A'} + V_{PD'A'B'} > V_{A'B'C'D'}$,

$\therefore \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h$.

下面证明本题.



作四面体 $A'B'C'D'$ 外接于已知的四面体 $ABCD$，对应的面互相平行，点 A、B、C、D 分别在 $A'B'C'D'$ 的各面上.

显然，这两个四面体是相似的，所以 $A'B'C'D'$ 也是正四面体.

四面体 $ABCD$ 的各高线交于一点，这一点和该四面体的外接球的球心 O 重合，线段 OA、OB、OC 和 OD 是 O 到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离.

$\therefore \quad OA + OB + OC + OD = h$.

我们再来考察在四面体 $A'B'C'D'$ 内或面上的任意一点 P(除 O 点外)，因为 PA、PB、PC、PD 都分别不比由 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的相应的边界面的垂线短，而 P 点到四面体 $A'B'C'D'$ 的各面垂线长(距离)之和等于 h，那么

$$OA + OB + OC + OD = h < PA + PB + PC + PD.$$

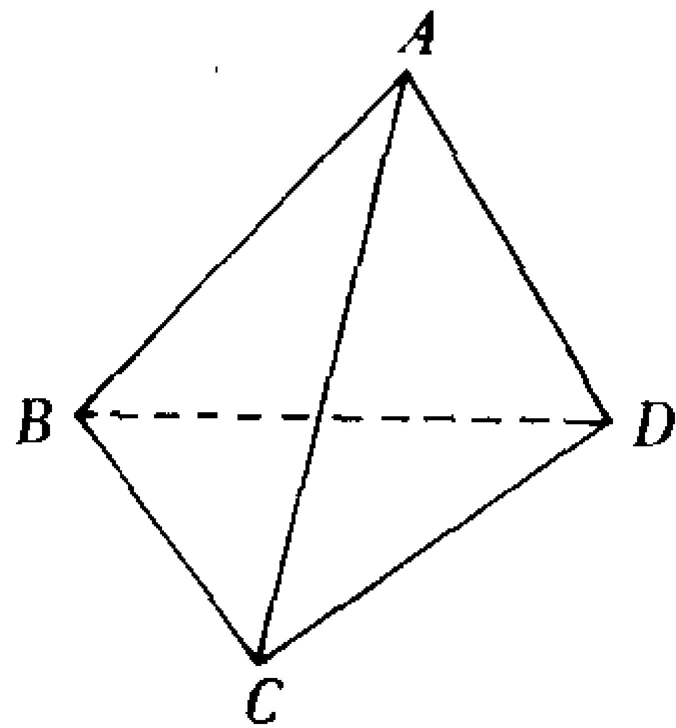
对于四面体 $A'B'C'D'$ 外任意一点 P，上述不等式仍成立.

18·7　四面体 $ABCD$ 有过 A、B、C、D 的外接球及与各面相切于内心的内切球，两球有共同的中心 O、H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，H' 为 D 到这平

面的垂线的垂足,求证:$AB=CD,AC=BD,AD=BC,OH=OH'$.

(英国数学奥林匹克,1985 年)

[证] 设四面体 $ABCD$ 的外接球球心 O 在面 ABC 上的射影为 O',则 O' 为△ABC 的外心,且由于 O 也是四面体的内切球的球心,所以



$$O'A=O'B=O'C=\sqrt{R^2-r^2}.$$

其中 $R=OA$, $r=OO'$ 分别为外接球与内切球的半径.

即△ABC 的外接圆半径为 $\sqrt{R^2-r^2}$.

同样可知,△ACD、△BCD、△ABD 的外接圆半径也是 $\sqrt{R^2-r^2}$.

由正弦定理有

$$BC=2\sqrt{R^2-r^2}\sin\angle BAC$$

$$=2\sqrt{R^2-r^2}\sin\angle BDC,$$

$\therefore\quad \angle BAC=\angle BDC$.

设$\angle BAC=\angle BDC=\alpha$,同样还有

$\angle CAD=\angle CBD=\beta$, $\angle BCD=\angle BAD=\gamma$,

$\angle ABD=\angle ACD=\varphi$, $\angle ABC=\angle ADC=\delta$,

$\angle ADB=\angle ACB=\varphi$.

$$\therefore \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=180^\circ, & ① \\ \alpha+\delta+\varphi=180^\circ, & ② \\ \beta+\varphi+\delta=180^\circ, & ③ \\ \gamma+\delta+\varphi=180^\circ & ④ \end{cases}$$

四式相加再除以 2 得

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varphi+\varphi=360^\circ, \quad ⑤$$

⑤-①得 $\quad \delta+\varphi+\varphi=180^\circ, \quad$ ⑥

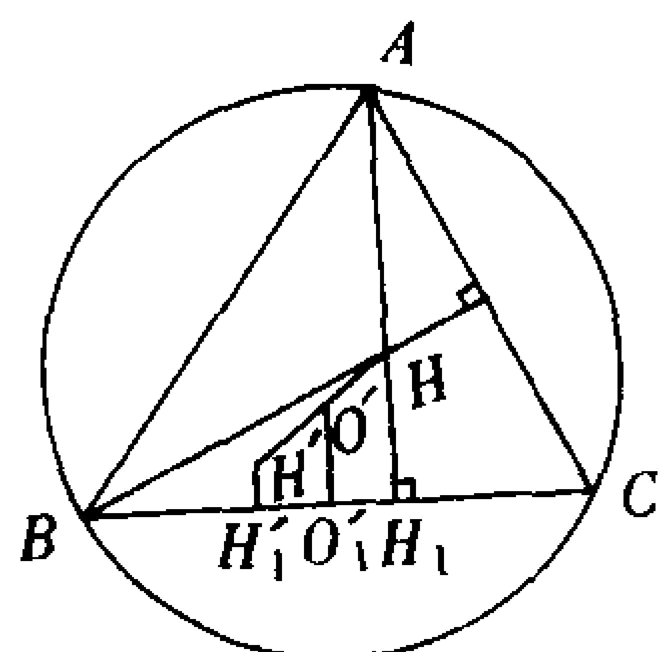
比较⑥与④得 $\quad \delta=\gamma$.

同法可证 $\quad \beta=4$, $\alpha=\varphi$.

$\because$ △ABC 与△DCB 有公共边 BC,且各角对应相等,

$\therefore$ △ABC≌△DCB. 有 $\quad AB=CD$, $AC=BD$.

同理可证 $\quad AD=BC$.



由于　$H'B^2-H'C^2=DB^2-DC^2=AC^2-AB^2=HC^2-HB^2$.

设 H'、O'、H 在 BC 上的射影分别为 H'_1、O'_1、H_1.

于是有　$H'_1B^2-H'^1C^2=H_1C^2-H_1B^2$.

即　　$H'_1B-H'_1C=H_1C-H_1B$.

从而　$H'_1O'_1=H_1O'_1$（O'_1 为 BC 的中点）.

同理，设 H'、O'、M 在 AB 上的射影分别为 H'_2、O'_2、H_2，亦有

$$H'_2O'_2=H_2O'_2.$$

于是，O' 是线段 $H'H$ 的中点，即 $OH'=OH$.

18·8　四面体 T 内接于中心为 O 的单位球，球 S 过 T 的每一个面的重心，求：S 的半径，并将 O 与球 S 中心的距离表为 T 的棱长的函数.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[解]　设 O 为原点，$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$、$\vec{D}$ 为各顶点的位置向量，则各面的重心分别为

$$\frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}),\ \frac{1}{3}(\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}),$$
$$\frac{1}{3}(\vec{C}+\vec{D}+\vec{A}),\ \frac{1}{3}(\vec{D}+\vec{A}+\vec{B}).$$

它们与 $\vec{P}=\frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})$ 的距离都是

$$\frac{1}{3}\left(\text{即}\frac{|\vec{D}|}{3},\frac{|\vec{A}|}{3},\frac{|\vec{B}|}{3},\frac{|\vec{C}|}{3}\right),$$

所以　P 点是球的中心，球 S 的半径为 $\frac{1}{3}$.

$\because\quad AB^2=(\vec{B}-\vec{A})(\vec{B}-\vec{A})=2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$,

简记　$\vec{OP}=\vec{P}$，则

$\therefore\quad \vec{p}^2=\frac{1}{9}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})^2$

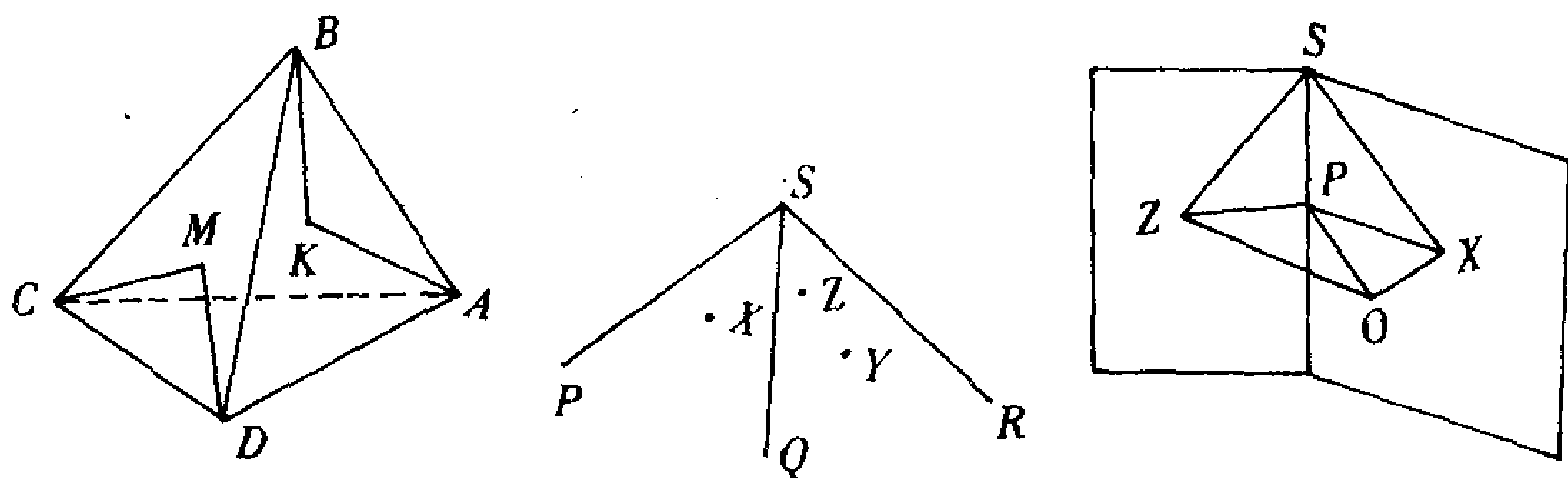
$$=\frac{1}{9}[16-2(AB^2+BC^2+CA^2+AD^2+BD^2+CD^2)].$$

18·9　四面体 $ABCD$ 的内切球分别切面 ABD、DBC 于 K、M. 求证:$\angle AKB=\angle DMC$.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

[证]　先证明一个引理:

设球 O 与三面角 $S-PQR$ 的面 PSQ、QSR、RSP 分别相切于 X、Y、Z,$\angle PSQ=\alpha$,$\angle QSR=\beta$,$\angle RSP=\gamma$,则$\angle XSP=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$.



∵　于 OX,$OZ\perp PS$,∴　$PS\perp$平面 OXZ.

设平面 OXZ 交PS 于P,则由于切线长 $SZ=SX$,

所以　$\angle XSP=\angle ZSP$,记　$\angle XSP=\varphi$,则

$\angle ZSR=\angle YSR=\gamma-\varphi$,$\angle YSQ=\angle XSQ=\alpha-\varphi$,

∴　$\beta=\angle YSR+\angle YSQ=\alpha+\gamma-2\varphi$,

故　$\varphi=\angle XSP=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$. 引理证毕.

由引理有

$$\angle AKB=\pi-(\angle KAB+\angle KBA)$$

$$=\pi-\frac{\angle BAD+\angle BAC-\angle DAC+\angle ABD+\angle ABC-\angle DBC}{2}$$

$$=\pi-\frac{\pi-\angle ADB+\pi-\angle ACB-\angle DAC-\angle DBC}{2}$$

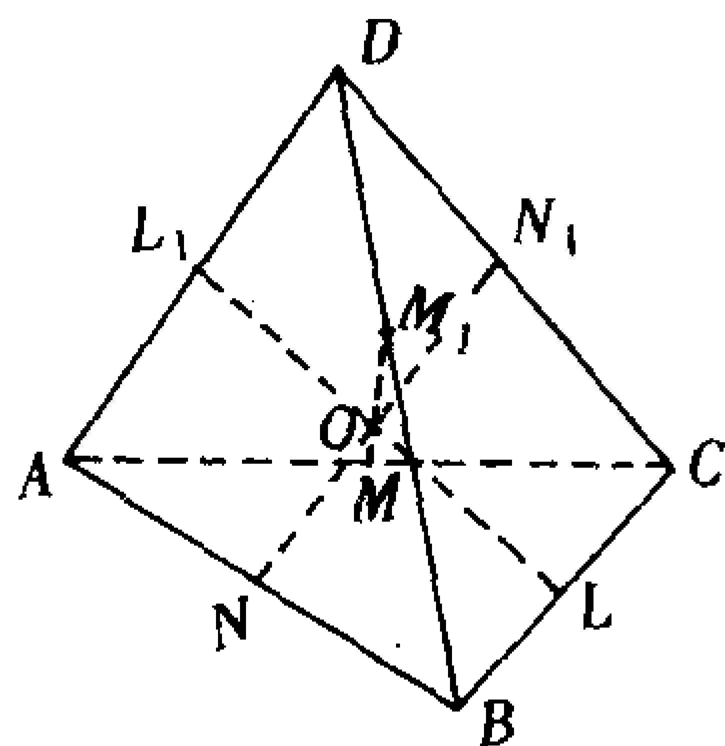
$$=\frac{\angle ADB+\angle ACB+\angle DAC+\angle DBC}{2}$$

同理可证　$\angle DMC=\frac{\angle ADB+\angle ACB+\angle DAC+\angle DBC}{2}$.

于是　$\angle AKB=\angle DMC$.

18·10 令 O 是一四面体 $ABCD$ 的外接球的球心，L、M、N 分别是 BC、CA、AB 的中点，设 $AB+BC=AD+CD$，$BC+CA=BD+AD$，$CA+AB=CD+BD$. 求证 $\angle LOM=\angle MON=\angle NOL$.

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）



［证］ 由假设可知，四面体 $ABCD$ 的对棱相等，即

$BC=AD$，$CA=BD$，$AB=CD$.

设 L_1、M_1、N_1，分别是 AD、BD、CD 的中点，则

$$L_1M_1=\frac{1}{2}AB=LM.$$

又 $L_1M_1/\!/AB/\!/LM$，

$$LM_1=\frac{1}{2}CD=L_1M,$$

又 $LM_1/\!/CD/\!/L_1M$，

从而，L_1M_1LM 在一个平面上且是菱形.

所以，对角线 LL_1 和 MM_1 互相垂直平分，记它们的交点为 Q.

同理可知 LL_1、MM_1、NN_1 两两相互垂直平分于是 Q 是它们的公共中点.

由于 LL_1 垂直于菱形 N_1M_1NM 所在的平面，

$\therefore$ $LL_1\perp MN$，$LL_1\perp M_1N$.

又 $MN/\!/BC$，$M_1N/\!/AD$.

从而 LL_1 是 CA 与 BD 的公垂线，NN_1 是 AB 和 CD 的公垂线，由此可知

$$DQ=AQ=BQ=CQ.$$

即 Q 恰是外接球的中心，于是 $\angle LOM=\angle MON=\angle NOL=90^\circ$.

18·11 考虑所有外切于给定的球的四面体 $AXBY$. 证明：对于确定的点 A 和 B，空间四边形 $AXBY$ 的角之和. 即 $\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX$ 与点 X 和 Y 的选择无关.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

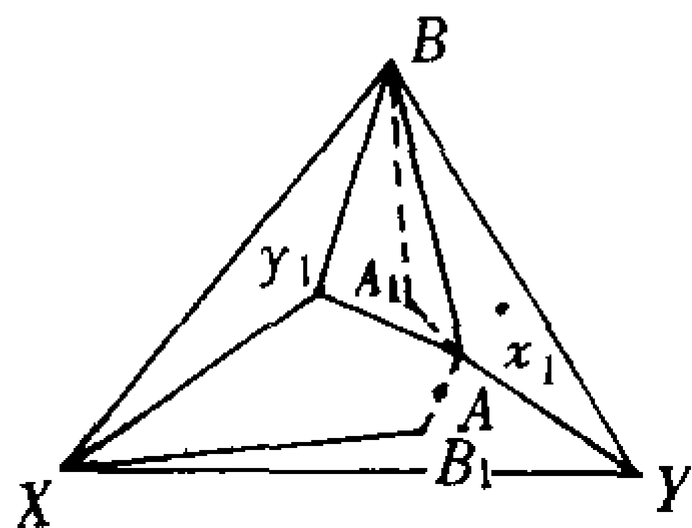
［证］ 设 A_1、B_1、X_1、Y_1 分别表示四面体的侧面 BXY、XYA、YAB、ABX 与球的切点（如图）

∵　由一点引球的两条切线长相等，

∴　$AB_1 = AY_1$，$XB_1 = XY_1$，

又　$AX = AX$

∴　$\triangle AXB_1 \cong \triangle AXY_1$，可有$\angle B_1AX = \angle Y_1AX$.



同理　$\angle A_1BX \angle Y_1BX$，

于是　$\angle AY_1B = \angle Y_1AX + \angle AXY_1 + \angle BXY_1 + \angle Y_1BX$

$$= \angle B_1AX + \angle AXB + \angle A_1BX \quad ①$$

类似地　$\angle AX_1B = \angle B_1AY + \angle BYA + \angle A_1BY \quad ②$

①、②式左、右两边分别相加，得

$$\angle AY_1B + \angle AX_1B$$
$$= \angle AXB + (\angle A_1BX + \angle A_1BY) + \angle BYA + (\angle B_1AX + \angle B_1AY)$$
$$= \angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX \quad ③$$

③式右边即为我们所考察的四个角之和，而左边的值与 X、Y 的位置无关（点 X_1、Y_1 为线段 AB 及已知球的位置所惟一确定）.

18·12　一个四面体 $ABCD$ 的内切球的中心 I 与棱 AB，CD 的中点共线，证明：这个四面体的外接球的中心也在这条直线上.

（保加利亚数学奥林匹克，1985 年）

［证］　设 E、F 分别为 AB、CD 的中点，由于 I 到面 ACD，面 BCD 的距离相等，I 又在 EF 上，所以 E 到面 ACD 和面 BCD 的距离相等，从而 A 到面 BCD 的距离与 B 到面 ACD 的距离相等，且都等于 E 到两个面距离的 2 倍.

记 h_1 为 A 到面 BCD 的距离，h_2 为 B 到面 ACD 的距离，则 $h_1 = h_2$.

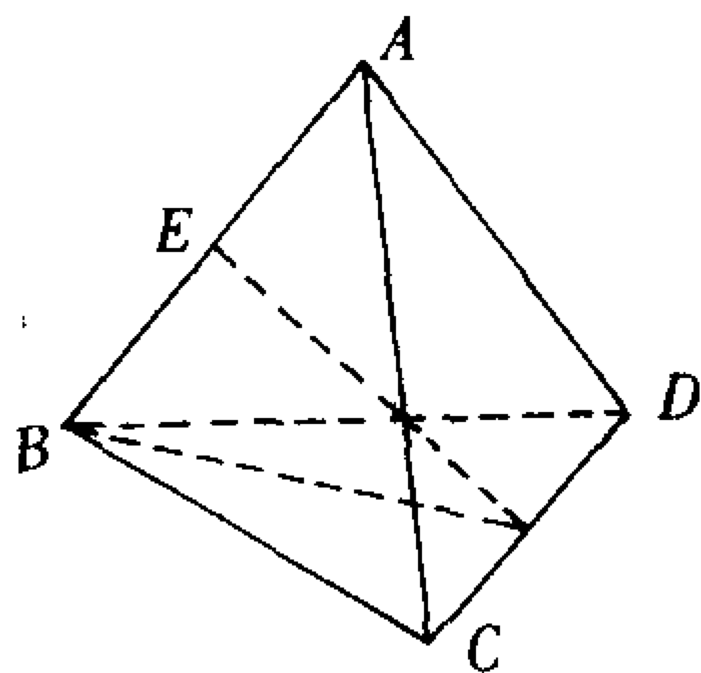


图 1

∵　$V = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}h_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD}h_2$.

∴　$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ACD}$.

又 CD 为$\triangle BCD$ 和$\triangle ACD$ 的公共边，所以 A、B 到 CD 的距离相等.

同理　C、D 到 AB 的距离相等.

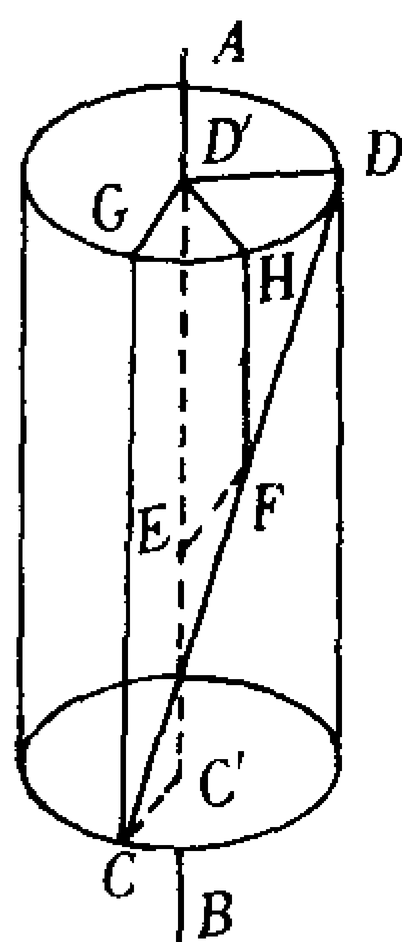


图 2

下面证明　EF 为 AB 和 CD 的公垂线.

如图 2,设 C、D 在 AB 上的射影分别为 C'、D',由于 $CC'=DD'$,所以 D、C 在以 AB 为轴的圆柱面上,过 C'、D' 的中点 F' 作平面与轴 AB 垂直,则这平面平分 CD,因而这平面过 F 点.

设 CD 在圆柱的上底面的射影为 GD,则 F 在上底面的射影为 GD 的中点 H.

$\because$　$D'H\perp GD$, $F'F/\!/D'H$.

$\therefore$　$F'F\perp GD$. 知　$F'F\perp$平面 GCD, 故 $F'F\perp CD$.

即　$F'F$ 是 AB、CD 的公垂线.

同理, 过 E 作 CD 的垂线 EE'(E' 在 CD 上),则 EE' 与 AB、CD 的公垂线.

因此 EE' 与 FF' 重合,所以 EF 是 AB、CD 的公垂线.

右图 1 中,作线段 BC 的中垂面 M,它与 EF 一定相交于一点 O(如果平面 $M/\!/EF$,那么 $BC\perp EF$,过 AB、CD 分别作平面与 EF 垂直,这两个平面 M_1、M_2 互相平行,B 在平面 M_1 内,又因为 $BC\perp EF$,所以 BC 在平面 M_1 内,C 是 M_1 与 M 的公共点,与 $M/\!/M_1$ 矛盾).

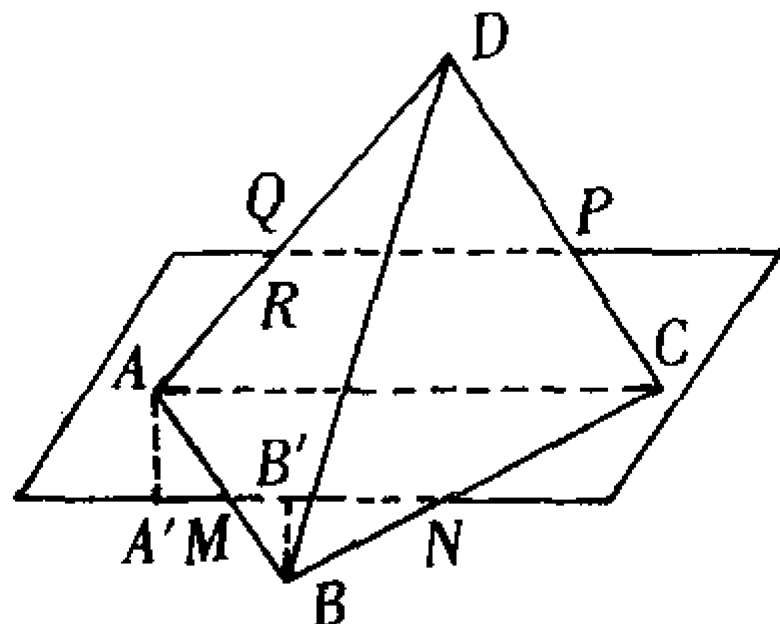
又$\because$　$OB=OC$, OE 垂直平分 AB、CD,

$\therefore$　$OA=OB$, $OC=OD$.

从而 O 到 A、B、C、D 等距离,O 是四面体 $ABCD$ 的外接球的球心.

18·13　已知四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD、DA 与一个球相切,求证:诸切点都在同一个平面上.

(波兰数学奥林匹克,1963 年)



[证]　设 M、N、P、Q 是四面体的棱 AB、BC、CD、DA 与球的切点,则

$AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=NP$, $DP=DQ$.

作平面 MNP,由于 A、B、C、D 不在同一个平面上,则平面 MNP 不经过 A、B、C、D 中的任何一点.

因此，A 和 D、B 和 C、C 和 D 均位于平面 MNP 的两侧.

设平面 MNP 与线段 AD 交于 R，为证明 M、N、P、Q 在同一个平面上，只要证明 R 和 Q 重合，即 $AQ=AR$ 即可.

过 A、B、C、D 向平面 MNP 作垂线，垂足为 A'、B'、C'、D'.

由 $\triangle AMA' \backsim \triangle BMB'$ 可得 $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AA'}{BB'}$.

类似地还有

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BB'}{CC'},\ \frac{CP}{DP}=\frac{CC'}{DD'},\ \frac{DR}{AR}=\frac{DD'}{AA'}.$$

诸式相乘可得

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{DP}\cdot\frac{DR}{AR}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{DD'}\cdot\frac{DD'}{AA'}=1.$$

由 $BM=BN$ 及 $CP=CN$ 得 $\dfrac{AM}{DP}\cdot\dfrac{DR}{AR}=1$,

又由 $AM=AQ$, $DP=DQ$ 得 $\dfrac{AQ}{DQ}\cdot\dfrac{DR}{AR}=1$.

即 $AQ\cdot DR=DQ\cdot AR$.

或 $AQ(AD-AR)=(AD-AQ)\cdot AR$.

于是 $AQ=AR$，从而 R 与 Q 重合.

18·14 设一平面与四面体的一个顶点发出的三条棱相交. 试证：当且仅当这个平面过四面体内切球球心时，它分四面体表面所成的两部分的面积与其相应部分的体积成比例.

（保加利亚数学奥林匹克，1976 年）

[证] 设已知四面体的体积为 V，表面积为 S，内切球为 r.

在四面体被平面（该平面与四面体的一个顶点发生的三条棱相交）截成的两部分中，有一部分是底面在该平面上的棱锥. 设该棱锥的体积为 V_1，侧面积为 S_1，球心在该平面上且和侧面相切的球的半径为 r_1.

因此，这个平面过四面体内切球的球心的必要且充分条件是

$$r=r_1.$$

由体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sr$, $V_1=\dfrac{1}{3}S_1r_1$.

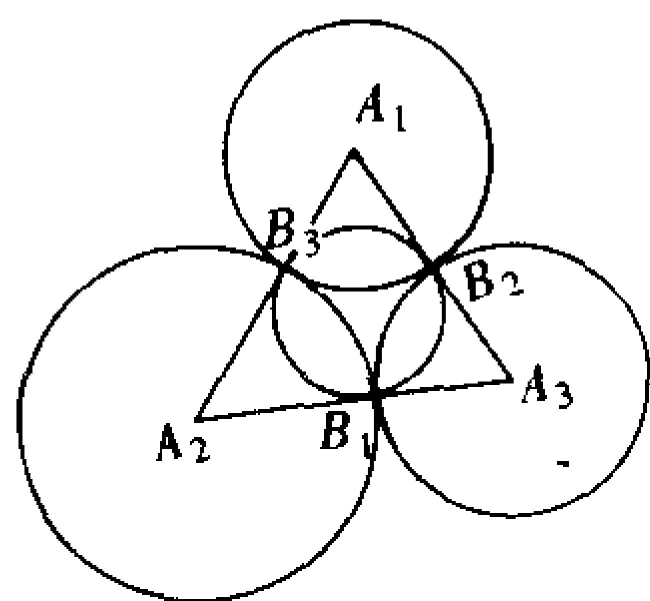
因而 $r=r_1$，则 $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{S}{S_1}$. 即 $\dfrac{V-V_1}{V_1}=\dfrac{S-S_1}{S_1}$.

18·15　设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体，S_1、S_2、S_3、S_4 分别是以 A_1、A_2、A_3、A_4 为球心的球，它们两两相外切．如果存在一点 Q，以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1、S_2、S_3、S_4 都相切，还可作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切，求证：这个四面体是正四面体．

（第 2 届中国中学生数学冬令营，1987 年）

［解］　首先指出这样的事实：如果球心不在一条直线上的四个球面 σ、σ_1、σ_2、σ_3 两两相切，那么或者它们两两相外切，或者它们之中的三个球面两两相外切并且都在第四个球面之内与之相切．

用反证法证明这一事实．假如不是这样，即其中某个球面，例如 σ，其内外都有球面与之相切．不妨设 σ_1 在内而 σ_2 和 σ_3 在外，那么 σ_1 与 σ_2 的切点及 σ_1 与 σ_3 的切点都重合于 σ_1 与 σ 的切点，因而四个球的球心在同一直线上，与所设矛盾．



约定把以 Q 为中心，r 为半径的那个球记为 S；把以同一点为中心，R 为半径的球记为 T；并将球面 S_1、S_2、S_3、S_4 的半径分别记为 r_1、r_2、r_3、r_4，由上面指出的事实易得知：或者 S_1、S_2、S_3、S_4 都与 S 相外切，或者它们都在 S 内与之相切．

考察 $A_1A_2A_3$ 所在的平面与球面 S_1、S_2、S_3，T 相截得的图形（如图）．

设 T 与棱 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 相切的切点分别为 B_1、B_2、B_3，则显然有

$$A_1B_2=A_1B_3,\ A_2B_3=A_2B_1,\ A_3B_1=A_3B_2.$$

而球面 S_2 与 S_3、S_3 与 S_1、S_1 与 S_2 的切点 C_1、C_2、C_3 也有同样的性质

$$A_1C_2=A_1C_3,\ A_2C_3=A_2C_1,\ A_3C_1=A_3C_2.$$

由此易知　$C_1=B_1$，$C_2=B_2$，$C_3=B_3$．

以下分两种情形讨论：

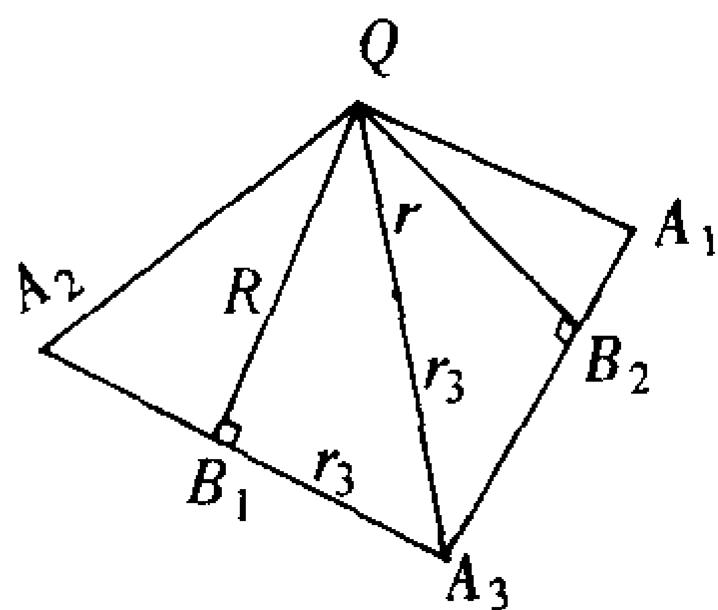
情形 1　S_1、S_2、S_3、S_4 与 S 相外切．

$\because$　$QB_1\perp A_2A_3$，$QB_2\perp A_3A_1$，$QB_3\perp A_1A_2$，

根据勾股定理可得

$$(r+r_i)^2=R^2+r_i^2, r_i=\frac{R^2-r^2}{2r}$$

$(i=1,2,3)$.



$\therefore\quad A_1A_2=A_1A_3=A_2A_3=\frac{R^2-r^2}{r}$.

类似地可算出 $A_1A_4=A_2A_4=A_3A_4=\frac{R^2-r^2}{r}$.

故 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体.

情形 2　S_1、S_2、S_3、S_4 在 S 内与 S 相切.对这情形,用类似于情形 1 中的办法,可以算出

$$(r-r_i)^2=R^2+r_i^2,\ r_i=\frac{r^2-R^2}{2r}\qquad(i=1,2,3,4).$$

因而　$A_1A_2A_3A_4$ 是一个各边长都等于$\frac{r^2-R^2}{2r}$的正四面体.

18·16　已知:一个四面体 $SABC$,存在五个球,与四面体的棱 SA、SB、SC、AB、BC、CA 或其延长线相切.求证:(1)四面体 $SABC$ 是正四面体.(2)反之,每个正四面体必定存在五个这样的球.

(第 4 届国际数学奥林匹克,1962 年)

[证]　(1)首先确定球面和四面体 $S—ABC$ 的棱或其延长线在怎样的点相切?

不失一般性,就平面 ABC 来考察.

所设的五个球面与平面 ABC 分别交于某个圆,这些圆对于三角形 ABC 或为内切圆,或为旁切圆.

我们首先假定球面 k 和平面 ABC 在圆 k 相交,这个圆是$\triangle ABC$ 的内切圆,这个球面 k 和平面 SAB 或者在一个内切于$\triangle SAB$ 的圆 k_3 相交,或者在一个关于 AB 边的$\triangle SAB$ 的旁切圆 k_3' 相交.

若球面 k 与平面 SAB 相交于一个内切于$\triangle SAB$ 的内切圆,则球面 k 和平面 SBC 在一个圆相交,这个圆在$\triangle SAB$ 的边 SB 和 BC 的内切圆相切,因此,它也是$\triangle SBC$ 的内切圆,并且它和 SC 边也在内点相切.所以球面 k 和这四面体的所有棱都在内点相切,我们把这个球面记为 k_0,并称之为内切于各棱的球.

若球面 k 与平面 SAB 交于一个$\triangle SAB$ 关于 BC 的旁切圆,球面 k

和平面 SBC 相交于另一个圆,这个圆和 BC 边切于内点,而和 SB 的延长线相切,因此这个圆是$\triangle SBC$ 关于 BC 边的旁切圆,从而它和另一边 SC 的延长线也相切于一点,我们把这个球记为 k_s,并称之为旁切于棱的球.

下面假定球面 k 和平面 SBC 在圆 k_1 相交,且设圆 k_1 是在$\triangle ABC$ 中关于 BC 边的旁切圆,注意到此时球面与 AB 有公共点(切点),因此它和平面 SAB 相交于一个圆,显然这个圆是$\triangle SAB$ 关于 SB 边的旁切圆.这样,由于球 k 与棱 BC、SB 相切于其内点,则球面 k 与平面 SBC 相交于$\triangle SBC$ 的内切圆,因此这种情形与上面的情形相同,只是把顶点 S、A、B、C 的顺序换为 A、B、C、S,通过类似的方法交换,不难看出,所设的五个球,只能是一个内切于棱和四个旁切于棱的球.

下面证明:具有上述性质的四面体 $S—ABC$ 是正四面体.

球面 k_0 在点 A_1、B_1、C_1 依次和直线 SA、SB 和 SC 相切,球面 k_s 依次在点 A_2、B_2、C_2 和这些直线相切,两个球面和平面 ABC 相交于$\triangle ABC$ 的内切圆 k,两个球面和棱 AB、BC、CA 依次在 Z、X、Y 点相切.

对应于同一球面的切线性质有

$$\left.\begin{aligned}AA_1=AA_2=AZ=AY,\\ BB_1=BB_2=BZ=BX,\\ CC_1=CC_2=CX=CY.\end{aligned}\right\}\qquad ①$$

同样地还有 $SA_1=SB_1=SC_1$, $SA_2=SB_2=SC_2$. ②

又有 $SA_2=SA_1+AA_1+AA_2$, $SB_2=SB_1+BB_1+BB_2$,

$SC_2=SC_1+CC_1+CC_2$.

因此由①、②有 $AA_1=BB_1=CC_1$,

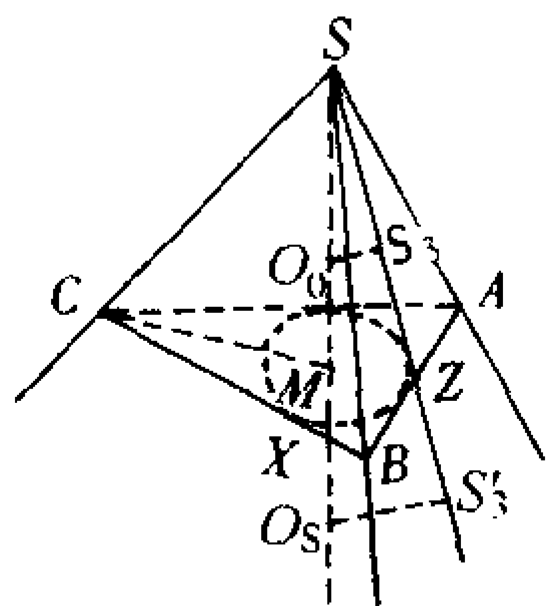
$$\left.\begin{aligned}SA=SA_1+AA_1,\\ SB=SB_1+BB_1,\\ SC=SC_1+CC_1.\end{aligned}\right\}\qquad ③$$

由②、③有 $SA=SB=SC$. ④

通过交换顶点,我们由④断定,由所给的四面体的任何一个顶点出发的所有棱长都相等,由此可得四面体 $S—ABC$ 的所有棱长都相等,即四面体 $S—ABC$ 是正四面体.

(2)设 $S—ABC$ 是一个正四面体,M 是$\triangle ABC$ 的中心,将平面

SAB 通过两次绕直线 SM 旋转，每次转 $120°$，分别得到平面 SBC 和平面 SAC，我们用 k_3 来记 $\triangle SAB$ 的内切圆，其圆心为 S_3，用 k_3' 来记关于 AB 边的 $\triangle SAB$ 的旁切圆，其圆心为 S_3'.



因为平面 SAB 包含直线 AB，而 AB 垂直于直线 CM，同时还垂直于 SM，于是平面 SAB 垂直于平面 SCM.

因此，通过点 S_3 且与平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于一点 O_0.

相应地，通过点 S_3' 且和平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于点 O_S.

球心为 O_0 的球面 k_0（以 O_0Z 为半径）必包含圆 k_3，且与 $\triangle SAB$ 的三边相切（因为从 O_0 到圆 k_3 上任一点的距离都等于 O_0Z，且 $O_0Z\perp AB$）.

同理，球面 k_0 也包含 $\triangle SBC$、$\triangle SCA$ 的内切圆且和这些三角形的各边相切，因此球面 k_0 是所作的五个球面之一.

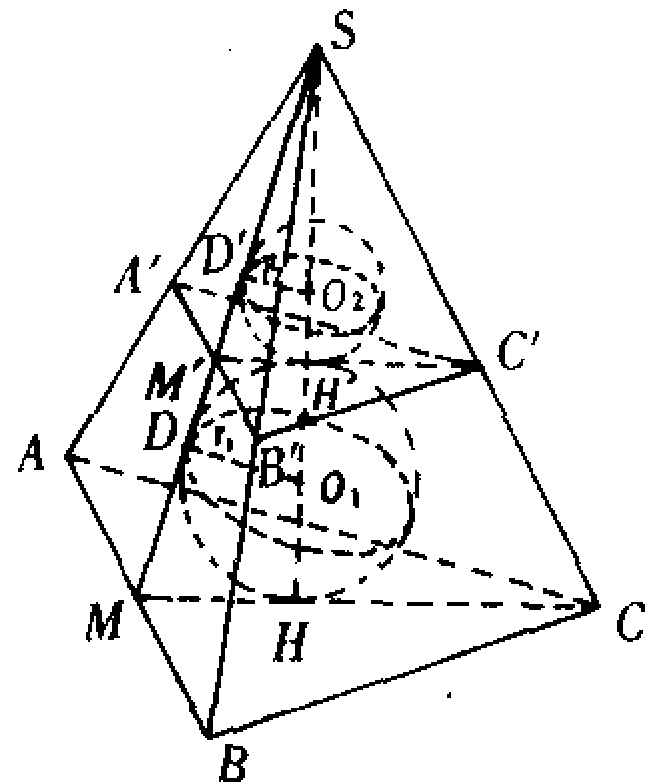
类似地可以证明：球心为 O_S 的球面 k_s 包含圆 k_3'，它也包含 $\triangle SBC$ 和 $\triangle SCA$ 的旁切圆，因此球面 k_s 是所作的五个球面的第二个.

如果依次用点 A、B、C 来代替点 S，那么可以得到另外三个旁切于棱的球，于是(2)得证.

18·17 正三棱锥的底面正三角形边长为 1，棱锥的高为 2. 在此棱锥内有一个内切球，又在它上面有一个和它外切并和棱锥各侧面相切的球，按照这个方法继续地把球堆上去，求：这些无限个球的体积总和.

（中国江苏省数学竞赛，1978 年）

［解］ 如图，先求正三棱锥的第一个内切球的半径 r_1，作剖面 SCM（其中 CM 是底面等边 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线，也是高，H 是重心），这时剖面过球心 O_1 的大圆切 CM 于 H，又切斜高 SM 于 D.



$\because$ $O_1D\perp SM$，$\therefore$ $\triangle SO_1D\backsim\triangle SMH$.

$$\therefore \quad \frac{r_1}{SH-r_1}=\frac{MH}{SM},$$

其中 $MH=\frac{1}{3}CM=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$,

且 $SM=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7}{6}\sqrt{3}$.

$\therefore\quad \frac{r_1}{2-r_1}=\frac{\frac{1}{6}\sqrt{3}}{\frac{7}{6}\sqrt{3}}$, 得 $r_1=\frac{1}{4}$.

再求第二个内切球的半径 r_2,作一平行于底且切于球的平面 $A'B'C'$,截得一个正三棱锥 $S-A'B'C'$,它的高

$$SH'=2-2r_1=2-2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2},$$

$\because\quad \triangle SMC\backsim\triangle SM'C'$, $\therefore\quad r_2:r_1=\frac{3}{2}:2$, 即 $r_2:r_1=\frac{3}{4}$.

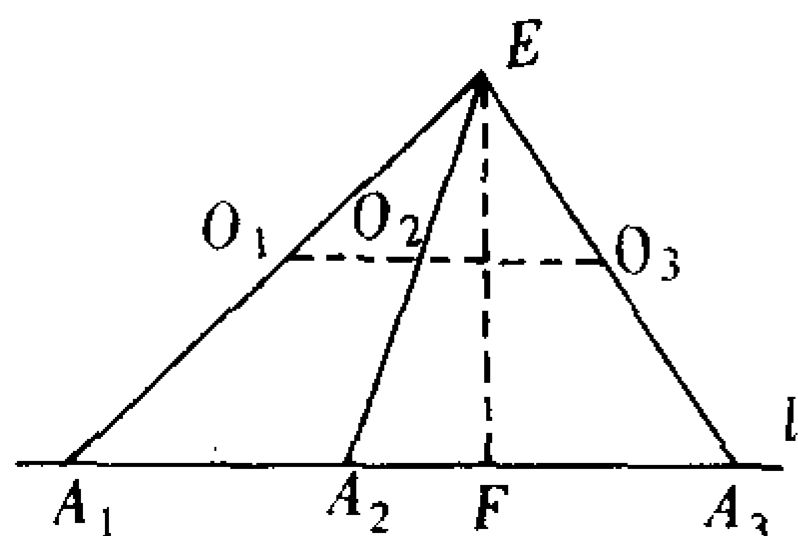
同理 $r_2:r_1=r_3:r_2=r_4:r_3=\cdots\cdots=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 球的体积总和 $=\frac{4}{3}\pi\sum_{i=1}^{\infty}r_i^3=\frac{4}{3}\pi(r_1^3+r_2^3+\cdots)$

$$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{37}=\frac{4\pi}{111}.$$

18·18 给出三个四面体 $A_iB_iC_iD_i(i=1,2,3)$,过点 B_i、C_i、D_i 作平面 α_i、β_i、$\gamma_i(i=1,2,3)$分别与棱 A_iB_i、A_iC_i、A_iD_i 垂直$(i=1,2,3)$. 如果九个平面 α_i、β_i、$\gamma_i(i=1,2,3)$相交于一点 E,而三点 A_1、A_2、A_3 在同一直线 l 上,求:三个四面体的外接球面的交集(形状怎样?位置如何)?

(第3届中国中学生数学冬令营,1988年)



[**解**] 连结 EA_i、EB_i、EC_i、$ED_i(i=1,2,3)$,则 $EB_i\perp AB_i$, $EC_i\perp AC_i$, $ED_i\perp AD_i$ $(i=1,2,3)$.

所以 A_i、B_i、C_i、D_i、E 五点共球且 A_iE 为此球的直径$(i=1,2,3)$. 从而 E 为所论三个外接球面的公共点.

记 A_iE 的中点为 O_i，则 O_i 为球心($i=1,2,3$). 记点 E 与直线 l 所确定的平面为 π.

在平面 π 上，过 E 作 $EF\perp A_1A_3$ 于 F，则 F 也是三个所论外接球面的公共点(如上图).

因为 A_1、A_2、A_3 三点共线，所以 O_1、O_2、O_3 三点共线，此直线在平面 π 上且平分 EF，亦即 F 为 E 关于直线 O_1O_3 的对称点.

因为三个球面都是关于直线 O_1O_3 旋转对称的，所以它们的交集也是关于直线 O_1O_3 旋转对称的.

过点 E 作平面 σ 垂直于直线 l. 当然也垂直于直线 O_1O_3 且点 F 在平面 σ 上.

因为 E 和 F 都在所论三个球面的交集中，所以，三个球面的交集是在平面 σ 上以 EF 为直径的圆周.

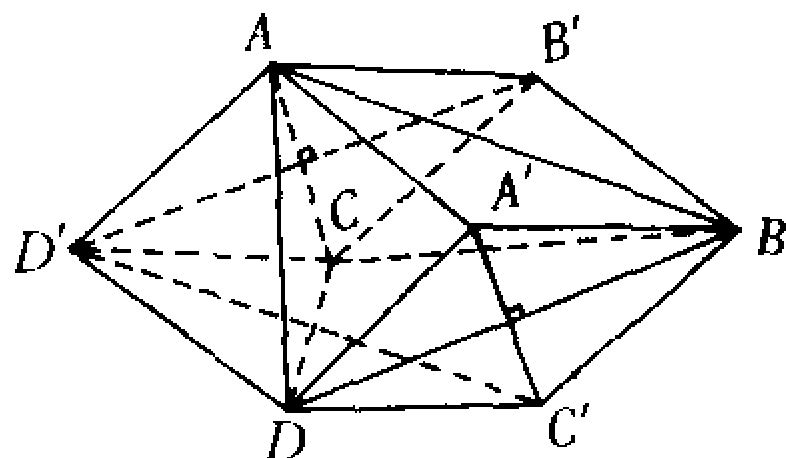
当点 E 在 l 上时，此圆退化为一点，即此时三个球面相切于点 E.

18·19　求证：如果四面体有两组相互垂直的对棱，则所有各棱的中点位于一个球面上.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1968 年)

[证]　设四面体的棱满足

$AC\perp BD$，$AD\perp BC$.



我们过四面体的每条棱作一个平行于对棱的平面，得到三对平行平面，它们构成一个平行六面体 $AB'CD'A'BC'D$(如图).

平行四边形 $AB'CD'$ 与 $A'BCD'$ 是菱形. 这是因为它们的对角线分别平行于互相垂直的直线 AC 与 BD.

同理，平行四边形 $AA'DD'$ 与 $BC'CB'$ 也是菱形.

因此，平行六面体中所有棱长都相等.

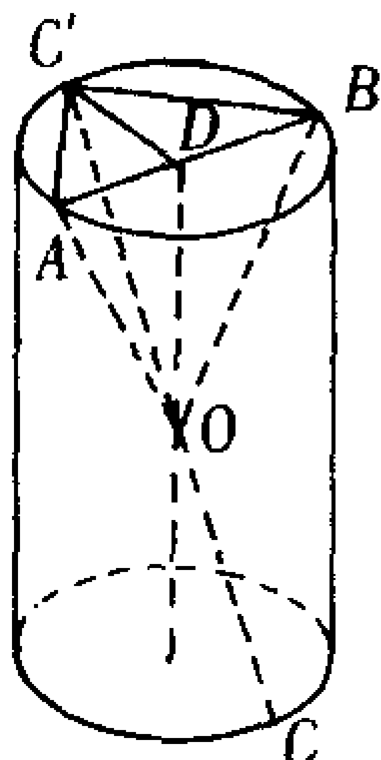
从平行六面体的对称中心 O 到四面体的任意一条棱的中点之距离等于平行六面体的棱长的一半，所以所有棱的中点在同一个球面上.

(二)圆柱、圆锥、圆台与球

18·20　在一个直圆柱体的底面圆周上取对径点 A 与 B. 在另一底面圆周上取一点 C，使得 C 不在平面 ABO 上，其中点 O 是圆柱体的

轴的中点. 证明:以 O 为顶点,OA、OB、OC 为棱的三面角中,诸二面角之和为 360°.

(第 23 届国际数学奥林匹克候选题,1982 年)



[证] 设 C'与 C 是关于 O 点的对称点.

如果三面角 $OABC$ 关于棱 OA、OB、OC 的二面角为 α、β、γ,则三面角 $OABC'$关于棱 OA、OB、OC'的二面角依次为

$$180°-\alpha,\ 180°-\beta,\ \gamma.$$

设 D 是以 AB 为直径的圆的圆心,因为棱锥 $OADC'$ 关于棱 OD 的二面角的平分平面对称,所以,棱锥 $OADC'$中关于棱 OA 与 OC'的二面角相等.

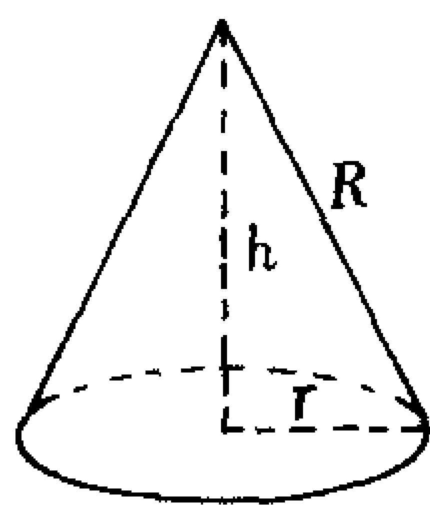
同理,在棱锥 $OBDC'$中,关于棱 OB 与 OC'的二面角也相等.

$\therefore\quad (180°-\alpha)+(180°-\beta)=\gamma,$

即 $\quad \alpha+\beta+\gamma=360°.$

18·21 由圆形金属薄板截取一个扇形,卷成无底圆锥(焊接处不重迭),使容积最大,求:扇形的圆心角的弧度数.

(中国福建省福州市数学竞赛,1962 年)



[解] 设所截扇形的圆心角为 α,则其弧长 $L=\alpha R$.

又设所作圆锥底面半径为 r,高为 h,体积为 V,

则 $\quad r=\dfrac{L}{2\pi}=\dfrac{\alpha R}{2\pi},$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R\ \sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{2\pi},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{R\ \sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{(4\pi^2-\alpha^2)\cdot\alpha^4}.$$

要使 V 最大,只要$(4\pi^2-\alpha^2)\cdot\alpha^4$ 最大.

而 $\quad (4\pi^2-\alpha^2)\cdot\alpha^4=\dfrac{1}{2}(8\pi^2-2\alpha^2)\cdot\alpha^2\cdot\alpha^2,$

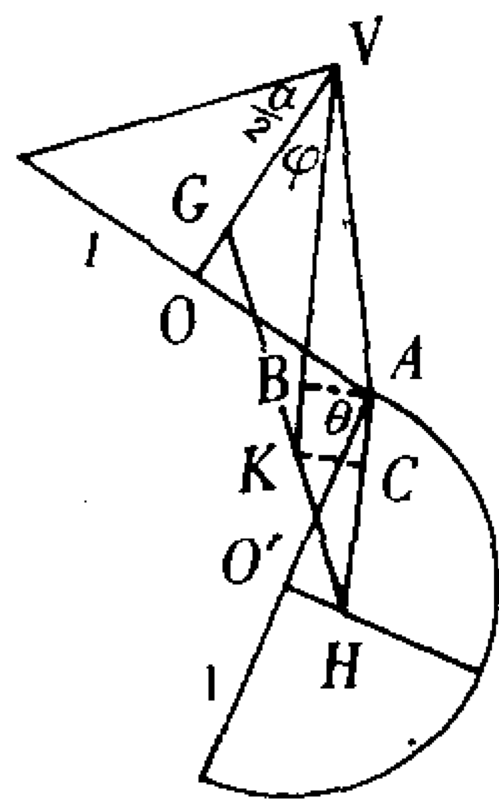
其中,$8\pi^2-2\alpha^2>0$,$\alpha^2>0$,且

$$(8\pi^2-2\alpha^2)+\alpha^2+\alpha^2=8\pi^2$$

为定值，∴ 当 $8\pi^2-2\alpha^2=\alpha^2$时，$V$ 最大.

即所截扇形圆心角 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 时，卷成的无底圆锥体积最大.

18·22 一个复合立体由均匀的正圆锥和同质的均匀半球体组成，锥的顶角是 α，锥底半径等于球半径. 锥和半球在锥底圆周和半球边缘的一个公共点上铰接在一起，使得铰链闭合时，两个立体的底面互相重合. 然后把整个复合体在锥顶悬挂起来，而使半球绕着铰链自由摆动. 试确定在平衡状态下（如图所示），锥轴与铅垂线所成的角 φ 和锥底面与半球底面所成的角 θ（已知锥和半球的重心分别按 1:3 和 3:5 分割轴线）.



（中国福建省数学竞赛，1978 年）

[解] 不妨设锥和球的半径是 1，G、H 和 K 分别表示圆锥、半球和整个复合体的重心，则 K 必在线段 GH 内，且

$$HK:KG=\text{圆锥体积}:\text{半球体积}=\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}:\frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore\quad HK=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot KG.$$

平衡时，AH 和 VK 都是铅垂线，从而 $AH/\!/VK$.

作 $AB\perp VK$ 于 B，$KC\perp AH$ 于 C，

则 $$AB=AV\sin\angle AVB=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right).$$

$$\begin{aligned}CK&=HK\sin\angle KHC\\&=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot GK\sin\angle GKV\\&=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot GV\sin\angle GVK\\&=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{3}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\\&=\frac{3}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi.\end{aligned}$$

$\because \quad AB = CK,$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\varphi\right)=\dfrac{3}{8}\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\varphi,$

即 $\cos\varphi-\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\varphi=\dfrac{3}{8}\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\varphi.$

于是 $\mathrm{ctg}\varphi=\dfrac{3}{8}\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. 由此可确定 φ.

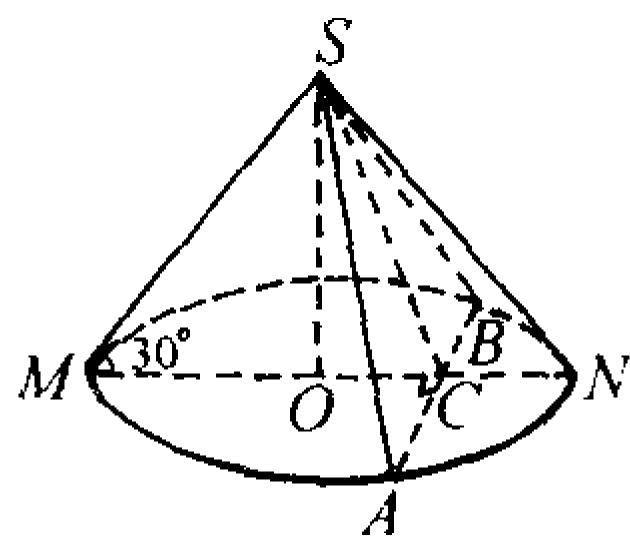
又 $\angle OAH=\theta+\angle O'AH=\varphi+\dfrac{\pi}{2},$

$\therefore \quad \theta=\varphi+\dfrac{\pi}{2}-\angle O'AH.$

这里$\angle O'AH$是已知角，φ已确定，所以θ也就确定了.

18·23 正圆锥的底面半径为3，母线与底面所成的角为30°，在这锥体内过锥顶且与高成30°角作一平面. 试求所得截面的面积.

（中国江苏省南京市数学竞赛，1957年）



[解] 如图，$SO=OM\mathrm{tg}30°=\sqrt{3}$，$OC=SO\mathrm{tg}30°=1$，

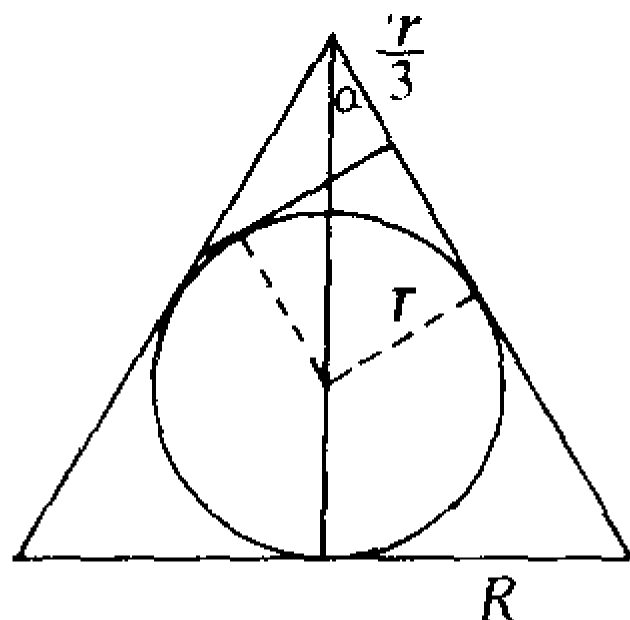
$AB=2AC=2\sqrt{OA^2-OC^2}=4\sqrt{2},$

$SC=\dfrac{SO}{\cos30°}=2,$

$\therefore$ 所求的截面积$=\dfrac{1}{2}AB\cdot SC=4\sqrt{2}.$

18·24 一正圆锥体有一半径为r的内切球，如果已知一个与这球相切，并且与圆锥一母线垂直的平面到锥顶的距离为$\dfrac{1}{3}r$，求：这圆锥的体积.

（中国湖北省武汉市数学竞赛，1957年）



[解] 作正圆锥的轴截面如图，则

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{r}{r+\dfrac{r}{3}}=\frac{3}{4},$$

且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}.$

设底面半径为 R,高为 h,则

$$\frac{R}{\sin\alpha}=R+\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\therefore\quad R=2r.\ 则\quad h=\frac{R}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4}{3}R=\frac{8}{3}r.$$

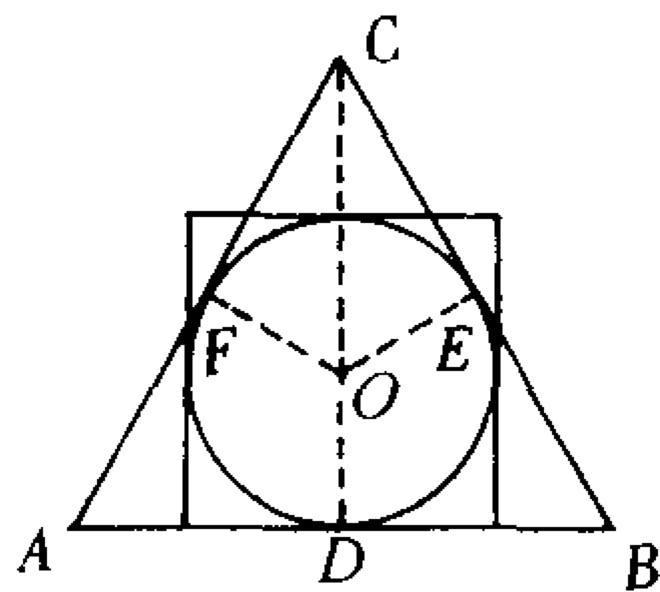
故 $\quad V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{32}{9}\pi r^3.$

18·25 已知:一个正圆锥,它有一个内切球,这个球又有一个外切直圆柱,该圆柱的一个底面在圆锥的底面上,设圆锥的体积为 V_1,圆柱的体积为 V_2.(1)证明:等式 $V_1=V_2$ 不可能成立.(2)求出能使等式 $V_1=kV_2$ 成立的最小值 k,在这种情况下,作出这个圆锥轴截面的顶角.

(第 2 届国际数学奥林匹克,1960 年)

[解] (1)作轴截面 ABC,如图,CD 为轴,OE 为圆锥内切球的半径.

设圆锥的底面半径为 r_1,高为 h,内切球半径为 r_2.则



$$AD=BD=r_1,\quad OD=OE=OF=r_2,$$

$$CD=h.$$

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2h,\quad V_2=2\pi r_2^3.$$

下面探求 r_1 和 r_2 的关系.

$\because\quad \text{Rt}\triangle CDB\backsim\text{Rt}\triangle CEO,$

$$\therefore\quad \frac{BD}{OE}=\frac{CB}{CO}.\ 即\quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{r_1^2+h^2}}{h-r_2},$$

有 $\quad r_1^2h^2-2hr_1^2r_2=r_2^2h^2.$

$\because\quad h\neq 0,\ \therefore\quad r_1^2(h-2r_2)=r_2^2h.$

由题设可知,$h>2r_2$,于是 $\quad r_1^2=\dfrac{r_2^2h}{h-2r_2},$

$$\therefore\quad V_1=\frac{\pi r_2^2h^2}{3(h-2r_2)}.$$

假设 $\quad V_1=V_2$ 成立,则有 $\dfrac{\pi r_2^2h^2}{3(h-2r_2)}=2\pi r_2^3,$

即 $h^2-6r_2h+12r_2^2=0$, ①

其判别式 $\Delta=36r_2^2-48r_2^2=-12r_2^2<0$.

所以关于 h 的二次方程①无实根,因而 $V_1=V_2$ 不可能成立.

(2)设 $V_1=kV_2$,则由(1)有

$$\frac{\pi r_2^2h^2}{3(h-2r_2)}=k\cdot 2\pi r_2^3,$$

整理得 $h^2-6kr_2h+12kr_2^2=0$. ②

这个关于 h 的二次方程有实根的充分必要条件是

$$\Delta=(-6kr_2)^2-4(12kr_2^2)\geqslant 0,$$

即 $k(3k-4)\geqslant 0$.

$\because$ $k>0$, $\therefore$ $3k-4\geqslant 0$, 或 $k\geqslant\frac{4}{3}$.

于是,使 $V_1=kV_2$ 成立的最小值为 $k=\frac{4}{3}$.

在这种情况下,即 $k=\frac{4}{3}$时,由方程②得 $h=4r_2$.

由此可得到这个圆锥的轴截面顶角的作法:

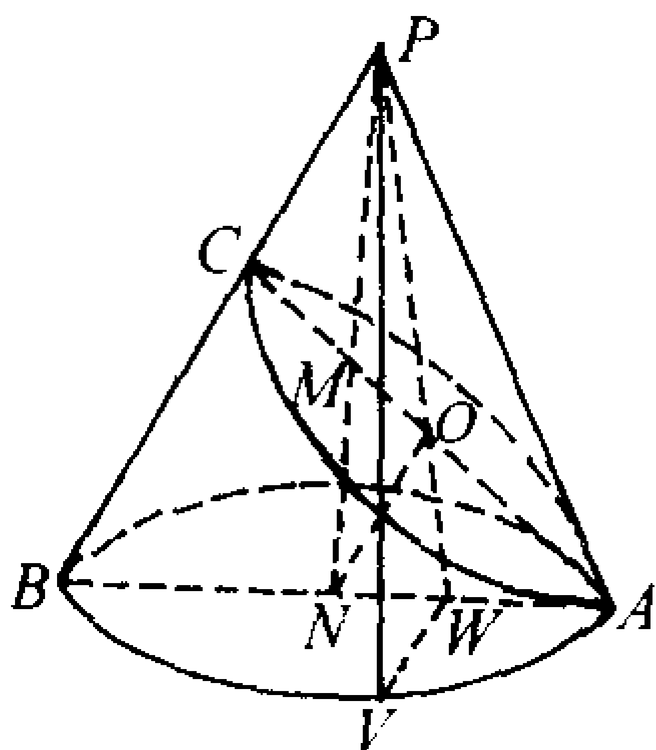
(i)任取一线段 r_2,作 $CD=4r_2$,并在 CD 上截取 $OD=r_2$;

(ii)以 O 点为圆心,r_2 为半径作圆;

(iii)过 C 点作圆 O 的切线 CE、CF,则$\angle ECF$ 就是当 $k=\frac{4}{3}$时,圆锥轴截面的顶角.

18·26 一个平面分一个直圆锥为两部分,这截面与圆锥底面圆周相切并且过高的中点,求:较小部分体积与整个圆锥体积之比.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)



[解] 设圆锥底面半径为 1,高为 h.这个平面截圆锥面得一个椭圆.

设椭圆长轴上的端点为 A、C,A 在底面圆周上,设 B 是底面圆周上 A 的对径点,N 为圆锥的高的垂足,P 是圆锥的顶点,M 是 PN 的中点,O 是 AC 的中点(O 也是椭圆的中心),在椭圆上取点 U,使 OU 为半短轴,延长 PU 交底面于 V,延长 PO 交底面于 W.显然

$VW \perp AB$，$OU \perp CA$.

连 ON，则 $ON /\!/ BC$，由于 M 是 PN 的中点，所以 M 也是 OC 的中点.

$$\therefore \quad OM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA. \quad \text{于是 } O \text{ 是} \triangle PAN \text{ 的重心.}$$

下面我们来求体积.

设 d 是 P 到 AC 的距离，上面部分的体积为 $V_{上}$，下面部分的体积为 $V_{下}$，整个圆锥的体积为 V. 则

$$V_{上} = \frac{\pi d \cdot OA \cdot OU}{3}.$$

而 $d \cdot OA$ 是 $\triangle PCA$ 的面积，也是 $\triangle PAB$ 的面积的 $\frac{1}{3}$ $\left(\text{因为 } PC = ON = \frac{1}{2}BC\right)$，

$$\therefore \quad V_{上} = \frac{\pi h \cdot OU}{9}, \quad \text{则} \quad \frac{V_{上}}{V} = \frac{OU}{3}.$$

由 $\triangle POU \backsim \triangle PWV$ 得 $\dfrac{OU}{VW} = \dfrac{PO}{PW} = \dfrac{2}{3}$.

又由勾股定理有

$$VW = \sqrt{NV^2 - NW^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故 $OU = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 从而 $\dfrac{V_{上}}{V} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

即较小部分与整个圆锥的体积之比为 $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

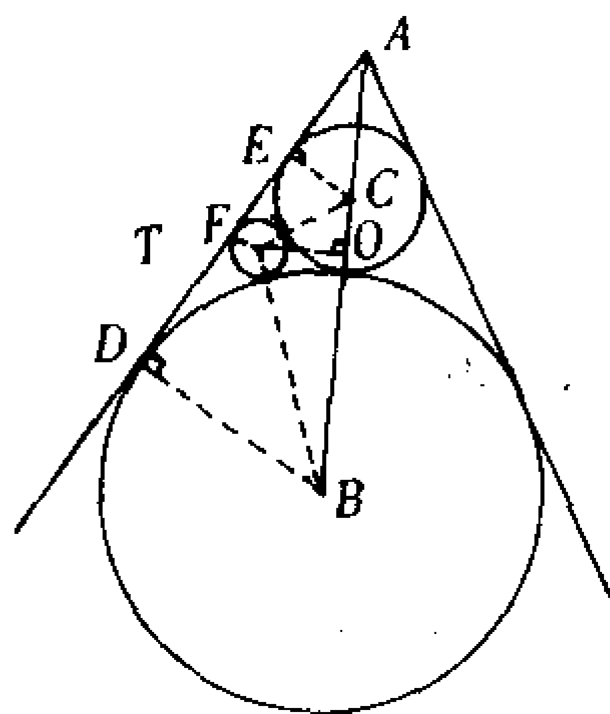
18·27 设 S_1 与 S_2 为两个半径不同的球，互相外切，这两个球在一个圆锥 C 内并且与锥相接触的部分都是一个完整的圆. 在锥内还有 n 个实心球，围成一圈，每一个球与锥 C 相切，并且与 S_1、S_2 外切，每两个实心球也互相外切. 求：n 的所有可能的值.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

[解] 设 S_1 和 S_2 的半径为 R 和 r，实心球的半径为 x.

$$DE^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr,$$

$$DE = 2\sqrt{Rr}.$$



同理可得　$DF=2\sqrt{Rx}$，$EF=2\sqrt{rx}$.

由 $DE=DF+FE$　得

$$\sqrt{Rr}=\sqrt{Rx}+\sqrt{rx},$$

从而有　$\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$.　　①

所以各实心球的半径都相等,且球心均在与圆锥的轴垂直的一个平面上.这是因为球心在 AB 上的射影是同一点 O,这些球心均在以 O 为圆心,以 y 为半径的圆上.

$\because$　$S_{DBCE}=S_{DBTF}+S_{ECTF}+S_{\triangle TBC}$

$\therefore$　$(R+r)\sqrt{Rr}=(x+r)\sqrt{xr}+(x+R)\sqrt{Rx}+\dfrac{1}{2}(R+r)y$.　　②

故由①、②得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y(R+r)&=(R+r)\sqrt{Rr}-x\sqrt{x}(\sqrt{R}+\sqrt{r})\\&\quad-r\sqrt{rx}-R\sqrt{Rx}\\&=(R+r)\sqrt{Rr}-x\sqrt{Rr}-\sqrt{Rr}(R+r-\sqrt{Rr})\\&=Rr-x\sqrt{Rr}\\&=x(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2-x\sqrt{Rr}\\&=x(R+r+\sqrt{Rr}).\end{aligned}$$

注意到实心球的球心构成以 O 为圆心,以 y 为半径的圆内接正 n 边形的顶点,且该正 n 边形的边长为 $2x$.于是

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{x}{y}=\frac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})}$$

$\because$　$\dfrac{1}{2}>\dfrac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})}>\dfrac{R+r}{3(R+r)}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$　$\dfrac{1}{3}<\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{2}$.

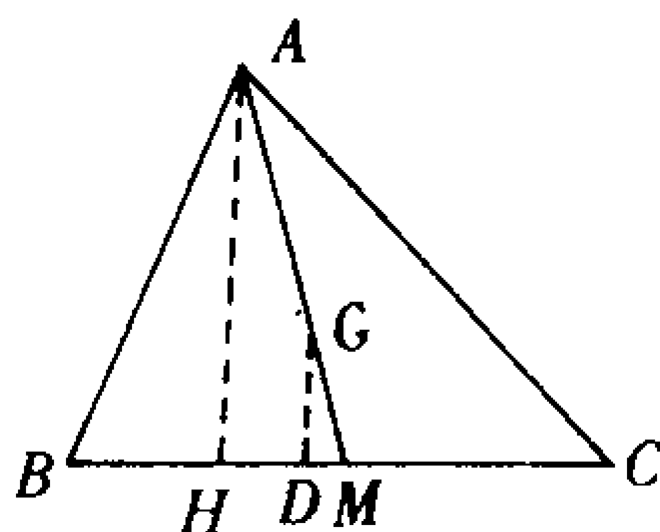
从而有　$\dfrac{\pi}{10}<\arcsin\dfrac{1}{3}<\dfrac{\pi}{n}<\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

于是　$n=7,8,9$.

18·28 在锐角$\triangle ABC$中，若$AB=c$，又$AC=b$，且$\angle BAC=\alpha$，同时M为BC的中点，G为三角形的重心.(1)求证：G到BC的距离为$\dfrac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$；(2)求以$\triangle ABC$的边$BC$为轴旋转而成的旋转体的表面积和体积.

（中国四川省重庆市数学竞赛，1978年）

[证] (1)作$GD\perp BC$交BC于D，作$AH\perp BC$，交BC于H.



$\because$ $GD/\!/AH$，

$\therefore$ $GD:AH=MG:MA$.

$\because$ G为三角形的重心，

$\therefore$ $MG:MA=1:3$，$\therefore$ $GD:AH=1:3$，

故 $GD=\dfrac{1}{3}AH$.

$\because$ $\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$，$\therefore$ $AH=\dfrac{bc\sin\alpha}{BC}$.

$\because$ $BC^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

$$\therefore\quad GD=\frac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}=\frac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}}=\frac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}.$$

[解] (2)根据(1)的证明，得旋转体的表面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi AH(b+c)=\frac{\pi(b+c)bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}.$$

旋转体的体积

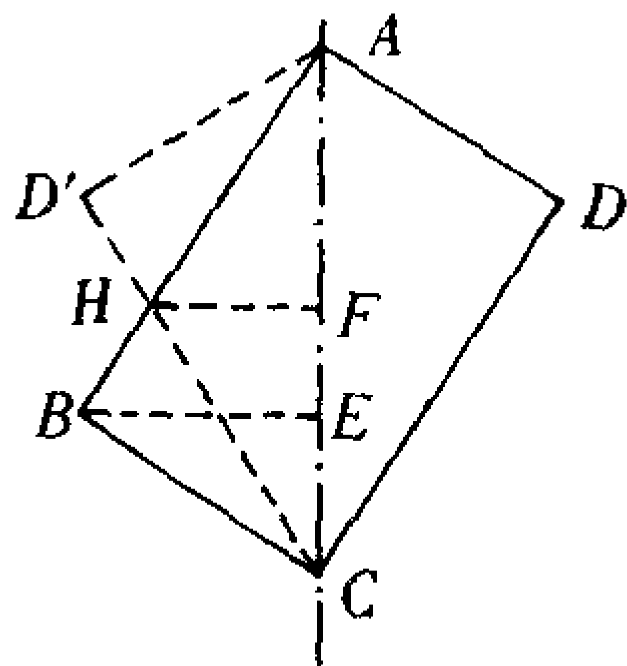
$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot BC=\frac{\pi b^2c^2\sin^2\alpha\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{3(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)}.$$

18·29 长为$\sqrt{2}$、宽为1的矩形，以它的一条对角线所在的直线为

轴旋转一周，求得到的旋转体的体积.

（中国高中数学联赛，1988 年）

[解] 如图，D'是点D关于AC的对称点，CD'交AB于H，作$BE\perp AC$于点E，$HF\perp AC$于点F.



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3},$$

$$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$HF=\frac{BC\cdot AF}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

设$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle AHC$绕直线AC旋转所成旋转体的体积分别为V_1、V_2、V_3，则有

$$V_1=V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot BE^2=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi,$$

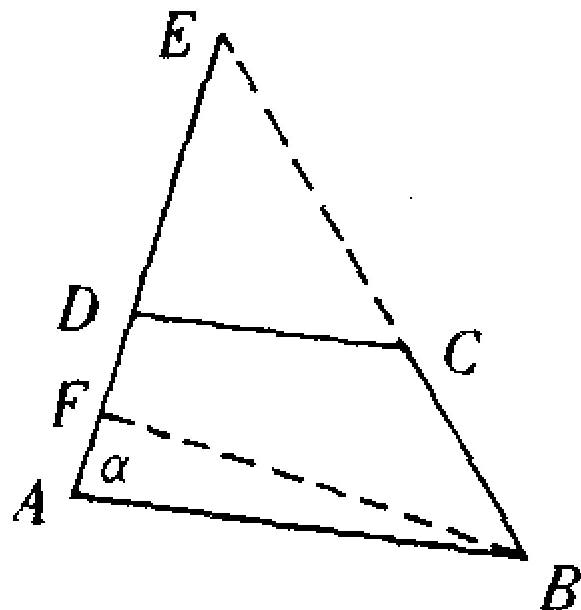
$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot HF^2=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi.$$

所求体积 $V=V_1+V_2-V_3=2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi=\frac{23\sqrt{3}}{72}\pi.$

18·30 一梯形的上底为a，下底为$2a$，一腰长为b，并且这腰和下底的夹角为α（α是锐角）. 如果以这个腰为轴把梯形旋转一周，求：所成的旋转体的体积.

（中国北京市数学竞赛，1963 年）

[解] 设梯形$ABCD$的两腰AD、BC的延长线相交于E，以AE为轴把$\triangle ABE$旋转一周所得的旋转体体积为V_1，以AE为轴把$\triangle DCE$旋转一周所成的旋转体的体积为V_2.



$\because$ $AB /\!/ DC$，

$\therefore$ $\frac{ED}{EA}=\frac{DC}{AB}=\frac{1}{2}$，

即 $AE=2ED=2b$.

作 $BF\perp AE$，交AE于F，

于是 $BF=AB\cdot\sin\alpha=2a\sin\alpha$，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi BF^2\cdot FE+\frac{1}{3}\pi BF^2\cdot AF$$

$$=\frac{1}{3}\pi BF^2\cdot AE=\frac{1}{3}\pi(2a\sin\alpha)^2\cdot 2b$$
$$=\frac{8}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha.$$

同理得 $V_2=\frac{1}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha.$

∴ 所求体积 $V=V_1-V_2=\frac{7}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha.$

18·31 一个直角三角形绕它的一条直角边旋转所得的圆锥体积是 $800\pi\text{cm}^3$，绕它的另一条直角边旋转所得的圆锥体积是 $1920\pi\text{cm}^3$，这个三角形的斜边长度是多少(以 cm 为单位)?

(第 3 届美国数学邀请赛，1985 年)

[解] 设 a、b 为这个直角三角形的两条直角边，由题意有

$$\begin{cases}\dfrac{\pi ba^2}{3}=800\pi & ①\\ \dfrac{\pi b^2 a}{3}=1920\pi & ②\end{cases}$$

①×②得 $a^3b^3=9\times 8\times 192\times 10^3$

有 $ab=240.$ ③

①+②得 $ab(a+b)=3(800+1920)$

将③代入得 $a+b=34.$ ④

由③和④得 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=676.$

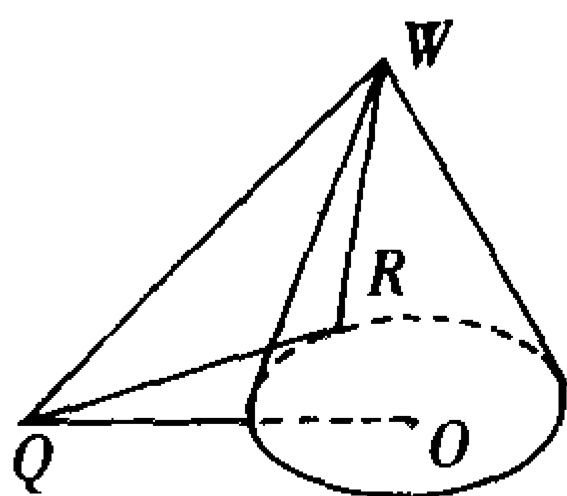
于是 直角三角形的斜边 $c=\sqrt{a^2+b^2}=26(\text{cm}).$

18·32 在一条与球 K 无公共点的直线上给定两点 A 和 B，由球心 K 向直线 AB 所作的垂线的垂足 P 位于点 A、B 之间，并用线段 AP 和 BP 都大于球的半径，我们来考察所有的两边 AC、BC 与球 K 相切的 $\triangle ABC$ 所形成的集合 Z. 试证：当且仅当三角形 T 是集合 Z 中具有最大面积的三角形时，它是集合 Z 中具有最大周长的三角形.

(波兰数学奥林匹克，1971 年)

[证] 首先证明下面的引理：

设 W 是圆锥的顶点，O 是圆锥底面的中心，Q 是圆锥底面所在平面上一点，那么当 O 在直线 QR 上时，直线 WQ 与母线 WR 的夹角取最大值.



引理的证明：

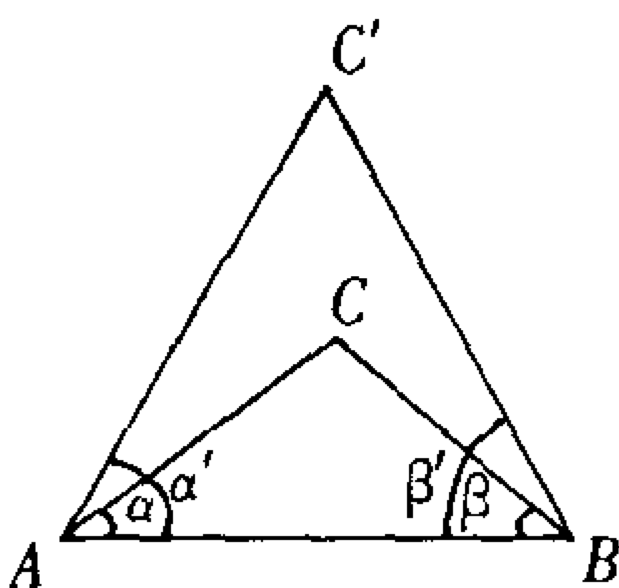
对于底面圆上任何一点 R，按照余弦定理

$QR^2 = WR^2 + WQ^2 - 2WR \cdot WQ\cos\angle QWR$.

由于线段 WR 和 WQ 为定值，则当 QR 取得最大值时，$\cos\angle QWR$ 取得最小值，从而 $\angle QWR$ 最大，显然，当 QR 过 O 时，QR 最大.

下面证明本题. 设 $\triangle ABZ'$ 是集 Z 中的一个包含球 K 的中心 O 的三角形，显然集 Z 中存在这样的三角形，设 $\alpha' = \angle BAC'$，$\beta' = \angle ABC'$.

类似地，对集 Z 中任何一个三角形 ABC，设 $\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle ABC$.



因为 AC 是球 K 的切线，所以它是以 AO 为轴的直圆锥的母线，因此由引理知 $\alpha' \geqslant \alpha$，同理有 $\beta' \geqslant \beta$.

将 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle ABC$ 放在同一个平面上，容易看到有

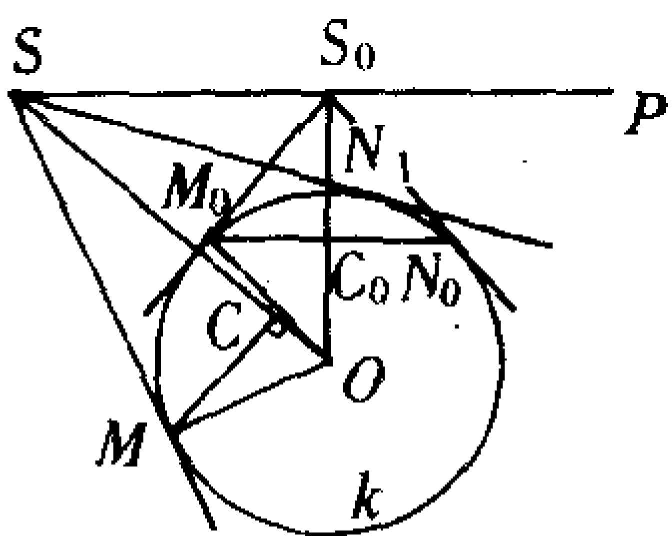
$$\triangle ABC \subset \triangle ABC'.$$

而且这两个三角形有公共底边.

因此 $\triangle ABC'$ 的面积和周长均不小于 $\triangle ABC$ 的面积和周长.

18·33　已知：一个半径为 R 的球及一个与球无公共点的平面 α_0 有一个圆锥，顶点 S 在平面 α 上运动，并且与球切于中心是点 C 的圆. 求：点 C 的几何轨迹.

（波兰数学奥林匹克，1955 年）



[解]　设由球心 O 向平面 α 所作垂线的垂足是 S_0.

在平面 α 上取异于 S_0 的点 S.

平面 S_0OS 垂直于平面 α，设与平面 α 交于直线 p，又设平面 S_0OS 与已知球交于圆 k，则 k 的半径为 R.

与顶点在 S 且和已知球相切的圆锥交于圆 k 的两条切线 SM 和 SN. 圆锥与球相切的切口圆之中心与弦 MN 的中点 C 重合.

当点 S 沿直线 p 运动时，点 C 将描划出某条曲线 l，点 C 在空间中的几何轨迹是曲线 l 绕直线 OS_0 旋转生成的曲面，因此本题归结为

寻求曲线 l.

由点 S_0 作圆 k 的切线 S_0M_0 和 S_0N_0,设 C_0 是弦 M_0N_0 的中点,则在直角$\triangle OMS$ 和$\triangle OM_0S_0$ 中有

$$OC\cdot OS=OM^2=R^2,$$
$$OC_0\cdot OS_0=OM_0^2=R^2.$$

$$\therefore\quad OC\cdot OS=OC_0\cdot OS_0,\ \frac{OC}{OC_0}=\frac{OS_0}{OS}.$$

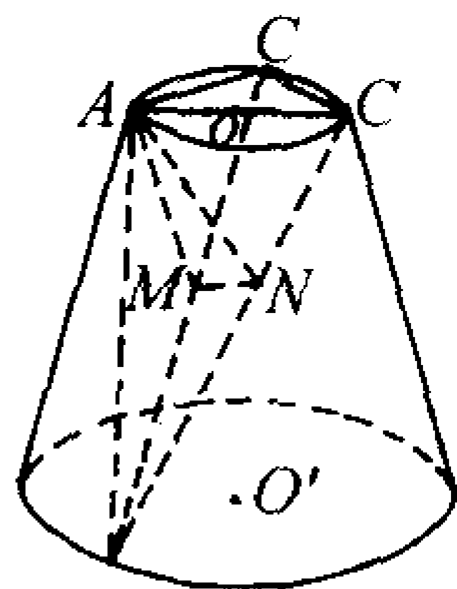
而 $\dfrac{OC}{OC_0}=\cos\angle SOS_0=\cos\angle COC_0$,

$$\therefore\quad OC=OC_0\cos\angle COC_0.$$

因此,点 C 是由点 C_0 到直线 OS 的垂线的垂足,即$\angle OCC_0$ 是直角.

当点 S 沿直线 p 运动时,点 C 沿以 OC_0 为直径的圆运动,并且它经过这圆上除 O 以外的一切点,因此,点 C 在圆 k 所在的平面上的几何轨迹是以 OC_0 为直径的圆(除去点 O),因而点 C 在空间中的几何轨迹是以 OC_0 为直径的球(除去点 O).

18·34 如图,AB 是圆台上底面⊙O 的直径,C 是⊙O 上不同于 A、B 的一点,A'是下底面⊙O'上的一点,过 A'、A、C 的截面垂直于下底面,M 为 $A'C$ 的中点.又 $AC=AA'=2$,$\angle A'AC=120°$,$\angle BA'C=30°$.(1)求证:$AM\perp$平面 $A'BC$;(2)求二面角 $A-A'B-C$ 的大小.



(中国湖南省数学竞赛,1998 年)

[解] (1)由设 $AC=AA'=2$, 且$\angle A'AC=120°$,知 $A'C=2\sqrt{3}$.

$\because$ M 是$A'C$ 的中点, $\therefore$ $AM=1$,且 $AM\perp A'C$.

又$\because$ 平面 $A'AC\perp$下底面, $\therefore$ 平面 $A'AC\perp$平面 ABC.

$\because$ C 是⊙O 上异于A、B 的一点,则 $BC\perp AC$,

$\therefore$ $BC\perp$平面 $A'AC$. 故 $BC\perp AM$.

因此 $AM\perp$平面 $A'BC$.

(2)作 $MN\perp A'B$ 于N,连 AN.则由三垂线定理知$\angle MNA$ 为二面角 $A-A'B-C$ 的平面角.

又由 $BC\perp$平面 $A'AC$, 知 $BC\perp A'C$.

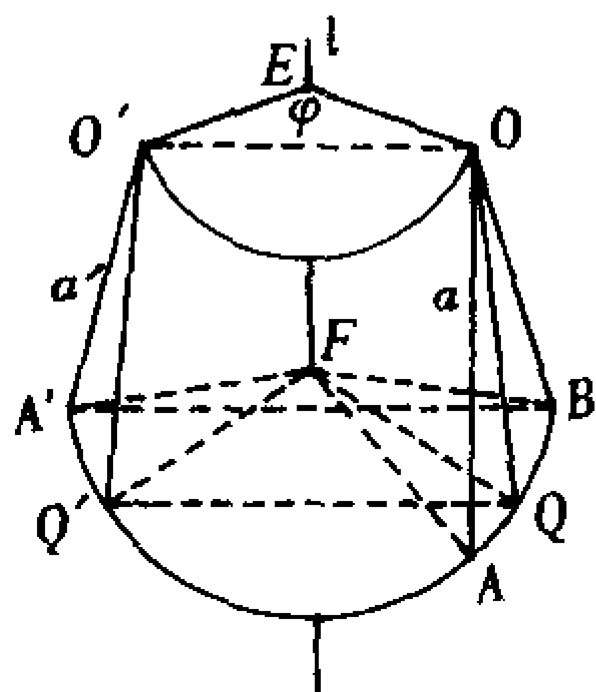
而 $\angle BA'C=30°$，在 Rt$\triangle A'CB$ 中,可得 $BC=2$.

从而 $MN=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore$ $\text{tg}\angle ANM=\frac{AM}{MN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故二面角 $A-A'B-C$ 的大小为 $\text{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18·35 设 AX 与 BY 为两条射线,不共面,并且都与 AB 垂直.在 AX、BY 上分别取 M、N,使 $AM+BN=MN$.证明:存在无限多个绕一不过 M 的固定轴 l 的旋转,使 AX 旋转后与 MN 共面.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)



[证] 我们先证明下述命题:

设 a、b 为两条相交直线,则存在平面 α,使得 α 绕平面 a 内任意一条直线 l 作旋转,不论转到什么位置都与 b 共面.

事实上,a 和 b 夹角的平分面 α 就具有所述性质.证明如下:

设 a、b 相交于 O,l 为平面 α 内任意直线.

若 $O\in l$,则命题显然成立.

若 $O\notin l$,过 O 作平面 $\beta\perp l$,交 l 于 E,又过 l 上另一点 F 作平面 $\gamma\perp l$,交 a 于 A,交 b 于 B,由对称性,显然有 $FA=FB$.

在平面 γ 内以 F 为心,FA 为半径作$\odot F$,交平面 α 于 Q,则 FQ 平分$\angle AFB$,OQ 绕 l 旋转得一圆台,上底是以 E 为心,EO 为半径的$\odot E$,下底为$\odot F$.

设 a 绕 l 旋转 φ 角成为 a',则 O 成为 a' 与$\odot E$ 的交点 O',A 成为 a' 与$\odot F$ 的交点 A',而 Q 成为$\odot F$ 上的点 Q',并且

$$\angle OEO'=\angle AFA'=\angle QFQ'=\varphi.$$

$\because$ $\angle A'FQ'=\angle AFQ=\angle QFB$, $\therefore$ $A'B/\!/Q'Q$.

又$\because$ OQ 与 $O'Q'$ 为同一圆台的母线, $\therefore$ 有 $OO'/\!/QQ'$.

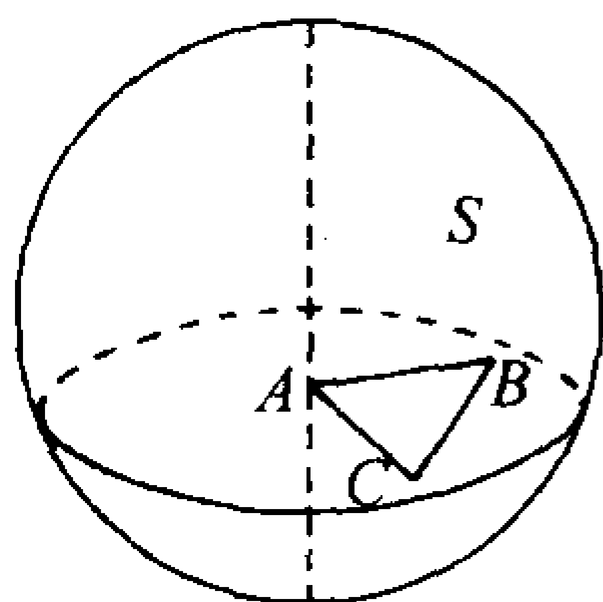
于是 $OO'/\!/A'B$. 即 a' 与 b 共面.

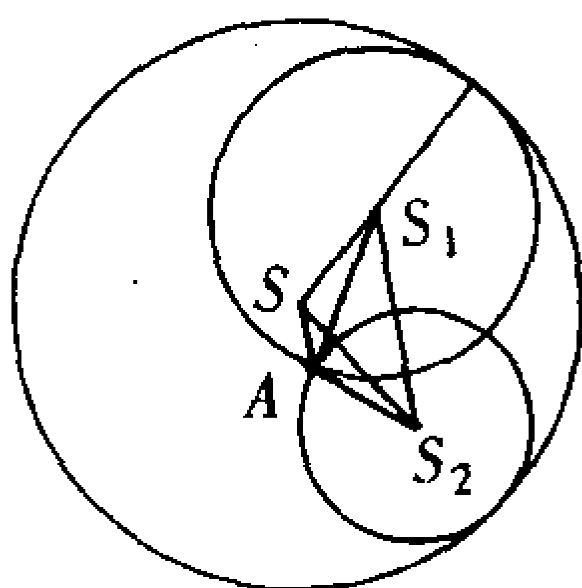
(三)球与其他

18·36　已知:点 A、B、C 为球 S 内三点,且 AB、AC 垂直于 S 的过 A 点的直径,过 A、B、C 可作两个球均与 S 相切.试证:它们的半径之和等于 S 的半径.

(第 11 届美国数学奥林匹克,1982 年)

[证]　设所作的两个球的球心为 S_1、S_2.



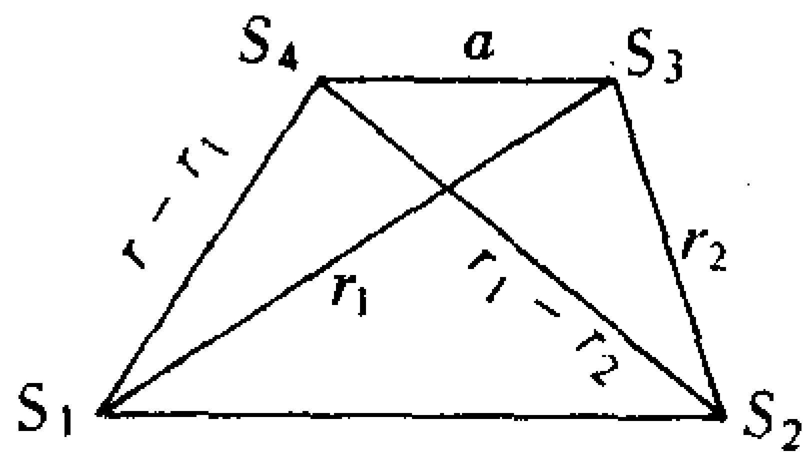


因为 S_1 过 A、B、C 三点,所以 S_1 在过 $\triangle ABC$ 的外心并且与 $\triangle ABC$ 所在的平面垂直的直线 OD 上,同样 S_2 也在 OD 上.

因为由已知　$SA \perp$ 平面 ABC,　$\therefore$　$SA /\!/ OD$.

过 SA 与 OD 作一平面 M,平面 M 与球 S、S_1、S_2 相截得$\odot S$、$\odot S_1$、$\odot S_2$,并且$\odot S_1$ 和$\odot S_2$ 都与$\odot S$ 相切,点 A 是$\odot S_1$ 与$\odot S_2$ 的一个交点.

设$\odot S$、$\odot S_1$、$\odot S_2$ 的半径分别为 r、r_1、r_2,问题转化为 $r = r_1 + r_2$.



考虑如图的梯形 SS_1S_2A.

$\because$　$\odot S_1$ 过 A,　$\therefore$　$S_1A = r_1$.

$\because$　$\odot S_1$ 与$\odot S$ 相切,

$\therefore$　$SS_1 = r - r_1$.

同理,$S_2A = r_2$,$SS_2 = r - r_2$.

注意到$\triangle S_1SA$ 与$\triangle S_2SA$ 有一条公共边 $SA = a$,并且它们的周长为

$$a + (r - r_1) + r_1 = a + (r - r_2) + r_2 = a + r.$$

设　$\triangle S_1SA$ 和$\triangle S_2SA$ 相同的周长为　$2p = a + r$.

$\because\quad S_1S_2 /\!/ SA,\quad \therefore\quad \triangle S_1SA$ 与 $\triangle S_2SA$ 的面积相等.

由三角形的面积公式得

$$p(p-a)(p-r_1)[p-(r-r_1)]$$
$$=p(p-a)(p-r_2)[p-(r-r_2)]$$

即 $(p-r_1)[p-(r-r_1)]=(p-r_2)[p-(r-r_2)]$.

化简后有 $r_1(r-r_1)=r_2(r-r_2)$,

即 $(r_1-r_2)(r-r_1-r_2)=0$,

得 $r_1=r_2$ 或 $r=r_1+r_2$.

当 $r_1=r_2$ 时,$\triangle AS_1S_2$ 与 $\triangle OS_1S_2$ 都是以 S_1S_2 为底的等腰三角形,并且底 S_1S_2 上的高相等.

所以 O 与 A 重合,此时 $r-r_1=r-r_2$,

即 $r_1=r_2=\dfrac{r}{2}$. 也有 $r=r_1+r_2$.

从而总有 $r=r_1+r_2$.

18·37 在半径为 1 的球中有内接正 12 面体(正 12 面体关于球心对称),求:这正 12 面体所有顶点间的距离的平方和.

(日本数学奥林匹克,1991 年)

[解] 设 P、Q 为正 12 面体的两个顶点,P'、Q'分别是它们的对称顶点,则 $PP'=2$, $QQ'=2$.

且 $PQ^2+P'Q^2=PP'^2=4$,

又 $P'Q^2+P'Q'^2=QQ'^2=4$.

由于正 12 面体的顶点有 20 个,所以对称顶点间的距离平方和为 40.

非对称顶点间的距离平方和满足

$$2\sum PQ^2=4\times \text{非对称顶点}(P,Q)\text{的对数},$$

$\therefore\quad \sum PQ^2=2(C_{20}^2-10)=360$.

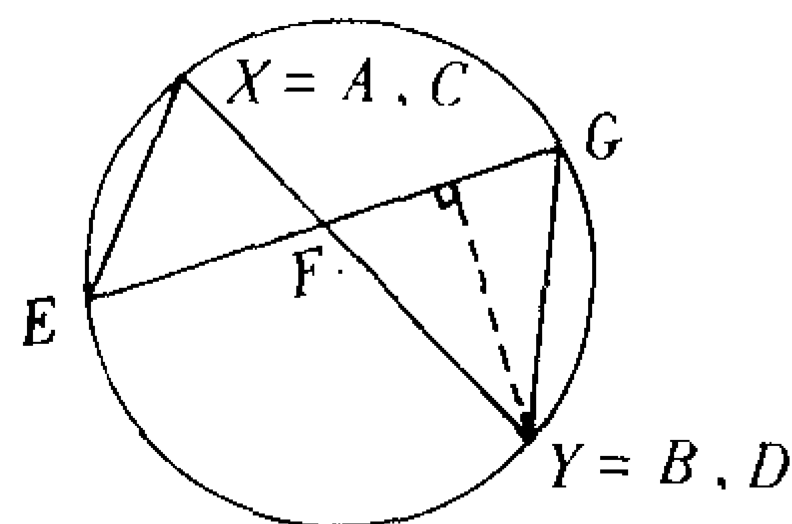
所以,该正 12 面体所有顶点间的距离平方和为 $360+40=400$.

18·38 在球面上选取点 A、B、C、D 和 E,使得线段 AB 和 CD 相交于 F,而点 A、C、F 分别与点 E 等距.试证:直线 BD 和 EF 互相垂直.

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[证] 设 G 是射线 EF 与球面的交点,而线段 XY 表示 AB 或 CD

中的任意一条，我们证明点 Y(从而直线 BD)在线段 FG 的中垂面(即垂直于线段 FG 且过其中点的平面)上.



事实上，X、E、Y、G 四点共圆——球的截面 XEF.

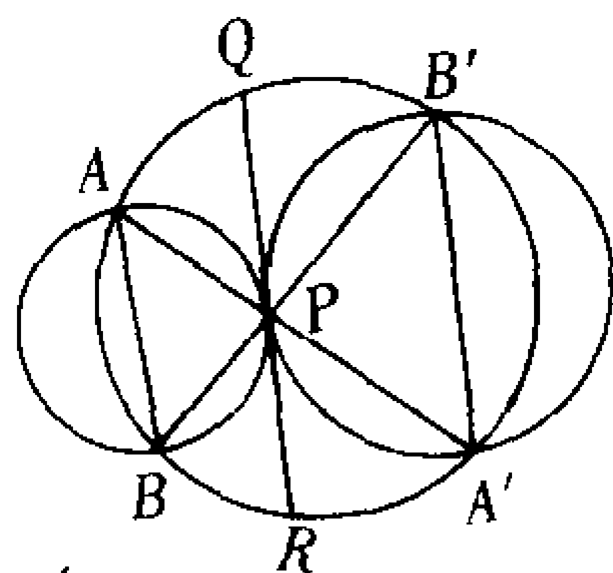
$\triangle XEF \backsim \triangle GYF$(有两角分别对应相等，如图).

由题设 $XE = FE$ 得 $GY = FY$.

18·39 设 AA'、BB'、CC'是球的不在同一平面的三条弦，它们相交于球内一点 P，若过 A、B、C，P 的球面和过 A'、B'、C'，P 的球面相切，求证：$AA' = BB' = CC'$.

(第 21 届美国数学奥林匹克，1992 年)

[证] 由题设可知，过点 A、A'、B、B'的平面截题述的三个球于三个圆，而且其中有两个圆分别是$\triangle ABP$ 及$\triangle A'B'P$ 的外接圆，这两个圆相切于 P.



设 RQ 是这两个相切圆过切点 P 的公切线，于是有

$$\angle ABP = \angle APQ = \angle A'PR$$
$$= \angle A'B'P = \angle BAP.$$

$\therefore \quad AP = PB.$

同理 $A'P = PB'$.

从而 $AP + PA' = BP + PB'$，即 $AA' = BB'$.

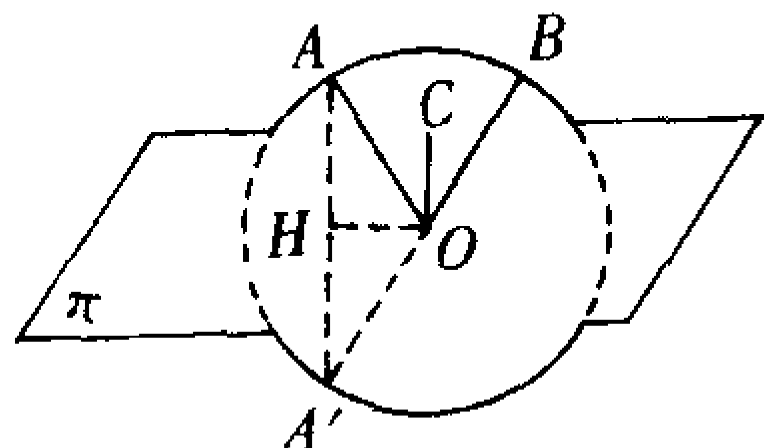
同理可证 $BB' = CC'$.

$\therefore \quad AA' = BB' = CC'$.

18·40 半径为 1 的球面上的两点用球内长度小于 2 的曲线段连结起来，证明：这条曲线段一定落在这个球的某个半球内.

(第 3 届美国数学奥林匹克，1974 年)

[证] 设 A、B 表示曲线段的两个端点.



过球心作垂直于$\angle AOB$ 的平分线 OC 的平面 π.

下面我们证明曲线段$\overset{\frown}{AB}$一定落在这个平面的一侧含有 A 与 B 的半球内.

作 A 关于平面 π 的对称点 A'.

由于 $OH\perp AA'$, $OC\perp OH$,则 A'、O、B 共线,于是 $A'B=2$.

我们注意到,若 T 是平面 π 上的任意点,由 A 和 A' 关于 π 的对称性,有 $AT=A'T$.

如果$\overset{\frown}{AB}$上含有属于平面 π 上的点 T,则有

$$\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{TB}\geqslant AT+TB=A'T+TB\geqslant A'B=2.$$

与已知曲线段$\overset{\frown}{AB}$长小于 2 相矛盾.

所以$\overset{\frown}{AB}$上不可能有平面 π 上的点,即不能穿过平面 π,所以这条曲线段落在 π 的一侧含有 A、B 的半球内.

18·41 已知:两球相交.点 A 和点 B 在其中一球面上,而点 C 和点 D 在另一球面上,线段 AC 经过两球面的公共点,而线段 BD 经过另一公共点且与连心线平行.求证:线段 AB、CD 分别在直线 AC 上的射影长相等.

(第 32 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

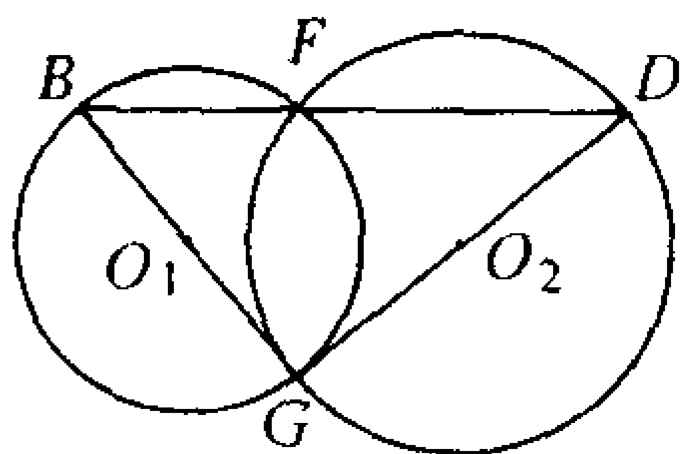


图 1

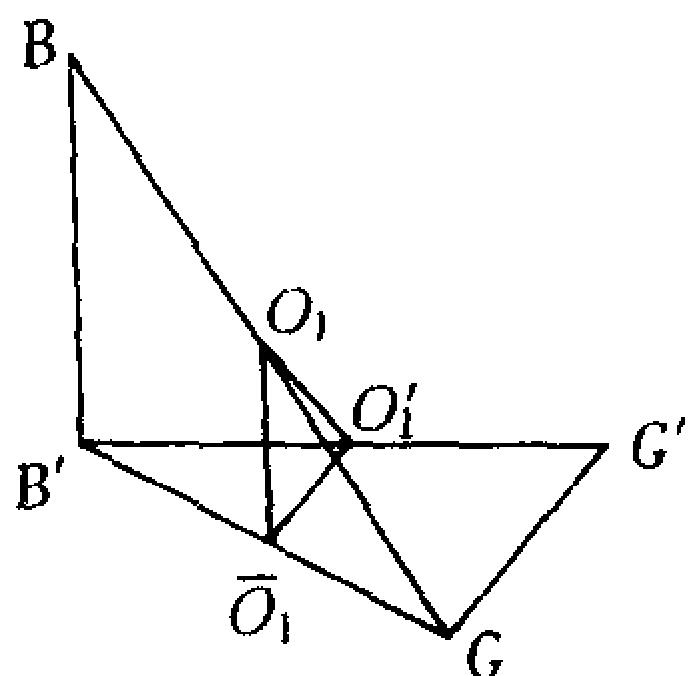


图 2

[证] 设 E、F 是两球面的公共点.它们分别在 AC 和 BD 上,O_1、O_2 分别是球心.点 G 是点 F 关于 O_1O_2 的对称点,显然 G 也是两球的公共点.并且 BG、DG 分别是两球的直径(图 1).

记点 X 在 AB 上的射影为 X'.显然 O_1'是球 O_1 的弦 AE 的中点,O_2'是球 O_2 的弦 EC 的中点.由于 O_1, O_2 分别是 BG、GD 的中点,可以证明 O_1'、O_2'分别也是 $B'G'$和 $G'D'$的中点.(事实上,如图 2 所示,取 $B'G'$中点 O_1', $B'G$ 中点$\overline{O}_1$,可证 $B'G'\perp$面 $O_1O_1'\overline{O}_1$,从而 $O_1O_1'\perp B'G'$,根据点在直线上射影的惟一性,O_1'即为 O_1 在 $B'G'$上的射影,且 O_1'是 $B'G'$中点).

根据球的对称性,球的一弦之两端点在另一弦所在直线上的射影,或者都在弦上,或者都在它们的延长线上,于是各点在 AC 上的射影

可表示于(图 3). 由此得

$AB' = G'E$, $G'E = D'C$

$\therefore \quad AB' = D'C$.

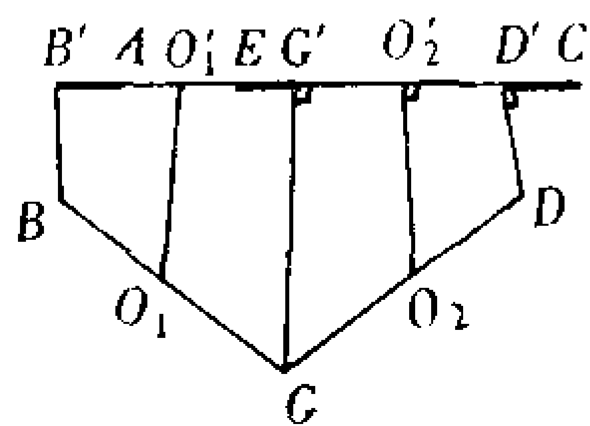
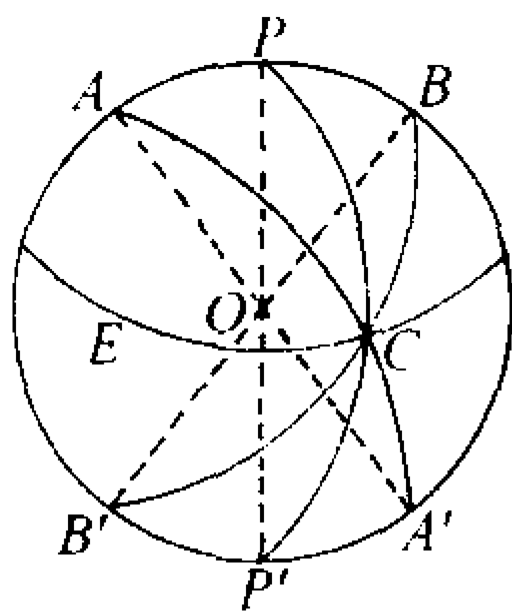


图 3

18·42 球面上一个大圆 E 是以球心 O 为圆心的圆. 大圆 E 的极 P 是球面上的一个点, 使得 OP 是 E 所在的平面的垂线. 在通过 P 的任何一个大圆上, 取与 P 等距离的两点 A 和 B, 设 C 点在 E 上, 证明: 对于任何球面$\triangle ABC$(边是大圆弧), 大圆弧 CP 是$\angle C$ 的平分线.

(第 8 届美国数学奥林匹克, 1979 年)

[证] 如图, 我们知道, 球面三角形 ABC 的角 C 是大圆弧 CA、CB 在 C 点的切线所成的角(图中未画出), 即分别在这两个大圆平面的垂直于 OC 的两条直线所成的角, 也就是二面角 $A-OC-B$ 的平面角.



因此, 本题相当于证明平面 COP 平分二面角 $A-OC-B$.

作直径 PP'、AA'、BB'.

$\because \quad PP'$垂直于 E 所在的平面, OC 又在这个平面内,

$\therefore \quad PP' \perp OC$, $\quad \angle COP = \angle COP'$.

又$\because \quad \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{B'P'}$,

$\therefore \quad \angle AOP = \angle B'OP'$.

由于二面角 $A-OP-C$ 和 $B'-OP'-C'$是同一个二面角, 所以三面角 $O-ACP$ 全等于三面角 $O-B'CP'$.

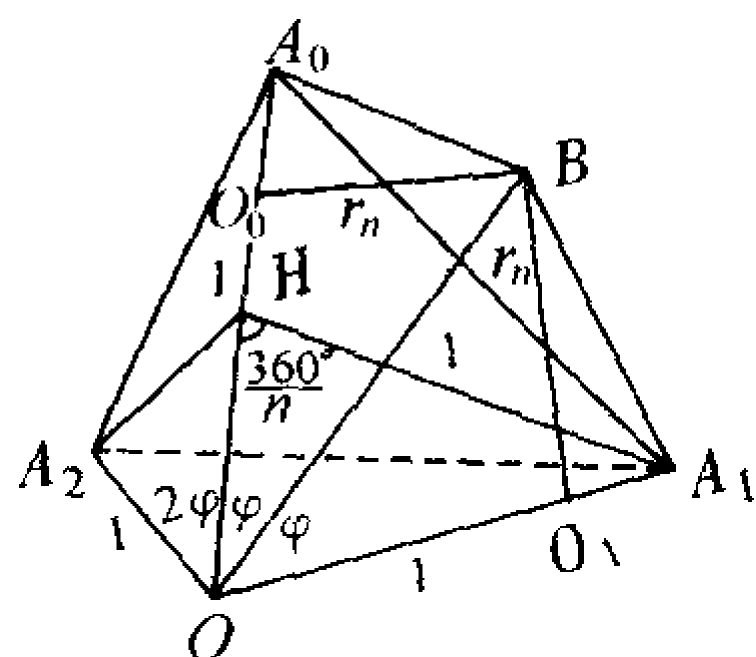
因此, 二面角 $A-OC-P$ 等于二面角 $B'-OC-P'$, 即二面角 $A-OC-P$ 等于二面角 $B-OC-P$.

从而大圆弧 CP 平分球面角 ACB.

18·43 求所有大于 1 的自然数 n 及 r_n, 使得在半径为 1 的球面上可以安放 $n+1$ 个不相交的, 半径为 r_n 的圆周 $C_0, C_1, \cdots, C_n$, 并且对任意 $i=1,2,\cdots,n$, 圆周 C_i 与圆周 C_i 与圆周 C_0 及 C_{i+1} 都相切, 其中 $C_{n+1} = C_1$.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克, 1970 年)

[解] 设 O 是球心, 又 O_i 是圆 C_i 的圆心, $i=0,1,2\cdots,n$. A_i 又是射线 OO_i 与球面的交点, B 是圆周 C_0 与 C_1 的切点, 记 $\varphi=$



$\angle A_0OB$,

$\because\quad OB=OA_0=OA_1=1$,

$O_0B=O_1B=r_n$,

又 $\angle OO_0B=\angle OO_1B=90°$.

有 $\sin\varphi=r_n$, $A_0A_1=2r_n$.

在正三棱锥 $OA_0A_1A_2$ 中,关于顶点 O 的平面角为 2φ,而关于棱 OA_0 的二面角为 $\frac{360°}{n}$.

如果 A_1H 是垂直于棱 OA_0 的垂线,则

$$A_1H=A_2H=\sin2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=2r_n\sqrt{1-r_n^2}.$$

有 $2r_n=A_0A_1=A_1A_2=2A_1H\sin\frac{180°}{n}=4r_n\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180°}{n}$.

$\therefore\quad 2\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180°}{n}=1$.

故 $\sin\frac{180°}{n}=\frac{1}{2\sqrt{1-r_n^2}}>\frac{1}{2}$, 有 $n<6$.

因而对 $n=2,3,4,5$ 有 $r_n=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin\frac{180°}{n}}}$.

18·44 $A_1,A_2,\cdots,A_5$ 在半径为 1 的球面上,$\min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant5}A_iA_j$ 的最大值是多少?确定所有取得最大值的情况.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解] 我们可以用$\angle A_iOA_j$ 的大小来代替 A_i 和 A_j 的距离 A_iA_j,其中 O 为球心.

存在一组点 $A_1,A_2,\cdots,A_5$,使

$$\min_{1\leqslant i,j\leqslant5}\angle A_iOA_j\geqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (*)$$

例如正八面体的 5 个顶点即合要求.

现在设 $A_1,A_2,\cdots,A_5$ 为任一组使(*)成立的点,我们证明其中必有两个点为对径点.

首先设 A_5 为南极,这时 A_1、A_2、A_3、A_4 均在北半球(包括赤道),

如果没有对径点，则北极没有点 $A_i(i=1,2,3,4)$，由赤道的$\frac{1}{4}$及两条互相垂直的经线所围成的，北半球的卦限内，如果含有两个 A_i，则由于⊛，其中一个必在“角落”(即赤道与一条经线的交点)，另一个必在它所对的经线上，于是 $A_1,\cdots,A_4$ 中每两个经度之差不小于$\frac{\pi}{2}$，从而它们在将北半球分为四个卦限的四条经线上.

最后，如果有一个点不在赤道上，则它的两个邻点必须在赤道上(各在一个卦限的“角落”)，这两个点是对径点.

由于总有两个对径点 A_1、A_2，第三个点 A_3 不能使

$$\angle A_1OA_3>\frac{\pi}{2},\ \angle A_2OA_3>\frac{\pi}{2}$$

同时成立，所以(*)中严格的不等号不可能成立，即 $\min\angle A_iOA_j$ 的最大值为$\frac{\pi}{2}$.

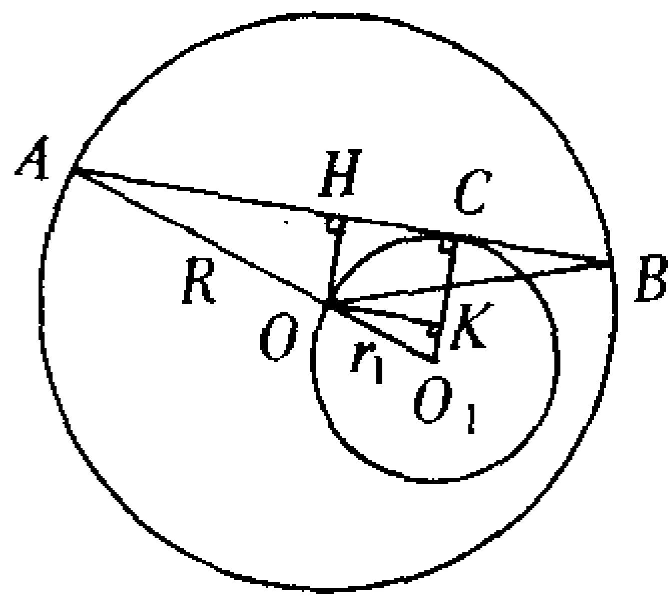
在等号成立时，设 A_1、A_2 为两极，则 A_3、A_4、A_5 均在赤道上并且 OA_3、OA_4、OA_5 两两夹角不小于$\frac{\pi}{2}$.

所以在这种情况下，$\min A_iA_j$ 的最大值为$\sqrt{2}$.

18·45　半径为 r 的球面 s 经过半径为 R 的球面 S 的球心. 证明：如果球面 S 的弦 AB 与球面 s 相切于点 C，则　$AC^2+BC^2\leqslant 2R^2+r^2$.

(保加利亚数学奥林匹克，1982 年)

[证]　过点 A、B 及球面 S 的球心 O 作一平面，则球面 s 的截口是一个以 O_1 为圆心，半径为 $r_1\leqslant r$ 且与直线 AB 相切的圆周.



设　OH 和 OK 分别垂直于直线 AB 和 O_1C.

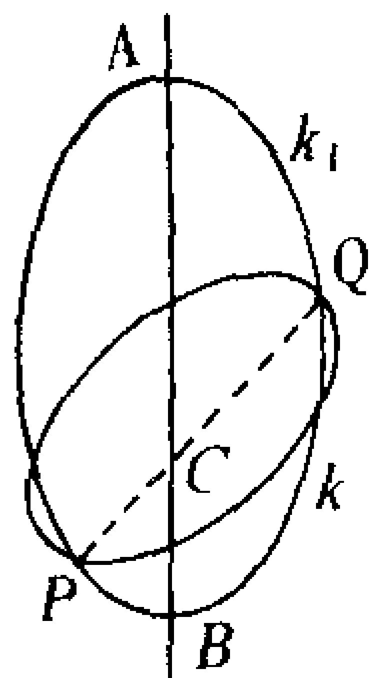
记 $AB=2a$，$OH=h$，则有

$$\begin{aligned}AC^2+BC^2&=(a+HC)^2+(a-HC)^2\\&=2a^2+2HC^2\\&=2(R^2-OH^2)+2(OO_1^2-O_1K^2)\\&=2(R^2-h^2)+2[r_1^2-(r_1-h)^2]\\&=2R^2-4h^2+4hr_1\end{aligned}$$

$$=2R^2+r_1^2-(2h-r_1)^2$$
$$\leqslant 2R^2+r^2.$$

18·46　求证:若某立体被平面截得的所有截面都是圆,那么这个立体是球.

(匈牙利数学奥林匹克,1954年)



[证]　设 C 是该立体和某一平面相交所得到的圆 k 的圆心.

由点 C 向圆 k 的平面作垂线,且过这条垂线作任一平面,设该平面和圆 k 的边界交于点 P 和 Q,和该立体本身交成圆 k_1,因为 PQ 是圆 k_1 的弦,所以它的中垂线包含圆 k_1 的直径 AB,由于这平面是任意的,所以通过直线 AB 的任一平面和立体的截面都具有以 AB 为直径的圆,因此该立体是以 AB 为直径的球.

18·47　空间中的三个圆两两彼此相切,且所有三个切点是不同的.试证:这些圆要么在一个球面上,要么在一个平面上(空间中的两个圆,如果它们有一个公共点,并且在这点有公共的切线,我们说这两圆相切).

(匈牙利数学奥林匹克,1937年)

[证]　首先证明:两个彼此相切的圆,或者在一个球面上,或者在一个平面上.

我们把通过圆心且和这个圆所在的平面垂直的直线叫做这个圆的轴,轴上任何一点到这个圆的所有的点的距离是相等的.

下面研究彼此相切的圆的轴.两个轴都在通过圆的切点且和公切线垂直的平面上,因此,如果两个相切的圆不在一个平面上,那么它们的轴不平行,因此这两个轴应该相交,以交点为中心,通过两个圆的切点作一个球面,那么这两个圆在这个球面上.

下面考虑三个圆的情形.设三个圆为圆 k_1、k_2、k_3.

每一对圆确定一个球面或者确定一个平面,本题需要证明,所有三对圆确定同一个球面,或者确定同一个平面:

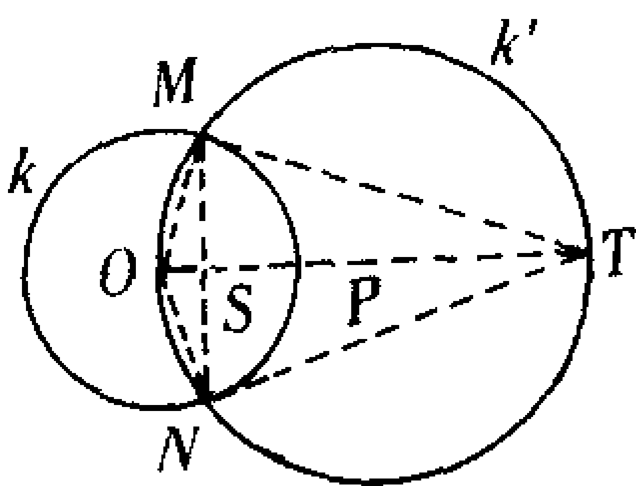
假设圆 k_1 和 k_3 所确定的球面(或平面) G_1 和圆 k_2 和 k_3 所确定的球面(或平面) G_2 不重合,但是,若两个球面(或一个球面和一个平面)不重合,但有公共的圆,那么除了这个圆上的点之外,没有其他的公

共的点,因此,对于 G_1 和 G_2,除了圆 k_3 上的点以外,不能再有其他的公共点,然而 G_1 和 G_2 都包含了圆 k_1 和圆 k_2 的切点,并且由题设,所有三个切点是不同的,于是出现矛盾,这矛盾表明 G_1 和 G_2 是重合的,即这三个圆或者在同一个球面上,或者在同一个平面上.

18·48 假设 O 点是球面 K 的中心,P 和 Q 是球 K 外的点,以点 P 为中心,PO 为半径作球面,以点 Q 为中心,QO 为半径作球面,试证:这两个球面在 K 内的面积相等.

(匈牙利数学奥林匹克,1902 年)

[证] 设以点 P 为中心,PO 为半径的球面为 K',过 K' 的直径 OT 作平面,此平面与球 K 和 K' 交得圆 k 和 k',圆 k 和 k' 相交于 MN,设 OT 交 MN 于 S.



球面 K' 在球面 K 内的面积 F,内球冠面积公式得 $F=\pi\cdot OT\cdot OS$.

又由直角三角形的射影定理有 $r^2=OM^2=OT\cdot OS$. 其中 r 为球 K 的半径,因而 $F=\pi r^2$.

因此,球面 K' 在球面 K 内的那一部分面积与点 P 的位置无关,于是题中所说的两球面在 K 内的面积相等.

18·49 在一个光滑的桌面上,放有半径分别为 1、2、4 的三个木球,每个木球均与桌面相切,并且与其余两个木球外切,另外在桌面上还有一个半径小于 1 的小木球,并且与三个木球都相切. 求:这个小木球的半径.

(中国国家集训队测验题,1994 年)

[解] 易知,半径分别为 r_1、r_2 的两个与桌面相切且互相外切的球与桌面的两个切点间的距离为 $2\sqrt{r_1r_2}$.

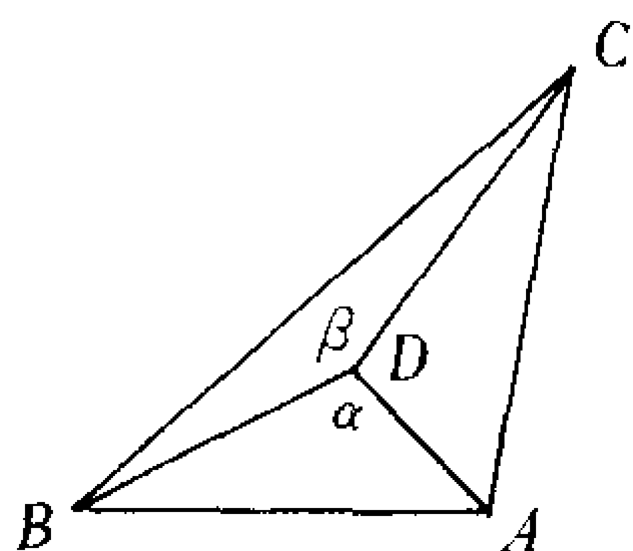
设小木球的半径为 x,半径分别为 1、2、4,x 的木球与桌面的切点分别为 A、B、C、D,则

$$AB=2\sqrt{2},\ AC=4,\ BC=4\sqrt{2},$$

$$AD=2\sqrt{x},\ CD=4\sqrt{x},\ BD=2\sqrt{2x}.$$

记 $\angle ADB=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, 则 $\angle CDA=2\pi-(\alpha+\beta)$.

在$\triangle ADB$ 中,由余弦定理,



$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\alpha,$$

即 $8 = 4x + 8x - 2 \cdot 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{2x} \cdot \cos\alpha$

则 $\cos\alpha = \dfrac{3x-2}{2\sqrt{2}}$ ①

类似地可得 $\cos\beta = \dfrac{3x-4}{2\sqrt{2}x}$, ②

故 $\cos[2\pi - (\alpha+\beta)] = \dfrac{5x-4}{4x}$. ③

而 $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{12x-4-x^2}}{2\sqrt{2}x}$. ④

又 $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{\sqrt{24x-16-x^2}}{2\sqrt{2}x}$. ⑤

利用①、②、③、④、⑤,及 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ 可得

$$\frac{5x-4}{4x} = \frac{1}{8x^2}\left[(3x-2)(3x-4) - \sqrt{(12x-4-x^2)(24x-16-x^2)}\right].$$

整理得 $7x^2 - 28x + 16 = 0$.

由 $0 < x < 1$ 可解得 $x = 2 - \dfrac{2}{7}\sqrt{21}$.

18·50 四个半径为 2 的球两两相切(即每一个球均与其他三个球相切).求:其外切四面体的边长.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[解] 四个球心组成一个棱长 $a=4$ 的正四面体,它的中心 O 到各面的距离为四面体高的$\dfrac{1}{4}$.

容易求出,这个棱长为 a 的正四面体的高为

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = 4\times\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

∴ O 到各面的距离 $d = \dfrac{1}{4}h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

外切四面体的各面分别与上述正四面体的各面平行,距离均为 2,所以外切四面体也是正四面体,与上述正四面体有公共中心 O,并且与上述正四面体位似,位似中心为 O,而位似比为

$$\frac{d}{d+2}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}+2}.$$

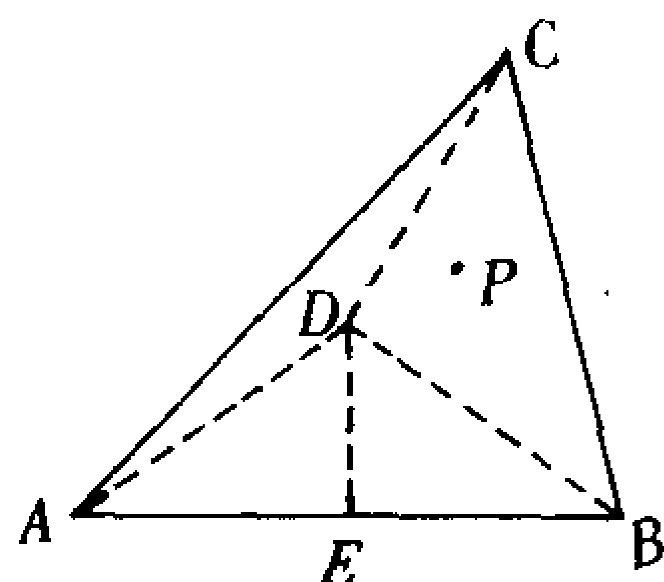
所以　外切四面体的边长为

$$\frac{d+2}{d}\times 4=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+2}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\times 4=4(1+\sqrt{6}).$$

18·51　空间有四个球,它们的半径分别为 2、2、3、3,每个球都与其余三个球外切.另有一个小球与那四个球都外切.求:这个小球的半径.

（第 11 届中国中学生数学冬令营,1995 年）

[解]　用 A、B 记半径为 3 的两个球的球心,C、D 记半径为 2 的两个球的球心,且令 $R=3$, $r=2$,从而有



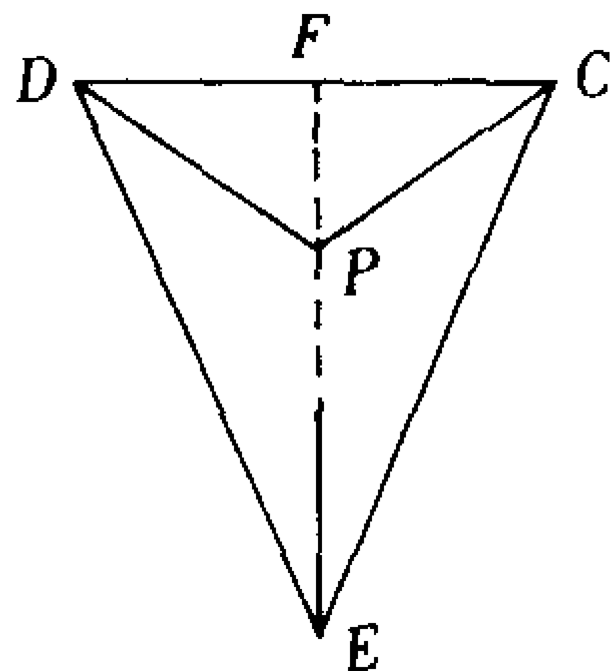
$$AB=2R,\ CD=2r,$$
$$AD=AC=BD=BC=R+r.$$

若小球存在,记其球心为 P,半径为 s,又有

$$AP=BP=R+s,\ CP=DP=r+s.$$

过点 C 作线段 AB 的垂直平分面,由于 $AC=BC$, $AP=BP$, $AD=BD$,则点 P 以及线段 CD 都在这平面上,这平面与 AB 的交点记为 E,它应是 AB 的中点.

考察$\triangle CDE$,注意到



$$DE=CE=\sqrt{(R+r)^2-R^2}$$
$$=\sqrt{2Rr+r^2},$$
$$DC=2r,\ DP=CP=r+s.$$

于是,$\triangle DEP\cong\triangle CEP$, $\angle DEP=\angle CEP$.

延长 EP 交 DC 于 F,于是　$EF\perp CD$,

从而　$CF=FD=r$.

且　$EF=\sqrt{EC^2-CF^2}=\sqrt{2Rr+r^2-r^2}=\sqrt{2Rr}$.

及 $EP=\sqrt{(r+s)^2-r^2}=\sqrt{s^2+2rs}$.

在△APE 中,由于 $PE\perp AE$,故有

$$EP=\sqrt{AP^2-AE^2}=\sqrt{(R+s)^2-R^2}=\sqrt{2Rs+s^2}.$$

由 $EF=EP+PF$ 可得 $\sqrt{2Rr}=\sqrt{2Rs+s^2}+\sqrt{2rs+s^2}$,

代入 $R=3$, $r=2$ 得 $\sqrt{12}=\sqrt{6s+s^2}+\sqrt{4s+s^2}$

解得 $s=\frac{6}{11}$. 即 所求小球的半径为$\frac{6}{11}$.

18·52 四个半径为 1 的球彼此相切,三个在地板上,第四个放在它们上面,一个边长为 s 的正四面体的面与这些球相切.求:s.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[解] 四个球的球心组成棱长为 2 的正四面体.

这个正四面体底面三角形的高为 $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

正四面体的高通过底面重心,这高为

$$\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

设 O 是这正四面体的中心,由于正四面体的中心分它的高为 1:3,所以 O 到这个四面体的底面的距离为

$$d=\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

O 也是这个正四面体与边长为 s 的正四面体的位似中心,而相似比为$\frac{d}{d+1}$.

$$\therefore\quad \frac{2}{s}=\frac{d}{d+1},$$

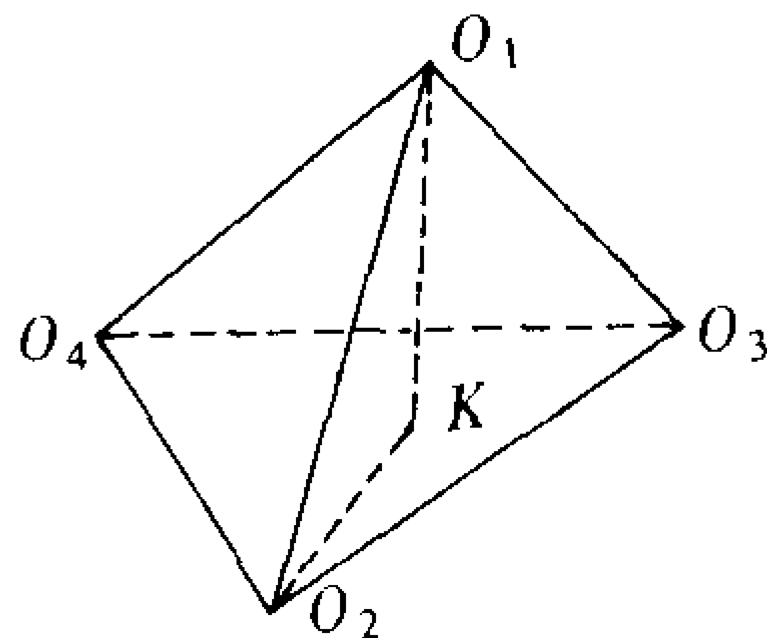
则 $$s=\frac{2(d+1)}{d}=2+\frac{2}{d}=2+\frac{2}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}=2+2\sqrt{6}.$$

18·53 把半径为 1 的四个小球叠成两层放在桌面上:下层三个,上层一个,两两相切,求:上层小球最高点到桌面的距离.

(中国高中数学联赛,1978 年)

[解] 设上层小球的球心为 O_1,下层三个小球球心为 O_2、O_3、

O_4,连接 O_1O_2、O_1O_3、O_1O_4、O_2O_3、O_2O_4、O_3O_4.



因为这四个小球两两相切,

所以 $O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$,

因此 $O_1-O_2O_3O_4$ 可以看作是一个棱长为2的正四面体.

如图,过 O_1 作正四面体的高 O_1K,则 K 是正三角形 $O_2O_3O_4$ 的中心,连 O_2K,

则 $\quad O_2K=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$, 故 $\quad O_1K=\sqrt{O_1O_2^2-O_1K^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

因为 O_2、O_3、O_4 到桌面距离都等于1,所以面 $O_2O_3O_4$ 平行于桌面,则球 O_1 上最高点到桌面的距离应是 $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+1=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

18·54 有五个球 A、B、C、D、E,已知 A 比 B 大,C 的半径是 A、B 半径的平均数,D 的面积是 A、B 面积的平均数,E 的体积是 A、B 体积的平均数,试按大小顺序排列这五个球并给予证明.

(中国福建省数学竞赛,1978年)

[解] 设 A、B、C、D、E 各球半径依次为 a、b、c、d、e. 依题意:

$a>b, c=\dfrac{1}{2}(a+b)$;

$$4\pi d^2=\frac{1}{2}(4\pi a^2+4\pi b^2),\text{ 即 }\quad d=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)};$$

$$\frac{4}{3}\pi e^3=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3+\frac{4}{3}\pi b^3\right),\text{ 即 }\quad e=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3+b^3)}.$$

显然 c、d、e 都在 a 与 b 之间.

又可证 $\quad e>d>c$. 事实上,要证 $\quad d>c$,

即 $\quad \sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)}>\dfrac{1}{2}(a+b)$,

只要证 $\quad \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)>\dfrac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$,

即 $\quad a^2-2ab+b^2>0$, 或 $\quad (a-b)^2>0$; ①

要证　$e>d$，即　$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3+b^3)}>\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$，

只要证　$\frac{1}{4}(a^3+b^3)^2>\frac{1}{8}(a^2+b^2)^3$，

或　$a^6-3a^4b^2+4a^3b^3-3a^2b^4+b^6>0$，

即　$(a-b)^2(a^4+2a^3b+2ab^3+b^4)>0$.　②

由于　$a>b>0$，①、②显然成立．故　$a>e>d>c>b$.

18·55　试问：5个球面至多可把空间分成多少个部分？

（莫斯科数学奥林匹克，1939年）

［解］（1）先研究圆划分球面问题

n 个圆中每对圆恰好相交于两点，但没有三个圆共点，且都与球面相交于一交线圆，则称此 n 个圆为处于一般位置的圆．

若 $n\in N+\{0\}$（即 n 是非负整数），设 C_n 表示由 n 个处于一般位置的圆把球面划分成球面片的个数，则

$$C_0=1,\ C_1=2$$

当 $n\geqslant 2$ 时．$n-1$ 个处于一般位置的圆把球面划分成 C_{n-1} 个球面片，在这个球面内插入第 n 个圆，使得这 n 个圆处于一般位置．

前 $n-1$ 个圆与第 n 个圆相交于 $2(n-1)$ 个不同的点，它们把第 n 个圆划分成 $2(n-1)$ 段弧，第 n 个圆的这些弧中的每一个都把球面上原有的球面片之一分成两个球面片．类推地可有

$$\begin{aligned}C_n&=C_{n-1}+2(n-1)\\&=C_{n-2}+2(n-2)+2(n-1)\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=C_{n-k}+2(n-k)+\cdots+2(n-1)\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=C_1+2\times1+2\times2+\cdots+2(n-1)\\&=2+2[1+2+\cdots+(n-1)]\\&=2+2\times\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+2.\end{aligned}$$

（2）再研究球面划分空间问题

n 个球面中每对球面恰好相交成一圆，但是没有三个球面交于一个圆，每三个球面交于一点，但没有四个球面共点，称此 n 个球面为处

于一般位置的球面.

若 $n\in N+\{0\}$,设 d_n 表示 n 个处于一般位置的球面把空间划分成区域的个数,则

$$d_1=1,\ d_2=2.$$

当 $n\geqslant 2$ 时用 $n-1$ 个处于一般位置的球面把空间划分成 d_{n-1} 个区域,在空间中插入第 n 个球面,使得这 n 个球面处于一般位置.

前 $n-1$ 个球面与第 n 个球面相交于 $n-1$ 个圆,这些交线圆在第 n 个球面上处于一般位置,这 $n-1$ 个交线圆把第 n 个球面划分成 d_{n-1} 个球面片,而这些球面片的每一个把原有的空间区域之一划分成两个空间区域.因此

$$d_n=d_{n-1}+C_{n-1},$$

即 $d_n-d_{n-1}=C_{n-1}$,

或 $d_n-d_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)+2.$

$\therefore$ $d_{n-1}-d_{n-2}=(n-2)^2-(n-2)+2,$

$d_{n-2}-d_{n-3}=(n-3)^2-(n-3)+2,$

…………………………

$d_2-d_1=1^2-1+2,$

且 $d_1=2,$

将上面诸式相加得

$$\begin{aligned}d_n&=[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]-[1+2+\cdots+(n-1)]+2n\\&=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n+2n\\&=\frac{1}{3}n(n^2-3n+8).\end{aligned}$$

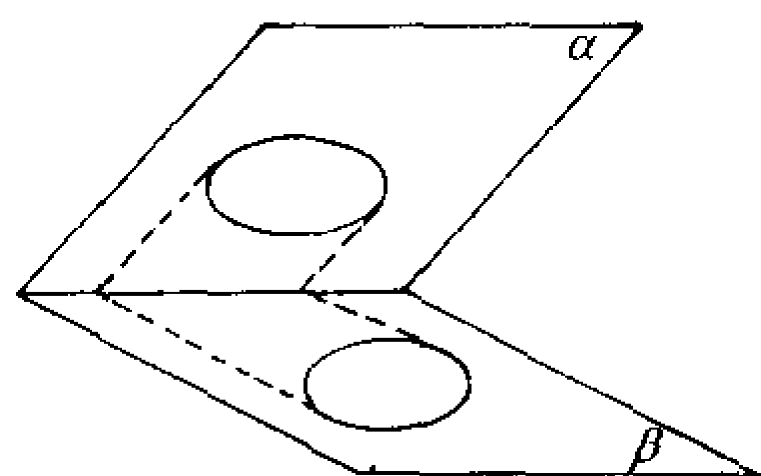
特别地,当 $n=5$ 时 $d_5=\frac{1}{3}\times 5(5^2-3\times 5+8)=30.$

18·56 物体在两个平面上的投影都是圆,求证:这两个圆的半径相等.

(第5届全苏数学奥林匹克,1971年)

[证] 如果两个平面互相平行,则物体在这两个平面上的垂直投影为大小相等的两个圆,结论显然成立.

若两个平面 α、β 不平行,则它们相交于直线 l,那么物体对两个平



面的交线 l 的投影可以看作是这个物体在 α、β 上的投影分别对 l 的投影.

而圆对与它同在一个平面上的直线的投影是等于圆的直径的一条线段.

即物体在 α、β 上的投影圆在 l 上的投影是同一条线段,所以这两个圆的直径相等,进而半径相等.

18·57　在空间给定6个不同的点,已知经过其中任意5个点可以作一个球,由此能不能推出经过这6点可以作一个球.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解]　我们证明所有的6个点位于一个球上.

(1)若已知6点中有4点不共面,则存在惟一的球 S 经过这些点,从而由条件:这6个点中的任意5个点都位于某一个球上可以推出,其余的两个点也在这个球上.

(2)若已知6点中任意4个点都共面,考虑已知点中任意3个点,它们不共线(因为它们位于一个球上),因此过这三点有惟一的平面 P,于是由任意4点共面,则其余3点中的每一点都位于平面 P 内.

由此可知,已知点中的任意5个点必位于同一个圆周上,而这个圆由3个点就可以确定一个圆,因此所有的6个点都在同一个圆上,从而也位于同一个球上.

由(1),(2),题设的6个点在同一个球上.

18·58　三维欧氏空间是否可表成无公共点的圆(周)的并集?

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[解]　首先我们指出,去掉了两个点 P、Q 的球面 S 可以表示成无公共点的圆的并集.

设过 P、Q 的两个切面相交于直线 g 或者它们互相平行,作平面过 g 或与上述两个切面平面平行,这些平面截 S 所得的圆无公共点,且它们的并集为 $S\setminus\{P,Q\}$.

设 K 是过原点 O,半径为1的圆,对 $O<r<2$,每个球

$$S_r:\ \{P|d(P,O)=r\}$$

与 K 有两个公共点.因此除去这两点后可表为无公共点的圆的并集.

于是 $M=(\bigcup_{0>r>2}S_r)\cup K$ 可表为无公共点的圆的并集.M 是以 O 为

心，半径为 2 的球的内部添上一点 A，$OA=2$.

将 M 沿 x 轴平移，每次移 4 个单位，得到一系列无公共点的圆.

作 x 轴的垂面，每个垂面上有一个点或一个圆属于 M 或 M 经上述平移而得的集.

在每一个平面上再作一系列同心的圆(周)，则整个空间被表为无公共点的圆周的并集.

下篇　解析几何

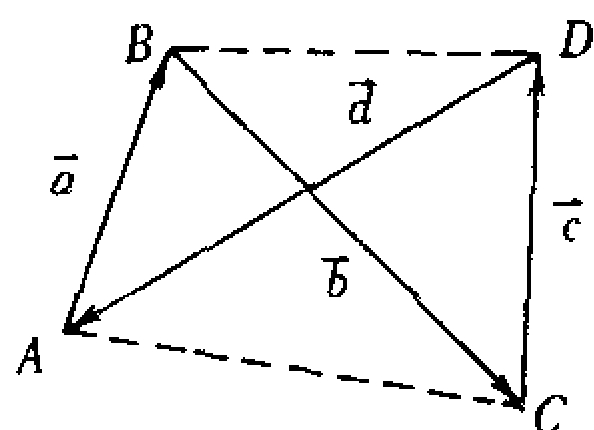
第十九章　向量与解析几何

(一)向量问题

19·1　在平面上给出和为$\vec{O}$的向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.证明:不等式$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[证]　将和为$\vec{O}$的四个向量,调整成一个封闭自交折线圈.



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{d}$

则　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

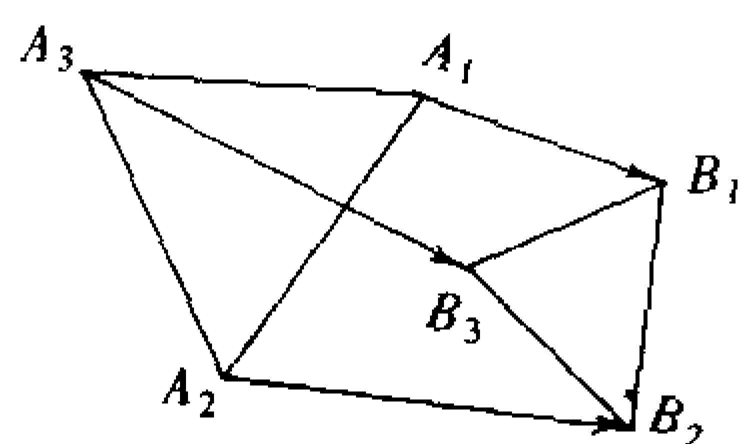
$|\vec{b}+\vec{d}|=|-(\vec{a}+\vec{c})|=|\vec{a}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{c}|$.

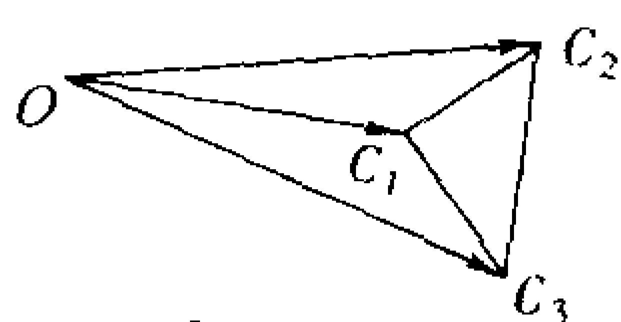
又　$|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|=BD+AC\leqslant|\vec{b}|+|\vec{d}|$

$\therefore$　$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

19·2　在同一个平面内有两个等边三角形$A_1A_2A_3$、$B_1B_2B_3$.其顶点沿边界按顺时针依次标写.从任一点O分别引出等于$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$的向量$\overrightarrow{OC_1}$、$\overrightarrow{OC_2}$、$\overrightarrow{OC_3}$,求证:点C_1、C_2、C_3也是一个等边三角形的顶点.

(第18届全苏数学奥林匹克,1984年)





［证］ 只需证$\overrightarrow{C_1C_3}$由$\overrightarrow{C_1C_2}$逆时针旋转60°而得到(因等长同向的向量相等,所以不必考虑旋转中心的位置). 为了利用题设,我们有

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_1B_1},$$

而 $\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_1}=\vec{0}$,

即 $\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{B_1B_2}-\overrightarrow{A_1A_2}$,

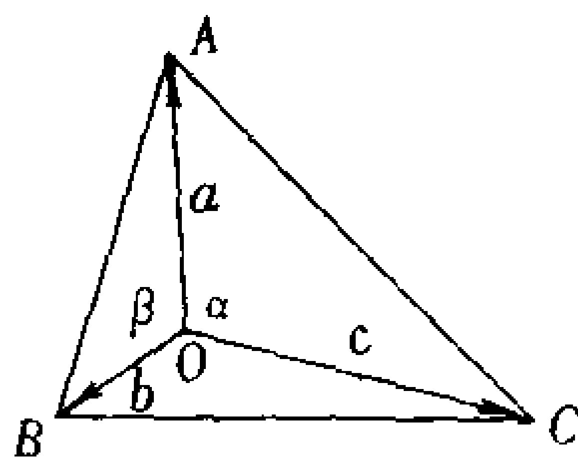
故 $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{B_1B_2}-\overrightarrow{A_1A_2}$.

同理 $\overrightarrow{C_1C_3}=\overrightarrow{B_1B_3}-\overrightarrow{A_1A_3}$.

由已知条件,$\overrightarrow{A_1A_3}$与$\overrightarrow{B_1B_3}$分别由$\overrightarrow{A_1A_2}$与$\overrightarrow{B_1B_2}$(顺时针)旋转60°而得到,所以这时$\overrightarrow{C_1C_3}$也是由$\overrightarrow{C_1C_2}$旋转同样的角度而得到. 即$\triangle C_1C_2C_3$是等边三角形.

19·3 $\triangle ABC$内任取一点O.求证:$S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$成立,其中$S_1$、$S_2$、$S_3$分别为$\triangle BCO$、$\triangle CAO$、$\triangle ABO$的面积.

(第17届全苏数学奥林匹克,1983年)



［证］ 如图,用复数表示向量,只需证

$$a(\cos\alpha+i\sin\alpha)bc\sin(2\pi-\beta)$$
$$+b(\cos\beta+i\sin\beta)ca\sin\alpha+c\cdot ab\sin(\beta-\alpha)=0.$$

比较两边虚实部可有

$$-\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)=0$$

上式显然成立.

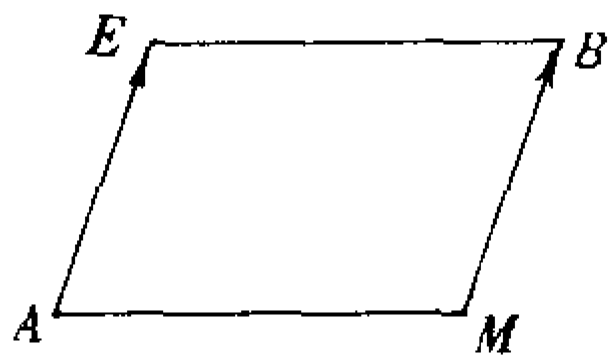
19·4 若已知四边形$ACPH$、$AMBE$、$AHBT$、$BKXM$、$CKXP$都是平行四边形(所有四边形的顶点都按同一方向排列).求证:$ABTE$也是平行四边形.

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)

［证］ 用向量性质来证明.

由▱$AMBE$得, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$,

由$\square BMXK$得，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XK}$，



由$\square CKXP$得，$\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{PC}$，

由$\square ACPH$得，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{HA}$.

由$\square AHBT$得，$\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{BT}$.

∴ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BT}$，即 $ABTE$是平行四边形.

19·5 在平面上是否存在这样的向量组:(1)在一组两两不共线的四个向量中,任意两个向量的和垂直于另两个向量的和;(2)在一组91个非零向量中,任意19个向量的和垂直于其余的向量的和.

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解] (1)这样的向量组是存在的.

设P点是正$\triangle ABC$内切圆O的圆周上任意一点.

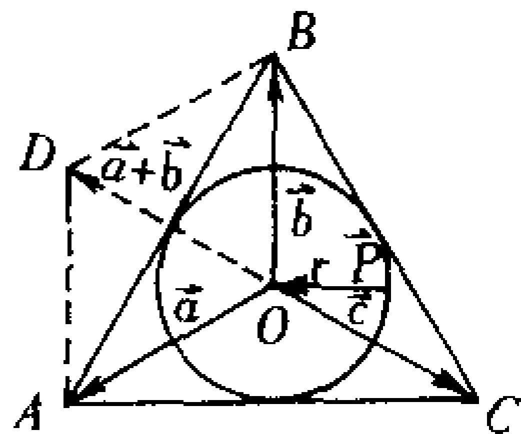
考虑向量$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{PO}$就可组成所需要的四个向量的向量组.只要向量$\overrightarrow{PO}=\vec{r}$,不与其余三个向量的任一个共线即可.

事实上,设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，例如有

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PO})=(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{r})(\vec{c}+2\vec{r})$$
$$=(2\vec{r}-\vec{c})(2\vec{r}+\vec{c})$$
$$=4|\vec{r}|^2-|\vec{c}|^2=0$$

其余情况可类似地证明.

(2)这样的向量组是不存在的.



用反证法证明:设符合题目要求的91个向量组成的向量组存在.又设$\overrightarrow{OS}$是它们的和,而$\overrightarrow{OX}$是其中19个向量之和,那么点X在以OS为直径的圆周σ上.

我们证明:不能从向量组中选取出5个向量,$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$满足条件$\vec{a}_1\neq\vec{a}_2\neq\vec{a}_3\neq\vec{a}_1$,$\vec{b}_1\neq\vec{b}_2$,事实上如若不然,可取另外17个和为$\vec{q}$的向量,构成6个向量.

$\overrightarrow{OX}_{ij}=\vec{q}+\vec{a}_i+\vec{b}_j(i=1,2,3;\ j=1,2)$.

这些向量的终端 X_{ij}将在圆周σ上.于是3个相等而不重合的非零向量$\overrightarrow{X_{i1}X_{i2}}=\overrightarrow{OX}_{j2}-\overrightarrow{OX}_{i1}=\vec{b}_2-\vec{b}_1$.将成为三条平行的等弦,这是不可能的.

由上面的论证知,在假设的向量组中没有5个不同的向量,甚至也没有4个不同的向量.$\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$、$\vec{t}$.

若不然,4个向量之一例如$\vec{i}$出现两次,这样又找到5个向量$\vec{a}_1=\vec{i}$,$\vec{a}_2=\vec{x}$,$\vec{a}_3=\vec{y}$,$\vec{b}_1=\vec{z}$,$\vec{b}_2=\vec{i}$,与上述论证矛盾.

这样所设91个向量中至多有3种不同的向量.

如果恰有3种不同的向量类型,那么只有其中一种向量类型多于1个(否则可取$\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$分别为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$中的某两个,又矛盾).

因为上述向量并非所有的都相等,所以它们恰有2或3种类型.

设$\vec{x}$的类型出现最多为$m\leqslant 89$次,那么再找(不同于$\vec{x}$)向量$\vec{y}$和$\vec{z}$组成和向量.

$\overrightarrow{OY}_1=18\vec{x}+\vec{y}$,$\overrightarrow{OY}_2=18\vec{x}+\vec{z}$,$\overrightarrow{OY}_3=17\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$,$\overrightarrow{OY}_4=19\vec{x}$.

由等式$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OY}_1+\overrightarrow{OY}_2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OY}_3+\overrightarrow{OY}_4)$得弦$Y_1Y_2$与$Y_3Y_4$的中点重合,但这些弦本身不重合($\because\ Y_3\neq Y_1,Y_3\neq Y_2$),所以它们是圆$\sigma$的直径.

由此得$\vec{y}\neq\vec{z}$,即有3种不同类型,从而$m=89$,又

$\overrightarrow{OY}_1+\overrightarrow{OY}_2=\overrightarrow{OS}$,

即　$36\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=89\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$,但这是不可能的.

最后,设向量$\vec{x}$出现90次,而$\vec{y}$出现1次,那么令$\overrightarrow{OZ}_1=18\vec{x}+\vec{y}$,得弦$\overrightarrow{OZ}_2=19\vec{x}$.

和　$\overrightarrow{SZ}_1=\overrightarrow{OZ}_1-\overrightarrow{OS}=(18\vec{x}+\vec{y})-(90\vec{x}+\vec{y})=72\vec{x}$.

平行于向量$\vec{x}$,并且关于直径 OS 的中点对称(因为它们两个都平行于向量$\vec{x}$),这也是不可能的.

19·6 在平面上给出 1980 个向量,其中有不共线的,但这些向量中的任意 1979 个之和与余下的那一个共线.试证:所有给定的 1980 个向量之和等于零向量.

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[证] 用$\vec{a}$表示给出的 1980 个向量之和.

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\overrightarrow{a_{1980}}=\vec{a}.$$

这时,除$\vec{a}_i$ 之外的向量之和写成$\vec{a}-\vec{a}_i$,

若 $\vec{a}_i\neq\vec{0}$,则题设得 $\vec{a}-\vec{a}_i=k_i\vec{a}_i$,即对某个数 k_i,$\vec{a}=(1+k_i)\vec{a}_i$.

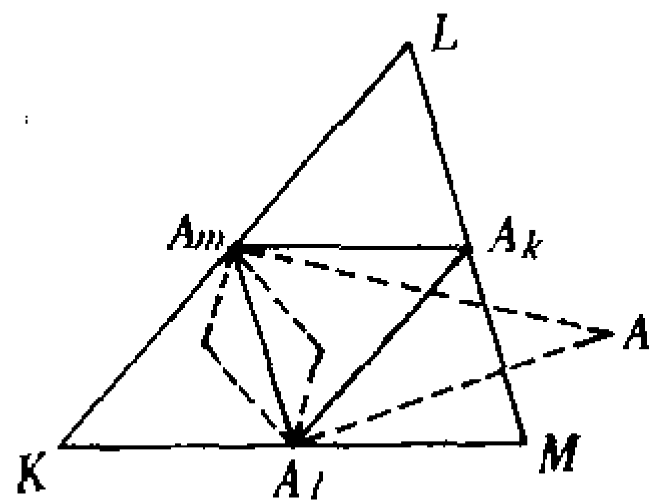
若 $\vec{a}\neq 0$,则 $1+k_i\neq 0$,所以 任意的非零向量 $\vec{a}_i=\dfrac{1}{1+k_i}\vec{a}$ 与$\vec{a}$共线.

显然这与给定向量中有不共线的矛盾.因此$\vec{a}=\vec{0}$.

19·7 在平面上给定点 A_0 及 n 个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 它们的和等于$\vec{0}_1$.这些向量的每种排列$\overrightarrow{a_{i1}},\overrightarrow{a_{i2}},\cdots\overrightarrow{a_{in}}$.确定点 $A_1,A_2,\cdots,A_n=A_0$ 的集合,使得$\overrightarrow{a_{i1}}=\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{a_{i2}}=\overrightarrow{A_1A_2},\cdots,\overrightarrow{a_{in}}=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.求证:存在一种排列,对此,所有点 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$位于一个 60°角的内部或边上.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[证] 我们按这样的顺序排列所给的向量.使得折线 $A_0A_1\cdots A_{n-1}A_n$ 构成一个凸多边形.同时,选择顶点 A_k、A_e、A_m,使得$\triangle A_kA_lA_m$ 具有较大的面积.(如图)过三角形的各顶点引平行于对边的直线,得$\triangle KLM$.



那么整条折线被点 A_k、A_l、A_m 分成三部分.其中每个部分将整个地落在相应的$\triangle A_lKA_m$、$\triangle A_kLA_m$、$\triangle A_kMA_l$ 内(若某顶点 A_i 超出$\triangle KLM$ 的界限,则$\triangle A_kA_lA_m$ 的一个顶点可用 A_i

代替，其面积随之增大）.

在三部分折线的每一部分，将构成它们的向量按相反的顺序，各自地重排，也就是分别关于$\triangle A_KA_lA_m$各相应边的中点对称地反射，其结果新的折线整个地落在$\triangle A_KA_lA_m$内.

而三角形中至少有一内角不大于60°，最后将这个角的顶点平移至A_0，而整个向量组也按此平移.

19·8　在平面上给定正n边形$A_1A_2\cdots A_n$.（1）证明：如果n为偶数，那么对平面上任意点M，在表达式$\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MA_n}$中可适当选取“+”或“-”，使得所得的和为$\vec{O}$.（2）证明：如果$n$为奇数，那么只能对平面上有限个点$M$，在上述表达式中适当选取“+”，“-”号，使得所得的和为$\vec{O}$.

（第20届全苏数学奥林匹克，1986年）

[证]　（1）设O为正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆圆心，其中n为偶数.

$$\because\quad \overrightarrow{MA_k}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_k}(k=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore\quad \pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MA_n}=(\pm\overrightarrow{MO}\pm\overrightarrow{MO}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MO})+(\pm\overrightarrow{OA_1}\pm\overrightarrow{OA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{OA_n})$$

只需在$\overrightarrow{MA_k}$中k为奇数时取“+”，其余取“-”即可.

（2）在所考虑的和式中，设向量$\overrightarrow{OA_{i_1}},\overrightarrow{OA_{i_2}},\cdots,\overrightarrow{OA_{i_k}}$取“+”，而$\overrightarrow{OA_{j_1}},\overrightarrow{OA_{j_2}},\cdots,\overrightarrow{OA_{j_{n-k}}}$取“-”，那么和式右端变为

$$k\overrightarrow{MO}-(n-k)\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{i_k}})-(\overrightarrow{OA_{j_1}}+\overrightarrow{OA_{j_2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{j_{n-k}}})$$

如果　$\overrightarrow{MO}=\dfrac{1}{n-2k}[(\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{i_k}})-(\overrightarrow{OA_{j_1}}+\overrightarrow{OA_{j_2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{j_{n-k}}})]$，那么上式将为$\vec{0}$.

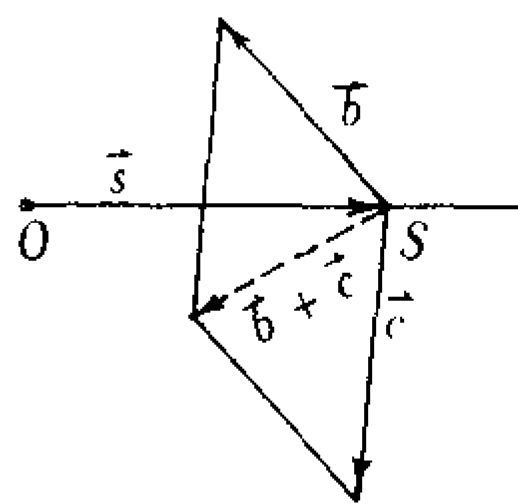
如果给定一组下标$i_1,i_2,\cdots,i_n$及$j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$，上式就惟一地

确定了点 M.而这样一组数的组数是有限的,所以当 n 为奇数时,满足题设条件的点 M 的数目有限.

19·9 在平面上给定 n 个向量,它们的长度都等于 1. n 个向量之和是零向量.证明:可以把向量编号,使得当 $k=1,2,\cdots,n$ 时,前 k 个向量之和长度不大于 2.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[证] 把所有向量都放在某一点 O.



我们证明:如果已经选到 k 个向量其和 $S=\overrightarrow{OS}$(如图),且 $|S|\leqslant 1$,则剩下的向量中可以要么选出一个向量 $\vec{a}$,使 $|\vec{s}+\vec{a}|\leqslant 1$,要么可选择两个向量 $\vec{b}$、$\vec{c}$,使 $|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant 1$.

事实上,如果在其余向量中有向量 $\vec{a}$,使 $\vec{a}$ 与 $\vec{s}$ 夹角 $\langle\vec{a},\vec{s}\rangle\geqslant 120^\circ$,则 $|\vec{s}+\vec{a}|\leqslant 1$.

如果没有这样的向量,由于直线 OS 的两侧都有向量组中的向量,那么可以在 OS 的一侧的半平面中选择与向量 S 构成最大角的一个向量作为 $\vec{b}$,同样也可以在 OS 的另一侧的半平面中选择向量 $\vec{c}$.

显然 $\langle\vec{c},\vec{s}\rangle$ 与 $\langle\vec{b},\vec{s}\rangle$ 中有一个是钝角.而 $\langle\vec{b},\vec{c}\rangle>120^\circ$.

不妨设 $\langle\vec{b},\vec{s}\rangle>90^\circ$,那么 $|\vec{s}+\vec{b}|<\sqrt{2}$.而 $\langle\vec{b}+\vec{c},\vec{s}\rangle>120^\circ$,

因此 $|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant 1$.

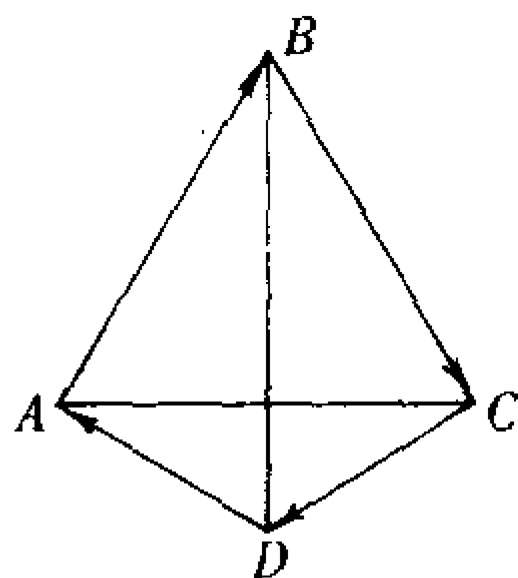
于是如果首先把向量 $\vec{b}$,再把向量 $\vec{c}$ 归并到和为 $\vec{s}$ 的向量组中,那么每一步之后的和的长度都小于 $\sqrt{2}$,更小于 2.

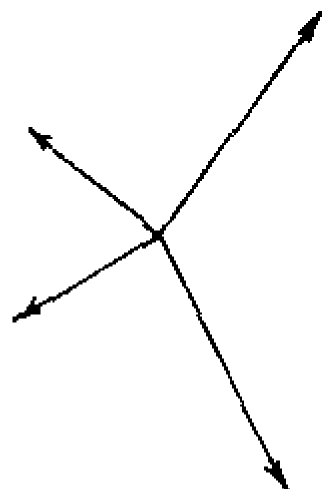
19·10 对平面中每个非零向量有限集 U,定义 $l(U)$ 为 U 中所有向量的和向量的长度.已知平面中一个非零向量有限集 V,如果对于 V 的每个非空子集 A,$l(B)$ 大于或等于 $l(A)$,则 V 的子集 B 被说成是最大的.(1)构造 4 和 5 个向量的集合,分别有 8 和 10 个最大子集;(2)证明:对于任何由 $n\geqslant 1$ 个向量组成的集合 V,最大子集的数目小于或等于 $2n$.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[解] (1)对 $n=4$,考虑四边形 $ABCD$,且 $AB=BC=CA=DB$,

$AD=DC$. 如下图所示,取向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$.





对 $n=5$,以正五边形的五个正指向边表示向量作为例子.

所以,对 $n=4$ 和 $n=5$ 两种情形,证明是直接的.

(2)分两步证明.

第一步:我们注意如果两个非零向量$\vec{u}$和$\vec{v}$的夹角是锐角,或这两向量垂直,则

$$|\vec{u}+\vec{v}|>\max\{|\vec{u}|,|\vec{v}|\},$$

式中$|\vec{\omega}|$表示$\vec{\omega}$的长度.这是根据"如果三角形有一个钝角或一个直角,则它的最长边是这个角的对边"得到的.

选择一点 O,并从 O 出发画出$\vec{v}$的向量.

过 O 且不包含$\vec{v}$的任何向量的一任意直线确定$\vec{v}$向量的两个子集,每一个完全位于半平面之一.当然,并非所有子集以这种方式出现,但我们将证明所有最大子集都是这样给出的.

实际上,设$\{\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_k}\}$为最大子集,且

$$\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\cdots+\overrightarrow{u_k}.$$

我们认为直线 l 通过 O 且垂直于$\vec{u}$.

首先注意$\vec{v}$的向量没有位于 l 上的;若这样的向量存在,我们的子集就不是最大的,因子集中任一这样向量的移动增加了剩余向量的和.

用 H 表示$\vec{u}$所在的半平面.位于 H 上的 v 的所有向量属于最大子集.因为它们与$\vec{u}$构成锐角,如果不属于该子集,包括它们就会增加$\vec{u}$的长度.

另一方面,位于相对(反)半平面的$\vec{v}$的单个向量一个也不属于那个子集,因为从该子集移开它会对包含位于 H 的相对向量有影响.于是这个最大子集由 l 决定.显然不多于 $2n$ 个子集由这样的直线确定.

第二步,在平面上选一个点 O 和源于 O 的一条射线 r,为角选定一个方向,并设 $r(\varphi)$为射线 r 绕 O 转动角 φ 所获得的射线.又设 proj $\vec{e}(\varphi)$是向量 v 到单位向量$\vec{e}(\varphi)$上的射影,$\vec{e}(\varphi)$位于 $r(\varphi)$的正方向上.

对于一个给定的向量$\vec{v}$,定义函数

$$v(\varphi)=\begin{cases}|\text{proj}\ \vec{e}(\varphi)(\vec{v})|, & \text{当}\langle\vec{e}(\varphi),\vec{v}\rangle\text{为锐角时},\\ 0, & \text{其他情形下}.\end{cases}$$

换言之,当$\vec{e}(\varphi)$在单位圆半圆内使得$\vec{v}$与$\vec{e}(\varphi)$间的夹角为钝角时,函数 $v(\varphi)$等于零.

当$\vec{e}(\varphi)$在相反的半圆上$\vec{v}$和$\vec{e}(\varphi)$之间夹角为锐角时,函数 $v(\varphi)$为正.后者被称为对应于$\vec{v}$的半圆.

设$\vec{v}$和$\vec{e}(\theta)$构成的角为 α,则

$$v(\varphi)=\begin{cases}|\vec{v}|\cos(\alpha-\varphi), & \text{当}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha-\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\text{时},\\ 0, & \text{其他情形下}.\end{cases}$$

给定一向量集 $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\cdots,\vec{v}_n\}$,由

$$V(\varphi)=v_1(\varphi)+v_2(\varphi)+\cdots+v_n(\varphi)$$

定义函数 $V(\varphi)$.

显然该函数的全局极大值对应 V 的最大子集.也就是说,$V(\varphi_0)$是一个全局极大值,当且仅当使得 $v_i(\varphi_0)\neq0$ 的所有 v_i 是一个最大子集.

对应于向量 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$的半圆的 $2n$ 个端点把单位圆分为至多 $2n$ 个不相交的弧$K_1,K_2,\cdots,K_n$.在每段弧上,函数$V(\varphi_0)$或者是零,或者是对某些 $\alpha\neq0$ 和 β,有

$$V(\varphi)=|\vec{u}_1|\cos(\alpha_1-\varphi)+\cdots+|\vec{u}_2|\cos(\alpha_k-\varphi)=\alpha\cos(\beta-\varphi).$$

因该函数只取非负值,且余弦函数在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$凹向上,每一弧

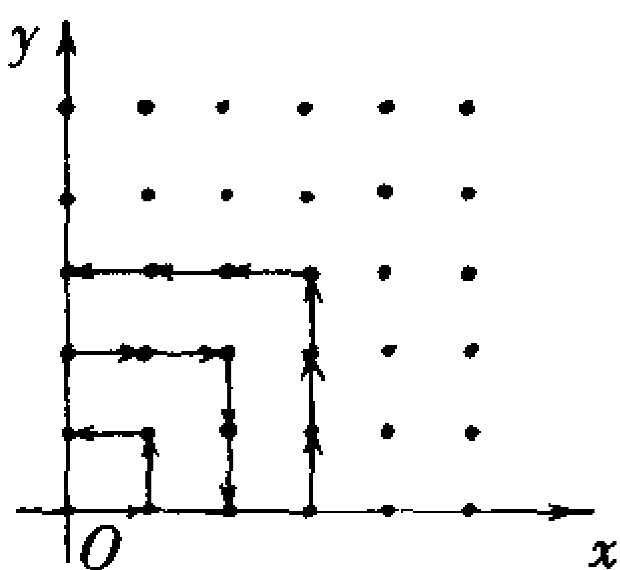
段不能有多于一个这个函数的全局极大值.

因此,函数 $v(\varphi)$没有多于 $2n$ 个全局极大值.从而,最大子集的个数最多有 $2n$ 个.

(二)解析几何

1. 坐标系、直线方程、直线形

19·11 在平面直角坐标系的第一象限,将坐标均为整数的点(格点)以下方法编号:①(0,0),②(1,0),③(1,1),④(0,1),⑤(0,2),⑥(1,2),⑦(2,2),⑧(2,1),⑨(2,0),……(如图中箭头顺序所示).求第 2000 号点的坐标.



(中国北京市数学竞赛,1979 年)

[解] 注意满足条件 $0\leqslant x\leqslant k,0\leqslant y\leqslant k$ 的格点(x,y)共有$(k+1)^2$ 个.考虑不等式

$$(k+1)^2<2000,$$

知满足上式最大的整数 $k=43$.从而知第 2000 号点的纵坐标或横坐标为 44.

因为 44 是偶数,故应从点(0,44)往右数.

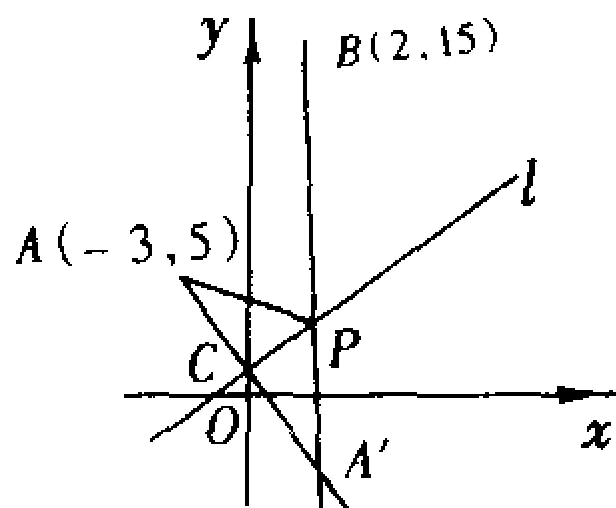
而 $2000-44^2=64>44$,知该点横坐标为 44,而其纵坐标是

$$44-(64-45)=25.$$

故第 2000 号点坐标为 (44,25).

19·12 有一条光线从点 $A(-3,5)$射到 l: $3x-4y+4=0$ 以后,再反射到一点 $B(2,15)$,求:这条光线从 A 到 B 的长度.

(中国北京市数学竞赛,1978 年)



[解] 直线 l: $3x-4y+4=0$ 的斜率是$\frac{3}{4}$,过 A 作直线$a\perp l$,则 a 的方程是 $4x+3y-3=0$.

由直线 l、a 的方程解得这两直线的交点为

$C(0,1)$.

设 A' 关于 l 与 A 对称,则 C 为 AA' 的中点,由中点坐标公式求得 A' 的坐标为 $(3,-3)$.

如果光线在 l 上的反射点是 P,则 P 在直线 $A'B$ 上,那么光线从 A 到 B 的长为

$$AP+PB=A'P+PB=A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}.$$

19·13 三个步行者各沿着一条笔直的大路匀速前进,在最初的时刻他们不在同一直线上.求证:他们能够在同一直线上的机会不多于两次.

(第 10 届全苏数学奥林匹克,1976 年)

[**证**] 因三个点 (x_0,y_0)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 共线,当且仅当

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0},$$

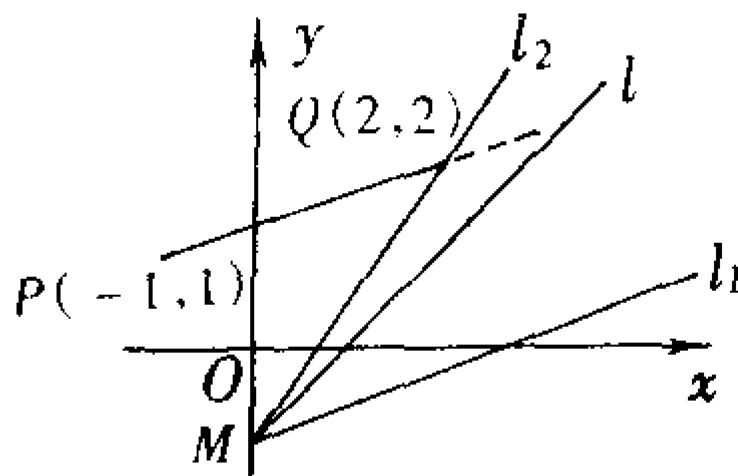
即 $(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)=0$ ㊉

如果 x_i 和 $y_i(i=0,1,2)$ 都是时间 t 的线性函数,则㊉成为关于 t 的二次方程,它具有不多于两个实根 t_1、t_2,即至多存在两个时刻三个步行者能够在一条直线上.

19·14 已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为 $(-1,1)$ 和 $(2,2)$,若直线 $l:x+my+m=0$ 与 PQ 的延长线相交,则 m 的取值范围是什么?

(中国高中数学联赛,1994 年)

[**解 1**] 直线 l 的方程 $x+my+m=0$,即 $x+m(y+1)=0$,显然是经过点 $M(0,-1)$ 的直线方程.过点 M 作直线 $l_1/\!/PQ$,显然,l_1 的斜率为



$$k_1=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3},$$

过 M、Q 作直线 l_2,则 l_2 的斜率为 $k_2=\frac{3}{2}$,如图所示,与 PQ 的延长线相交的直线 l 应夹在 l_1 与 l_2 之间,即 $k_1<k<k_2$(k 为 l 的斜率).

于是 $\frac{1}{3}<-\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$, $3>-m>\frac{2}{3}$, $-3<m<-\frac{2}{3}$.

[解 2]　直线 PQ 的方程为 $y-1=\frac{1}{3}(x+1)$，即 $x-3y+4=0$，

解方程组　$\begin{cases}x-3y+4=0,\\x+my+m=0.\end{cases}$

当 $m\neq-3$ 时，得　$\begin{cases}x=\frac{-7m}{m+3},\\y=\frac{-m+4}{m+3},\end{cases}$

它是直线 l 与直线 PQ 的交点的坐标. 欲使交点位于有向线段 PQ 的延长线上，必须且只需

$\frac{-7m}{m+3}>2$　或者　$\frac{-m+4}{m+3}>2$，

解这两个不等式，均有　$-3<m<-\frac{2}{3}$.

又 $m=-3$ 时，方程组无解. 故 m 的取值范围是　$-3<m<-\frac{2}{3}$.

[解 3]　设 $M(x,y)$ 为 PQ 延长线上任意一点且 $\frac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{MQ}}=\lambda$.

显然 $\lambda\in(-\infty,-1)$，$x=\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}$，$y=\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$.

代入直线 l 的方程，得

$\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}+\frac{m(1+2\lambda)}{1+\lambda}+m=0$，

$2+3m\neq0$，得 $\lambda=\frac{1-2m}{2+3m}$.

又显然 $2+3m$ 不大于零，否则 $\lambda>0$.

故　$2+3m<0$，得　$m<-\frac{2}{3}$.

解　$\frac{1-2m}{2+3m}<-1$，得　$m>-3$.

因此　$-3<m<-\frac{2}{3}$.

19·15　S 为直线 l_1: $7x+5y+8=0$ 和 l_2: $3x+4y-13=0$ 的交

点.点 $P(3,7)$,$Q(11,13)$所成的直线 PQ 上有两点A、B.其中 P 在A、Q 之间,B 在P、Q 之间,并且$\frac{PA}{AQ}=\frac{PB}{BQ}=\frac{2}{3}$.不求 S 的坐标,试求出直线 SA 与SB 的方程.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解] 由题意,有

SA 的方程: $(7x-5y+8)+\lambda(3x+4y-13)=0$, ①

SB 的方程: $(7x-5y+8)+\mu(3x+4y-13)=0$. ②

由 $\frac{PA}{AQ}=\frac{PB}{BQ}=\frac{2}{3}$ 及分点公式得 A、B 坐标分别为

$$A(-13,-5),\ B\left(\frac{31}{5},\frac{47}{5}\right).$$

它们分别适合①,②,代入后求得

$$\lambda=-\frac{29}{36},\ \mu=-\frac{11}{108}.$$

因此 所求的直线 SA 和SB 的方程为:

SA 的方程: $165x-296y+665=0$,

SB 的方程: $723x-584y+1007=0$.

19·16 在坐标平面上,是否存在一个含有无穷多条直线 l_l,$l_2,\cdots,l_n,\cdots$的直线族,它满足条件:(1)点$(1,1)\in l_n$,$n=1,2,3,\cdots$;(2)$k_{n+1}=a_n-b_n$,其中 k_l 是l_1 的斜率,k_{n+1}是 l_{n+1}的斜率,a_n 和b_n 分别是 l_n 在x 轴和y 轴上的截矩,$n=1,2,3,\cdots$;(3)$k_nk_{n+1}\geqslant 0$,$n=1,2,3,\cdots$? 并证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1988 年)

[解] 满足条件(1),(2),(3)的直线族不存在.

若不然,l_n 的方程为$y-1=k_n(x-1)$.

又 $a_n=1-\frac{1}{k}$, $b_n=1-k_n$, $a_n-b_n=k_n-\frac{1}{k_n}=k_{n+1}$都存在,

故 $k_n\neq 0$,$n=1,2,\cdots$,

对于 $n\geqslant 1$,有

$$k_{n+1}-k_n=-\frac{1}{k_n},$$

$$k_n-k_{n-1}=-\frac{1}{k_{n-1}},$$

……

$$k_2-k_1=-\frac{1}{k_1},$$

上面诸式相加得 $k_{n+1}=k_1-\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}\right)$.

由 $k_n\neq0$ 及(3),有 $k_nk_{n+1}>0$,可知诸 k_n 符号相同,不妨设 $k_n>0$, $n=1,2,\cdots$.

由 $k_{n+1}=k_n-\frac{1}{k_n}<k_n$, 有$\frac{1}{k_{n+1}}>\frac{1}{k_n}$,

$\therefore$ $k_{n+1}=k_1-\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}\right)<k_1-\frac{n}{k_1}$,

但当 $n=k_1{}^2$时, $k_{n+1}<0$,矛盾.

(同理可证,当 $k_n<0$, $n=1,2,\cdots$,也会出现矛盾.)

所以,满足(1),(2),(3)的直线族不存在.

19·17 在平面上给定无穷个点,试证:若它们之间的距离都是整数,则这些点都在一条直线上.

(第 18 届美国普特南数学竞赛,1958 年)

[证] 假定给定的无穷个点的集合中有三个不共线的点 A、B、C.

令 $AB=r$, $AC=s$.

若 P 是到 A、B 的距离都是整数的任意点,由 $|PA-PB|\leqslant AB$ 可知, $|PA-PB|$ 是整数 $0,1,2,\cdots,r$ 中的一个.

所以 P 点必定落在双曲线族

$H=\{X\mid |XA-XB|=i\}$, $i=1,2,\cdots,r-1$

中的一条上面,或在 AB 与 AB 的垂直平分线的并集 H_0 上.

同理,到 A、C 的距离都为整数的点 P 必落在双曲线族

$$K_i=\{X\mid |XA-XC|=i\},\ i=1,2,\cdots,s-1$$

中的一条上,或在 AC 与 AC 的垂直平分线的并集 K_0 上.

于是,给定的集合中的任一点必定在集合

$$H_i\cap K_j(i=0,1,2,\cdots,r-1,j=0,1,2,\cdots,s-1)$$

之一上.

由于 AB 和 AC 不同,所以没有一个集合 H_i 与任一集合 K_j 相同.

若 i 和 j 有一个不为 0,则 $H_i \cap K_j$ 必是两条不同时退化的二次曲线的交点,所以 $H_i \cap K_j$ 至多含有四个点.

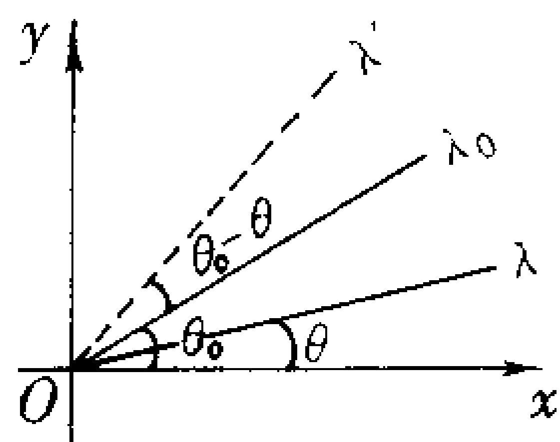
同时 $H_0 \cap K_0$ 也至多含有四个点,所以这给定的集合至多含有 $4(r+1)(s+1)$ 个点,这与题设的集合有无穷多个点相矛盾.

因此,所有给定的点是共线的.

19·18 直线 l_1 和 l_2 均通过原点,与 x 轴的正方向在第一象限中分别形成 $\frac{\pi}{70}$ 和 $\frac{\pi}{54}$ 的夹角. 对于任意一条直线 l 进行变换,记该变换为 R,得另一条直线 $R(l)$,变换 R 为:l 先经 l_1 反射,所得直线(即以 l_1 为对称轴,l 的轴对称图形),再经 l_2 反射,得到 $R(l)$. 令 $R^{(1)}(l)=R(l)$,对于 $n \geqslant 2$,定义 $R^n(l)=R(R^{n-1}(l))$. 已知:直线 l 为 $y=\frac{19}{92}x$. 试求:使得 $R^{(m)}(l)=l$ 的最小正整数 m.

(第 10 届美国数学邀请赛,1992 年)

[解] 设 λ_0 和 λ 是过原点与 x 轴成 θ_0 和 θ 角的两条直线.



当 λ 通过 λ_0 反射,所得到的直线 λ' 应与 x 轴成 $\theta_0+(\theta_0-\theta)=2\theta_0-\theta$ 角.

这样,如果 λ 经过 l_1 反射,则反射所得直线 λ_1 为一通过原点且与 x 轴成 $\frac{2\pi}{70}-\theta$ 角的直线,而直线 λ_1 经过 l_2 反射所得直线 λ_2 是通过原点且与 x 轴成

$$2\cdot\frac{\pi}{54}-\left(\frac{2\pi}{70}-\theta\right)=-\frac{8\pi}{945}+\theta$$

角的直线.

故 $R(\lambda)$ 应是将直线 λ 以原点为轴旋转 $-\frac{8\pi}{945}$ 弧度所得之直线,而 $R^{(m)}(\lambda)$ 是旋转 $-\frac{8m\pi}{945}$ 弧及所得之直线.

欲使 $R^{(m)}(\lambda)=\lambda$ 成立,则 $\frac{8m}{945}$ 必须是一个整数. 由于 $(945,8)=1$,则 m 的最小值应为 945.

19·19 $\triangle PQR$ 的三个顶点的坐标为:$P(-8,5)$,$Q(-15,-19)$,

$R(1,-7)$,又$\angle P$ 的平分线方程可以写成$ax+2y+c=0$.试求:$a+c$.

（第 8 届美国数学邀请赛,1990 年）

[解 1] 由两点间距离公式得

$|PR|=\sqrt{(-8-1)^2+(5+7)^2}=15$,

$|PQ|=\sqrt{(-8+15)^2+(5+19)^2}=25$.

设$\angle P$ 的平分线交QR 于T,则由三角形内角平分线定理得

$$\frac{|PR|}{|PQ|}=\frac{|PT|}{|TQ|}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

再由定比分点公式得

$$x_T=\frac{1+\frac{3}{5}\times(-5)}{1+\frac{3}{5}}=-5,$$

$$y_T=\frac{-7+\frac{3}{5}\times(-19)}{1+\frac{3}{5}}=-\frac{23}{2}.$$

直线 PT 的方程为

$$\frac{y-5}{-\frac{23}{2}-5}=\frac{x+8}{-5+8},$$

即 $11x+2y+78=0$,

于是 $a=11$, $c=78$. 即 $a+c=11+78=89$.

[解 2] 设$\angle P$ 的平分线的斜率为k,直线 PR 和PQ 的斜率相应为k_{PR}和k_{PQ},则

$$k_{PR}=\frac{-7-5}{1+8}=-\frac{4}{3},\quad k_{PQ}=\frac{-19-5}{-15+8}=\frac{24}{7}.$$

由二直线夹角公式及角 P 的平分线与直线PR,直线 PQ 夹等角可得

$$\frac{-\frac{4}{3}-k}{1-\frac{4}{3}k}=\frac{k-\frac{24}{7}}{1+\frac{24}{7}k}.$$

即 $22k^2+117k-22=0$.

得　　$k=-\frac{11}{2}$，$k=\frac{2}{11}$.

由于求△PQR之内角平分线，所以将$k=\frac{2}{11}$舍去.

则　∠P的平分线方程为：

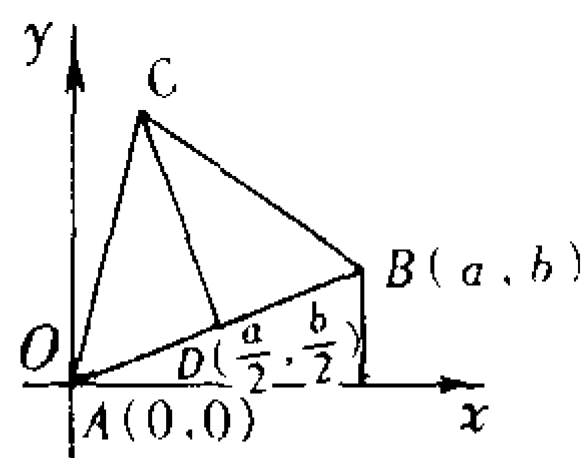
$y-5=-\frac{11}{2}(x+8)$，即　$11x+2y+78=0$.

∴　$a=11$，$c=78$，$a+c=11+78=89$.

19·20　平面上任取三个两坐标均为整数的点(格点)，试证：它们不能是正三角形三个顶点.

（中国北京市数学竞赛，1957年）

[证1]　若A、B、C为正三角形三顶点，今考虑以$A(0,0)$为坐标原点的坐标系，且设B点坐标为(a,b)，其中a、$b\in Z$.



则AB中点D的坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

又$AC=AB$，且$CD\perp AB$，则顶点C的坐标(x,y)应满足方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2+b^2,\\ \dfrac{y-\dfrac{b}{2}}{x-\dfrac{a}{2}}\cdot\dfrac{b}{a}=-1.\end{cases}$$

解得　$\begin{cases}x=\dfrac{a\mp\sqrt{3}b}{2},\\ y=\dfrac{\pm\sqrt{3}a+b}{2}.\end{cases}$

而要使x、y为整数，必须$a=b=0$.

所以，坐标均为整数的三点不能组成正三角形.

[证2]　用反证法. 设△ABC的三个顶点坐标分别为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$(x_i，y_i为整数，$i=1,2,3$). 则由

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{ 的绝对值，}$$

知正三角形的面积是有理数;

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$,

知正三角形的面积是无理数.

这就得到矛盾.故坐标为整数的三点不能组成正三角形.

19·21 Q 为$\triangle ABC$ 的内心,证明:对任一点 P, $a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2=a\cdot QA^2+b\cdot QB^2+c\cdot QC^2+(a+b+c)\cdot QP^2$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 由于$\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为:

$$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),$$

则其内心 Q 的坐标为

$$Q\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\ \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right).$$

若以 Q 为坐标原点,则有

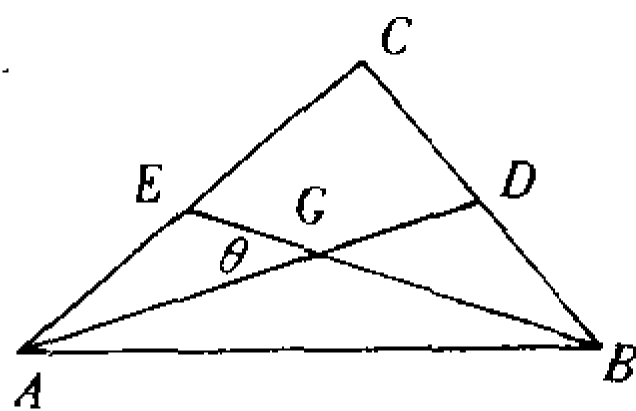
$$ax_A+bx_B+cx_C=0,$$
$$ay_A+by_B+cy_C=0.$$

于是对任一点 $P(x,y)$有

$$\begin{aligned}&a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\\&=a(x_P-x_A)^2+b(x_P-x_B)^2+c(x_P-x_C)^2+a(y_P-y_A)^2\\&\quad+b(y_P-y_B)^2+c(y_P-y_c)^2\\&=(a+b+c)(x_P^2+y_P^2)+ax_A^2+bx_B^2+cx_C^2+ay_A^2+ay_B^2+ay_C^2\\&\quad-2x_P(ax_A+bx_B+cx_C)-2y_P(ay_A+by_B+cy_C)\\&=(a+b+c)\cdot QP^2+a(x_A^2+y_A^2)+b(x_B^2+y_B^2)+c(x_C^2+y_C^2)\\&=a\cdot QA^2+b\cdot QB^2+c\cdot QC^2+(a+b+c)\cdot QP^2.\end{aligned}$$

19·22 令$\triangle ABC$ 为 xy 平面上的一个直角三角形,C 为直角,斜边 AB 长为 60,从 A 和 B 引出的中线分别在直线 $y=x+3$, $y=2x+4$ 上,求:$S_{\triangle ABC}$.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)



[解] 如图,设中线 $AD=3t$, $BE=3s$,重心为 G, AD 和 BE 所夹锐角 $\angle AGE=\theta$,并设 $AC=2p$, $BC=2q$.

由于 AD、BE 所在直线方程为

$$y=x+3, y=2x+4.$$

则这二直线所夹锐角之正切得 $\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{1-2}{1+1\times 2}\right|=\frac{1}{3}$.

于是 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

设△ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC}=S$. 则 $S=6S_{\triangle AGE}$.

又 $S_{\triangle AGE}=\frac{1}{2}AG\cdot GE\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot s\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{st}{\sqrt{10}}$.

$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2pq$.

由勾股定理得 $AC^2+BC^2=4p^2+4q^2=AB^2=3600$,

$\therefore\quad p^2+q^2=900$.

又 $AC^2+CD^2=AD^2$, $BC^2+CE^2=BE^2$,

即 $\begin{cases}4p^2+q^2=9t^2,\\ 4q^2+p^2=9s^2.\end{cases}$

于是,由 $S=6S_{\triangle AGE}=\frac{6st}{\sqrt{10}}$ 得

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{36}{10}s^2t^2\\&=\frac{18}{5}\cdot\frac{4p^2+q^2}{9}\cdot\frac{4q^2+p^2}{9}\\&=\frac{2}{45}[(2p^2+2q^2)+9p^2q^2]\\&=\frac{2}{45}\left(1800^2+\frac{9}{4}S^2\right)\\&=144000+\frac{1}{10}S^2.\end{aligned}$$

解得 $S=400$.

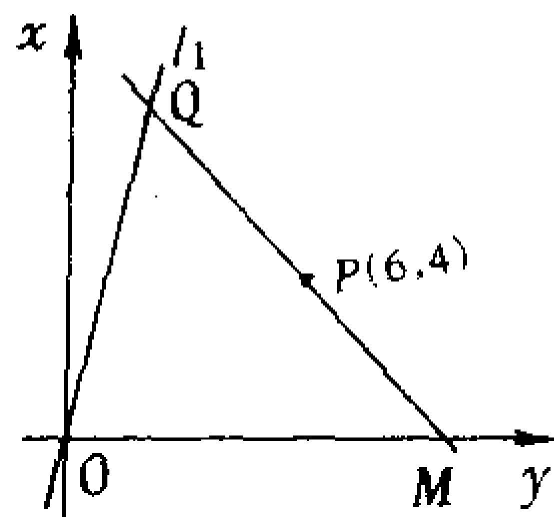
19·23 已知:直线 l_1: $y=4x$ 和点 $P(6,4)$,在直线 l_1 上求一点 Q,使过 PQ 的直线与 l_1,以及 x 轴在第Ⅰ象限内围成的三角形的面积

最小.

（中国高中数学联赛，1978 年）

[解] 如图，设 Q 点的坐标为(x_1,y_1)，则 $y_1=4x_1$，那么直线 PQ 的方程为：

$$\frac{y-4}{4x_1-4}=\frac{x-6}{x_1-6}.$$



又设直线 PQ 交 x 轴于 $M(x_2,0)$，则有

$$\frac{-4}{4(x_1-1)}=\frac{x_2-6}{x_1-6},\ x_2=\frac{5x_1}{x_1-1},$$

即点 M 的坐标为 $\left(\frac{5x_1}{x_1-1},0\right)$.

$\triangle OMQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot y_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}$,

从而 $y_1=4x_1$，从而 $S=\frac{1}{2}\cdot 4x_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}=\frac{10x_1^2}{x_1-1}$,

$$\therefore\quad 10x_1^2-Sx_1+S=0 \qquad (*)$$

要使方程$(*)$有实根，则 $S^2-40S\geqslant 0$，即 $S(S-40)\geqslant 0$.

由于 $S>0$，故 $S-40\geqslant 0$，即 $S\geqslant 40$.

把 $S=40$ 代入$(*)$得 $x_1^2-4x_1+4=0$，故 $x_1=2$.

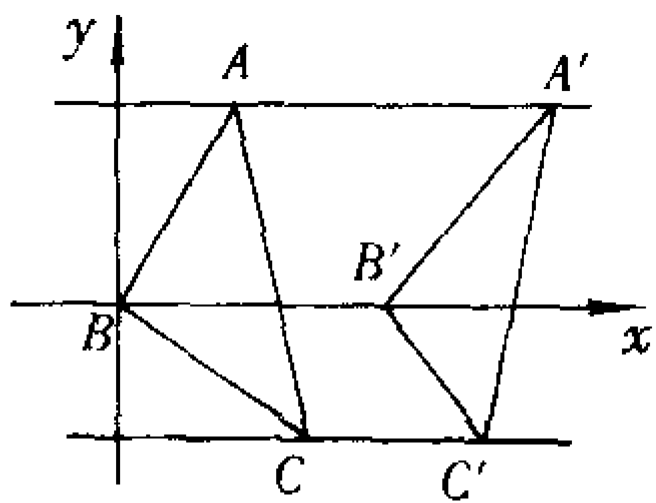
这就是说，当 $x_1=2$ 时，使 S 达到极小.

由 $y_1=4x$，得 $y_1=8$.

故所求点 Q 的坐标为$(2,8)$.

19·24 $\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$是在同一个平面内的两个三角形，直线 AA'、BB'、CC'互相平行. 如果 $S_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$ 带有适当$+$、$-$符号的面积，其余类推，求证：$3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'})=S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}$.

（第 6 届美国数学奥林匹克，1977 年）



[证] 以 B 为原点，BB'为 x 轴，建立平面直角坐标系. 且设

$A(x_1,y_1)$，$B(0,0)$，$C(x_2,y_2)$

$A'(x_3,y_1)$，$B'(x_4,0)$，$C'(x_5,y_2)$.

$\therefore\quad 3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'})$

$$=\frac{3}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & 0 & 0\\1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}+\frac{3}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_1\\1 & x_4 & 0\\1 & x_5 & y_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3x_1+3x_3 & y_1\\1 & 3x_4 & 0\\1 & 3x_2+3x_5 & y_2\end{vmatrix}.$$

$$S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_4 & 0\\1 & x_5 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & x_5 & y_2\\1 & x_3 & y_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_1\\1 & x_4 & 0\end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_1\\1 & 0 & 0\\1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_4 & 0\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_5 & y_2\\1 & x_1 & y_1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_4 & 0\\1 & x_5 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_1\\1 & 0 & 0\\1 & x_5 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_1\\1 & x_4 & 0\\1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_1\\1 & 0 & 0\\1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_4 & 0\\1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & 0 & 0\\1 & x_5 & y_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3x_1+3x_3 & y_1\\1 & 3x_4 & 0\\1 & 3x_5+3x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

$\therefore\quad 3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'})$

$\quad=S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}.$

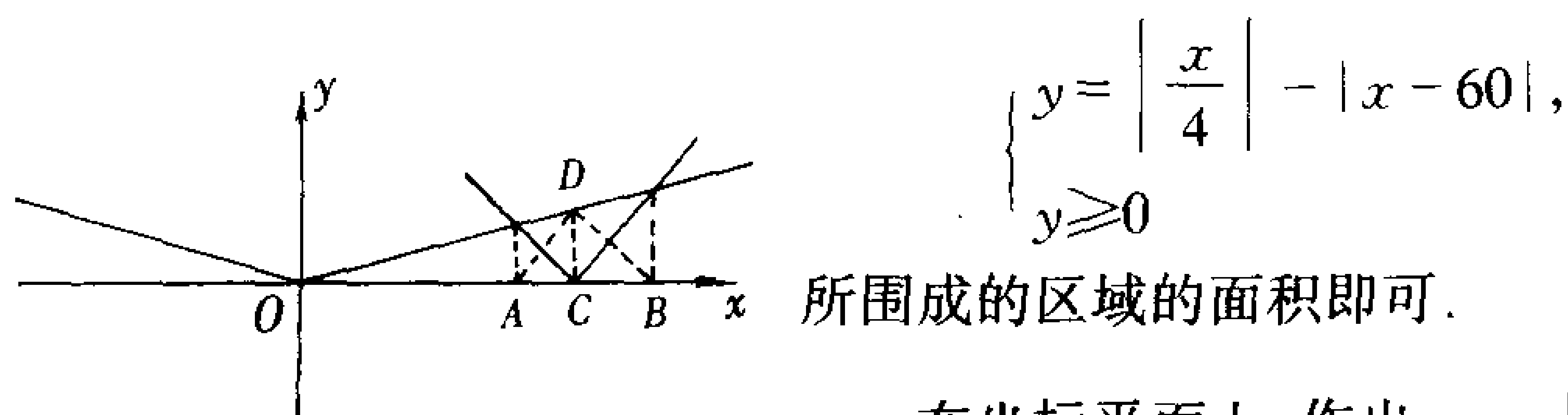
19·25 求方程$|x-60|+|y|=\left|\frac{x}{4}\right|$表示的图形所围成的区域的面积.

（第5届美国数学邀请赛,1987年）

[解] 把$-y$代入已知方程仍得

$$|x-60|+|y|=\left|\frac{x}{4}\right|.$$

因此,已知方程的图形关于x轴对称,为此,只需求其一半,即求



$$\begin{cases} y=\left|\frac{x}{4}\right|-|x-60|, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

所围成的区域的面积即可.

在坐标平面上,作出 $y_1=\left|\frac{x}{4}\right|$ 和 $y_2=|x-60|$ 的图形.

它们分别是以(0,0)为顶点,关于 y 轴对称和以(60,0)为顶点,关于直线 $x=60$ 对称的两条射线,它们的差与 x 轴在上半平面围成的区域为$\triangle DAB$,

由 $\begin{cases} y=\frac{x}{4}-(x-60), \\ y=0. \end{cases}$ 解得 $B(80,0)$

由 $\begin{cases} y=\frac{x}{4}-(60-x), \\ y=0. \end{cases}$ 解得 $A(48,0)$.

又由 $\begin{cases} y=\frac{x}{4}, \\ x=60. \end{cases}$ 解得 $D(60,15)$.

于是 $|AB|=|48-80|=32$, $|DC|=15$.

$$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}\times 32\times 15=240.$$

从而原方程所围成的区域的面积为 $2S_{\triangle DAB}=480$.

19·26 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(0,0)$, $B(0,420)$, $C(560,0)$,一颗骰子的六个面分别标记 A、A、B、B、C、C,在$\triangle ABC$ 的内部取点 $P_1=(k,m)$,并且点 P_2、P_3、P_4,…按下列法则产生:如果 P_n 已取好,掷一次骰子得出标记 L, $L\in\{A,B,C\}$,那么 P_{n+1}是 P_nL 的中点,给定 $P_7=(14,92)$,求:$k+m$ 的值.

(第 11 届美国数学邀请赛,1993 年)

[解] 由题设可求出 $P_7(14,92)$只能是 P_6A 的中点,所以 $P_6(28,184)$,

同理 P_6 只能是 P_5A 的中点,所以 $P_5(56,368)$,

P_5 只能是 P_4B 的中点,所以 $P_4(112,316)$,

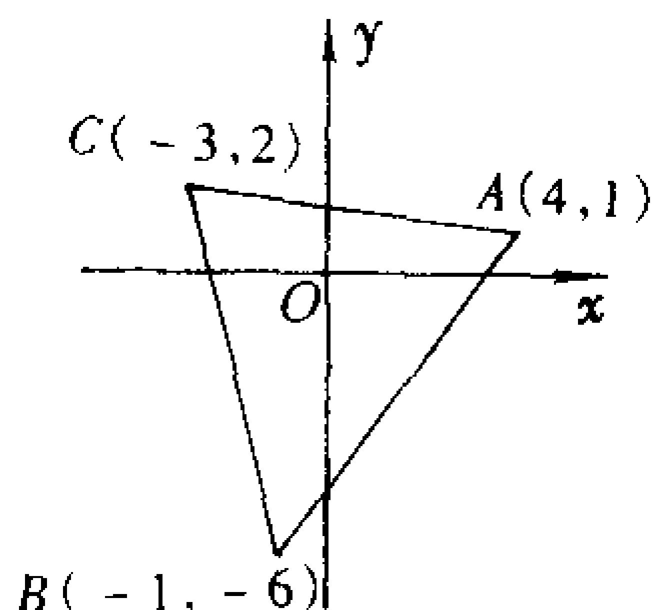
P_4 只能是 P_3B 的中点，所以 $P_3(224,212)$，

P_3 只能是 P_2B 的中点，所以 $P_2(224,4)$.

P_2 只能是 P_1C 的中点，所以 $P_1(336,8)$.

因此 $k+m=336+8=344$.

19·27 设 R 为平面上以 $A(4,1)$、$B(-1,-6)$、$C(-3,2)$三点为顶点的三角形区域(包括三角形内部及周界，如图). 试求：当(x,y)在上变动时，函数 $4x-3y$ 的极大值和极小值(须证明你的论断).



(中国高中数学联赛，1978 年)

[解] 令 $\lambda=4x-3y$，显见，当 λ 固定，(x,y)变动时，我们即得平面上一条直线，再令 λ 变动，则得平面上一系列相互平行的直线，在其中每一条直线上，$4x-3y$ 的值都相同.

当直线经过 A 点时，$\lambda=13$，此时直线经过$\left(\frac{13}{4},0\right)$；

当直线经过 B 点时，$\lambda=14$，此时直线经过$\left(\frac{7}{2},0\right)$；

当直线经过 C 点时，$\lambda=-18$，此时直线经过$\left(-\frac{9}{2},0\right)$. 即直线 $\lambda=4x-3y$ 和 x 轴交于$(x',0)=\left(\frac{\lambda}{4},0\right)$，而 $\lambda=4x'$ 和 x' 成正比，

$\because \quad -\frac{9}{2}\leqslant x'\leqslant\frac{7}{2}$，

$\therefore \quad -18\leqslant\lambda\leqslant14$，

所求最大值和最小值分别是 14 和 -18.

19·28 一边长为 $2a$ 的正方形总位于 XY 平面的第Ⅰ象限内，当此正方形移动时，它的两个相邻顶点始终分别保持在 x 轴上和 y 轴上. 求：正方形中心的轨迹.

(第 5 届美国普特南数学竞赛，1942 年)

[解] 设 A 和 B 为正方形的两相邻顶点，分别位于 x 轴上和 y 轴上.

设 C 为正方形的中心，从 C 向 x 轴和 y 轴引垂线，D 和 E 分别为垂足.

由$\angle ACB=\angle DCE=90°$，可知 $\angle ACD=\angle BCE$，

又 $CB=CA$，则 $\text{Rt}\triangle ACD\cong\text{Rt}\triangle BCE$.

有 $CD=CE$.

即 C 点的横坐标 x 与纵坐标 y 相等.

所以，当给定正方形按照题设要求移动时，它的中心 C 沿着从(a,a)到$(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a)$的线段来回移动. 即 C 点的轨迹方程为

$$y=x\quad(a\leqslant x\leqslant\sqrt{2}a).$$

19·29 求证：在坐标平面上不能绘出一个凸四边形，使得其一条对角线的长是另一条的两倍，且对角线间夹角是 45°，而四边形各顶点坐标都是整数.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［证］ 用反证法. 设在坐标平面上可绘出满足题设条件的凸四边形 $ABCD$，其各顶点的坐标均为整数（即各顶点为整点或格点），又 $AC=2BD$，且 AC 与 BD 间的夹角为 45°.

作 $AE\ \underline{\underline{/\!/}}\ BD$，则 E 点也整点，$\angle CAE=45°$.

由余弦定理有

$$\begin{aligned}CE^2&=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cos45°\\&=AC^2+BD^2-2\sqrt{2}BD^2.\end{aligned}$$

易知整点间的距离平方为整数，于是上式左端为整数，右端是无理数，矛盾.

19·30 在直角坐标平面上的 1994 边形的第 k 条边长 $a_k=\sqrt{4+k^2}$，$k=1,2,\cdots,1994$. 求证：该多边形的顶点不可能全部为整点.

（加拿大数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 用反证法. 若不然，设该多边形顶点全为整点，且令第 k 个顶点坐标为(x_k,y_k)，其中 $x_k,y_k\in Z$.

令 $z_k=x_k+iy_k$，

$d_k=z_{k+1}-z_k=(x_{k+1}-x_k)+i(y_{k+1}-y_k)=\alpha_k+i\beta_k$，$k=1,2,\cdots,1994$，

且 $x_{1995}=x_1$，$y_{1995}=y_1$.

则 $|d_k|^2=a_k^2=4+k^2$.

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{1994}|d_k|^2=\sum_{k=1}^{1994}(4+k^2),$$

$$且 \quad \sum_{k=1}^{1994}(\alpha_k^2+\beta_k^2)=4\times1994+\frac{1994\times1995\times3989}{6}$$

$$=4\times1994+997\times665\times3989,$$

显然上式是奇数.

$$又 \because \quad \sum_{k=1}^{1994}d_k=0,\ \therefore \quad \sum_{k=1}^{1994}\alpha_k=\sum_{k=1}^{1994}\beta_k=0,$$

$$故 \quad [\sum_{k=1}^{1994}(\alpha_k+\beta_k)]^2=0.$$

$$即 \quad \sum_{k=1}^{1994}(\alpha_k^2+\beta_k^2)+2(\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j+\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j+\sum_{i<j}\beta_i\beta_j)=0$$

$$\therefore \quad \sum_{i}(\alpha_i^2+\beta_i^2)=-2(\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j+\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j+\sum_{i<j}\beta_i\beta_j)$$

上式式左已证是奇数,而式右为偶数,矛盾!

从而前设不真,故命题成立.

2. 圆

19·31 考虑一端在直线 $y=x$ 上,另一端在直线 $y=2x$ 上,而其长为 4 的一切直线段,求:这些线段的中点的轨迹方程.

(第 2 届加拿大数学奥林匹克,1970 年)

[解] 设 $A(a,2a)$是直线 $y=2x$ 上的任意点,$B(b,b)$是直线 $y=x$ 上,线段 AB 的中点$M(x,y)$,则

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{2a+b}{2}. \qquad ①$$

由线段 AB 的长等于 4 可得

$$(a-b)^2+(2a-b)^2=4^2. \qquad ②$$

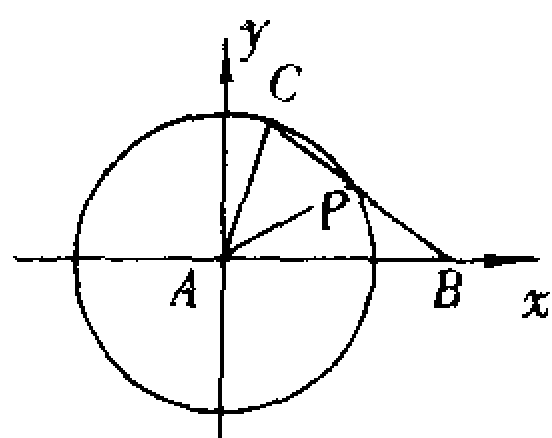
由①得 $a=2(y-x)$,$b=2(2x-y)$. 代入②得

$$[2(y-x)-2(2x-y)]^2+[4(y-x)-2(2x-y)]^2=16,$$

即 $25x^2-36xy+13y^2=4$.

19·32　A、B 是平面上给定的两点，C 在以 A 为圆心的圆上运动，$\triangle ABC$ 的角 A 的内角平分线与边 BC 的交点为 P. 求：P 点的轨迹.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）



［解］　以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系.

设以 A 为圆心的圆是单位圆　$x^2+y^2=1$.

设　$C(x_0,y_0)$，$B(a,0)$，$P(x,y)$.

由 AP 是$\angle CAB$ 的平分线，则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}=\frac{a}{1}=a,$$

从而由定比分点公式得　$x=\dfrac{a+ax_0}{1+a}$，$y=\dfrac{ay_0}{1+a}$.

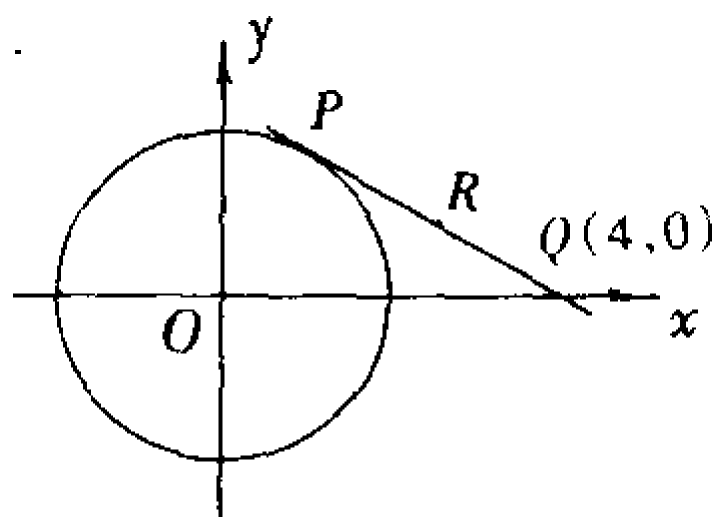
从而解得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{(1+a)x-a}{a}, \\ y_0=\dfrac{(1+a)y}{a}. \end{cases}$

$\because$　$x_0^2+y_0^2=1$

$\therefore$　$\left[\dfrac{(1+a)x-a}{a}\right]^2+\left[\dfrac{(1+a)y}{a}\right]^2=1$,

即　$^2+y^2-\dfrac{2a}{1+a}x=0$.

因此，P 点的轨迹是一个圆，但去掉此圆与 x 轴的两个交点.



19·33　已知：P 为圆 $x^2+y^2=4$ 上一个动点，又点 Q 的坐标为 $(4,0)$，试求：线段 PQ 的中点轨迹的方程.

（中国北京市数学竞赛，1978 年）

［解］　设线段 PQ 的中点 R 的坐标为 $(x、y)$，那么，由中点坐标公式，可知点 P 的坐标为 $(2x-4,2y)$，又点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，故有

$$(2x-4)^2+(2y)^2=4.$$

所以，线段 PQ 的中点轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

19·34　给定一个圆和它的内部一点 M，考虑所有可能的矩形

$MKTP$,它的顶点 K 和 P 位于圆上,求点 T 的轨迹.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解] 设 $M(a,b)$,圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2,$$

又设 $P(x_1,y_1)$,$K(x_2,y_2)$,$T(x,y)$.

由 $MKTP$ 是矩形可得

$$\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}, & ①\\[2ex] \dfrac{y+b}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2}, & ②\\[2ex] (x-a)^2+(y-b)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2. & ③\end{cases}$$

①与②平方并相加,注意到 $x_i^2+y_i^2=r^2(i=1,2)$得

$$(x+a)^2+(y+b)^2=2r^2+2x_1x_2+2y_2y_2, \quad ④$$

由③得 $(x-a)^2+(y-b)^2=2r^2-2x_1x_2+2y_1y_2.$ ⑤

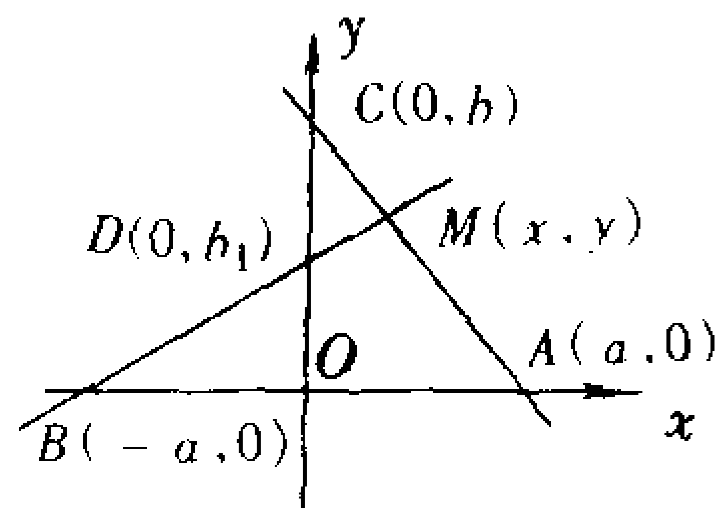
④+⑤可得 $x^2+y^2=2r^2-(a^2+b^2).$

所以所求的点 T 的轨迹是以原点为圆心,$\sqrt{2r^2-(a^2+b^2)}$ 为半径的圆.

19·35 二杆各绕点 $A(a,0)$和 $B(-a,o)$旋转,且它们在 Y 轴上的截距的乘积 $bb_1=a^2$(常数),试求:旋转杆交点的轨迹方程.

(中国广东省数学竞赛,1978年)

[解] 设 $M(x,y)$是两杆交点,则 $M(x,y)$满足两杆所定的直线方程



$$y=-\frac{b}{a}(x-a); \quad ①$$

$$y=\frac{b_1}{a}(x+a). \quad ②$$

①、②两式两边相乘,得 $y^2=-\dfrac{bb_1}{a^2}(x^2-a^2).$

把 $bb_1=a^2$(题设)代入上式,得 $y^2=-x^2+a^2$,

即 $x^2+y^2=a^2.$

由　$bb_1=a^2$(常数)，得 b、b_1 不为0，

因而　$y\neq 0$，$x\neq \pm a$，

故所求轨迹方程为　$x^2+y^2=a^2(-a<x<a)$.

19·36　一动圆过点(0,6)且与圆 $x^2+y^2=100$ 内切,求:这动圆圆心的轨迹.

（中国四川省数学竞赛,1978年）

[解]　设动圆圆心为(x_1,y_1)、半径为 r，

因这动圆过点(0,6)，

$$\therefore\quad r=\sqrt{x_1^2+(6-y_1)^2}. \qquad ①$$

又因这动圆与半径为10的圆内切,故两圆半径之差 $10-r$ 应等于两圆圆心距 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，

即　$$10-r=\sqrt{x_1^2+y_1^2}. \qquad ②$$

由①与②得　$\sqrt{x_1^2+(6-y_1)^2}=10-\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，

即　$x_1^2+(6-y_1)^2=100-20\sqrt{x_1^2+y_1^2}+x_1^2+y_1^2$，

或　$5\sqrt{x_1^2+y_1^2}=3y_1+16$.

上式两边平方,整理得　$25x_1^2+16(y_1-3)^2=400$.

所以,动圆圆心轨迹为椭圆　$\dfrac{x_1^2}{4^2}+\dfrac{(y_1-3)^2}{5^2}=1$.

19·37　一动圆过定点$(c,0)$且与定圆$(x+c)^2+y^2=4a^2(a>,c>0)$相切,试分别情况求此动圆圆心的轨迹方程.

（中国四川省重庆市数学竞赛,1978年）

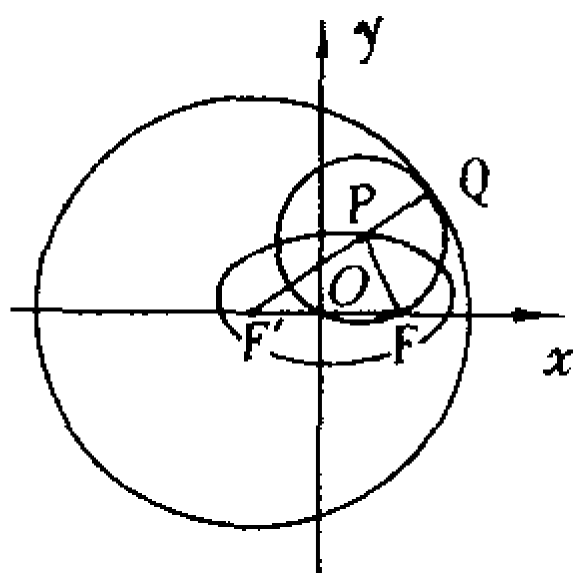


图1

[解]　根据题意,定点为 $F(c,0)$,定圆的圆心为 $F'(-c,0)$,定圆的半径为 $2a$.

设 $P(x',y')$为动圆的圆心,Q 为动圆与定圆的切点，

以下分三种情况讨论:

(1)当 $a>c$ 时,$F(c,0)$在圆 F'内(图1).

$$\because\quad |PF'|+|PF|=|PF'|+|PQ|=|F'Q|=2a,$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2a.$$

化简,得 $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{a^2-c^2}=1$.

这时,P 点的轨迹为椭圆.

(2)当 $a<c$ 时,$F(c,0)$在圆 F'外(见图 2 或图 3).

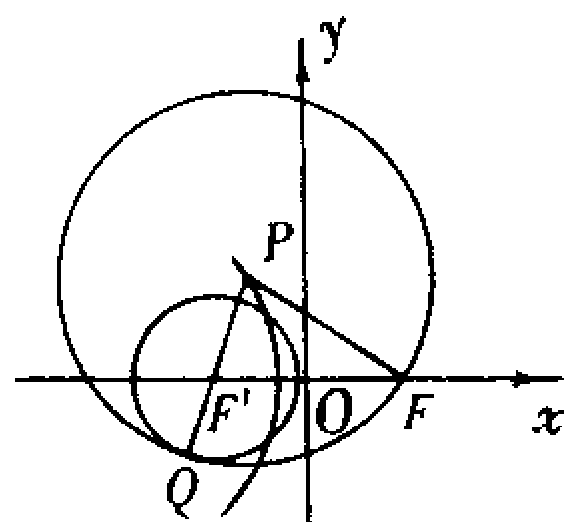


图 2

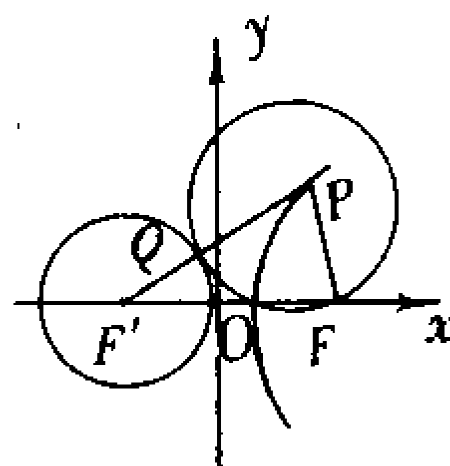


图 3

$\because\quad |PF|-|PF'|=|PQ|-|PF'|=|QF'|=2a$,

或 $\quad |PF'|-|PF|=|PF'|-|PQ|=|QF'|=2a$,

$\therefore\quad \sqrt{(x'-c)^2+y'^2}-\sqrt{(x'+c^2)+y'^2}=2a$,

或 $\quad \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}-\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2a$.

化简得 $\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{c^2-a^2}=1$.

这时,P 点的轨迹为双曲线.

(3)当 $a=c$ 时,$F(c,0)$在圆 F'上(如图 4).

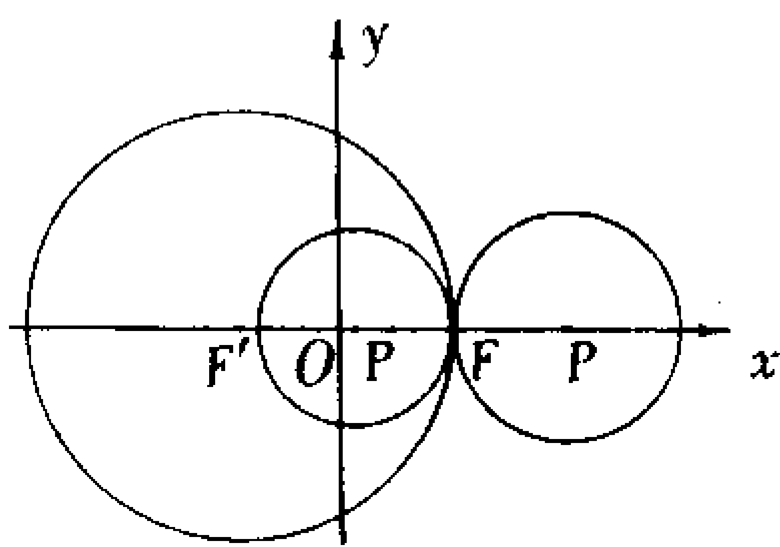


图 4

$\because\quad |PF'|+|PF|=2a=2c$,

或 $\quad |PF'|-|PF|=2a=2c$.

$\therefore\quad \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2c$,

或 $\quad \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}-\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2c$.

化简后得 $y'=0$. 这时,P 点的轨迹为 x 轴.

19·38 高为 h 和 k 的两根旗杆竖在水平面上,相隔 $2a$ 单位,求:平面上对杆顶仰角相等的一切点的集合.

(第 3 届加拿大数学奥林匹克,1971 年)

[解] 建立直角坐标系,使高为 h 的旗杆以$(-a,0)$为底,高为 k

的旗杆以$(a,0)$为底，设点$p(x,y)$对两旗杆顶的仰角相等，则

$$\frac{h}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\frac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

即　$(k^2-h^2)x^2+2(k^2+h^2)ax+(k^2-h^2)y^2+a^2(k^2-h^2)=0.$

(1)如果$k=h$，则方程化为$x=0$. 即所求轨迹为y轴.

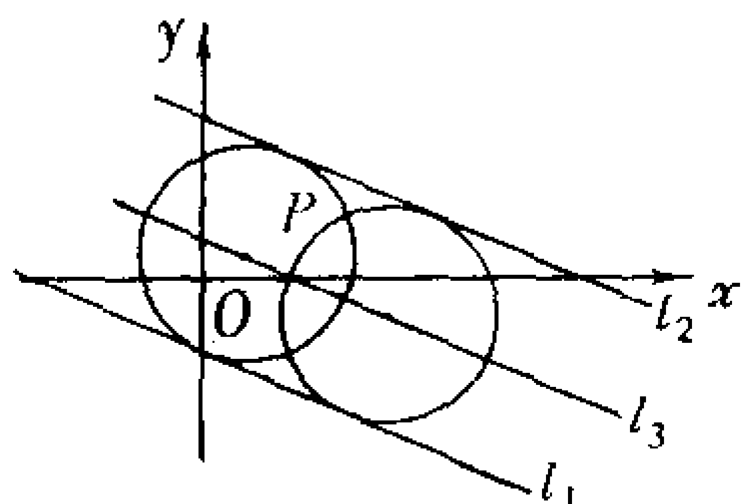
(2)如果$k\neq h$，则方程化为

$$x^2+2ax\left(\frac{k^2+h^2}{k^2-h^2}\right)+y^2+a^2=0.$$

其轨迹是一个圆.

19·39　给定一点$P(3,1)$及两条直线$l_1:x+2y+3=0$，$l_2:x+2y-7=0$，试求过P点且与l_1、l_2都相切的圆的方程.

（中国高中数学联赛，1979年）



［解］　由已知条件知，$l_1/\!/l_2$，如图，圆心在直线$l_3:x+2y-2=0$上，半径是两平行线l_1、l_2的距离的一半，在l_1任取一点，如$(-1,-1)$，此点到l_2的距离是

$$\left|\frac{-1-2-7}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=2\sqrt{5}.$$

此即l_1和l_2的距离，故圆的半径为$\sqrt{5}$.

设圆心的坐标为(α,β)，因圆心在直线l_3上，故

$$\alpha+2\beta-2=0,\quad\therefore\quad\alpha=2-2\beta.$$

将此式及坐标代入圆方程$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，

得　$(2-2\beta+3)^2+(\beta-1)^2=5,$

即　$(5\beta-3)(\beta+1)=0,$

解得　$\begin{cases}\alpha=4,\\ \beta=-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=\dfrac{4}{5},\\ \beta=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

故　所求的圆的方程为

$$(x-4)^2+(y+1)^2=5\quad\text{或}\quad\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5.$$

19·40　证明：方程$x^4-16x^2+2x^2y^2-16y^2+y^4=4x^3+4xy^2$

$-64x$的图形为两个互相内切的圆.

（中国天津市数学竞赛,1978年）

[证] 方程

$$x^4-16x^2+2x^2y^2-16y^2+y^4=4x^3+4xy^2-64x$$

可以写成:

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-16)-4x(x^2+y^2-16)=0,$$

即 $(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-4x)=0$,

$\therefore$ $x^2+y^2-16=0$, 或 $x^2+y^2-4x=0$.

即 $\begin{cases} x^2+y^2=16, & ① \\ (x-2)^2+y^2=4. & ② \end{cases}$

$\therefore$ 方程①的圆心是 $O_1(0,0)$,半径 $R_1=4$,

且 方程②的圆心是 $O_2(2,0)$,半径 $R_2=2$.

而 $R_1-R_2=4-2=2$, 且 $|O_1O_2|=2$.

所以,方程

$$x^4-16x^2+2x^2y^2-16y^2+y^4=4x^3+4xy^2-64x$$

的图形为两个互相内切的圆.

19·41 已知:正数 m 取不同的数值时,方程 $x^2+y^2-(4m+2)\times-2my+4m^2+4m+1=0$ 表示不同的圆,求:这些圆的公切线(即与这些圆都相切的直线)的方程.

（中国福建省福州市数学竞赛,1978年）

[解] 化圆方程为

$$(x-2m-1)^2+(y-m)^2=m^2.$$

故圆心坐标为$(2m+1,m)$,半径为 m.

直线 $y=kx+b$ 是这些圆的公切线必须而且只需对于一切正数 m 恒有

$$\frac{|k(2m+1)-m+b|}{\sqrt{k^2+1}}=m.$$

两边平方并整理得

$$(3k^2-4k)m^2+2(k+b)(2k-1)m+(k+b)^2=0,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 3k^2-4k=0, \\ 2(k+b)(2k-1)=0, \\ (k+b)^2=0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k_1=0, \\ b_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} k_2=\dfrac{4}{3}, \\ b_2=-\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

∴ 这些圆有两条公切线,其方程分别为:

$y=0$(X 轴),或 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

19·42 求被曲线族$4x^2+5y^2-8mx-20my+24m^2-20=0$($m$为实参数)的每一条曲线截得的线段都等于$\dfrac{5}{3}\sqrt{5}$的直线.

(中国福建省数学竞赛,1978年)

[解 1] 已知曲线族

$$4x^2+5y^2-8mx-20my+24m^2-20=0. \quad ①$$

设所求直线方程为 $y=kx+b$. ②

以②代入①并整理得

$$(4+5k^2)x^2+(10kb-8m-20mk)x+(5b^2-20mb+24m^2-20)=0. \quad ③$$

设 x_1、x_2 为方程③的根,依题意有

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\left(\frac{5}{3}\sqrt{5}\right)^2. \quad ④$$

由② $(x_2-x_1)^2+(kx_2-kx_1)^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2=\dfrac{125}{9}$,

即 $$(1+k^2)\left[\left(\frac{10kb-8m-20mk}{4+5k^2}\right)^2-4\left(\frac{5b^2-20mb+24m^2-20}{4+5k^2}\right)\right]=\frac{125}{9},$$

整理得

$$[4(2+5k)^2-24(4+5k^2)]m^2-[20kb(2+5k)-20b(4+5k^2)]m+\left[25k^2b^2-(4+5k^2)(5b^2-20)-\frac{125(4+5k^2)^2}{36(1+k^2)}\right]=0. \quad ⑤$$

因对一切 m 方程③的根满足条件④,所以⑤是关于 m 的恒等式,应有

$$4(2+5k)^2-24(4+5k^2)=0,$$

且 $20kb(2+5k)-20b(4+5k^2)=0$,

及 $25k^2b^2-(4+5k^2)(5b^2-20)-\dfrac{125(4+5k^2)^2}{36(1+k^2)}=0$.

解得 $k=2$, $b=\pm 2$.

故 所求直线方程是 $y=2x\pm 2$.

[解 2] 曲线族方程可配方成

$$\frac{(x-m)^2}{5}+\frac{(y-2m)^2}{4}=1. \qquad ①$$

由此看出曲线族是一族椭圆,其中心$(m,2m)$在直线 $y=2x$ 上,两轴有定长且平行于坐标轴,因而其中任一椭圆都可由椭圆$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$平移得到,被每个椭圆截得相等线段的直线必须与直线 $y=2x$ 平行.

设所求直线方程为 $y=2x+b$, 代入 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 得

$$24x^2+20bx+5b^2-20=0. \qquad ②$$

设 x_1、x_2 为方程②的根,依题意有

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\left(\frac{5}{3}\sqrt{5}\right)^2,$$

即 $5(x_2-x_1)^2=\dfrac{125}{9}$,

或 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{25}{9}$.

由② $\left(\dfrac{20b}{24}\right)^2-4\left(\dfrac{5b^2-20}{24}\right)=\dfrac{25}{9}$, 解得 $b=\pm 2$.

∴ $y=2x\pm 2$ 为所求的直线方程.

19·43 已知:通过定点 $M(x_1,y_1)$的两个圆与二坐标轴相切,它们的半径分别为 r_1、r_2.求证:$r_1r_2=x_1^2+y_1^2$.

(中国辽宁省数学竞赛,1978 年)

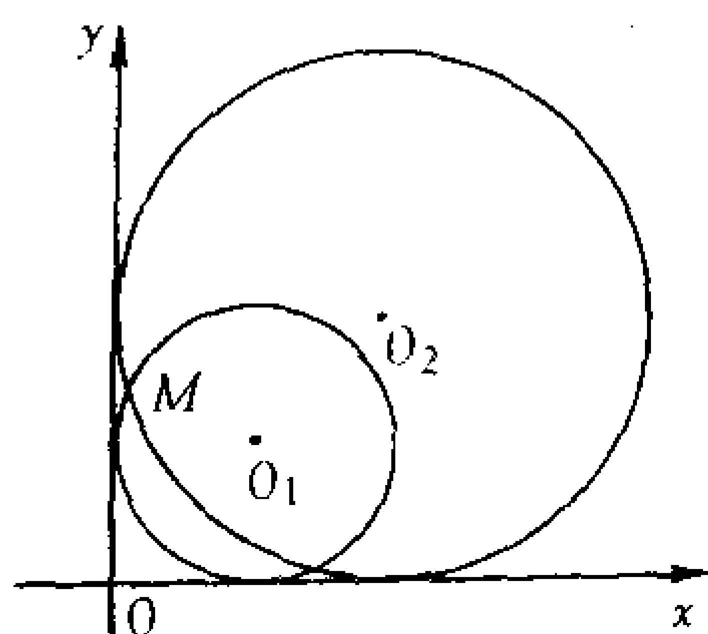
[证 1] 如图,由于两圆和二坐标轴相切,设两圆的方程分别为

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=a_1^2,\ |a_1|=|b_1|=r_1;$$

及 $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=a_2^2$, $|a_2|=|b_2|=r_2$.

即 $x^2+y^2-2a_1(x\pm y)+a_1^2=0$;

及 $x^2+y^2-2a_2(x\pm y)+a_2^2=0$.



$\because \quad M(x_1, y_1)$在两圆 O_1、O_2 上，

$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 - 2a_1(x_1 \pm y_1) + a_1^2 = 0$;

且 $\quad x_1^2 + y_1^2 - 2a_2(x_1 \pm y_1) + a_2^2 = 0$.

如果两圆 O_1、O_2 在同一象限内.

于是 a_1、a_2 是方程 $x^2 - 2(x_1 \pm y_1)x + x_1^2 + y_1^2 = 0$ 的两个根.

所以由根与系数关系推得:

$a_1a_2 = x_1^2 + y_1^2$, $\therefore \quad r_1r_2 = x_1^2 + y_1^2$.

如果两圆在不同象限内，则结论显然成立.

[证 2] 设两圆 O_1 和 O_2 都在第一象限内，因两圆和两坐标轴相切；所以两圆的方程分别为

$(x - r_1)^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2$,

及 $\quad (x - r_2)^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2$,

即 $\quad x^2 + y^2 - 2r_1(x + y) + r_1^2 = 0$,

及 $\quad x^2 + y^2 - 2r_2(x + y) + r_2^2 = 0$.

由于两圆过点 $M(x_1, y_1)$，故

$$x_1^2 + y_1^2 - 2r_1(x_1 + y_1) + r_1^2 = 0,$$

且 $\quad x_1^2 + y_1^2 - 2r_2(x_1 + y_1) + r_2^2 = 0$,

$$\therefore \quad r_1 = \frac{[2(x_1 + y_1) \pm \sqrt{4(x_1 + y_1)^2 - 4(x_1^2 + y_1^2)}]}{2}$$

$$= (x_1 + y_1) \pm \sqrt{2x_1y_1};$$

且 $\quad r_2 = (x_1 + y_1) \pm \sqrt{2x_1y_1}$.

$\because \quad r_1 \neq r_2$,

$$\therefore \quad r_1r_2 = [(x_1 + y_1) + \sqrt{2x_1y_1}][(x_1 + y_1) - \sqrt{2x_1y_1}]$$

$$= (x_1 + y_1)^2 - 2x_1y_1$$

$$= x_1^2 + y_1^2.$$

如果两圆 O_1、O_2 都在第二象限内，则两圆的方程是$(x - r_1)^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2$, $(x - r_2)^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2$，由于两圆都过点 $M(x_1, y_1)$，故有

$$x_1^2 + y_1^2 + 2r_1(x_1 - y_1) + r_1^2 = 0,$$

及 $x_1^2+y_1^2+2r_2(x_1-y_1)+r_2^2=0$.

$$\therefore\quad r_1=\frac{[-2(x_1-y_1)\pm\sqrt{4(x_1-y_1)^2-4(x_1^2+y_1^2)}]}{2}$$

$$=-(x_1-y_1)\pm\sqrt{-2x_1y_1};$$

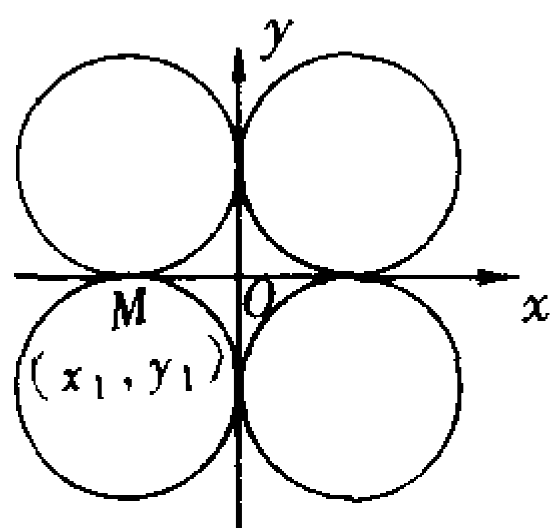
且 $r_2=-(x_1-y_1)\pm\sqrt{-2x_1y_1}$.

$\because\quad r_1\neq r_2$,

$$\therefore\quad r_1r_2=[-(x_1-y_1)+\sqrt{-2x_1y_1}]\cdot[-(x_1-y_1)-\sqrt{-2x_1y_1}]$$

$$=(x_1-y_1)^2-(-2x_1y_1)$$

$$=x_1^2+y_1^2.$$



如果两圆 O_1、O_2 都在第三或第四象限内,可同样推出结论.

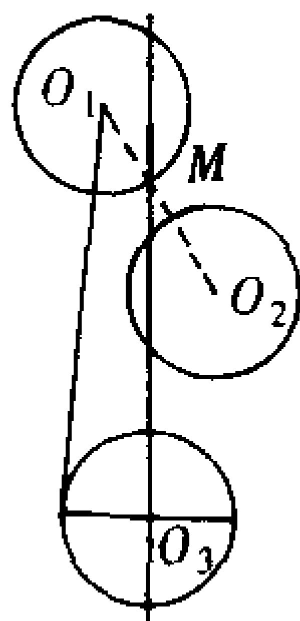
如果两圆 O_1、O_2 不在同一个象限内(如图),结论显然成立.

19·44 三个圆,半径都是 3,中心分别在(14,92)、(17,76)和(19,84).过点(17,76)作一直线,使得这三个圆位于这条直线某一侧的部分的面积和等于这三个圆位于这条直线另一侧的部分的面积和,求:这条直线的斜率的绝对值.

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解] 首先注意到这三个圆是互相外离的等圆.

记 $O_1(14,92)$,$O_2(19,84)$,$O_3(17,76)$.



由于过 O_3 的直线总把$\odot O_3$ 分为等积的两部分,因此,只要考虑过平面上怎样一点所画的直线与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交且使直线两侧的面积相等.

记 O_1O_2 的中点为 M,则 M 为二等圆$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的对称中心,因此过 M 且与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 都相交的直线能满足题目的要求.

因此,所求直线应为过 M 和 O_3 的直线,符合题设要求的直线是惟一的.

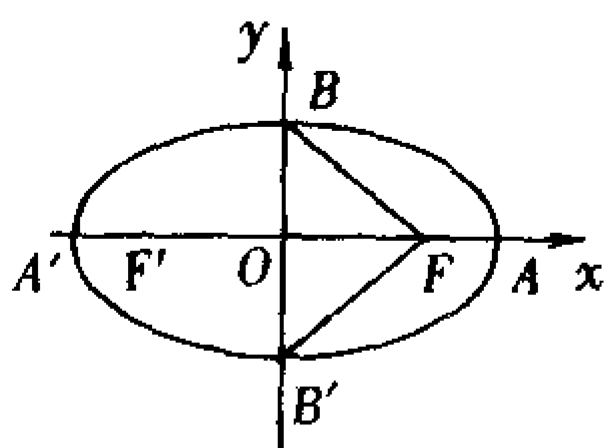
由于 $M(16.5,88)$,$O_3(17,76)$,则该直线的斜率的绝对值是

$$|k|=\left|\frac{88-76}{16.5-17}\right|=24.$$

3. 椭圆

19·45 设椭圆的中心为原点，它在 x 轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点的长轴上较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求：椭圆方程.

（中国高中数学联赛，1978 年）



［解］ 如左图，设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0),$$

F 是它的右焦点.

$\because\ FB\perp FB',\ \therefore\ OB=OF=OB',$

即 $b=c$，

但 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore\ a^2=2c^2$，即 $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b$，

从而 $a-c=(\sqrt{2}-1)b$.

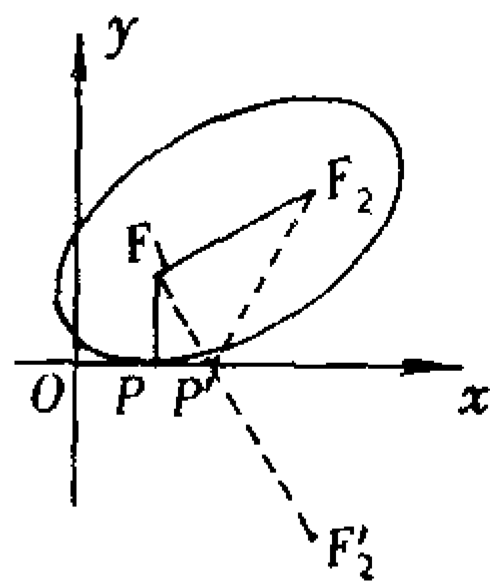
已知 $a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，

$\therefore\ (\sqrt{2}-1)b=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，得 $b=\sqrt{5}$，

从而 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{10}$，故 所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

19·46 xy 平面上的一个椭圆，焦点在 $(9,20)$ 和 $(49,55)$，并且与 x 轴相切，求：长轴的长度.

（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）



［解 1］ 椭圆焦点分别为 $F_1(9,20)$，$F_2(49,55)$. F_2 关于 x 轴的对称点 $F_2'(49,-55)$.

我们证明：椭圆的长轴 k 等于线段 F_1F_2' 的长度.

设 P 是椭圆与 x 轴的切点，线段 F_1F_2' 交 x 轴于 P'，且设 P' 与 P 是不同的两个点.

由三角形不等式得

$$|PF_1|+|PF_2'|>|F_1F_2'|=|P'F_1|+|P'F_2'|=|P'F_1|+|P'F_2|.$$

由椭圆定义知，椭圆上的任一点到两焦点的距离之和等于 k，而椭圆外的任一点到两焦点的距离之和大于 k.

由切线定义，P 在椭圆上，P'在椭圆外，所以有

$$|PF_1|+|PF_2|=k, \quad ①$$

$$|P'F_1|+|P'F_2|>k. \quad ②$$

由①及②得

$$|PF_1|+|PF_2'|=|PF_1|+|PF_2|=k<|P'F_1|+|P'F_2|.$$

与$|PF_1|+|PF_2'|>|P'F_1|+|P'F_2|$ 矛盾.

所以 P 和P'一定是相同的点，从而 $k=|F_1F_2'|$.

由两点距离公式得　$k=85$.

所以　椭圆长轴的长度是 85.

[解 2]　设椭圆与 x 轴相切于$P(x,0)$.

则由$\angle F_2Px=\angle F_1Px'$得直线$PF_2$ 的斜率 $=-$ 直线 PF_1 的斜率.

$$\therefore\quad \frac{55-0}{49-x}=-\frac{20-0}{9-x},\text{ 得 }\quad x=\frac{59}{3}.$$

设长轴长为 k，则

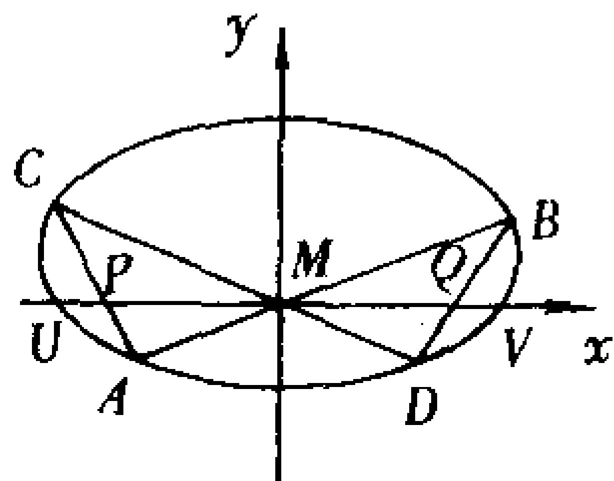
$$k=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{\left(9-\frac{59}{3}\right)^2+20^2}+\sqrt{\left(40-\frac{59}{3}\right)^2+55^2}$$

$$=85.$$

19·47　设 M 是椭圆的一条弦 UV 的中点，过 M 再任作两弦 AB 和CD，设 AC，BD 与 UV 分别交于 P、Q 两点，求证：M 也是线段 PQ 的中点.

（第 24 届美国普特南数学竞赛，1963 年）

[证]　以 M 为坐标原点，UV 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则椭圆方程为



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+d)^2}{b^2}=1.$$

令 AB、CD 所在直线方程为

$$y=mx,\quad y=nx.$$

于是过 A、B、C、D 四点的圆锥曲线的曲线系方程为

$$\lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+d)^2}{b^2}-1\right)+\lambda_2(y-mx)(y-nx)=0.$$

其中 λ_1、λ_2 为不同时取为零的任意常数.

令 $y=0$，则有

$$\left(\frac{\lambda_1}{a^2}+\lambda_2 mn\right)x^2+\frac{\lambda_1 d^2}{b^2}-1=0.$$

由此得出 x 轴上关于原点对称的两点必在过 A、B、C、D 四点的圆锥曲线系上.特别地,适当选择常数 λ_1 和 λ_2,使曲线系退化为两相交直线 AC、BD,则 P, Q 两点关于原点 M 对称,因此 $MP=MQ$.

19·48 E_1、E_2、E_3 为同一平面上的三个两两相交的椭圆,焦点分别为 $F_2,F_3;F_2,F_1;F_1,F_2$.这三个焦点不在同一条直线上,证明:每一对椭圆的公共弦交于一点.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 设焦点为 $F_i(x_i,y_i)$,且 $r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$, $i=1,2,3$.则

E_1 的方程为 $r_2+r_3=a$,

E_2 的方程为 $r_1+r_3=b$,

E_3 的方程为 $r_1+r_2=c$.

则 $r_3^2=a^2-2ar_2+r_2^2=b^2-2br_1+r_1^2.$ ①

考虑表达式 $L_3=(a-b)r_3^2-ar_1^2+br_2^2+ab(a-b)$.

由于其中 x^2 的系数为$(a-b)-a+b=0$, y^2 的系数为 0,

所以 $L_3=0$ 是一条直线.

另一方面,E_1、E_3 的交点满足①,即有

$$br_3^2=a^2b-2abr_2+br_2^2,$$

$$ar_3^2=ab^2-2abr_1+ar_1^2.$$

从而将交点坐标代入 L_3 中得

$$L_3=2ab(r_2-r_1)+2ab(b-a)=0,$$

即 $L_3=2ab(r_2+r_3-a+b-r_1-r_3)=0$.

于是 $L_3=0$ 是 E_1、E_2 的公共弦.类似地

$$L_1=cr_3^2+(b-c)r_1^2-br_2^2+bc(b-c)=0, \quad ②$$

$$L_2=-cr_3^2+ar_1^2+(c-a)r_2^2+ca(c-a)=0. \quad ③$$

为另两条公共弦.

∵ $c(a+b+c)L_3+a(b+c-a)L_1+b(c+a-b)L_2\equiv 0$.

∴ 上述公共弦互相平行或相交于一点.

但是,②和③中一次项的系数所成的行列式为

$$-2\begin{vmatrix} cx_3-bx_2+(b-c)x_1 & ay_3-by_2+(b-c)y_1 \\ -cx_3+ax_1+(c-a)x_2 & -cy_3+ay_1+(c-a)y_2 \end{vmatrix}$$

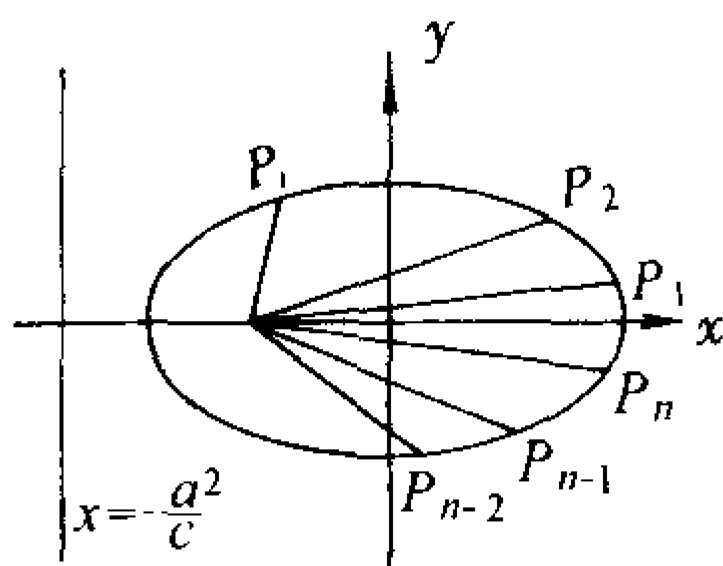
$$=-2(a+b-c)\cdot c\cdot\begin{vmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}$$

由于 $a+b=r_2+r_3+r_1+r_3>r_2+r_1=c$,

则 $a+b-c>0, c>0$,

又 $\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\neq\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

所以上述行列式不等于0.因而三条公共弦一定相交于一点.



19·49 已知:椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$及直线$x=-\dfrac{a^2}{c}$,其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$.在椭圆上放置$n(n>1)$个点,使其相邻两点与左焦点连线所成夹角均相等(如图):$\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots=\angle P_nFP_1=\dfrac{2\pi}{n}$.试证:这$n$个点各到直线$x=-\dfrac{a^2}{c}$的距离倒数之和为一个与$n$有关的常数.

(中国北京市数学竞赛,1979年)

[证] 设P_i到直线$x=-\dfrac{a^2}{c}$的距离为$d_i(i=1,2,\cdots,n)$,且$\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$, $\angle P_1FO=\beta$.

$\because$ $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 是椭圆准线,

$\therefore$ $\dfrac{P_iF}{d_i}=\dfrac{c}{a}$(离心率), 即 $P_iF=\dfrac{c}{a}d_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

则 $d_i-P_iF\cos[(i-1)\alpha+\beta]$

$=d_i-\dfrac{c}{a}d_i\cos[(i-1)\alpha+\beta]$

$=\dfrac{a^2-c^2}{c}$,

$$\therefore\quad d_i=\frac{b^2}{c}\Big/\left\{1-\frac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\right\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=\frac{c}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\right\}$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\sum_{i=1}^{n}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\quad\left(\because\quad\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0\right)$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\cos(i-1)\alpha+\beta]\sin\frac{\alpha}{2}\right\}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sin\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right]\right.$$

$$\left.-\sin\left[\left(i-\frac{3}{2}\right)\alpha+\beta\right]\right\}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\left[\cos\left(\frac{n-1}{2}\alpha+\beta\right)\sin\frac{n\alpha}{2}\right]\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{nc}{b^2}.$$

19·50 试证:过椭圆一焦点诸弦中点的轨迹还是一个椭圆.它的离心率和原椭圆离心率相等.

(中国陕西省数学竞赛,1978年)

[证] 设椭圆方程为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$,则过焦点$(c,0)$的直线为 $y=m(x-c)$,代入椭圆方程,得

$$b^2x^2+a^2m^2(x-c)^2=a^2b^2,$$

设弦的中点坐标为(x_0,y_0),则

$$x_0=\frac{a^2m^2c}{a^2m^2+b^2},\quad y_0=\frac{-b^2mc}{a^2m^2+b^2},$$

从两式中消去 m,即得所求轨迹方程为

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2-b^2cx_0=0,$$

即 $$b^2\left(x_0-\frac{c}{2}\right)^2+a^2y_0=\frac{b^2c^2}{4}.$$

该椭圆的离心率$=\dfrac{\frac{c^2}{2a}}{\frac{c}{2}}=\dfrac{c}{a}$, 即为原椭圆的离心率.

19·51　已知:椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的两条垂直的直径,作出与它们共轭的两条直径.证明:通过这些直径的端点的等轴双曲线,也通过椭圆的两焦点.

(第4届美国普特南数学竞赛,1941年)

[证]　设E是已给的椭圆,并假定$a>b$,则焦点为$(c,0)$和$(-c,0)$,其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

设已知直线方程为$y=mx$与$x=-my$.

注意到椭圆的直径平行于它的另一条共轭直径的端点的切线,不难得出两共轭直径的方程分别为

$$b^2x+ma^2y=0,\ mb^2x-a^2y=0.$$

于是两共轭直径的直线组成的退化的圆锥曲线D的方程为

$$(b^2x+ma^2y)(mb^2x-a^2y)=0,$$

即　$mb^4x^2-ma^4y^2+(m^2-1)a^2b^2xy=0.$

因此过曲线D和E的交点,即经过共轭直径的端点的曲线系方程(不包括E)为

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+mb^4x^2-ma^4y^2+(m^2-1)a^2b^2xy=0.$$

$$\left(\frac{\lambda}{a^2}+mb^4\right)x^2+\left(\frac{\lambda}{b^2}-ma^4\right)y^2+(m^2-1)a^2b^2xy-\lambda=0.$$

当且仅当x^2与y^2的系数和等于零时,上面的圆锥曲线系方程是等轴双曲线(可能退化)的方程,

即　$\frac{\lambda}{a^2}+mb^4+\frac{\lambda}{b^2}-ma^4=0,$

有　$\lambda=ma^2b^2c^2.$

此时圆锥曲线方程为

$$mx^2-my^2+(m^2-1)xy-mc^2=0. \qquad ㊀$$

当$m\neq0$时,㊀是等轴双曲线,显然过$(c,0)$和$(-c,0)$,因而过直径端点的等轴双曲线通过椭圆的交点$(c,0)$,$(-c,0)$.

当$m=0$,$a\neq b$时,共轭直径是椭圆的轴,也是退化的等轴双曲线.

当$m=0$,$a=b$时,已知椭圆是一个圆,$c=0$,故λ总是零,对于一圆,互相垂直的直径总是共轭的,也是退化的等轴双曲线,它通过重合

于圆心的焦点.

19·52　对于椭圆上的点 P,设 d 是从椭圆的中心到过 P 点的切线的距离,证明:当 P 在椭圆上变动时,$PF_1 \cdot PF_2 \cdot d^2$ 是常数.这里 PF_1 与 PF_2 是从 P 到椭圆的焦点 F_1 与 F_2 的距离.

(第 37 届美国普特南数学竞赛,1976 年)

[证]　设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

则焦点　$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 其中 $c^2=a^2-b^2$.

设 $P(x,y)$为椭圆上的点, $r_1=PF_1$, $r_2=PF_2$.

则　$r_1+r_2=2a$. 并且

$$\begin{aligned} r_1r_2 &=\frac{1}{2}[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2] \\ &=\frac{1}{2}[4a^2-(x+c)^2-y^2-(x-c)^2-y^2] \\ &=2a^2-x^2-y^2-c^2 \\ &=a^2+b^2-x^2-y^2. \end{aligned}$$

过椭圆上 P 点的切线上一点(u,v)满足

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1.$$

其可化为　$u\cos\theta+v\sin\theta=d$,

$$\therefore \quad d^2=\frac{1}{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}=\frac{a^4b^4}{b^4x^2+a^4y^2}.$$

$$\begin{aligned} \because \quad b^4x^2+a^4y^2 &=b^2(a^2b^2-a^2y^2)+a^2(a^2b^2-b^2x^2) \\ &=a^2b^2(a^2+b^2-x^2-y^2) \\ &=a^2b^2r_1r_2. \end{aligned}$$

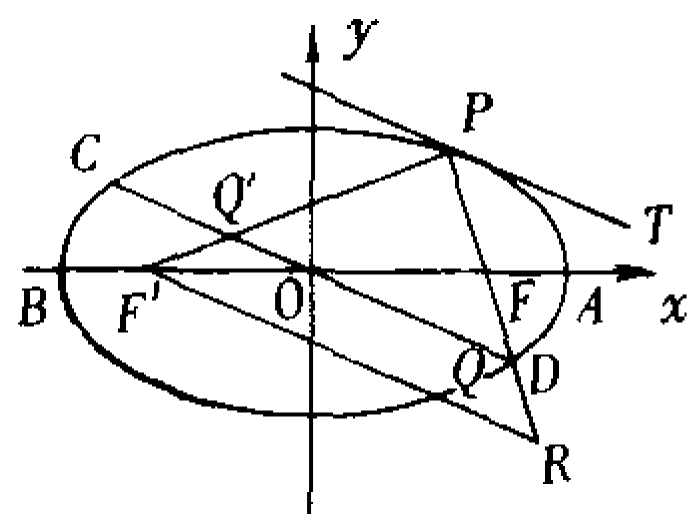
于是　$d^2=\dfrac{a^4b^4}{a^2b^2r_1r_2}=a^2b^2$(常数).

19·53　AB 为一椭圆的长轴,O 为中心,F 为焦点,P 为椭圆上的一点,CD 为通过 O 的弦,平行于过 P 的切线,直线 PF 与 CD(或其延长线)交于 Q 点,证明或否定 $PQ=OA=OB$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[解] 设 a 为椭圆的长半轴,我们证明

$$PQ=OA=OB=a.$$



设 F' 为椭圆的另一焦点.

连 PF',交 CD 于 Q,又过 F' 作 CD 的平行线交 PF 于 R.

由椭圆的光学性质及 $CD\parallel PT$ 知

$\angle PQ'Q=\angle PQQ'$, $\angle PF'R=\angle PRF'$,

$\therefore$ $PQ=PQ'$, $Q'F'=QR$.

$\because$ O 是 FF' 的中点, $OQ\parallel F'R$,

$\therefore$ $FQ=QR=Q'F'$.

从而有

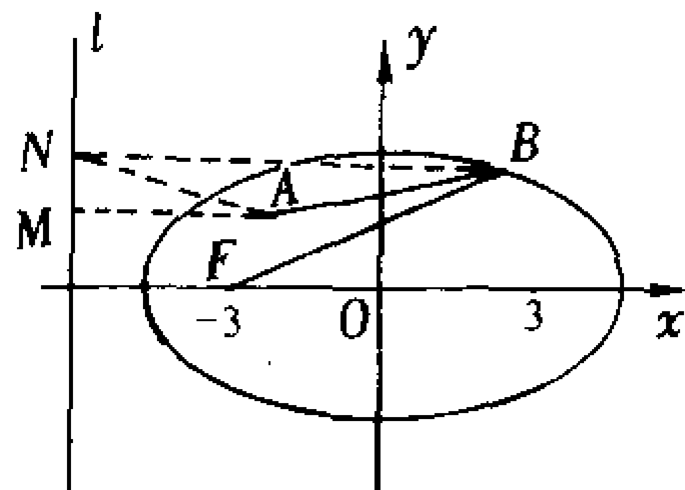
$$\begin{aligned}2PQ&=PQ+PQ'=PF+FQ+PQ'=PF+Q'F'+PQ'\\&=PF+PF'=2a.\end{aligned}$$

于是 $PQ=a$.

19·54 给定点 $A(-2,2)$,已知点 B 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的动点,F 是右焦点.当 $|AB|+\frac{5}{3}|BF|$ 取最小值时,求:点 B 的坐标.

(中国高中数学联赛,1999 年)

[解] 记椭圆的半长轴、半短轴、半焦距分别为 a、b、c,离心率为 e.



则 $a=5, b=4$,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

且 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, 又左准线为 $x=-\frac{25}{3}$.

过点 B 作椭圆左准线 $x=-\frac{25}{3}$ 的垂线于 N,再过 A 作该准线的垂线于 M.

由椭圆定义知 $|BN|=\frac{|BF|}{e}=\frac{5}{3}|BF|$.

$\therefore$ $|AB|+\frac{5}{3}|BF|=|AB|+|BN|\geqslant|AN|\geqslant|AM|$(定值),

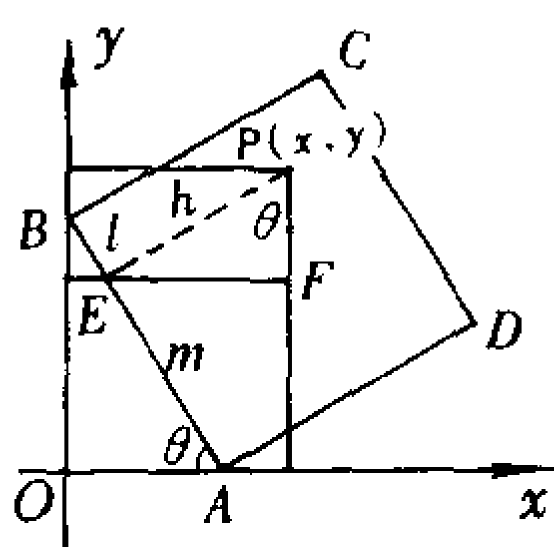
等号当且仅当 B 是 AM 与椭圆的交点时成立,此时 B 的坐标为

$\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3},2\right)$.

$\therefore$ 当$|AB|+\frac{5}{3}|BF|$取最小值时，B的坐标为$\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3},2\right)$.

19·55 一边长为$2a$的正方形始终位于XY平面的第Ⅰ象限，当此正方形移动时，它的两个相邻顶点，总分别保持在x轴上和y轴上，试证 在正方形内部或在正方形边界上的点的轨迹通常为一条二次曲线（一部分），对于正方形的什么样的点，这样的轨迹会发生退化.

（第5届美国普特南数学竞赛，1942年）



[证] 设A和B是正方形$ABCD$的相邻顶点，且A在x轴上，B在y轴上.

设$P(x,y)$是正方形内或边界上一点. 过P作$PE/\!/BC$交AB于E，

设$PE=n$，$BE=l$，$EA=m$，$\angle BAO=\angle EPF=\theta$，则

$$\begin{cases}x=n\sin\theta+l\cos\theta,\\ y=m\sin\theta+n\cos\theta.\end{cases} \quad ①$$

对$\sin\theta$和$\cos\theta$求解方程组①，得

$$\begin{cases}(lm-n^2)\cos\theta=mx-ny.\\ (lm-n^2)\sin\theta=-nx+ly.\end{cases} \quad ②$$

从②中消去θ得

$$(lm-n^2)^2=(mx-ny)^2+(nx-ly)^2.$$

即P点满足方程为

$$(m^2+n^2)x^2-2n(l+m)xy+(l_2+n^2)y^2=(lm-n^2)^2. \quad ③$$

考虑③的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4n^2(l+m)^2-4(m^2+n^2)(l^2+n^2)\\&=-4(lm-n^2)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

如果$\Delta<0$，则③表示一个椭圆或一个圆.

式③表示一个圆的充分必要条件是

$$\begin{cases}m^2+n^2=l^2+n^2,\\ 2n(l+m)=0.\end{cases}$$

注意到$l+m=2a\neq 0$，则表示一个圆的充要条件是$n=0$和$l=$

m,即 P 是 AB 中点时,P 的轨迹是一个圆.

如果 $\Delta=0$,则③的右边的项等于零,因而③式可化为

$$\frac{l+m}{m}(mx-ny)^2=0. \quad 得 \quad y=\frac{m}{n}x.$$

P 点的轨迹是一条直线.

当 $\Delta=0$ 时,$lm=n^2$,此时 P 点位于以 AB 为直径的半圆上.

若 $l=m=n$,则 P 点是正方形的中心.此时 P 点的方程为 $y=x$.

于是 P 点不在以 AB 为直径的半圆上,P 点沿椭圆(或圆)光滑移动.

P 点在以 AB 为直径的半圆上,P 点沿直线来回移动.

4. 抛物线

19·56 求抛物线方程,使该抛物线与 x 轴切于(1,0)点,与 y 轴切于(0,2)点.并求抛物线的对称轴和顶点坐标.

(第 2 届美国普特南数学竞赛,1939 年)

[解] 显然所求抛物线不通过原点.

不通过原点的任何一条圆锥曲线有方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+1=0.$$

由于抛物线与 x 轴在(1,0)相切,则有

$$A+D+1=0, \qquad ①$$

又 $Ax^2+Dx+1=0$ 有二等根,从而

$$D^2-4A=0. \qquad ②$$

解①、②得 $A=1$, $D=2$.

由于抛物线与 y 轴在(0,2)相切,则有

$$Cy^2+Ey+1=0. \qquad ③$$

又 $Cy^2+Ey+1=0$ 有二等根,从而

$$E^2-4C=0. \qquad ④$$

解③、④得 $C=\frac{1}{4}$, $E=-1$.

又因为是抛物线,则有 $B^2=4AC$, 得 $B=\pm 1$.

因而得出两个方程

$$x^2+xy+\frac{1}{4}y^2-2x-y+1=0, \quad ⑤$$

$$x^2-xy+\frac{1}{4}y^2-2x-y+1=0, \quad ⑥$$

由于⑤可化为 $\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2=0$，它是直线，因此⑥为所求.

显然⑥可化为

$$4x^2-4xy+y^2-8x-4y+4=0. \quad ⑦$$

令 $u=2x-y$，$v=x+2y$，则

$$x=\frac{2u+v}{5}，\ y=\frac{-u+2v}{5}.$$

则⑦可化为 $u^2-\frac{12}{5}u-\frac{16}{5}v+4=0$，

即 $\left(u-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{16}{5}\left(v-\frac{4}{5}\right)=0$.

于是这是以 $u=\frac{6}{5}$ 为对称轴，顶点为 $\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$ 的抛物线，即抛物线的对称轴方程为

$$2x-y=\frac{6}{5},$$

顶点坐标为 $\left(\frac{2\times\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}{5},\ \frac{-\frac{6}{5}+2\times\frac{4}{5}}{5}\right)=\left(\frac{16}{25},\frac{2}{25}\right)$.

19·57 方程 $y^2-4x-2y+1=0$，表示什么曲线？若直线 $y=kx+2$ 与方程表示的曲线相切.问 k 应为什么值？

（中国重庆市数学竞赛，1978年）

[解 1] 把方程 $y^2-4x-2y+1=0$ 变形为 $x=\frac{1}{4}(y-1)^2$.

所以原方程表示抛物线.解方程组：

$$\begin{cases} y^2-4x-2y+1=0, & ①\\ y=kx+2. & ② \end{cases}$$

把②代入①并整理，得

$$k^2x^2+(2k-4)x+1=0. \quad ③$$

要使直线是抛物线的切线，就要方程组有相同的实数解，就必须方

程③有相同的二实数根(即有等根).

即　判别式　$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=-16k+16=0$.

解得　$k=1$.

∴　当 $k=1$ 时,直线 $y=kx+2$ 与原方程所表示的抛物线相切.

[解 2]　方程 $y^2-4x-2y+1=0$ 表示抛物线.设 $P(x,y)$是抛物线上一点,则过 P 点的切线方程是:

$$y_1y-4\cdot\frac{x+x_1}{2}-2\cdot\frac{y+y_1}{2}+1=0.$$

整理,得　$2x-(y_1-1)y+2x_1+y_1-1=0$.　①

又　$kx-y+2=0$.　②

如①和②表示同一直线,则

$$\frac{k}{2}=\frac{1}{y_1-1}=\frac{2}{2x_1+y_1-1}\qquad③$$

又因为 P 点在抛物线上,

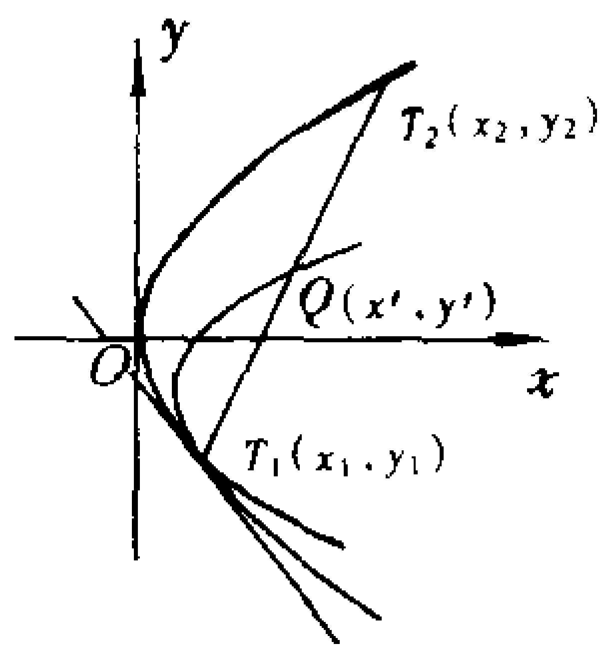
∴　$y_1^2-4x_1-2y_1+1=0$.　④

解③与④组成的方程组,得　$k=1$.

∴　直线 $y=kx+2$ 与方程 $y^2-4x-2y+1=0$ 所表示的抛物线相切时,k 的值应为 1.

19·58　有一动直线 $y=\frac{2}{t}(x-t-1)$(其中 t 为参数),及一抛物线 $y^2=4x$,问该直线与抛物线的两交点的中点轨迹是什么?求证:该轨迹和直线 $x+y+1=0$ 相切.

(中国江苏省数学竞赛,1978 年)



[解]　解方程组:

$$\begin{cases}y^2=4x, & ①\\ y=\frac{2}{t}(x-t-1). & ②\end{cases}$$

由②,得 $x=\frac{ty}{2}+t+1$,代入①,得

$$y^2=2ty+4t+4,$$

即　$y^2-2ty-4t-4=0$.

由韦达定理得出中点 Q 的纵坐标:

$$y'=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(2t)=t.$$

代入直线方程，得中点 Q 的横坐标：$x'=\frac{t^2}{2}+t+1$.

因此，轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x'=\frac{t^2}{2}+t+1,\\ y'=t.\end{cases}$

消去参数 t，得轨迹的普通方程：

$$(y'+1)^2=2\left(x'-\frac{1}{2}\right).$$

它表示一条抛物线.

从 $x+y+1=0$ 和 $(y+1)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 中消去 y 并整理得

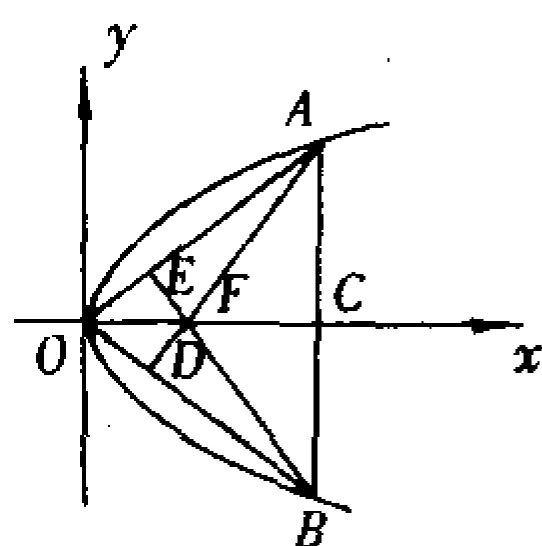
$$x^2-2x+1=0,$$

它显然有二重根.

所以轨迹和直线 $x+y+1=0$ 相切.

19·59　抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形的一个顶点在原点，三边上的高线都通过抛物线的焦点，求：此三角形外接圆的方程.

(中国辽宁省数学竞赛，1978 年)



[解 1]　如图，设△OAB 为抛物线的内接三角形.

AD、BE、OC 为过焦点 F 的三条高线.

设 A 点坐标为 (x_1,y_1)，于是　$y_1=\sqrt{2px_1}$，

从而 A 点坐标为 $(x_1,\sqrt{2px_1})$.

因为 AB 垂直 x 轴，及抛物线的对称性，

得 B 点坐标为 $(x_1,-\sqrt{2px_1})$，

$$OA \text{ 的斜率 } k_1=\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1},\ BE \text{ 的斜率 } k_2=\frac{-\sqrt{2px_1}}{x_1-\frac{p}{2}},$$

$$k_1k_2=\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1}\cdot\frac{-\sqrt{2px_1}}{x_1-\frac{p}{2}}=-1,\ 2p=x_1-\frac{p}{2}.$$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{5p}{2},y_1=\sqrt{5}p,$

故 A 的坐标为$\left(\dfrac{5p}{2},\sqrt{5}p\right)$,$B$ 的坐标为$\left(\dfrac{5p}{2},-\sqrt{5}p\right)$.

设过 O、A、B 三点圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

$\because\quad O(0,0)$在圆上, $\therefore\quad F=0$,

$\because\quad A\left(\dfrac{5p}{2},\sqrt{5}p\right)$在圆上,

$\therefore\quad \dfrac{25}{4}p^2+5p^2+\dfrac{5p}{2}D+\sqrt{5}pE=0,$

$\because\quad B\left(\dfrac{5p}{2},-\sqrt{5}p\right)$在圆上,

$\therefore\quad \dfrac{25}{4}p^2+5p^2+\dfrac{5p}{2}D-\sqrt{5}pE=0.$

解得 $D=-\dfrac{9p}{2}$, $E=0$, $F=0$.

所以 所求$\triangle OAB$ 的外接圆的方程是:$x^2+y^2-\dfrac{9}{2}px=0$.

[解 2] 由解法 1 的前半部分得出 A、B 坐标后,求外接圆的方程也可以用如下方法:OA 的垂直平分线的方程为:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}p\right)^2+(y-\sqrt{5}p)^2},$$

得 $5x+2\sqrt{5}y=\dfrac{45}{4}p$;

AB 的垂直平分线为OC,它的方程为 $y=0$.

解方程组 $\begin{cases}5x+2\sqrt{5}y=\dfrac{45}{4}p,\\ y=0,\end{cases}$

得 圆心的坐标为$\left(\dfrac{9}{4}p,0\right)$, 半径 $R=\dfrac{9}{4}p$.

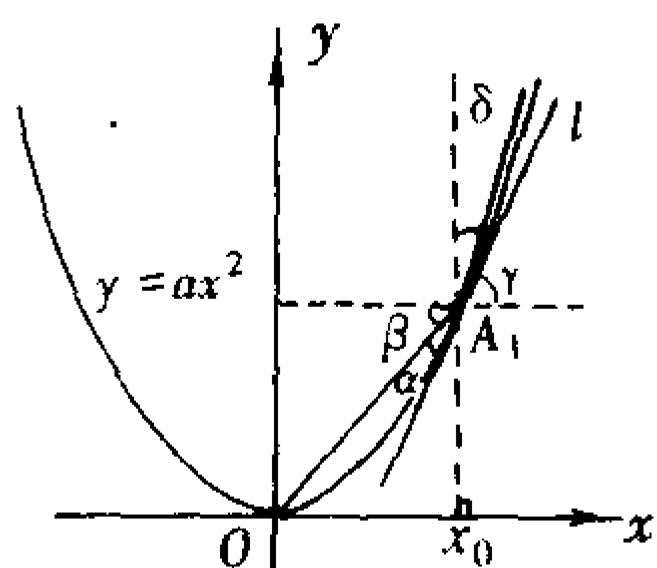
所求圆的方程为 $\left(x-\dfrac{9}{4}p\right)^2+y^2=\left(\dfrac{9}{4}p\right)^2$.

得 $x^2+y^2-\dfrac{9}{2}px=0$.

19·60 段数有限的折线内接于抛物线.其始点与抛物线的顶点重

合，折线中任意共顶点的两线段与抛物线在该点处的切线都成等角，证明：这样的折线只能位于抛物线对称轴的一侧.

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）



［证］ 不失一般性，设抛物线方程为 $y=ax^2(a>0)$，如图，折线的第一段为 OA_1，抛物线在 A_1 点处的切线为 l，过点 A_1 分别引平行于坐标轴的直线.

设顶点在 A_1 的折线的两线段与切线 l 的夹角为 α，OA_1 与 x 轴夹角为 β，l 与 x 轴、y 轴交角分别为 γ、δ. 则

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{ax_0^2}{x_0}=ax_0,\quad \operatorname{tg}\gamma=k_t=2ax_0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta}=\frac{ax_0}{1+2a^2x_0^2}.$$

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{2ax_0}>\frac{1}{\frac{1}{ax_0}+2ax_0}=\operatorname{tg}\alpha.$$

因为 α、δ 均为锐角，所以 $\alpha<\delta$，也就是说 A_1A_2 在直线 $x=x_0$ 的右侧.

即 A_1A_2 与 OA_1 都在抛物线对称轴 $x=0$ 的同侧.

对有限段的 A_2A_3、A_3A_4，同样可证，

若 A_1 在直线 $x=0$ 的左侧，同样可证得结论.

19·61 求证：曲线 $y=\frac{1}{5}(x^2-x+1)$ 不可能经过两坐标均为整数的点（格点）.

（中国北京市数学竞赛，1984 年）

［证］ 设 $x=5n+r$，其中 $n\in Z$，$r=0,1,2,3,4$. 则

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{5}[(5n+r)^2-(5n+r)+1]\\&=5n^2+(2r-1)n+\frac{1}{5}(r^2-r+1).\end{aligned}$$

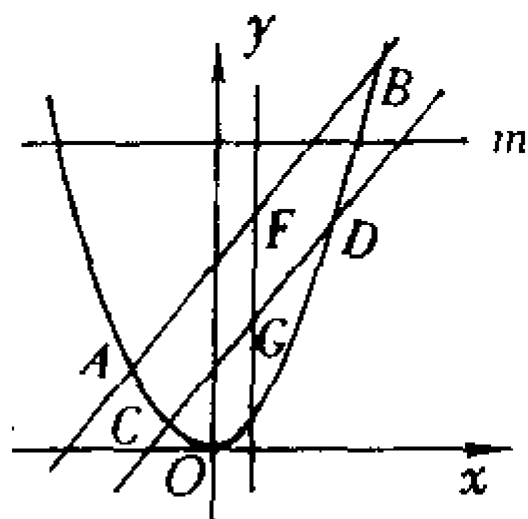
记 $r^2-r+1=m$，则当 $r=0,1,2,3,4$ 时，$m=1,1,3,7,13$，这些 m 值均不能被 5 整除，即说对任意的整数 x 而言，y 均不可能是整数.

故 $y=\frac{1}{5}(x^2-x+1)$不可能过两坐标均为整数的点.

19·62 在坐标平面 xoy 上画出函数 $y=x^2$ 的图像.然后擦去坐标轴——只留下抛物线的图形.仅用圆规和直尺,怎样复原坐标轴和长度单位?

(第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年)

[解] 我们引两条平行直线,设 AB 和 CD 是这两直线夹于已知函数图像之间的线段(如图).



过这两线段的中点引直线 l,它平行于 Oy 轴,事实上,如果直线 AB 的方程是 $y=kx+b$,那么它与抛物线交点的横坐标 x_1 和 x_2 是方程 $x^2=kx+b$ 的根.

因此,根据韦达定理,$x_1+x_2=k$.故

交点横坐标的平均值(线段 AB 中点的横坐标)等于$\frac{k}{2}$.

类似地,线段 CD 中点的横坐标也等于$\frac{k}{2}$,因此 $l // Oy$ 轴.

为了作出 Oy 轴,我们引直线 $m \perp l$,并通过直线 m 夹于抛物线间的线段的中点 E,引直线平行于直线 l,这条直线便是 Oy 轴.它与抛物线的交点即是坐标原点 O,过 O 点引直线垂直于 OE,便得 Ox 轴,再作$\angle xOy$ 的平分线,它与抛物线的交点坐标,就是$(1,1)$,于是长度单位便可作出.

19·63 已知:抛物线 $y^2=2px$ 及定点$A(a,b)$、$B(-a,0)$($ab \neq 0, b^2 \neq 2pa$).M 是抛物线上的点,设直线 AM、BM 与抛物线的另一交点分别为M_1、M_2.求证:当 M 点在抛物线上变动时(只要 M_1、M_2 存在且 $M_1 \neq M_2$),直线 M_1M_2 恒过一个定点,并求出这个定点的坐标.

(中国高中数学联赛,1998 年)

设 M、M_1、M_2 的坐标分别为 $\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$,$\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$,$\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$.

由 A、M、M_1 共线,得

$$\frac{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}{y_1-y_0}=\frac{\frac{y_0^2}{2p}-a}{y_0-b}.$$

化简得 $y_1y_0=b(y_1+y_0)-2pa$.

$$\therefore\quad y_1=\frac{by_0-2pa}{y_0-b}. \qquad ①$$

同理，由 B、M、M_2 共线，得 $y_2=\dfrac{2pa}{y_0}$. ②

设(x,y)是直线 M_1M_2 上的点，则

$$y_1y_2=y(y_1+y_2)-2px. \qquad ③$$

由①、②和③消去 y_1、y_2 得

$$\frac{(by_0-2pa)2pa}{(y_0-b)y_0}=y\left(\frac{by_0-2pa}{y_0-b}+\frac{2pa}{y_0}\right)-2px.$$

整理得 $y_0^2(2px-by)+y_0\cdot 2pb(a-x)+2pa(by-2pa)=0$.

由于方程组 $\begin{cases}2px-by=0,\\ a-x=0,\\ by-2pa=0\end{cases}$ 有解 $\begin{cases}x=a,\\ y=\dfrac{2pa}{b},\end{cases}$

所以，动直线 M_1M_2 恒过定点$\left(a,\dfrac{2pa}{b}\right)$.

19·64 设 A 和 B 是抛物线 P 上的两个动点，使得在 A 和 B 处的两条切线相互垂直. 证明由 A、B 及 P 之顶点所成的三角形重心的轨迹为一抛物线 P_1，对 P_1 再重复上述过程，又得一抛物线 P_2，余类推，设如此得到的抛物线序列为 $P,P_1,P_2,\cdots,P_n$，如果 P 的方程是 $y^2=mx$，试求：P_n 的方程.

（第 6 届美国普特南数学竞赛，1946 年）

［解］ 因为 P 是方程为 $y^2=mx$.

所以 P 的任一点坐标都具有形式(mt^2,mt)，其中 t 为某个实数.

与抛物线 P 在点(mt^2,mt)处相切的直线的斜率为$\dfrac{1}{2t}$.

设 $A(ms^2,ms)$，$B(mt^2,mt)$. 在 A 和 B 处的两条切线相互垂直的充要条件是

$$\frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2t}=-1,\ 即\quad st=-\frac{1}{4}.$$

又抛物线 P 的顶点为 $O(0,0)$，则$\triangle ABO$ 的重心是

$$\left(\frac{m(s^2+t^2)}{3},\frac{m(s+t)}{3}\right).$$

设重心的坐标为(x,y),则

$$x=\frac{m(s^2+t^2)}{3},\quad y=\frac{m(s+t)}{3}.$$

从上式中利用$st=-\frac{1}{4}$消去s、t得P_2的方程

$$y^2=\frac{1}{3}m\left(x-\frac{m}{6}\right).$$

于是,从$P:y^2=mx$变为$P_1:y^2=\frac{1}{3}m\left(x-\frac{m}{6}\right)$,相当于把常数$m$换为$\frac{m}{3}$,把顶点向右移动$\frac{m}{6}$.

所以,为从P_1得到P_2,只需把$\frac{m}{3}$换为$\frac{1}{3}\left(\frac{m}{3}\right)=\frac{m}{9}$,顶点再由移动$\frac{1}{6}\left(\frac{m}{3}\right)=\frac{m}{18}$,因此$P_2$的方程为

$$y^2=\frac{1}{9}m\left(x-\frac{1}{6}m-\frac{1}{18}m\right).$$

以此类推,可得到P_n的方程:

$$\begin{aligned}y^2&=\frac{m}{3^n}\left(x-\frac{m}{6}-\frac{m}{6\times3}-\frac{m}{6\times3^2}-\cdots-\frac{m}{6\times3^{n-1}}\right)\\&=\frac{m}{3^n}\left[x-\frac{m}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right].\end{aligned}$$

19·65 已知:抛物线$y=-x^2+bx+c$与抛物线$y=x^2$相切,试求:该抛物线顶点的几何位置.

(第17届全俄数学奥林匹克,1991年)

[解] 由于抛物线$y=-x^2+bx+c$与$y=x^2$相切,则方程

$$-x^2+bx+c=x^2,\quad 2x^2-bx-c=0.$$

有惟一实根,因此其判别式

$$\Delta=b^2+8c=0,\quad c=-\frac{1}{8}b^2.$$

于是抛物线方程为 $y=-x^2+bx-\frac{1}{8}b^2$.

其顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}b,\frac{1}{8}b^2\right)$.

从而　顶点位于方程是 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的抛物线上.

反之,如果点(x_0,y_0)位于抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上,即有 $y_0=\frac{1}{2}x_0^2$,则抛物线

$$y=-x^2+2x_0x-\frac{1}{2}x_0^2=-(x-x_0)^2+\frac{1}{2}x_0^2.$$

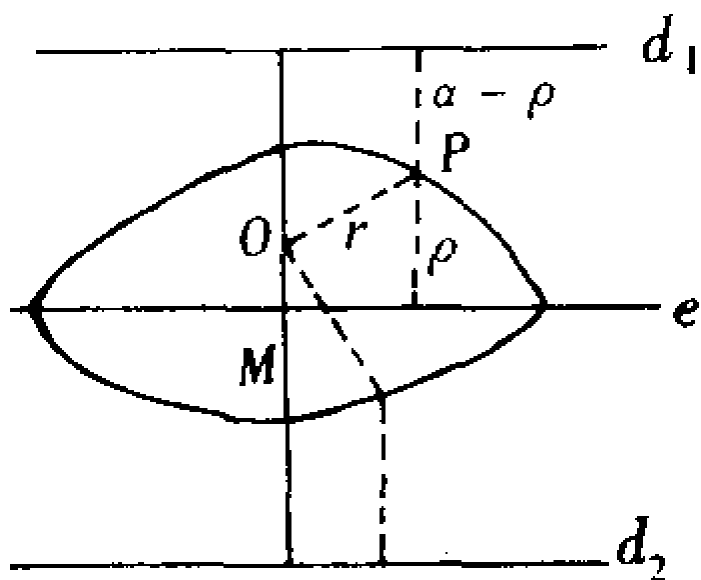
经过点$\left(x_0,\frac{1}{2}x_0^2\right)$,且与抛物线 $y=x^2$ 相切于点$\left(\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{4}x_0^2\right)$,

所以是形如　$y=-x^2+bx-\frac{1}{8}b^2$　的抛物线,其中系数 $b=2x_0,c=-\frac{1}{2}x_0^2$.

19·66　在平面上给定一点 O 和一条直线 e. 试求到定点 O 的距离 r 和到定直线 e 的距离 ρ 之和等于已知数 a 的点 P 的轨迹(数 r 和 ρ 都是正数).

(匈牙利数学奥林匹克,1924 年)

[解]　若关系式 $r+\rho=a$ 成立,则定点 O 到直线 e 的距离不大于 a.



(1)如果点 O 到直线 e 的距离等于 a,则所求的 P 点的轨迹是连接点 O 和由 O 向直线 e 所作垂线的垂足之间的线段.

(2)如果点 O 到直线 e 的距离小于 a.

我们作和直线 e 平行且和 e 距离为 a 的两条直线 d_1 和 d_2.

设 P 是所求轨迹上的任意一点,且 P 在直线 e 和 d_1 之间,则 $OP=r$,P 到 e 的距离为 ρ,于是 P 到 d_1 的距离为 $a-\rho=r$.

因而 P 到 O 点及直线 d_1 的距离相等,其轨迹是以 O 为焦点,d_1 为准线的抛物线的一段弧.

同样 P 在 e 和 d_2 之间,P 的轨迹也是以 O 为焦点,d_2 为准线的抛物线的一段弧.

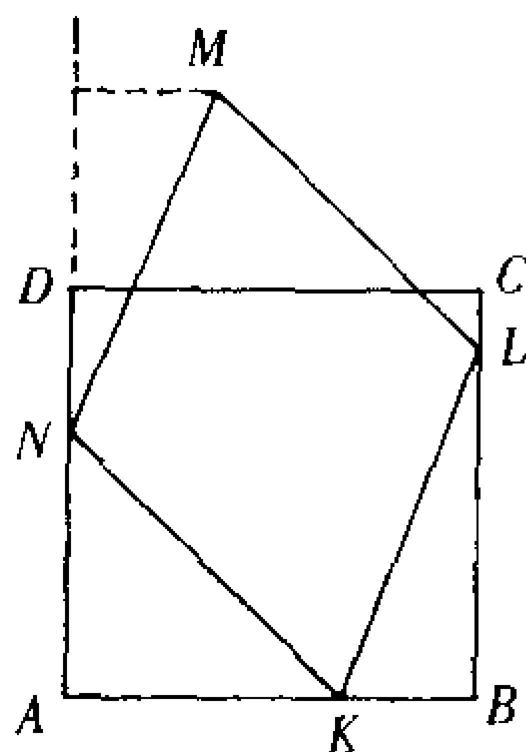
19·67　菱形的三个顶点依次在边长为 1 的正方形的边 AB、BC、

AD 上,求被菱形的第四个顶点所充满的图形的面积.

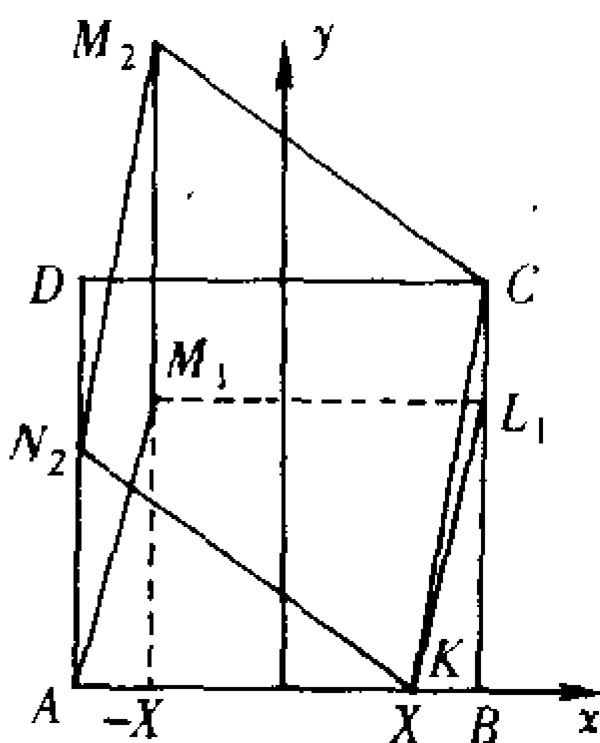
(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[解] 设 K、L、M 分别是菱形在正方形的边 AB、BC、AD 上的顶点(如图),注意到 KB 的长度等于从点 M 到直线 AD 的距离.

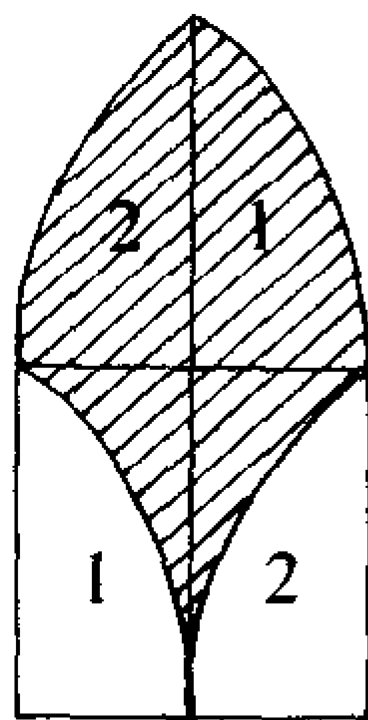
因此如果固定点 K,那么点 M 的可能位置填满了平行 AD 边的某条线段 M_1M_2,点 M 的较低的位置 M_1 对应于 $N_1=A$ 的情形,而点 M 的较高位置 M_2 对应于 $L_2=C$ 的情形.



(a)



(b)



(c)

为了确定与点 K 的位置有关的点 M_1 和 M_2 的位置,我们建立如图(b)所示的坐标系.

容易计算.如果点 K 的横坐标 $x>0$,

那么 $M_1=(-x,\sqrt{2x})$,$M_2=(-x,\sqrt{1-2x}+1)$.

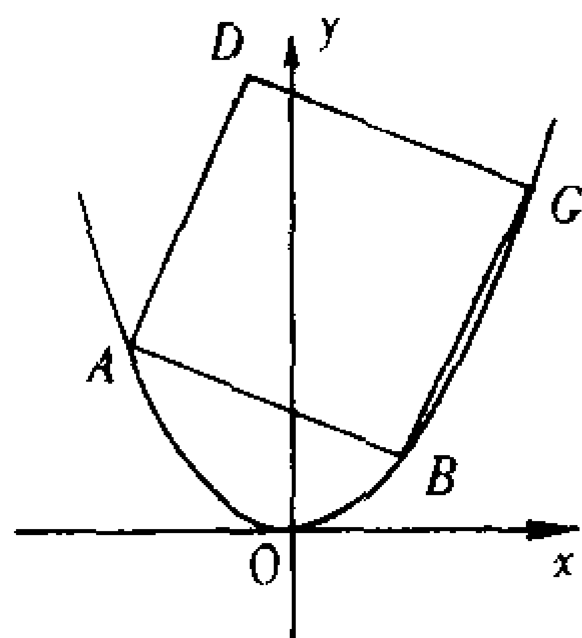
再利用点 M 的集合关于 oy 轴的对称性,我们得到所求集合是斜线阴影标出的图形(图(c)),曲边是抛物线,其中用数字1,2表示的图形面积相等.

因此,菱形第四个顶点所充满的图形的面积就等于正方形 $ABCD$ 的面积,等于1.

19·68 已知:在抛物线 $y=x^2$ 上有一个正方形的三个顶点 A、B、C.求:这种正方形面积的最小值.

(中国上海市数学竞赛,1998年)

[解] 不妨设正方形在抛物线上的三个顶点中有两个在 y 轴右侧(包括 y 轴),且设 A、B、C 三点坐标分别为 (x_i,y_i),$i=1,2,3$,且 BC 的斜率为 $k(k>0)$.



则 $\begin{cases} y_3-y_2=k(x_3-x_2), \\ y_2-y_1=-\dfrac{1}{k}(x_1-x_2). \end{cases}$

又 A、B、C 在 $y=x^2$ 上,故有

$y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$, $y_3=x_3^2$.

将它们代入上面式子可有

$$x_3=k-x_2,\ \ x_1=-\frac{1}{k}-x_2.$$

$\because$ $|AB|=|BC|$,

即 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$,

$\therefore$ $\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}(x_2-x_1)=\sqrt{1+k^2}(x_3-x_2)$,

即 $x_2-x_1=k(x_3-x_2)$.

$\therefore$ $\dfrac{1}{k}+2x_2=k(k-2x_2)$,

由 $k^2-\dfrac{1}{k}=(2k+2)x_2\geqslant 0$, 知 $k^3\geqslant 1$, 因而 $k>1$.

$\therefore$ $x_2=\dfrac{k^3-1}{2k(k+1)}$,

这样正方形边长为

$$\begin{aligned}\sqrt{k^2+1}(x_3-x_2)&=\sqrt{k^2+1}(k-2x_2)\\ &=\sqrt{k^2+1}\left[k-\frac{k^3-1}{k(k-1)}\right]\\ &=\frac{k^2+1}{k}\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}}{k+1}\\ &\geqslant\frac{2k}{k}\cdot\frac{\dfrac{(k^2+1)^2}{2}}{k+1}=\sqrt{2},\end{aligned}$$

当且仅当 $k=1$ 时,即 B 为原点时等号成立.

$\therefore$ $S_{\max}=(\sqrt{2})^2=2$.

19·69 在平面直角坐标系中,以点(0,1)为心的圆与抛物线 $y=x^2$ 交于 A、B、C、D 四点.求证:$S_{ABCD}<\sqrt{2}$并求 S_{ABCD}的最大可能值.

(前苏联教委推荐试题,1989 年)

[解] 因为圆和抛物线都关于 y 轴对称，所以四边形 $ABCD$ 是等腰梯形. 设圆的半径为 R，于是有

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x^2+(y-1)^2=R^2. \end{cases}$$

消去 x，得到 $y^2-y+1-R^2=0$.

由韦达定理有 $y_1+y_2=1$，这表明梯形 $ABCD$ 的中位线 MN 位于直线 $y=\frac{1}{2}$ 上，故有

$$MN<2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

梯形的高 h 有估计式 $h=|y_1-y_2|<y_1+y_2=1$.

$\therefore\quad S_{ABCD}=h\cdot MN<\sqrt{2}$.

此外，由判别式有 $1-4(1-R^2)>0$. 解得 $R>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因当 $R\geqslant 1$ 时不可能有 4 个交点，所以 R 的变化范围是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<R<1.$$

其次，记 $x_1=\sqrt{y_1}$，$x_2=\sqrt{y_2}(y_1<y_2)$，并令

$$x_1=\sin\alpha,\ x_2=\cos\alpha,\ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right),$$

于是有

$$\begin{aligned} S_{ABCD}&=h\cdot MN=|y_1-y_2|(x_1+x_2) \\ &=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-2\sin^2\alpha) \\ &=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos2\alpha. \end{aligned}$$

令 $t=\sin2\alpha\in(0,1)$，便得

对 $f(t)$求导有 $S_{ABCD}^2=(1+\sin2\alpha)(1-\sin^22\alpha)=-t^3-t^2+t+1=f(t)$.

$$f'(t)=-3t^2-2t+1=-(1+t)(3t-1),$$

又当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$f'(t)=0$.

且 $f(0)=1$，$f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$，

$\therefore\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$是 $f(t)$的最大值.

最后，当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$\sin2\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，于是有

$$x_1=\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}.$$

$$x_2=\cos\alpha=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}.$$

$$y_1=\frac{3-2\sqrt{2}}{6},\quad y_2=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}.$$

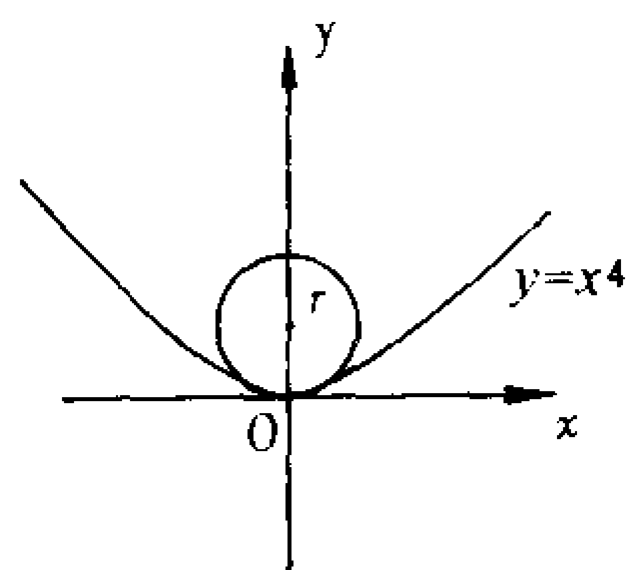
再由韦达定理得到 $1-R_0^2=y_1y_2=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$.

解得 $R_0=\frac{\sqrt{35}}{6}$. 显然有 $\frac{3}{4}<R_0<1$.

所以 S_{ABCD} 的最大值是 $\sqrt{\frac{32}{27}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

19·70 大圆酒杯的轴截面为函数 $y=x^4$ 的图像，往杯中放一个半径为 r 的小球，当半径 r 最大为多大时球可以触到杯底的最低点(即 r 最大为多大时，位于区域 $y\geqslant x^4$ 中的半径为 r 的圆可经过原点)?

(第 57 届莫斯科数学竞赛，1994 年)



[解] 原问题等价于经过原点的圆

$$(y-r)^2+x^2=r^2$$

完全位于区域 $y\geqslant x^2$ 中，即 当 $0\leqslant x\leqslant r$ 时，有

$$r-\sqrt{r^2-x^2}\geqslant x^4. \qquad ①$$

令 $x=r\sin\theta$. ①式即为 当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$1-\cos\geqslant r^3\sin^4\theta. \qquad ②$$

当 $\theta=0$ 时，②式显然成立；

当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，②式转化为 $r^3\leqslant\frac{1}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}$. ③

故有 $\sin^2\theta(1+\cos\theta=8\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}$

$$\leqslant 4\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3$$

$$=\frac{32}{27}.$$

代入③式得 $r\leqslant\sqrt[3]{\frac{27}{32}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$

5. 双曲线

19·71 已知:双曲线的两条渐近线方程为 $x+y=0$, $x-y=0$,两顶点的距离为 2.求:双曲线的方程.

(中国高中数学联赛,1979 年)

[解] 由所给渐近线方程知,要求的双曲线有两种可能的情况:

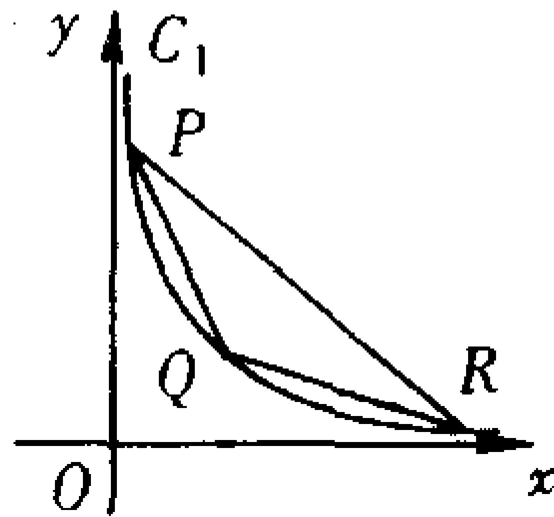
(1)双曲线的实轴在 x 轴上,此时,双曲线方程可写成 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$.

因双曲线的两顶点距离为 2,故 $a=1$,此双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$,

与所给渐近线方程比较,得 $b=1$,于是,得所求双曲线是 $x^2-y^2=1$.

(2)若双曲线的实轴在 y 轴上,与(1)同理,求得其方程为 $y^2-x^2=1$.

19·72 设双曲线 $xy=1$ 的两支为 C_1、C_2(如图),正三角形 PQR 的三顶点位于此双曲线上.(1)求证:P、Q、R 不能都在双曲线的同一支上;(2)设 $P(-1,-1)$ 在 C_2 上,Q、R 在 C_1 上.求:顶点 Q、R 的坐标.



(中国高中数学联赛,1997 年)

[证] (1)用反证法.假设正△PQR 的三顶点 P、Q、R 位于同一支如 C_1 上,其坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3),不妨设 $0<x_1<x_2<x_3$,则一定有 $y_1>y_2>y_3>0$.于是,

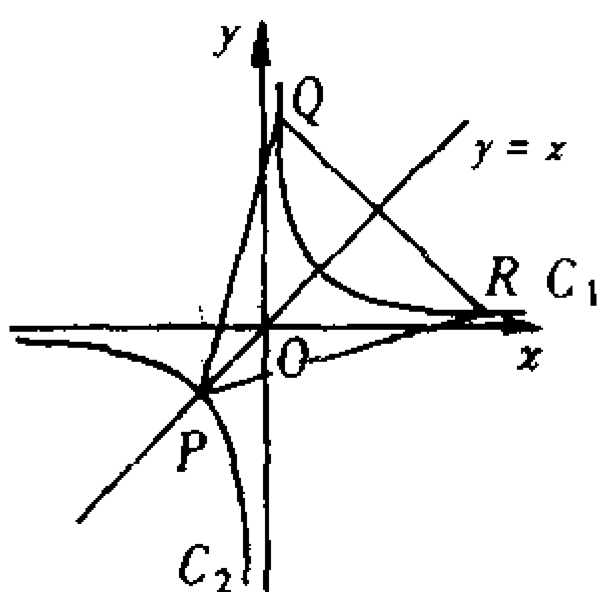
$$PQ^2+QR^2-PR^2$$
$$=[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_3)^2-(x_1-x_3)^2]+[(y_1-y_2)^2+(y_3-y_3)^2-(y_1-y_3)^2]$$
$$=(2x_2^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3)+(2y_2^2-2y_1y_2-2y_2y_3+2y_1y_3)$$
$$=2(x_2-x_1)(x_2-x_3)+2(y_2-y_2)(y_2-y_3)<0.$$

因此 $PQ^2+QR^2<PR^2$.

这说明△PQR 是钝角三角形,与△PQR 为正三角形矛盾.故 P、Q、R 不能位于同一支上.

(2)设 Q、R 的坐标为 $\left(x_1,\dfrac{1}{x_1}\right)$、$\left(x_2,\dfrac{1}{x_2}\right)$,这时 QR 边上的高线方程为

$$y+1=x_1x_2(x+1). \qquad (*)$$



它必过线段 QR 的中点,因此 QR 的中点坐标满足方程($*$),于是有

$$\frac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}}{2}+1=x_1x_2\left(\frac{x_1+x_2}{2}+1\right),$$

此即 $(1-x_1x_2)[(x_1+x_2)(1+x_1x_2)+2x_1x_2]=0.$

∵ $x_1>0,\ x_2>0,$

上式方括号中的式子明显大于0,则

$1-x_1x_2=0.$ 故 $x_1x_2=1.$

于是,Q 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{x_2},x_2\right)$,而 R 的坐标为 $\left(x_2,\dfrac{1}{x_2}\right)$,这说明 Q、R 关于直线 $y=x$ 对称.

PQ、PR 所在的直线分别为过 P 点与 $y=x$ 交成30°角的相互对称的两条直线,易见其倾斜角分别为75°和15°.不妨设 PQ 的倾斜角为75°,这时它的方程为

$$y+1=\text{tg}75°\cdot(x+1),$$

即 $y+1=(2+\sqrt{3})(x+1).$

将其代入双曲线方程 $xy=1$,解得 Q 的坐标为 $(2-\sqrt{3},2+$

$\sqrt{3})$,

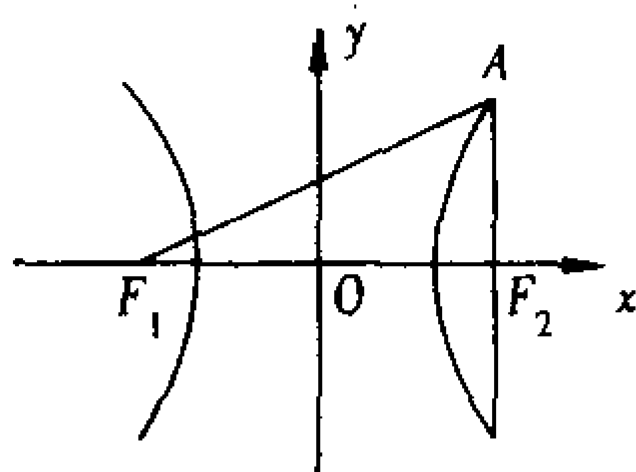
由对称性知　R 的坐标为$(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})$.

19·73　已知:双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$,过其右焦点 F_2 且与 x 轴垂直的直线e 交双曲线于A、B 两点.求$\angle AF_1F_2$ 的值.

(中国河南省数学竞赛,1998 年)

[解]　设　$\angle AF_1F_2=\alpha$, $\angle F_1A_2F_2=\beta$,

则　$\alpha+\beta=90°$.



由正弦定理得

$$\frac{|AF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|AF_1|}{\sin 90°}=\frac{|F_1F_2|}{\sin\beta}$$

$$\therefore\quad \frac{2C}{\sin\beta}=\frac{|AF_1|-|AF_2|}{\sin 90°-\sin\alpha}=\frac{2\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\beta}{1-\sin\alpha}=\frac{c}{a}=e,\ 即\quad \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=e.$$

亦即　$\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}-\mathrm{tg}\alpha}=e$, 得　$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{e^2-1}{2e}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{tg}\alpha&=\frac{(2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-1}{2(2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})}\\&=\frac{(3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})}\\&=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\\&=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$\therefore$　$\alpha=15°$,　即　$\angle AF_1F_2=15°$.

19·74　C 是$xy=1$ 的图像,C 关于直线$y=2x$ 的对称图像是C',已知 C'可以写成 $12x^2+bxy+cy^2+d=0$ 的形式,求:bc 的值.

(第 6 届美国数学邀请赛,1988 年)

[解]　设 $P(u,v)$是 C 上任意一点,$P'(x,y)$为 C'上对应的点(即 P 关于$y=2x$ 的对称点).

连接 PP'. ∵ $PP' \perp$ 直线 $y=2x$, ∴ PP' 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$;

则 $\dfrac{y-v}{x-u}=\dfrac{1}{2}$, ①

又 PP' 的中点在 $y=2x$ 上,

∴ $\dfrac{y+v}{2}=2\cdot\dfrac{x+u}{2}$. ②

解①、②得 $\begin{cases} u=\dfrac{4y-3x}{5}, \\ v=\dfrac{4x+3y}{5}. \end{cases}$

因为 $P(u,v)$ 在曲线 C 上,则

$$uv=\frac{4y-3x}{5}\cdot\frac{4x+3y}{5}=1,$$

即 $12x^2-7xy-12y^2+25=0$.

从而 $b=-7$, $c=-12$. 故 $bc=84$.

19·75 在双曲线 $xy=1$ 上,横坐标为 $\dfrac{n}{n+1}$ 的点为 A_n,横坐标为 $\dfrac{n+1}{n}$ 的点为 $B_n(n\in N)$. 记坐标为 $(1,1)$ 的点为 M. 又 $P_n(x_n,y_n)$ 是 $\triangle A_nB_nM$ 的外心,当 $n\to\infty$ 时,求:P_n 的极限点坐标 (a,b),这里 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

(中国上海市数学竞赛,1997年)

[解] 易得 A_n、B_n 的坐标为:

$$A_n\left(\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n}\right),\ B_n\left(\frac{n+1}{n},\frac{n}{n+1}\right).$$

∴ $|A_nM|=|B_nM|$, 且直线 A_nB_n 的斜率 $k_{A_nB_n}=-1$.

故 $\triangle MA_nB_n$ 是以 A_nB_n 为底边的等腰三角形,且底边所在直线的斜率为 -1.

因 M 在直线 $y=x$ 上,所以底边中垂线方程为 $y=x$.

由此知 $x_n=y_n$.

A_nM 的中点坐标 $E\left(\dfrac{2n+1}{2(n+1)},\dfrac{2n+1}{2n}\right)$,

且 $k_{A_nM}=\dfrac{\dfrac{n+1}{n}-1}{\dfrac{n}{n+1}-1}=\dfrac{n+1}{n}$,

故 外心 $P_n(x_n,x_n)$在直线

$$y-\frac{2n+1}{2n}=\frac{n}{n+1}\left[x-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]$$

上,由此求得 $x_n=\dfrac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2$.

∴ 极限点的坐标为(2,2).

19·76 已知:双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1(a>0)$,抛物线 C_2 的顶点在原点 O,又 C_1 的焦点是 C_2 的左焦点 F_1.(1)求证:C_1 与 C_2 总有两个不同的交点;(2)是否存在过 C_2 的焦点 F_1 的弦 AB,使△AOB 有最大或最小值? 若有,求出 AB 所在直线方程与最值;若没有,请说明理由.

(中国湖南省数学竞赛,1998 年)

[解] (1)∵ $F_1(-\sqrt{3}a,0)$, ∴ $C_2:y^2=-4\sqrt{3}ax$.

由 $\begin{cases}y^2=-4\sqrt{3}ax,\\2x^2-y^2=2a^2\end{cases}$, 消去 y,得 $x^2+2\sqrt{3}ax-a^2=0$. ㊉

∵ $\Delta=(2\sqrt{3}a)^2+4a^2>0$.

∴ 方程㊉有实根 x_1,x_2.

又 $x_1x_2=-a^2<0$, 则两根异号,不妨设 $x_1>0,x_2<0$.

当 $x_1>0$ 时, $y^2=-4\sqrt{3}ax$ 无实根.

当 $x_2<0$ 时, $y^2=-4\sqrt{3}ax$ 有两个不同实根,从而,C_1 和 C_2 有两个不同的交点.

(2)假设符合条件的弦 AB 存在.

(i)当直线斜率 k 存在时,易知 $k\neq0$.设直线 AB 的方程为

$y=k(x+\sqrt{3}a)$.

由方程组 $\begin{cases}y=k(x+\sqrt{3}a,\\y^2=-4\sqrt{3}ax\end{cases}$, 消去 y, 得

$k^2x^2+2\sqrt{3}a(k^2+2)x+3a^2k^2=0$.

几何卷

$$\because \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}a(k^2+2)}{k^2}, \\ x_1x_2=3a^2. \end{cases}$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{(1+k^2)\left[\frac{12a^2(k^2+2)^2-12a^2k^4}{k^4}\right]}=\frac{4\sqrt{3}a(k^2+1)}{k^2}.$$

又 原点到直线 AB 的距离 $h=\dfrac{\sqrt{3}a|k|}{\sqrt{k^2+1}}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a|k|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{4\sqrt{3}a(k^2+1)}{k^2}=6a^2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}.$$

(ii)当直线斜率 k 不存在,即 $AB\perp x$ 轴时,有

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}a\cdot\sqrt{3}a=6a^2.$$

$$\because \quad 6a^2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\geqslant6a^2(k\neq0),$$

$\therefore$ $S_{\triangle AOB}$的最小值为 $6a^2$,此时直线 AB 的方程为 $x=-\sqrt{3}a$.

当 $k\to0$ 时,$\dfrac{1}{k^2}\to\infty$, 因此 $S_{\triangle AOB}$无最大值.

19·77 在平面直角坐标系中,x 轴上有两个与原点 $O(0,0)$不同的定点 A、B.动点 C 在 y 轴上变动,直线 l 过 $O(0,0)$且与直线 AC 垂直.求直线 l 与直线 BC 的交点的轨迹(给出其方程并描绘图形).

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解] 设 A、B、C 的坐标分别为$(a,0)$,$(b,0)$,$(0,c)$.其中 $a\neq0$,$b\neq0$,$a\neq b$.

在 $c\neq0$ 时,AC 的斜率为 $-\dfrac{c}{a}$,l 的斜率为$\dfrac{a}{c}$,

$\therefore$ l 的方程为 $y=\dfrac{a}{c}x$. ①

BC 的方程为 $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}=1$. ②

由①、②消去 c 得到轨迹方程为

$$a(x^2-bx)+by^2=0,$$

即 $$\frac{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{b^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{ab}{4}}=1. \qquad ③$$

当 $c=0$ 时，l 与 BC 的交点为原点也包括在方程③中.

式③上的点 $(b,0)$ 可看作 C 趋于无穷时，l 与 BC 的交点的极限位置.

当 $ab>0$ 时，轨迹为椭圆.

当 $ab<0$ 时，轨迹为双曲线.

6. 解析几何杂例

19·78 设方程组 $\begin{cases}x^2+xy+y^2-y=0,\\ ax^2+bxy+x=0,\end{cases}$ $(ab\neq 0)$. 有且仅有三组不同的实数解.

(1)求实系数 a、b 所应满足的条件；

(2)把 (a,b) 看作 aOb 坐标平面上点的坐标，画出满足上述条件的点的轨迹.

(中国福建省数学竞赛，1978 年)

[解] (1)已知方程组

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2-y=0, & ①\\ ax^2+bxy+x=0, & ②\end{cases}$$

因 $a\neq 0$，由②可得 $x=0$ 或 $x=-\frac{by+1}{a}$. ③

把 $x=0$ 代入①，解得 $y=0$，$y=1$；

把 $x=-\frac{by+1}{a}$ 代入①，整理得

$$(a^2-ab+b^2)y^2-(a^2+a-2b)y+1=0.$$

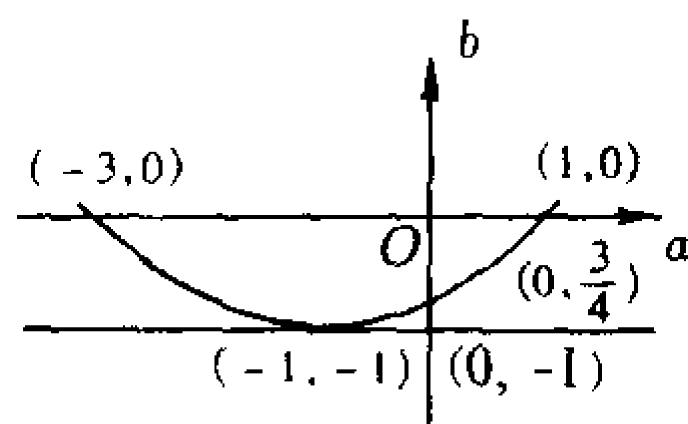
又 $$\begin{aligned}\Delta&=(a^2+a-2b)^2-4(a^2-ab+b^2)\\&=[(a+1)^2-4(b+1)]a^2.\end{aligned}$$

因 $x=0$，$y=0$ 不满足③，所以原方程组有且仅有三组不同实数解的条件如下：

(i) $(a+1)^2-4(b+1)=0$,

但 $x=0,y=1$ 不满足③，即 $b\neq -1$，从而 $a\neq -1$；

或(ii) $(a+1)^2-4(b+1)>0$，



但 $x=0,y=1$ 满足③，即 $b=-1$，

从而 $a\neq -1$.

(2)在 aOb 坐标平面上，满足上述条件和题设条件($ab\neq 0$)的点(a,b)的轨迹如图所示，就是除去点$(-1,-1)$、$(1,0)$、$(-3,0)$、$\left(0,-\dfrac{3}{4}\right)$的抛物线$(a+1)^2=4(b+1)$，和除去点$(-1,-1)$、$(0,-1)$的直线 $b=-1$.

19·79 A、B 为定二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g=0(a\neq 0)$上的两个定点，过 A、B 任作一圆，设该圆与定二次曲线相交于另外两点 C、D，求证：直线 CD 有定向.

（中国上海市数学竞赛，1978 年）

[证] 作新坐标系：以 A 为原点，AB 为 x'轴. 设 B 点的新坐标为$(l,0)$，在此坐标系中，因为二次曲线与 x'轴交于 A、B 两点，所以二次曲线方程可化为：

$$x'^2+b'x'y+c'y'^2-lx'+f'y'=0. \qquad ①$$

∵ 圆的一般方程是

$$x'^2+y'^2+hx'+ky'+m=0,$$

∴ 过 A、B 的圆方程为

$$x'^2+y'^2-lx'+ky'=0. \qquad ②$$

①-②，得 $y'[b'x'+(c'-1)y'+(f'-k)]=0$， ③

这是另两个交点 C、D 的坐标必须满足的条件.

∵ C、D 不在直线 AB 上，所以它们的纵坐标 $y'\neq 0$，从而直线 CD 的方程是

$$b'x'+(c'-1)y'+(f'-k)=0.$$

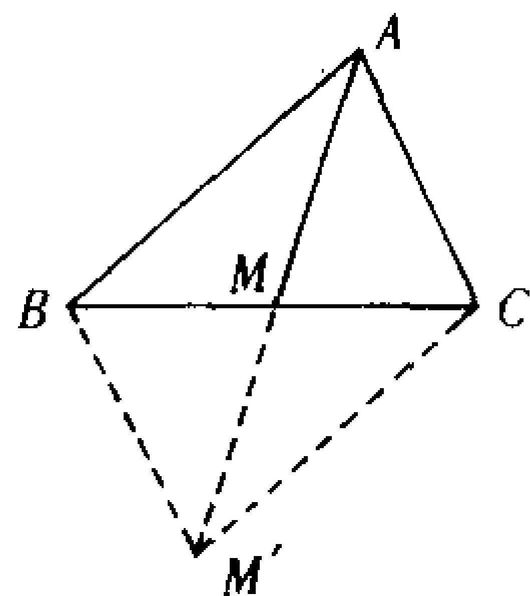
因为 b'、c'都是定值，直线 CD 的斜率是定值，所以直线 CD 有定向.

19·80 在坐标平面上，BC 是一条线段，M 在 BC 上，A 是直线 BC 外的一点.(1)求证：若 M 是 BC 的中点，则 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$.(2)若 BC 内部除中点 M 外还有点满足(1)，试求出 A 所在的区

域.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

［解］ (1)延长 AM 到 M'，使 $MM'=AM$，连 $M'B$、$M'C$，易知



$$AB^2+AC^2+M'C^2+M'B^2=M'A^2+BC^2,$$

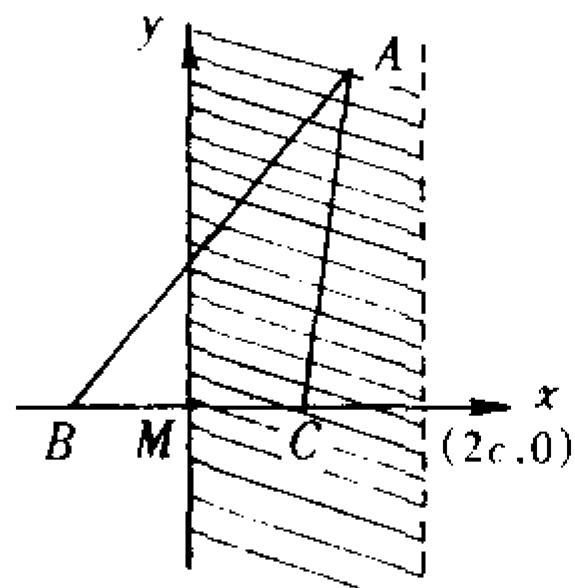
即 $2(AB^2+AC^2)=4(AM^2+BM)^2$，

$\therefore\quad AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$.

(2)如图，建立坐标系，设各点坐标为：

$B(-c,0)$，$C(c,0)$，$M(0,0)$，

$M_0(a,0)$，$A(x,y)$.



这时(1)之等式化为

$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2$$
$$=2[(x-a)^2+y^2+(a+c)^2].$$

整理得 $a^2+a(c-x)=0$.

由于 $a\neq0$，则 $x=a+c$.

又 $-c<a<c$，则 $0<x<2c$.

于是，所求的区域为 $\{(x,y)|0<x<2c,y\neq0\}$.

19·81 证明：在$\triangle ABC$所在坐标平面上，有一个惟一的点 U 具有性质：存在实数 λ、μ、υ、κ 不全为零，使得对这个平面上所有点 P，$\lambda PL^2+\mu PM^2+\upsilon PN^2-\kappa PU^2$ 为常数，这里 L、M、N 分别为 P 到 BC、CA、AB 的垂线的垂足. 试确定 U.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

［解］ 以$\triangle ABC$的外心 O 为原点建立直角坐标系，不失一般性，设$\triangle ABC$的外接圆半径为 1. A、B、C 三点的坐标为

$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$C(\cos\gamma,\sin\gamma)$.

因而直线 BC 的方程为

$$x\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+y\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

类似地有 CA、AB 的方程.

设 U 的坐标为(s,t). 又设 $P(x,y)$为平面内任意一点，则应有关于 x、y 的恒等式

$$\sum \lambda\left(x\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+y\sin\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2$$
$$-\kappa[(x-s)^2+(y-t)^2]=\text{常数}.$$

比较 x^2 及 y^2 的系数得

$$\sum \lambda\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}=\sum \lambda\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}=\kappa. \qquad ①$$

比较 xy 的系数得 $\sum \lambda\sin(\beta+\gamma)=0.$ ②

由①可得 $\sum \lambda\cos(\beta+\gamma)=0.$ ③

由②、③可得

$$\frac{\lambda}{\begin{vmatrix}\sin(\gamma+\alpha) & \sin(\alpha+\beta)\\ \cos(\gamma+\alpha) & \cos(\alpha+\beta)\end{vmatrix}}=\frac{\mu}{\begin{vmatrix}\sin(\alpha+\beta) & \sin(\beta+\gamma)\\ \cos(\alpha+\beta) & \cos(\beta+\gamma)\end{vmatrix}}$$
$$=\frac{\upsilon}{\begin{vmatrix}\sin(\beta+\gamma) & \sin(\gamma+\alpha)\\ \cos(\beta+\gamma) & \cos(\gamma+\alpha)\end{vmatrix}},$$

即 $\dfrac{\lambda}{\sin(\beta-\gamma)}=\dfrac{\mu}{\sin(\gamma-\alpha)}=\dfrac{\upsilon}{\sin(\alpha-\beta)}.$

我们取 $\lambda=\sin(\beta-\gamma)=\sin2A,$

$\mu=\sin(\gamma-\alpha)=\sin2B,$

$\upsilon=\sin(\alpha-\rho)=\sin2C.$

由①知 $\kappa=\dfrac{1}{2}\sum\lambda=\dfrac{1}{2}\sum\sin(\beta-\gamma)=\dfrac{1}{2}\sum\sin2A.$

考虑上述恒等式中 x 的系数有

$$\begin{aligned}2\kappa s &=2\sum\sin(\beta-\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\ &=\sum\sin(\beta-\gamma)(\cos\beta+\cos\gamma)\\ &=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\sum\sin(\beta-\gamma)-\sum\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)\\ &=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\cdot2\kappa-\sum[\sin(\alpha+\beta-\gamma)\\ &\quad-\sin(\gamma+\alpha-\beta)]\\ &=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\cdot2\kappa.\end{aligned}$$

$\because$ $2\kappa=\sum\sin2A=4\sin A\sin B\sin C\neq0.$

$\therefore$ $s=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$

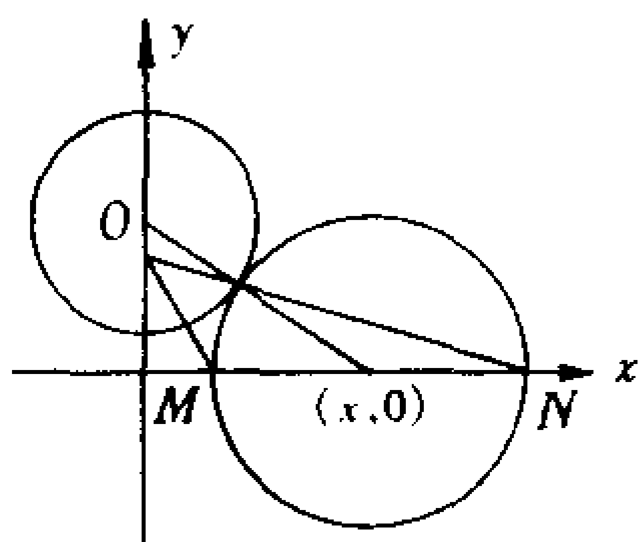
同理　$t=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$.

因此　$U(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$是$\triangle ABC$的垂心.

19·82　在(坐标)平面上已知一半径为R,中心为O的圆及一直线a,O与a的距离为d,$d>R$.在a上取点M与N,使得以MN为直径的圆与$\odot O$外切.证明:在这平面上存在一点A,所有线段MN对A的张角都相等.

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[证]　以直线a为x轴,过O且与a垂直的直线为y轴.



设$O(0,d)$,且$\odot O$与中心在$(x,0)$,半径为r的圆外切,于是

$$x^2+d^2=(R+r)^2.$$

由对称性,如果A点存在,则A点一定在y轴上,设$A(0,d)$,又$M(x-r,0)$,$N(x+r,0)$,

所以AM的斜率为$-\dfrac{h}{x-r}$,AN的斜率为$-\dfrac{h}{x+r}$.

下面计算$\angle MAN$的正切.

$$\operatorname{tg}\angle MAN=\frac{-\dfrac{h}{x+r}+\dfrac{h}{x-r}}{1+\dfrac{h^2}{x^2-r^2}}=\frac{2hr}{x^2-r^2+h^2}$$

$$=\frac{2hr}{(R+r)^2-d^2-r^2+h^2}=\frac{2hr}{R^2+h^2+2Rr+d^2}.$$

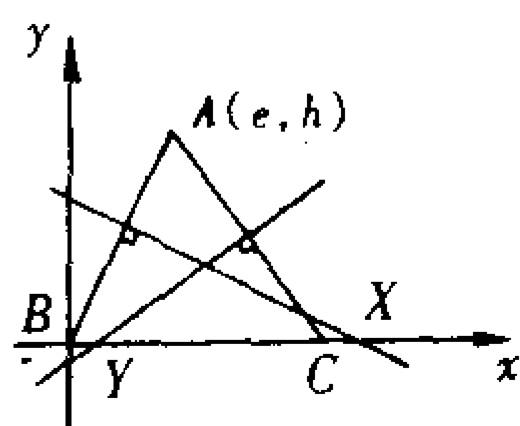
显然,当$R^2+h^2-d^2=0$,即$R^2+h^2=d^2$时,上式为常数,因此A点是存在的,其坐标为$A(0,\sqrt{d^2-R^2})$.

19·83　在坐标平面中,$\triangle ABC$的边AB和AC的垂直平分线分别交BC于(如果存在交点的话)X和Y.试证使$BC=XY$的一个充分条件是$\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=3$.但这个条件不是必要的,请找出使$BC=XY$成立的充分必要条件.

(芬兰等四国国际数学竞赛,1980年)

注　芬兰等四国是指芬兰、英国、匈牙利、瑞典.

[证]　以B为坐标原点,BC所在直线为x轴,建立直角坐标系



(如图),并设△ABC三个顶点坐标为

$$A(e,h),\ B(0,0),\ C(a,0).$$

其中 $h>0$, $a>0$. 因此当 $e\neq0$, $e\neq a$ 时,

$$\mathrm{tg}B=\frac{h}{e},\ \mathrm{tg}C=\frac{h}{a-e}.$$

线段 AB 的垂直平分线方程为

$$(x-e)^2+(y-h)^2=x^2+y^2.$$

即 $2ex+2hy=e^2+h^2$.

设 AB 的垂直平分线与 BC 边的交点 X 坐标为$(x_1,0)$,则

$$x_1=\frac{e^2+h^2}{2e}.$$

同样,线段 AC 的垂直平分线方程为

$$(x-e)^2+(y-h)^2=(x-a)^2+y^2,$$

即 $2(e-a)x+2hy=e^2+h^2-a^2$.

设 AC 的垂直平分线与 BC 边的交点 Y 坐标为$(x_2,0)$,则

$$x_2=\frac{e^2+h^2-a^2}{2(e-a)}.$$

这样,在 $e\neq0,e\neq a$ 时,

$$XY=|x_1-x_2|=\left|\frac{e^2+h^2}{2}-\frac{e^2+h^2-a^2}{2(e-a)}\right|=\left|\frac{ea^2-e^2a-h^2e}{2e(e-a)}\right|.$$

因此,为使 $BC=a=XY$,则有

$$\left|\frac{ea^2-ea^2-h^2e}{2e(e-a)}\right|=a,$$

$\therefore\ |ea^2-e^2a-h^2e|=2a|e(e-a)|$.

(1)若 $ea^2-e^2a-h^2e=2ae(e-a)$,

则 $ea^2-e^2a-h^2e=2e^2a-2ea^2$.

$\therefore\ \frac{h}{e}\cdot\frac{h}{a-e}=3$, 即 $\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=3$.

(2)若 $ea^2-e^2a-h^2e=-2ae(a-e)$,

有 $-ae(a-e)=ah^2$,

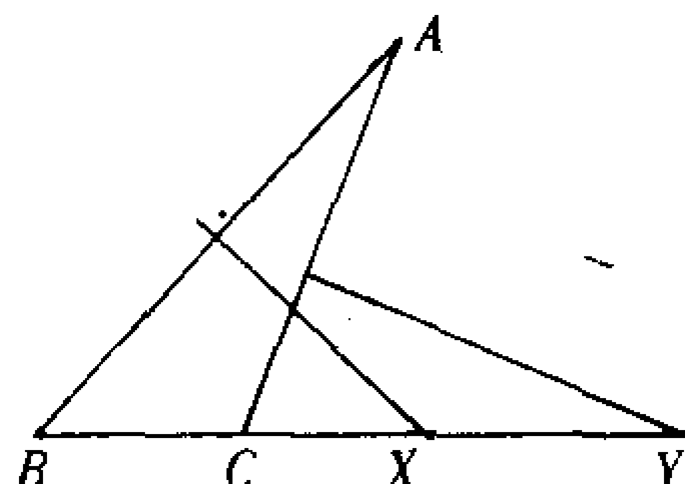
或 $\frac{h}{e}\cdot\frac{h}{a-e}=-1$, 即 $\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=-1$.

当 $e=0$ 或 $e=a$ 时,△ABC 为直角三角形,此时 AB 或 AC 的垂直

平分线与 BC 平行而与 BC 无交点，所以不可能有 $XY=BC$，于是一定有 $e\neq0$ 且 $e\neq a$.

于是，若有 $XY=BC$，则

$\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=3,\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=-1.$ ㊟



反之，若㊟式成立，则 $\mathrm{tg}B$ 与 $\mathrm{tg}C$ 都存在，一定会有 $e\neq0,e\neq a$，此时都可有 $XY=BC$.

因此，$\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=3$ 仅是 $XY=BC$ 成立的充分条件，而㊟才是其充分必要条件.

如图给出了 $\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=-1$ 时的情形.

19·84 $\triangle ABC$ 为锐用三角形，L 是三角形所在坐标平面内的任一直线，u、v、w 分别为 A、B、C 到 L 的垂线长. 试证 $u^2\mathrm{tg}A+v^2\mathrm{tg}B+w^2\mathrm{tg}C\geqslant2S$，其中 S 为$\triangle ABC$ 的面积.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］ 取 BC 为 x 轴，过 A 的高为 y 轴建立平面直角坐标系.

设 A、B、C 的坐标分别为

$$A(0,a),B(-b,0),C(c,0),a,b,c>0.$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}B=\frac{a}{b},\ \mathrm{tg}C=\frac{a}{c},$$

且
$$\mathrm{tg}A=-\mathrm{tg}(B+C)=-\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{1-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}.$$

$$\because\quad A\text{ 是锐角},\ \therefore\quad \mathrm{tg}A=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}>0,$$

从而 $\quad a^2>bc.$

设直线 L 的法线式方程为 $\quad mx+ny-p=0$. 其中 $m^2+n^2=1$.

容易求出 $\quad u=|an-p|,\ v=|-bm-p|,\ w=|cm-p|$.

$$\therefore\quad u^2\mathrm{tg}A+v^2\mathrm{tg}B+w^2\mathrm{tg}C$$

$$=(an-p)^2\cdot\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a}{b}(-bm-p)^2+\frac{a}{c}(cm-p)^2$$

$$=(a^2n^2-2anp+p^2)\cdot\frac{a(b+c)}{a^2-bc}+\frac{a(b+c)}{bc}(p^2+bcm)$$

$$=\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}[(ap-bcn)^2+bc(a^2-bc)]$$

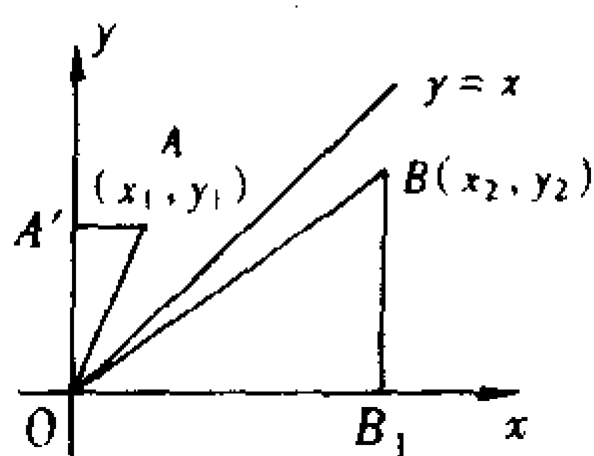
$\geqslant a(b+c)$

$=2S.$

当且仅当 $bcn-ap=0$，即当直线 L 通过$\triangle ABC$ 的垂心$\left(0,\dfrac{bc}{a}\right)$时，等号成立.

19·85 在直角坐标系 XOY 中，点 $A(x_1y_1)$和点 $B(x_2,y_2)$的坐标均为一位正整数，OA 与 x 轴正方向的夹角大于 $45°$，OB 与 x 轴正方向的夹角小于 $45°$，B 在 x 轴上的射影为 B'，A 在 y 轴上的射影为 A'，$\triangle OB'B$ 的面积比$\triangle OA'A$ 的面积大 33.5. 由 x_1、y_1、x_2、y_2 组成的四位数 $\overline{x_1x_2y_2y_1}=x_1\cdot10^3+x_2\cdot10^2+y_2\cdot10+y_1$. 试求出所有这样的四位数，并写出求解过程.

（中国高中数学联赛，1985年）



［解］ 如图，由题设可知 $x_2y_2-x_1y_1=67$，

$\because\quad x_1>0, y_1>0,\ \therefore\quad x_1y_2>67.$

又$\because\quad x_2$、y_2 均为一位正整数，

$\therefore\quad x_2y_2=8\times9=72$ 或 $x_2y_2=9\times9=81.$

$\because\quad \angle BOB'<45°,\ \therefore\quad x_2>y_2,$

故 $x_2y_2\neq81$，从而 $\quad x_2y_2=9\times8=72,$

即 $\quad x_2=9,\ y_2=8.$

这样 $\quad x_1y_1=x_2y_2-67=5.$

又$\because\quad \angle AOB'>45°,\ \therefore\quad x_1<y_1,$

再由 x_1、y_1 是一位正整数，故只能有 $\quad x_1=1,\ y_1=5,$

$\therefore\quad \overline{x_1x_2y_2y_1}=1985.$

19·86 在平面直角坐标系中，圆 C_1 以 $O_1(-2,0)$为圆心，3 为半径，O 为原点，A 为$(1,0)$，求证 存在一个正的常数 C，使得对 C_1 外任意一点 X，有 $OX-1\geqslant c\cdot\min\{AX,AX^2\}$，求：$c$ 的最小值.

（第28届国际数学奥林匹克候选题，1987年）

［证］ 不妨假定 X 在上半平面.

当 X 绕 A 点向左旋转至 X'时，

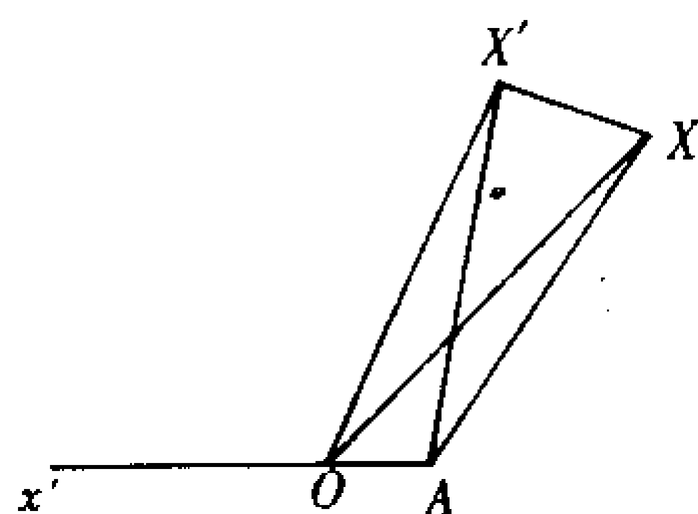
$\because\quad \angle OX'X>\angle AX'X=\angle AXX'>\angle OXX'.$

$\therefore\quad OX>OX'.$

(1)若 $AX\geqslant6$，将 x 旋转至 x 轴上，则

$$\frac{OX-1}{AX}\geqslant\frac{OX'-1}{AX'}=\frac{AX'-2}{AX'}$$

$$=1-\frac{2}{AX'}\geqslant 1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}.$$



由于 $AX\geqslant 6$，则 $AX<AX^2$，从而

$$OX-1\geqslant\frac{2}{3}\cdot AX=\frac{2}{3}\cdot\min\{AX,AX^2\}.$$

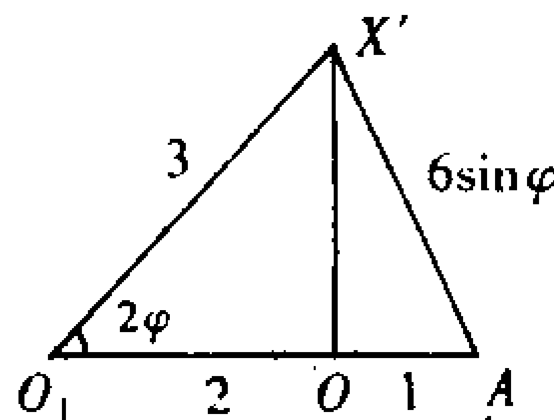
(2)若 $1<AX<6$，仍有 $AX<AX^2$.

将 X 旋转至$\odot C_1$ 上.则

$$\frac{OX-1}{AX}\geqslant\frac{OX'-1}{AX'}=\frac{\sqrt{13-12\cos 2\varphi}-1}{6\sin\varphi}=\frac{\sqrt{1+24\sin^2\varphi}-1}{6\sin\varphi}$$

$$=\frac{4\sin\varphi}{\sqrt{1+24\sin\varphi}+1}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi}+24+\frac{1}{\sin\varphi}}}.$$



由于 $\sin\varphi\geqslant\frac{1}{6}$，上式在 $\sin\varphi=\frac{1}{6}$ 时最小，最小值为

$$\frac{\sqrt{1+24\left(\frac{1}{6}\right)^2}-1}{6\times\frac{1}{6}}=\sqrt{1+\frac{2}{3}}-1=\frac{\sqrt{15}-3}{3}.$$

从而 $\quad OX-1\geqslant\frac{\sqrt{15}-3}{3}\cdot\min\{AX,AX^2\}.$

(3)若 $AX\leqslant 1$，则 $\min\{AX,AX^2\}=AX^2$.

将 X 旋转至$\odot C_1$ 上，则

$$\frac{OX-1}{AX^2}\geqslant\frac{OX'-1}{(AX')^2}=\frac{\sqrt{13-12\cos\varphi}-1}{36\sin\varphi}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+24\sin^2\varphi}+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{15}-3}{3}.$$

$\therefore \quad OX-1 \geqslant \frac{\sqrt{15}-3}{3} \cdot \min\{AX, AX^2\}$. 故 $c=\frac{\sqrt{15}-3}{3}$.

19·87 在坐标平面上，具有整数坐标的点构成单位边长的正方格的顶点，这些正方格被涂上黑白相间的两种颜色(像国际象棋棋盘那样).对于任意一对正整数 m 和 n，考虑一个直角三角形，它的顶点具有整数坐标，两条直角边的长度分别为 m 和 n，且两条直角边都在这些正方格的边上.令 S_1 为这个三角形区域中所有黑色(阴影)部分的总面积，S_2 则为所有白色部分的总面积.令 $f(m,n)=|S_1-S_2|$.(a)当 m 和 n 同为正偶数或同为正奇数时，计算 $f(m,n)$ 的值;(b)证明:$f(m,n)\leqslant\frac{1}{2}\max\{m,n\}$ 对所有的 m 和 n 都成立;(c)证明:不存在常数 c，使得对所有的 m 和 n，不等式 $f(m,n)<c$ 都成立.

(第 38 届国际数学奥林匹克，1997 年)

［解］ (a)设△ABC 为一直角三角形，它的顶点具有整数坐标，且两条直角边都在这些正方格的边上.

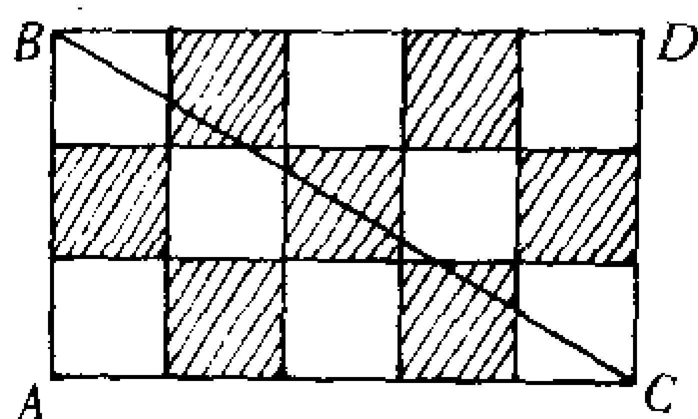


图 1

设 $\angle A=90°, AB=m, AC=n$.

考虑如图 1 中的矩形 $ABCD$.

对于任一多边形 P，记 $S_1(P)$为 P 的区域中所有黑色(阴影)部分的面积，$S_2(P)$为其所有白色部分的面积.

当 m 和 n 同时为偶数或者同时为奇数时，矩形 $ABCD$ 的着色关于斜边 BC 的中点中心对称.因此，

$$S_1(ABC)=S_1(BCD), \quad S_2(ABC)=S_2(BCD).$$

从而 $\quad f(m,n)=|S_1(ABC)-S_2(ABC)|$

$$=\frac{1}{2}|S_1(ABCD)-S_2(ABCD)|.$$

于是，当 m 和 n 同为偶数时，$f(m,n)=0$，当 m 和 n 同为奇数时，

$$f(m,n)=\frac{1}{2}.$$

(b)如果 m 和 n 同为偶数或者同为奇数，则由(a)即知结论成立.故可设 m 为奇数，n 为偶数.如图 2 所示，考虑 AB 上的点 L 使得 $AL=m-1$.

由于 $m-1$ 为偶数，我们有 $f(m-1,n)=0$，即 $S_1(ALC)=S_2(ALC)$. 因此，

$f(m,n)=|S_1(ABC)-S_2(ABC)|=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|$

$\leqslant LBC$ 的面积 $=\frac{n}{2}\leqslant\frac{1}{2}\max\{m,n\}$.

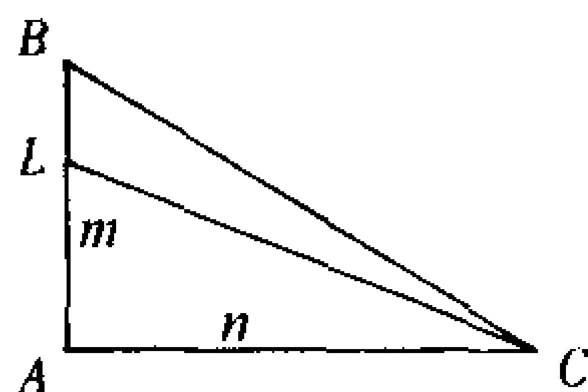


图 2

(c)我们来计算 $f(2k+1,2k)$ 的值. 如同在(b)中，考虑 AB 上的点 L，使得 $AL=2k$. 因为 $f(2k,2k)=0$ 且 $S_1(ALC)=S_2(ALC)$，有

$f(2k+1,2k)=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|$.

注意到△LBC 的面积等于 k.

不失一般性，可以假设对角线 LC 全部落在黑色正方格中(见图 3).

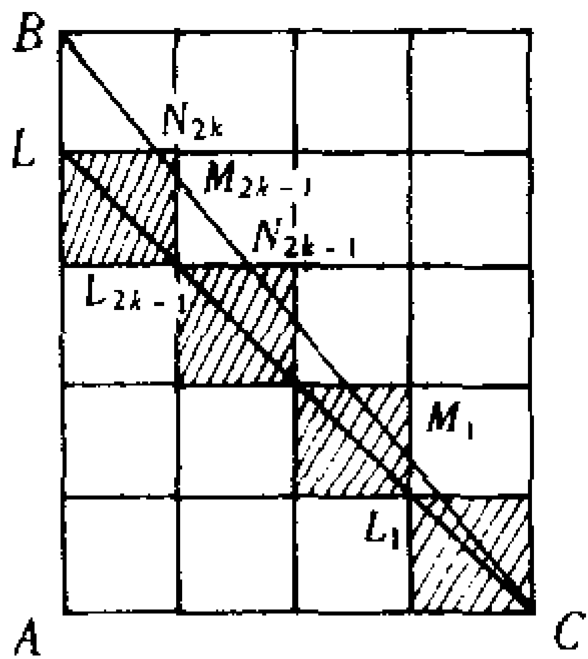


图 3

于是，△LBC 的白色部分由若干个三角形组成：

$\triangle BLN_{2k},\triangle M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1},\cdots$, $\triangle M_1L_1N_1$,

它们每一个都与△BAC 相似. 其总面积等于

$$S_2(LBC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\left[\left(\frac{2k}{2k}\right)^2+\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2k}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{4k(2k+1)}[1^2+2^2+\cdots+(2k)^2]$$
$$=\frac{4k+1}{12}.$$

因此，黑色部分的总面积为

$$S_1(LBC)=k-\frac{1}{12}(4k+1)=\frac{1}{12}(8k-1).$$

$\therefore\quad f(2k+1,2k)=\frac{2k-1}{6}$.

这个函数可以取任意大的值.

19·88 求：平面直角坐标系中格点凸五边形(即每个顶点的横、纵坐标皆为整数的凸五边形)的周长的最小值.

(中国上海市数学竞赛，1997 年)

［解］ 设此凸五边形的5个顶点依次为A_1、A_2、A_3、A_4、A_5，坐标为$A_k(x_k,y_k)$，并用复数表示顶点：$A_k=x_k+iy_k(k=1,2,3,4,5)$，$i$为虚数单位.

记$z_k=A_{k+1}-A_k$，$k=1,2,3,4,5$，$A_6=A_1$，则

(1)z_k的实部与虚部都是整数，且$|z_k|\neq0$(从而$|z_k|\geqslant1$)；

(2)$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=0$；

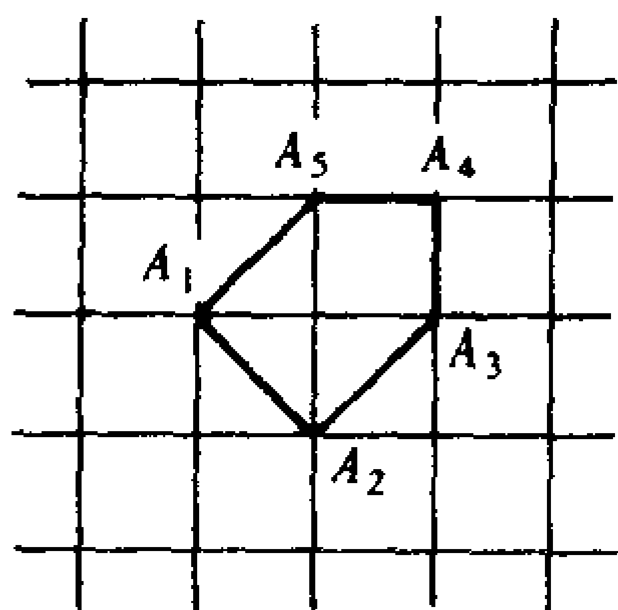
(3)凸五边形$A_1A_2\cdots A_5$的周长为$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_5|$.

由凸性知，任意两个z_j，$z_k(j\neq k)$不具有同一方向，又由(1)知，若某个z_j，有$|z_j|\neq1$，则$|z_j|$只能是$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{5}$，….

$z_1,z_2,\cdots,z_5$中模为1的个数至多只有4个：±1，$\pm i$.

(i)若$|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_5|$中1的个数恰为4，由(2)知，余下一个为0，与(1)相违.

(ii)若$|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_5|$中1的个数恰为3，若剩下两个都为$\sqrt{2}$(注意模为$\sqrt{2}$的至多只有4个：$1\pm i$，$-1\pm i$)，则它们不会满足(2).



于是，此时图形周长$\geqslant1+1+1+\sqrt{2}+2=5+\sqrt{2}$.

(iii)若$|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_5|$中恰有2个1，剩下的3个都为$\sqrt{2}$，如图所示，此时图形周长为$1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}$.

(iv)其他情况，图形周长不小于$1+4\sqrt{2}$.

综上，格点凸五边形的周长最小值为$2+3\sqrt{2}$.

19·89 已知：实数a满足：有且仅有一个正方形，其四个顶点均在曲线$y=x^2+ax$上．试求：该正方形的边长.

(德国数学奥林匹克，1993年)

［解］ 设正方形的四个顶点A、B、C、D.

我们首先证明正方形$ABCD$的中心是原点O.

否则，由于$y=x^3+ax$是奇函数，则A、B、C、D关于原点O的对称点A'、B'、C'、D'也在曲线上，且$A'B'C'D'$也是正方形，与题设只有一个正方形矛盾.

因此可以设$A(x_0,y_0)$，$B(-y_0,x_0)$，$C(-x_0,-y_0)$，$D(y_0,x_0)$，

其中 $x_0>0, y_0>0$,于是有

$$y_0=x_0^3+ax_0, \quad ①$$

$$-x_0=y_0^3+ay_0. \quad ②$$

①×x_0+②×y_0 得

$$x_0^4+y_0^4+a(x_0^2+y_0^2)=0. \quad ③$$

由③知 $a=-\dfrac{x_0^4+y_0^4}{x_0^2+y_0^2}<0.$

①×y_0−②×x_0 得 $x_0^2+y_0^2=x_0y_0(x_0^2-y_0^2)$, ④

令 $x_0=r\cos\theta, y_0=r\sin\theta$, 其中 $r>0$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

由③、④得

$$\begin{cases} a=-r^2(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)=-r^2\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right), \\ r^2=\dfrac{4}{\sin 4\theta}. \end{cases}$$

从中消去 r^2 得 $a\sin 4\theta=-4+2\sin^2 2\theta$,

化简后有 $(1+a^2)(\sin^2 2\theta)^2-(4+a^2)\sin^2 2\theta+4=0$,

这是一个关于 $\sin^2 2\theta$ 的二次方程.

由题设,该方程在(0,1)内只有一个根,于是

$\Delta=(a^2+4)^2-16(1+a^2)=a^4-8a^2=0$,

$\because$ $a<0$, $\therefore$ $a=-2\sqrt{2}$.

进而求得 $\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin 4\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. $\therefore$ $r=\sqrt[4]{18}$.

所以 正方形边长为$\sqrt{2}r=\sqrt[4]{72}$.

19·90 考虑所有与曲线 $y=2x^4+7x^3+3x-5$ 交于四个不同点 $(x_i, y_i)(i=1,2,3,4)$的直线,证明:$\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$与直线无关,并求它的值.

(第 38 届美国普特南数学竞赛,1977 年)

[证] 设直线 $y=mx+b$ 交曲线于四点(x_i, y_i), $i=1,2,3,4$,则由

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5 \end{cases}$$

有 $2x^4 + 7x^3 + (3-m)x - (5+b) = 0.$

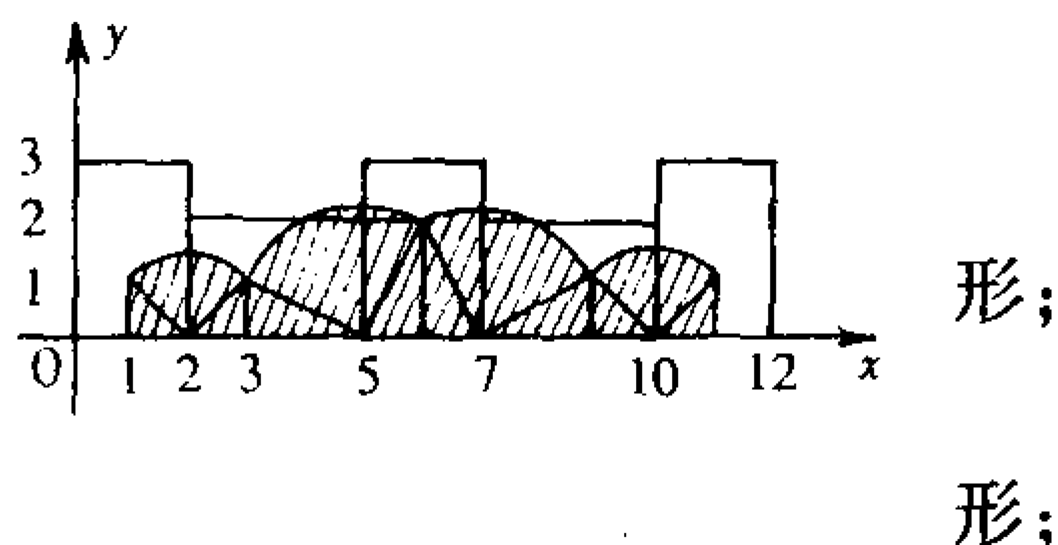
而 x_i 是方程的四个根，于是有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{7}{2},$$

得 $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = -\dfrac{7}{8}$ 与直线本身无关.

19·91 给定一个 2×3 的矩形，其顶点为 $(0,0)$，$(2,0)$，$(0,3)$，$(2,3)$. 把它绕点 $(2,0)$ 顺时针旋转 $90°$，再绕点 $(5,0)$ 顺时针旋转 $90°$，再绕点 $(7,0)$ 顺时针旋转 $90°$，最后再绕点 $(10,0)$ 顺时针旋转 $90°$（这时，原先在 x 轴上的边又回到了 x 轴上）. 初始位置为 $(1,1)$ 的矩形上的点在上述旋转中画出了一条曲线，求这条曲线以下及 x 轴以上的区域的面积.

（第52届美国普特南数学竞赛，1991年）



[解] 如图所示，所求区域包括

四个面积为 $\frac{1}{2}$ 的 1×1 的直角三角形；

四个面积为 1 的 1×2 的直角三角形；

两个面积为 $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5})^2 = \frac{5\pi}{4}$ 的四分之一圆，

两个面积为 $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$ 的四分之一圆.

因此，所求区域的总面积为

$$4\times\frac{1}{2} + 4\times1 + 2\times\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{5\pi}{4} = 6 + \frac{7}{2}\pi.$$

19·92 如果 A、B、C、D 表示空间中的四个点，AB 表示 A 与 B 之间的距离，等等，试用解析方法证明：$AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 \geqslant AB^2 + CD^2$.

（第4届美国数学奥林匹克，1975年）

[证] 设空间四点 A、B、C、D 的直角坐标为 (x_i, y_i, z_i) $i = 1, 2,$

3,4.则

$AC^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2$,

其余类推.这样有

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2-AB^2-CD^2$$

$$=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_2)^2$$
$$-(x_3-x_4)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_4)^2+(y_1-y_4)^2+(y_2-y_3)^2$$
$$-(y_1-y_2)^2-(y_3-y_4)^2+(z_1-z_3)^2+(z_2-z_4)^2+(z_1-z_4)^2$$
$$+(z_2-z_3)^2-(z_1-z_2)^2-(z_3-z_4)^2$$

$\because$ $(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_2)^2-(x_3-x_4)^2$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4+2x_3x_4$$

$$=(x_1+x_2-x_3-x_4)^2\geqslant 0.$$

同理可证

$(y_1-y_3)^2+(y_2-y_4)^2+(y_1-y_4)^2+(y_2-y_3)^2-(y_1-y_2)^2-(y_3-y_4)^2\geqslant 0.$

$(z_1-z_3)^2+(z_2-z_4)^2+(z_1-z_4)^2+(z_2-z_3)^2-(z_1-z_2)^2-(z_3-z_4)^2\geqslant 0.$

于是 $AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2$.

19·93 设 P 为四面体 $ABCD$ 的一个内点.试用解析方法证明:以四面体 $PABC$、$PBCD$、$PCDA$ 和 $PDAB$ 的重心为顶点的四面体的体积恰为四面体 $ABCD$ 体积的 $\frac{1}{64}$.

(奥地利-波兰数学奥林匹克,1985 年)

[证] 取定空间直角坐标系,并记诸点坐标

$A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$,
$D(d_1,d_2,d_3)$, $P(p_1,p_2,p_3)$.

则四面体 $PABC$ 的重心 G_1 的坐标为

$$G_1\left(\frac{p_1+a_1+b_1+c_1}{4},\ \frac{p_2+a_2+b_2+c_2}{4},\ \frac{p_3+a_3+b_3+c_3}{4}\right),$$

$PBCD$ 的重心 G_2 的坐标为

$$G_2\left(\frac{p_1+b_1+c_1+d_1}{4},\ \frac{p_2+b_2+c_2+d_2}{4},\ \frac{p_3+b_3+c_3+d_3}{4}\right).$$

$$\therefore\quad |G_1G_2|=\frac{1}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i-d_i)^2}=\frac{1}{4}|AD|.$$

若 G_3、G_4 分别为 $PCDA$、$PDAB$ 的重心，同理还有

$$|G_1G_3|=\frac{1}{4}|BD|,\ |G_1G_4|=\frac{1}{4}|DC|,\ |G_2G_3|=\frac{1}{4}|AB|,$$

$$|G_2G_4|=\frac{1}{4}|AC|,\ |G_3G_4|=\frac{1}{4}|BC|.$$

所以四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 与 $ABCD$ 相似且相似比为$\frac{1}{4}$.

因此，$G_1G_2G_3G_4$ 的体积为 $ABCD$ 体积的$\frac{1}{64}$.

19·94 求：两点间的最大距离，一点在以点$(-2,-10,5)$为球心、19 为半径的球面上，另一点在以点$(12,8,-16)$为球心、87 为半径的球面上.

（第 5 届美国数学邀请赛，1987 年）

[解] 设 O 和 O_1 为两球心，P 与 P_1 分别为线段 OO_1 的延长线与两球面的交点，且 O 在 PO_1 内，O_1 在 OP_1 内.

显然，所求的两点的最大距离为

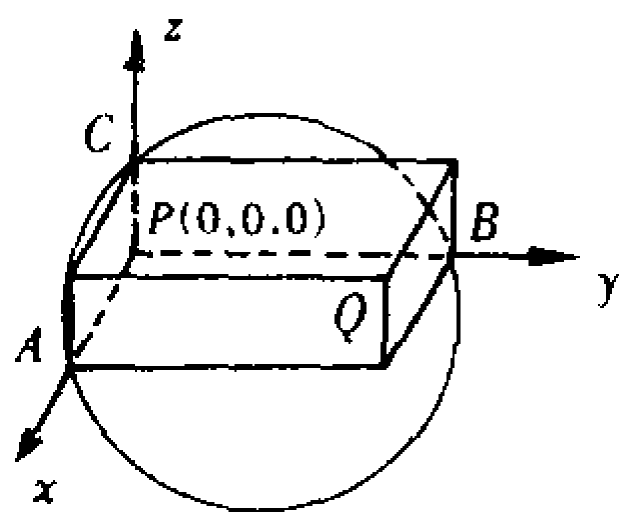
$$PP_1=PO+OO_1+O_1P_1=19+OO_1+87.$$

又 $OO_1=\sqrt{(-2-12)^2+(-10-8)^2+[5-(-10)]^2}=31.$

所以 $PP_1=19+87+31=137.$

19·95 在一个球体内有一定点 P，球面上有 A、B、C 三个动点，$\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90°$，以 PA、PB 和 PC 为棱构成平行六面体，点 Q 是六面体上与 P 斜对的一个顶点，当 A、B、C 在球面上移动时，求：Q 点的轨迹.

（第 20 届国际数学奥林匹克，1978 年）



[解] 如图建立坐标系.

设球心为(a,b,c)，半径为 R，则球面的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

由此得 A、B、C 三点坐标是

$A(a+\sqrt{R^2-b^2-c^2},0,0)$,

$B(0,b+\sqrt{R^2-a^2-c^2},0)$, $C(0,0,c+\sqrt{R^2-a^2-b^2})$.

$\therefore$ Q 点的坐标为

$(a+\sqrt{R^2-b^2-c^2}, b+\sqrt{R^2-a^2-c^2}, c+\sqrt{R^2-a^2-b^2})$,

故 $OQ=\sqrt{3R^2-2(a^2+b^2+c^2)}$.

因为 R 和 $a^2+b^2+c^2=OP^2$ 都是定值,所以 OQ 是定值.

这说明,Q 点的轨迹是以 O 为圆心,$\sqrt{3R^2-2OP^2}$ 为半径的球面.

附录

索引

本索引列出本卷所收集的全部数学竞赛试题的竞赛名称,竞赛时间,括号内的第一个数为所赛试题在本卷中章的序号,第二个数为该题在本章题的序号.例如国际数学奥林匹克,1997 年(2·20)表示本卷收集的 1997 年举行的国际中学生数学奥林匹克试题为本卷第 2 章第 20 题.

1987 年(5·30,9·11,10·4,11·65,13·5,13·50,18·27,19·86)

1988 年(3·48,5·47,6·27,7·20,7·62,7·95,12·139,12·164,13·62,14·15,17·4,17·12,17·72,18·52,19·21,19·84)

1989 年(1·128,5·22,5·42,8·44,11·4,12·159,12·162,13·22,13·33,15·1,15·61,17·50,18·35,18·44,19·15,19·77,19·81)

1990 年(1·12,1·57,3·33,4·37,7·94,8·17,10·8,10·17,11·51,12·64,12·100,12·136,12·137,13·4,15·17,15·45,15·52,17·22,17·81,18·26,18·58,19·80)

1991 年(1·124,2·43,5·35,18·10)

1992 年(4·22,7·77,15·25,15·46)

1993 年(3·40,6·35,12·74,12·134)

1994 年(1·119,1·142,9·20)

1995 年(3·10,5·49,6·7,6·24,17·82)

1996 年(1·113,4·65,12·44,12·73,12·77,12·113,12·153,14·14)

1997 年(1·53,2·23,3·24,5·14,5·16,5·50,6·13,12·41,17·32,19·10)

1998 年(1·125,2·44,5·15,9·9,9·15,9·22)

汉江杯数学竞赛

1990 年(1·80)

1991 年(3·1)

荷兰数学奥林匹克

1983 年(14·5)

基辅数学奥林匹克

1936 年(8·41,11·24,11·27)

1939 年(7·68,15·4)

1940 年(5·37)

1946 年(11·59)

1948 年(13·10)

1951 年(8·84,12·30)

1952 年(2·10,8·57,13·56,15·32)

1953 年(7·34)

1954 年(1·8,2·11,7·93,11·26)

1984 年(12·79)

1985 年(12·87,15·9)

1986 年(7·6,9·25)

1988 年(8·80,14·39)

1989 年(8·2)

1990 年(2·30)

1993 年(7·13)

1994 年(19·30)

1995 年(15·89)

1996 年(7·63)

1997 年(1·103)

1998 年(4·5)

加拿大数学奥林匹克训练题

1987 年(7·104)

1988 年(1·17,1·83,2·6,5·38,5·44,6·23,6·30,7·98,7·100,10·6,12·72,17·63,18·50,19·53)

1989 年(1·46,4·38,4·56,5·57,7·96,10·18,12·39,12·66,12·71,13·32,15·73,16·8,17·59)

1991 年(2·2,4·10,4·11,4·28,10·19,10·20,11·42,11·79,17·52,19·32)

1992 年(4·32,5·59,8·54,12·57,17·76,17·88)

缙云杯数学邀请赛

1992 年(11·6,12·12)

拉丁美洲地区数学奥林匹克

1988 年(1·89,13·15,15·6)

1991 年(8·33,11·45)

罗马尼亚数学奥林匹克

1958 年(17·94)

1978 年(11·3)

卢森堡等五国国际数学竞赛

1980 年(1·137,8·29)

美国数学邀请赛

莫斯科数学奥林匹克

前捷克斯洛伐克数学奥林匹克

前联邦德国数学奥林匹克

前民主德国数学奥林匹克

1995 年(4·25,12·43)

1996 年(1·50,1·63,1·98,4·52,7·57,7·78,9·16,15·84,15·92,17·111)

全苏数学奥林匹克

1967 年(1·88,12·96,14·41,19·67)

1968 年(1·129,15·22,18·4)

1969 年(2·8,12·89,14·26,16·32)

1970 年(7·48,11·21,12·7,12·93,12·151)

1971 年(5·4,14·20,18·56)

1972 年(1·104,5·61,5·62,12·114,14·10)

1973 年(1·47,5·41,8·71,12·5,17·23)

1974 年(1·3,4·19,7·42,12·38,12·138,14·9,19·9)

1975 年(1·121,4·71,8·68,13·27,15·35)

1976 年(2·46,12·52,19·1,19·13)

1977 年(5·52,18·5)

1978 年(1·99,12·86)

1979 年(4·74,12·28)

1980 年(7·70,12·146,13·45,17·51,19·6,19·7)

1981 年(4·67,12·9,12·50,17·26,19·4)

1982 年(7·37,19·62)

1983 年(8·20,12·124,14·33,19·3)

1984 年(5·45,8·85,12·45,15·40,17·10,19·2)

1985 年(2·32,8·63,8·82,13·40,15·29,15·62,17·7)

1986 年(1·117,10·24,12·166,13·61,15·26,18·11,19·8,19·29)

1987 年(2·25,3·45,6·24,8·72,12·88,12·117,15·20,17·114)

1988 年(1·4,8·38,9·26,13·12,17·5,18·2,19·60)

1989 年(1·95,5·1,5·3,12·23,12·150,12·155,15·49,17·113,18·41)

1990 年(1·24,1·136,3·9,6·31,15·42,15·85,17·44)

1991 年(5·6,6·22,12·6,15·23,15·36,19·39,19·5)

日本数学奥林匹克

1990 年(8·55,16·35)

中国安徽省芜湖市数学竞赛

1981 年(8·30)

中国部分省市初中数学竞赛

1985 年(3·41,12·157)

1990 年(8·39)

中国北京市数学竞赛

1957 年(1·4,3·42,11·15,12·92,16·14,16·30,17·18,17·19,17·104,19·20)

1962 年(4·62,8·37,15·67,17·3)

1963 年(2·33,3·5,3·25,7·40,12·146,15·37,15·57,15·58,18·30)

1964 年(12·169,14·18,16·23)

1978 年(3·2,7·106,8·1,13·24,13·64,19·12,19·33)

1979 年(1·68,8·34,9·6,16·5,19·11,19·49)

1980 年(1·31,7·35,8·69,12·4,13·34)

1981 年(1·30,7·43,7·79,8·79)

1982 年(1·1,1·18)

1983 年(7·44,7·69,13·25)

1984 年(8·42,19·61)

1985 年(1·5)

1986 年(1·80)

1987 年(2·3)

1990 年(1·79)

1991 年(7·8,7·60)

1996 年(3·20,17·90)

1998 年(17·89)

中国初中数学联赛

1984 年(8·18,12·68)

1985 年(1·109)

1986 年(1·13)

1990 年(1·132,7·56)

1991 年(2·17)

历届国际数学奥林匹克概况

届次	时间	举办国家（或地区）	总分第一	总分第二	总分第三
1	1959 年	罗马尼亚	罗马尼亚 249 分	匈牙利 233 分	前捷克斯洛伐克 192 分
2	1960 年	罗马尼亚	前捷克斯洛伐克 257 分	匈牙利 248 分	罗马尼亚 248 分
3	1961 年	匈牙利	匈牙利 270 分	波　兰 203 分	罗马尼亚 197 分
4	1962 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 289 分	前苏联 263 分	罗马尼亚 257 分
5	1963 年	波　兰	前苏联 271 分	匈牙利 234 分	罗马尼亚 191 分
6	1964 年	前苏联	前苏联 269 分	匈牙利 253 分	罗马尼亚 213 分
7	1965 年	前民主德国	前苏联 281 分	匈牙利 244 分	罗马尼亚 222 分
8	1966 年	保加利亚	前苏联 293 分	匈牙利 281 分	前民主德国 280 分
9	1967 年	前南斯拉夫	前苏联 275 分	前民主德国 257 分	匈牙利 251 分
10	1968 年	前苏联	前民主德国 304 分	前苏联 298 分	匈牙利 291 分
11	1969 年	罗马尼亚	匈牙利 247 分	前民主德国 240 分	前苏联 231 分
12	1970 年	匈牙利	匈牙利 233 分	前苏联前民主德国 221 分	
13	1971 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 255 分	前苏联 205 分	前民主德国 142 分
14	1972 年	波　兰	前苏联 270 分	匈牙利 263 分	前民主德国 239 分
15	1973 年	前苏联	前苏联 254 分	匈牙利 215 分	前民主德国 188 分
16	1974 年	前民主德国	前苏联 256 分	美　国 243 分	匈牙利 237 分
17	1975 年	保加利亚	匈牙利 258 分	前民主德国 249 分	美　国 247 分
18	1976 年	奥地利	前苏联 250 分	英　国 214 分	美　国 188 分
19	1977 年	前南斯拉夫	美　国 202 分	前苏联 192 分	匈牙利　英国 190 分
20	1978 年	罗马尼亚	罗马尼亚 237 分	美　国 225 分	英　国 201 分
21	1979 年	英　国	前苏联 267 分	罗马尼亚 240 分	前联邦德国 235 分

届次	时间	举办国家(或地区)	总分第一	总分第二	总分第三
22	1981年	美国	美国 314分	前联邦德国 312分	英国 301分
23	1982年	匈牙利	前联邦德国 145分	前苏联 137分	前民主德国、美国 136分
24	1983年	法国	前联邦德国 212分	美国 171分	匈牙利 170分
25	1984年	前捷克斯洛伐克	前苏联 235分	保加利亚 203分	罗马尼亚 199分
26	1985年	芬兰	罗马尼亚 201分	美国 180分	匈牙利 168分
27	1986年	波兰	前苏联、美国 203分		前联邦德国 196分
28	1987年	古巴	罗马尼亚 250分	前联邦德国 248分	前苏联 235分
29	1988年	澳大利亚	前苏联 217分	中国、罗马尼亚 201分	
30	1989年	前联邦德国	中国 237分	罗马尼亚 223分	前苏联 217分
31	1990年	中国	中国 230分	前苏联 193分	美国 174分
32	1991年	瑞典	前苏联 241分	中国 231分	罗马尼亚 225分
33	1992年	俄罗斯	中国 240分	美国 181分	罗马尼亚 177分
34	1993年	土耳其	中国 215分	德国 189分	保加利亚 178分
35	1994年	加拿大	美国 252分	中国 229分	俄罗斯 224分
36	1995年	中国香港	中国 236分	罗马尼亚 230分	俄罗斯 227分
37	1996年	印度	罗马尼亚	美国	匈牙利
38	1997年	阿根廷	中国 223分	匈牙利 219分	伊朗 217分
39	1998年	中国台北	伊朗	保加利亚	匈牙利美国
40	1999年	罗马尼亚	中国、俄罗斯 182分		越南 177分
41	2000年	韩国	中国 218分	俄罗斯 215分	美国 184分
42	2001年	美国	中国 225分	俄罗斯、美国 196分	

注:第39届 IMO 中国未参加.

编者的话



当今的世界,数学已成为广泛渗透到各种自然科学、社会科学,并发挥着重大作用的一门基础和应用学科.从教育要面向世界,面向未来,面向现代化这一高度来看,让青少年从小就打下扎实的数学基础,这对我国今后的发展是极为重要的.国际上为推动数学的发展而进行的数学奥林匹克活动,现在已成为一种培养和选拔数学人才的特殊事业.

目前,数学奥林匹克在我国正方兴未艾,数学竞赛遍及五湖四海,尤其是我国中学生选手在国际数学奥林匹克中屡夺金牌,成绩显赫,捷报频传,令世人瞩目,为祖国赢得了骄傲和荣誉.这些,充分显示了我国的数学水平和中华民族的聪明才智.为此,许多数学奥林匹克教练员,许多大、中学的教师,许多学生及其家长都渴望在自己的案头有一部能够指导数学奥林匹克解题的工具书.希望这部书能够广泛收集国内外数学奥林匹克试题的精品,包揽数学奥林匹克的精髓,以开阔自己的眼界,提高数学能力,品鉴数学的魅力,也希望这部书能够提供这些试题的更精确、更简捷的解法,以开拓思路,提高技巧.为适应各界的这种渴求,这部《世界数学奥林匹克解题大辞典》终于问世了.

这部大辞典的出版,是中国数学奥林匹克委员会,南开大学数学系和河北少年儿童出版社通力合作的产物;是中国

数学奥林匹克专家和教练员辛勤劳动的结晶;也是老一代数学家关心和支持的结果.我们不能不非常高兴地告诉大家,这部辞典在编辑过程中始终得到数学前辈陈省身先生,吴大任先生的关心和指导;中国数学会名誉理事长王元先生专为本辞典作序.可以这样说,如果没有作为数学泰斗的老一代数学家的关怀与支持,没有一批才华横溢的中青年数学家的艰苦努力,没有极具胆识的出版工作者的辛勤劳动,艰难而浩大的世纪工程——《世界数学奥林匹克解题大辞典》是难以如此顺利出版的.

这部大辞典精选了国内外数学竞赛的有代表性的试题,其中大部分是已经赛过并经过锤炼的试题,还有少部分竞赛的备选题和训练题.本辞典共分五卷,其中有四卷是按奥林匹克数学一般的分类方法而分为《代数卷》、《几何卷》、《数论卷》、《组合卷》;为了普及数学奥林匹克,完善辞典中题目类型,又编辑了《选择题卷》.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》五卷共约500万字.《代数卷》、《数论卷》和《选择题卷》是按知识内容分章的;《组合卷》是按题目的内容分章的;《几何卷》则是按题目的结论分章的.每一卷的正文包括试题,试题的出处及解答三部分,试题的多种解法,则由解1,解2或证1,证2等给出.正文后有附录,附本卷常用的有关数学知识提要;还有本卷的索引,索引是按书中涉及到的参赛地区、国家和竞赛名称,按英文字母的顺序排列的.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》的出版,无疑对我国数学奥林匹克事业的发展,对我国跨世纪科技人才的培养、造就和选拔有重要的促进作用,并为之摇橹扬帆、推波助澜!

愿数学奥林匹克之花香飘四海,

盼新一代科学精英普降神州!

本书的出版仅仅是一个尝试,殷切希望广大读者帮助我

们完善它.我们相信,经过不断地去粗取精,去伪存真,去旧增新,伴随着我国数学水平的不断提高,这部大辞典必将成为数学奥林匹克的经典之作.

世界数学











奥林匹克

解题大辞典

几何卷